UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 3

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Seja $B = B(0,1)$ em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $f : B \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ é contínua, mas não é uniformemente contínua.

2. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua. Mostre que $\forall X \subset \mathbb{R}^m$ limitado, a restrição $f|_X$ é uniformemente contínua.

3. Mostre que o cone $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

4. Mostre que $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 0; 0 < x < 1\}$ e $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$ são homeomorfos, mas que não existe homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(X) = Y$.

5. Seja $h : B \to \mathbb{R}^n$ o homeomorfismo de $B(0,1)$ em $\mathbb{R}^n$ dado por $h(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$. Fixado $a \in \mathbb{R}^n$, seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a translação $T(x) = x + a$. Mostre que $\phi = h^{-1} \circ T \circ h : B(0,1) \to B(0,1)$ é um homeomorfismo. Além disso, prove que $\forall b \in fr\, B(0,1)$, temos $\lim_{x \to b} \phi(x) = b$. Conclua que, $\forall c, d \in B(0,1)$, existe um homeomorfismo $\overline{\phi} : B[0,1] \to B[0,1]$, tal que $\overline{\phi}(c) = d$ e $\overline{\phi}(x) = x$, para todo $x \in fr\, B(0,1)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \dfrac{(x^2-y)y}{x^4}$ se $0 < y < x^2$ e $f(x,y) = 0$ nos demais pontos. Prove que o limite de $f(x,y)$ é zero quando (x,y) tende a zero ao longo de qualquer reta que passa pela origem. Mas que <u>não</u> temos que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$ e $f(0,0) = 0$. Mostre que

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,y)\right).$$

8. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$ uniformemente contínua. Prove que existe uma única função contínua $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$, tal que $\overline{f}|_X = f$.

9. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *totalmente desconexo* se $\forall x, y \in X$, existe uma cisão $X = A \cup B$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Mostre que todo subconjunto enumerável do $\mathbb{R}^n$ é totalmente desconexo.

10. Mostre que se $X \subset \mathbb{R}^m$ é conexo por caminhos e $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então $f(X)$ é conexo por caminhos.

11. Mostre que $X = \{(x, \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)); x \in (0,1)\}$ é conexo por caminhos, mas $\overline{X}$ não é.

12. Mostre que as componentes conexas de um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos.

13. Mostre que o conjunto das matrizes ortogonais $n \times n$ é desconexo em $\mathbb{R}^{n^2}$.

14. Seja $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ uma bola fechada na norma euclidiana. Mostre que para todo subconjunto $X \subset fr\,\overline{B}$, o conjunto $\overline{B} \setminus X$ é convexo, e conclua que é conexo. No entanto, se a norma for arbitrária, mostre que $\overline{B} \setminus X$ ainda é conexo, mas não é necessariamente convexo.