UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Funcional

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 3

Exercícios

1. Seja $T : L^1([0,1]) \to C([0,1])$ dado por $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. T é compacto?

2. Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto, onde X é um espaço normado, com $dim X = \infty$. Mostre que T^{-1} não é limitado.

3. Seja (λ_n) uma sequência de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Seja V o espaço das sequências (u_n) tais que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |u_n|^2 < \infty.$$
Considere o espaço V munido do produto interno
$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n v_n.$$
Prove que V é um espaço de Hilbert e que a inclusão $V \subset \ell^2$ é compacta.

4. (Rellich-Kondrachov versão light): Mostre que a inclusão
$$i_{1,0} : H^1(\mathbb{T}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d)$$
é compacta.
Dica: Faça nos moldes da questão anterior, considerando a identificação de $L^2(\mathbb{T}^d)$ com o ℓ^2 dada pela série de Fourier na base χ_n, e use a caracterização dos espaços de Sobolev por meio de séries de Fourier.

5. A inclusão
$$i_{k+1,k} : H^{k+1}(\mathbb{T}^d) \to H^k(\mathbb{T}^d)$$
é compacta?

6. Fixe $g \in L^2(\mathbb{T}^d)$ e considere o operador $T : L^2(\mathbb{T}^d) \to C(\mathbb{T}^d)$ dado pela convolução: $T(f) = f * g$. Mostre que T é compacto.

7. Calcule a adjunta de uma transformação linear em $\mathbb{C}^n$. Faça o mesmo para transf. lineares em $\mathbb{R}^n$.

8. Calcule a adjunta do shift $L : \ell^2 \to \ell^2$, dado por $L(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

9. Calcule a adjunta do operador integral de Hilbert-Schmidt $K : L^2_\mu(X) \to L^2_\mu(X)$, com núcleo $k \in L^2_{\mu\times\mu}(X \times X)$.

10. Seja K um operador integral de Hilbert-Schmidt em $L^2_\mu(X)$ definido por um núcleo $k \in L^2_{\mu\times\mu}(X \times X)$ com $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$. Mostre que a equação (em f)
$$f = \lambda K f + \phi,$$
possui solução para todo $\phi \in L^2_\mu(X)$ se, e somente se, $\lambda \neq \frac{1}{\lambda_n}$, onde $\{\lambda_n\}$ é o conjunto dos auto-valores de K.

11. (Uma versão do teorema de Perron-Frobenius em dimensão infinita)
Definição: Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador linear auto-adjunto $A : H \to H$ é positivo se para todo $x \in H$, $x \neq 0$, $\langle Ax, x\rangle > 0$.
Definição: Dizemos que um operador limitado $A : L^2_\mu(X) \to L^2_\mu(X)$ toma valores positivos se, para cada função não-negativa qtp $\theta \in L^2_\mu(X)$, com $\|\theta\|_{L^2} > 0$, temos que $A\theta > 0$ qtp.
Seja, então, $A : L^2_\mu(X) \to L^2_\mu(X)$ um operador auto-adjunto, compacto, positivo, tomando valores positivos. Então:
a) Mostre que $\|A\| = \lambda$ é o maior auto-valor (ou seja, o maior auto-valor em módulo é positivo);
b) Mostre que a auto-função u_λ associada ao maior auto-valor, λ, pode ser escolhida como estritamente positiva qtp.;
c) Mostre que o auto-espaço associado a λ tem dimensão 1.
Dica: Mostre que $\langle Au_\lambda, u_\lambda\rangle \leq \langle A|u_\lambda|, |u_\lambda|\rangle$, e use $u_\lambda = u_\lambda^+ - u_\lambda^-$, e $|u_\lambda| = u_\lambda^+ + u_\lambda^-$.

12. (Operadores nucleares)
Definição: Um operador auto-adjunto $A \in B(H)$, para H espaço de Hilbert separável, é chamado

nuclear se, para algum conjunto ortonormal completo $\{e_k\}$, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ae_k, e_k \rangle| < \infty.$$

Então:

a) Seja A positivo e nuclear, mostre que se $\{e_k\}$ é um conjunto ortonormal completo

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \langle Ae_i, e_j \rangle e_i \otimes e_j,$$

onde $e_i \otimes e_j(x) = \langle x, e_j \rangle e_i$.

b) Mostre que todo operador nuclear é compacto.

Dica: Defina a sequência de operadores de posto finito (justifique!) $A_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_j \rangle e_i \otimes e_j$. E pode ser útil mostrar as seguintes relações: $\langle A_e j, e_i \rangle \leq \|Ae_j\|^{1/2} \|Ae_i\|^{1/2}$, e que $\|Ae_j\| = \langle Ae_j, e_j \rangle$.

Definição: O traço de um operador nuclear é

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Ae_k, e_k \rangle,$$

onde $\{e_k\}$ é uma base ortonormal de H.

c) Mostre que o traço está bem definido e que $Tr(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, onde $\{\lambda_i\}$ é o conjunto dos auto-valores de A.

13. Seja $A : H \to H$ um operador compacto e auto-adjunto. Suponha que A é positivo. Seja $n \geq 2$. Prove que existe $B : H \to H$ limitado, tal que $B^n = A$.

14. Mostre que se $T : H \to H$ admite uma base ortonormal de auto-vetores associada a auto-valores reais λ_n, tais que $\lambda_n \to 0$. Então T é compacto e auto-adjunto.

15. Seja $T \in B(X)$, onde X é um espaço de Banach. Use séries para definir os operadores $\exp(T)$, $\mathrm{sen}(T)$, $\cos(T)$. Paralelamente, se T é um operador compacto e auto-adjunto, sabemos que existe uma base ortonormal de auto-vetores $\{v_n\}$, e auto-valores $\{\lambda_n\}$ tais que, para $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n v_n$, temos $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n v_n$. Podemos fazer o cálculo funcional de operadores, definindo $f(T)$, onde f é uma função real (ou complexa) cujo domínio contém os auto-valores de T, como

$$f(T)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_n) \alpha_n v_n.$$

Mostre que as duas definições dos operadores (uma via séries e a outra via cálculo funcional) $\exp(T)$, $\operatorname{sen}(T)$ e $\cos(T)$ coincidem.

16. Seja $T : H \to H$, compacto e auto-adjunto no espaço de Hilbert H. Mostre que $\inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ e $\sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ são o menor e o maior auto-valor de T, respectivamente.

17. Considere a notação do exercício 38 da lista 2. Suponha que $\lambda < 0$.

    Mostre que se $f = 0$, então o conjunto das soluções de $-\Delta u + \lambda u = f$ é um espaço vetorial de dimensão finita d. Além disso, existe um subespaço F de $L^2(\mathbb{T}^d)$ de dimensão d tal que:

    $$-\Delta u + \lambda u = f \text{ possui solução } \iff \forall v \in F \int f v dx = 0.$$

    Dica: Escolha $\theta > 0$ tal que $-\Delta u + \lambda u + \theta u = f$ tenha solução única. Defina $T_\theta : L^2(\mathbb{T}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d)$ o operador que leva f em na solução única u_θ. Mostre que $T_\theta : L^2(\mathbb{T}^d) \to H^1(\mathbb{T}^d)$ é limitado. Como a inclusão de H^1 em L^2 é compacta, segue que T_θ é compacto. Note que resolver o problema original agora se resume a resolver uma equação de Fredholm relacionada a T_θ.

18. Suponha que X é um espaço de Banach com relação a duas normas diferentes, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Suponha que existe uma constante $K > 0$ tal que

    $$\forall x \in X, \|x\|_1 \leq K\|x\|_2.$$

    Mostre, então, que essas duas normas são equivalentes.

19. Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ um operador bilinear tal que, para cada $y \in Y$, $F(\cdot, y) \in X^*$, e para todo $x \in X$, $F(x, \cdot) \in Y^*$. Mostre que F é uma função contínua.

20. Mostre que um conjunto $F \subset X^*$, onde X é um espaço de Banach, é limitado se, e somente se, para todo $x \in X$, temos $\sup_{f \in F} |f(x)| < \infty$.

21. Seja (T_n) uma sequência limitada de operadores em $B(X, Y)$, onde X é um espaço normado e Y é Banach. Ou seja, estamos supondo que $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Seja $F \subset X$ um conjunto denso na esfera $\{x \in X; \|x\| = 1\}$. Suponha que para cada $x \in F$, o limite $\lim_n T_n(x)$ existe. Mostre então que

para todo $x \in X$, o limite $Tx = \lim_n T_n x$ existe, e que além disso, $T \in B(X,Y)$.

22. Seja H um espaço de Hilbert e $A : H \to H$ um operador linear auto-adjunto. Mostre que A é limitado.

23. Mostre que a hipótese de que a imagem do operador deve ser grande (por exemplo se o operador for sobrejetor) não pode ser omitida no teorema da aplicação aberta.

    Dica: Considere $T : C([0,1]) \to C([0,1])$, com $T(f)(t) = \int_0^t f(u)du$.

24. Seja X um espaço de Banach. Então existe algum funcional linear em X que não é uma aplicação aberta?

25. Sejam X, Y espaços de Banach. Suponha que $T : X \to Y$ é um operador compacto. Mostre que se $dimY = \infty$, então T não pode ser sobrejetor.

    Dica: Use o teorema da aplicação aberta.

26. Mostre que o gráfico de um operador $T : X \to Y$ é um subespaço vetorial de $X \times Y$. Mostre ainda que o operador T é fechado se, e somente se, o seu gráfico é um subespaço fechado.

27. Mostre que todo operador linear $T : X \to Y$ é fechado.

28. Suponha agora que temos D subespaço próprio denso de X. Mostre que o operador identidade restrito a D, $Id : D \to X$, é um operador limitado não-fechado.

29. Considere $C^1([0,1])$ e $C([0,1])$, ambos munidos com a norma do sup (assim C^1 não é completo). Considere o operador derivada $D : C^1 \to C$. Mostre que D não é limitado, mas é fechado.

30. Considere o operador identidade

$$Id : (C[0,1], \|\cdot\|_{L^1}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty).$$

Mostre que Id é fechado, mas não é limitado, e conclua que $C[0,1]$ não é completo com relação à norma $\|\cdot\|_{L^1}$.

31. Relembre que $c_0 = \{(a_n); \lim_{n\to\infty} a_n = 0\} \subset \ell^\infty$ é um espaço de Banach com rel. à norma $\|\cdot\|_\infty$. Mostre que $(c_0)^* \cong \ell^1$, com o parêntese de dualidade dado por

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

32. Mostre que $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ com o mesmo parêntese de dualidade da questão anterior.

33. Sejam $p, q \in (1, \infty)$, com $1/p + 1/q = 1$. Mostre que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$.