UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Avançado

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: http://www.mat.ufpb.br/∼alexandre/

Lista 2

Exercícios

1. Seja $i = 1, \ldots, n$ e defina $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f_i(x) = a|x_i|$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante. Mostre que f_i é contínua em todos os pontos, $i = 1, \ldots, n$.

2. Mostre que se $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $g : f(A) \to \mathbb{R}^p$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua. Dica: Imite a demonstração do resultado que envolve limites e curvas.

3. Mostre que as projeções canônicas $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definidas por $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ são contínuas.

4. Utilize as questões 2 e 3 para obter outra demonstração de que se $f = (f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então as funções coordenadas $f_i : A \to \mathbb{R}$ são contínuas. Dica: Note que $f_i = \pi_i \circ f$.

5. Mostre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se, e somente se, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = b_i$, onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Dica: Imite a demonstração do resultado análogo para funções contínuas.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = \dfrac{(x^2 - y)y}{x^4}$, se $0 < y < x^2$ e $f(x, y) = 0$ nos demais pontos. Prove que o limite de $f(x, y)$ é zero quando (x, y) tende a zero ao longo de qualquer reta que passa pela origem. Mas que <u>não</u> temos que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right).$$

8. Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que se $a \in \mathbb{R}^m$ é ponto de acumulação de A e $\exists r > 0$, tal que para todo $x \in (B(a, r) \setminus \{a\}) \cap A$, $f(x) = g(x)$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, para algum $b \in \mathbb{R}^n$.