UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 4

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, zy)$:

a) Prove que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ e calcule sua matriz jacobiana;

b) Mostre que a derivada $f'(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma transformação linear injetiva, exceto no eixo dos z (isto é, para $x = y = 0$).

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x^2, y^2, (x + y)^2)$. Mostre que $f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tem posto 2, exceto na origem, isto é, mostre que $f'(x, y) \cdot e_1$ e $f'(x, y) \cdot e_2$ são linearmente independentes salvo quando $x = y = 0$.

3. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $x_0 \in U$, considere uma bola aberta $B(x_0, \delta)$ contida em U. Prove que a aplicação $r : B(0, \delta) \to \mathbb{R}^n$, definida por $r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$, é diferenciável no ponto $h = 0$.

4. Sejam $V \subset U$ abertos em $\mathbb{R}^m$ e $\delta > 0$ um número tal que $x \in V$ e $|h| < \delta$ implicam $x + h \in U$. Seja $B = B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^m$. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em todos os pontos de U, então, fixado $x_0 \in V$, a aplicação $r : V \times B \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$r(x, h) = f(x + h) - f(x) - f'(x_0) \cdot h$$

é diferenciável em todos os pontos de $V \times B$.

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Defina $\varphi : U \to U \times \mathbb{R}^n$ e $F : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pondo $\varphi(x) = (x, f(x))$ e $F(x, y) = f(x) - y$. Mostre que φ e F são diferenciáveis, exprima suas derivadas, conclua que $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $x \in U$ e que o núcleo de $F'(x, y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ coincide com a imagem de $\varphi'(x)$.

6. Seja $g : S^1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real contínua, tal que $g(1, 0) = g(0, 1) = 0$ e $g(-x) = -g(x)$. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} |x| g\left(\frac{x}{|x|}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Seja $x \in \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = f(tx)$, mostre que h é diferenciável;

b) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$ a menos que $g = 0$. Dica: Mostre que $Df(0, 0)$ deveria ser

0, usando a matriz jacobiana.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que f é uma função do tipo considerado na questão 6, e portanto f não é diferenciável em $(0,0)$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq |x|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é diferenciável em 0.

9. Seja $M(n)$ o espaço das matrizes $n \times n$ (que pode ser identificado com o $\mathbb{R}^{n^2}$). Defina $f : M(n) \to M(n)$ pondo $f(X) = X^3$ para cada matriz X. Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $M(n)$. Dica: Use a derivada direcional para determinar um candidato a $f'(X)$.

10. Seja X^T a transposta da matriz X e considere a aplicação $f : M(n) \to M(n)$ definida por $f(X) = XX^T$. Mostre que f é diferenciável e obtenha sua derivada $f'(X) : M(n) \to M(n)$. Mostre que para todo $H \in M(n)$ temos que $f'(X) \cdot H$ é simétrica. Além disso, mostre que se X é ortogonal (isto é, $X^T = X^{-1}$), então para toda matriz simétrica S, existe pelo menos uma matriz H tal que $f'(X) \cdot H = S$.

11. a) Obtenha a derivada de uma aplicação p-linear $f : \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{p \text{ vezes}} \to \mathbb{R}^n$;

b) Considere a função real determinante $det : M(n) \to \mathbb{R}$. Dados $X, H \in M(n)$, calcule $det'(X) \cdot H$. Conclua que $det'(I) \cdot H = tr(H)$, onde I é a matriz identidade $n \times n$ e $tr(H)$ é o traço da matriz H (isto é, a soma dos elementos da diagonal principal).

c) Mostre que $det'(X) = 0$ se, e somente se, o posto de X é ≤ 2.

12. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se $f : U \to \mathbb{R}$ atinge um máximo (ou mínimo) local no ponto $x \in U$, e f é diferenciável no ponto x, então mostre que $f'(x) = 0$. Dica: considere a matriz jacobiana de f e mostre que ela tem que ser nula.

13. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável num aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^m$ e, para todo $a \in fr(U)$ tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então mostre que existe algum $x_0 \in U$ tal que $f'(x_0) = 0$.