UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Avançado

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 4

Exercícios

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(0) = 0$, e $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq 0$. f é diferenciável em 0? f é contínua em 0?

2. Faça o mesmo do exercício 1 com a função f definida como $f(0) = 0$ e

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 - (y-x)^2}, \quad \text{se} \quad (x,y) \neq 0.$$

3. Faça o mesmo do exercício 1 com a função f definida como $f(0) = 0$ e

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad \text{se} \quad (x,y) \neq 0.$$

4. Faça o mesmo do exercício 1 com a função

$$f(x,y) = |x| + |y|.$$

5. Faça o mesmo do exercício 1 com a função

$$f(x,y) = |xy|^{1/2}.$$

6. Faça o mesmo do exercício 1 com a função f definida como $f(0) = 0$ e

$$f(x,y) = \frac{x|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \quad \text{se} \quad (x,y) \neq 0.$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo as condições $f(0) = (1,2)$ e

$$Df(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x,y) = (x + 2y + 1, 3xy).$$

Calcule $D(g \circ f)(0)$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas pelas equações

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos(x_1), x_1^2 + x_2 + 2), \\ g(x) &= (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1). \end{aligned}$$

a) Se $F(x) = g(f(x))$, calcule $DF(0)$.

b) Se $G(y) = f(g(y))$, calcule $DG(0)$.

Dica: Não calcule F e G explicitamente.

9. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = f(x, y, g(x, y)).$$

a) Encontre DF em termos das derivadas parciais de f e g.

b) Se $F(x, y) = 0$ para todo (x, y), calcule $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

10. Mostre que a função $f(x, y) = |xy|$ é diferenciável em 0, mas não é de classe C^1 em nenhuma vizinhança de 0.

11. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(0) = 0$ e

$$f(t) = t^2 \mathrm{sen}(1/t), \qquad se \;\; t \neq 0.$$

a) Mostre que f é diferenciável em 0, e calcule $f'(0)$.

b) Calcule $f'(t)$ se $t \neq 0$.

c) Mostre que f' não é contínua em 0.

d) Conclua que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, mas não é de classe C^1 em $\mathbb{R}$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela equação

$$f(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta)).$$

Calcule Df e $det\,(Df)$.

13. Repita o exercício 12 para a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Nota: Observe que se identificarmos o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com o $\mathbb{R}^2$, então f é apenas a função $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$.

14. Repita o exercício 12 para a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \mathrm{sen}(y)).$$

Nota: Observe que se identificarmos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, então f é a exponencial complexa $f(z) = e^z$.

15. Repita o exercício 12 para a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(\rho, \phi, \theta) = (\rho\cos(\theta)\text{sen}(\phi), \rho\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \rho\cos(\phi)).$$

f é chamada de transformação em coordenadas esféricas.

16. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f(0) = 0$ e

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \qquad \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ e $\frac{\partial f}{\partial(y)}(0)$ existem.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ em $(x, y) \neq (0, 0)$.

c) Mostre que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. (*Dica*: Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é igual ao produto de y por uma função limitada e que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é igual ao produto de x por uma função limitada).

d) Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$ existem, mas são diferentes.