UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 5

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função k vezes diferenciável no ponto $x \in U$. Mostre que $f^{(k)}(x) : (\mathbb{R}^m)^k \to \mathbb{R}$ é a forma k-linear definida por

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k}.$$

2. Seja $E = \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \mathbb{R}^{m_p}$. Dada uma aplicação p-linear contínua $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$, considere as projeções $\pi_i : E \to \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_{i-1}} \times \mathbb{R}^{m_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_p}$ e defina convenientemente as aplicações $(p-1)$-lineares $\varphi_i : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_{i-1}} \times \mathbb{R}^{m_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_p} \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$, tais que $\varphi' = \sum_{i=1}^p \varphi_i \circ \pi_i$. Conclua que $\varphi \in C^\infty$ e que $\varphi^{(j)} = 0$ para $j \geq p+1$, e que a função determinante é de classe C^∞.

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 2xz + z^2$. Para um ponto arbitrário $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, determine $f''(p) \cdot (h,k)$, onde $h,k \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $f''(p) \cdot (h,h) > 0$ se $h \neq 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{2x}(cos^2(y) - sen^2(y))$. Considere a forma bilinear $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $A = f''(0,0)$. Determine dois vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ tais que $A(u,u) > 0$ e $A(v,v) < 0$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = xyz$. Calcule

$$f' : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$f'' : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$f''' : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$$

6. Seja $f : M(n) \to M(n)$ dada por $f(X) = X^5$. Calcule as 3 primeiras derivadas de f.

7. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ k vezes diferenciável e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linear. Sem utilizar a regra da cadeia, mostre que para cada $j = 0, 1, \ldots, k$, temos que $(T \circ f)^{(j)} = T \circ f^{(j)}$.

8. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dadas as aplicações diferenciáveis $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}^p$ e $T : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, defina a função real $\varphi : U \to \mathbb{R}$, pondo para cada $x \in U$, $\varphi(x) = \langle T(x) \cdot f(x), g(x) \rangle$, onde $\langle\, , \,\rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^p$. Calcule a derivada $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Isto é, tome $h \in \mathbb{R}^m$ arbitrariamente e descreva

$\varphi'(x) \cdot h$.

9. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ aplicações duas vezes diferenciáveis. Dado $x \in U$, seja $y = f(x) \in V$. Interprete e demonstre a igualdade:

$$(g \circ f)''(x) = g''(y) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + g'(y) \cdot f''(x).$$

10. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dada $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável, o gradiente de f no ponto $x \in U$ é o vetor $u \in \mathbb{R}^m$ caracterizado pelo fato de que seu produto interno por um vetor arbitrário $h \in \mathbb{R}^m$ é igual a $f'(x) \cdot h$. Ou seja, $\langle u, h \rangle = \frac{\partial f}{\partial h}(x)$. Uma superfície de nível da função f é a imagem inversa $f^{-1}(c)$ de um número $c \in \mathbb{R}$. Prove:

a) Se os valores de um caminho diferenciável $\lambda : J \to \mathbb{R}^m$ estão todos contidos na mesma superfície de nível de f, então cada vetor velocidade $\lambda'(t)$ é perpendicular ao gradiente de f no ponto $\lambda(t)$.

b) Fixado $x \in U$, entre todos os vetores $h \in \mathbb{R}^m$, com $\langle h, h \rangle = 1$, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ atinge seu valor máximo quando h é um múltiplo positivo do gradiente de f. Qual é esse valor máximo?

11. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Supondo que $f(tx) = tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todo $t \in \mathbb{R}$, prove que f é uma transformação linear. Suponha agora que f é duas vezes diferenciável e que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todos $x \in \mathbb{R}^m$, e $t \in \mathbb{R}$. Mostre que f é uma aplicação quadrática, isto é, que existe $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ bilinear tal que $f(x) = B(x, x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Generalize.

Observação: A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ satisfaz $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$, mas não é quadrática. Por quê?

12. Seja U uma bola aberta de centro 0 em $\mathbb{R}^m$. Dada $A : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ diferenciável, tome $x \in U$ e defina $\varphi : (0, 1) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ pondo $\varphi(t) = A(tx)$. Qual das duas interpretações para a fórmula $\varphi'(t) = A'(tx) \cdot x$ é verdadeira:

$$\varphi'(t) \cdot h = (A'(tx) \cdot x) \cdot h \quad \text{ou} \quad \varphi'(t) \cdot h = (A'(tx) \cdot h) \cdot x?$$

13. . Considere $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, tal que $f(tx) = t^k f(x)$ quaisquer que sejam $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$. Dizemos então que f é *k-homogênea*. Mostre que cada uma de suas derivadas $f^{(i)}$ é $(k - i)$-homogênea $(0 \leq i < k)$ e que $f^{(k)}$ é constante. Mostre também que, para cada $x \in \mathbb{R}^m$, temos

$$f^{(i)}(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{(k - i)!} \cdot x^{(k-i)},$$

o que significa

$$f^{(i)}(x) \cdot (h_1, \ldots, h_i) = \frac{1}{(k - i)!} f^{(k)}(0) \cdot \left(\overbrace{x, \ldots, x}^{k-i}, h_1, \ldots, h_i \right).$$

Aplique o resultado para $f : M(n) \to M(n)$ dada por $f(X) = X^k$ e conclua que

$$|f^{(i)}(X)| \leq \frac{k!}{(k - i)!} |X|^{k-i}.$$

Sugestão: Derive $f(tx) = t^k f(x)$ i vezes em relação à x para obter a homogeneidade de $f^{(i)}$, e depois derive $f^{(i)}(tx) = t^{k-i} f^{(i)}(x)$ $k-i$ vezes em relação à t.

14. Dada $A \in M(n,m)$ (matrizes $n \times m$) defina sua *adjunta* $A^* \in M(m,n)$ pela condição $\langle A \cdot v, w\rangle = \langle v, A^* \cdot w\rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$ e todo $w \in \mathbb{R}^n$. Introduza um produto interno em $M(n,m)$ como $\langle A, B\rangle = tr(A^*B)$ onde tr é o traço. Conclua que $\|A\| = \sqrt{trA^*A}$ é uma norma em $M(n,m)$, diferenciável exceto no ponto 0. Mostre que, para todo $v \in \mathbb{R}^m$, tem-se $|A \cdot v| \leq \|A\||v|$, onde $|\ |$ indica a norma proveniente do produto interno natural.

15. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é k vezes diferenciável e $D^j f(x_0) = 0$ para $j = 1, \ldots, k$ então $D^j(g \circ f)(x_0) = 0$ para os mesmos valores de j, seja qual for $g : V \to \mathbb{R}^p$, k vezes diferenciável, com $f(U) \subset V$. Enuncie e demonstre um resultado análogo para $f \circ h$.

16. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Demonstre que uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ e de classe C^1 se, e somente se, para cada $x \in U$ existe $A(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x+k) - A(x) \cdot (h-k)}{|h-k|} = 0,$$

quando $(h,k) \to (0,0)$, com $h \neq k$.

17. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se existe $f''(0) = 0$ e, além disso, $f(0) = f'(0) = 0$, então mostre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)/|x|^2 = 0$.

18. Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[0,1]$ e deriváveis em $(0,1)$, com $|f'(t)| \leq g'(t)$, para todo $t \in (0,1)$. Mostre que $|f(1) - f(0)| \leq g(1) - g(0)$.