UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 2

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Prove que $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y\rangle = \langle a, y\rangle$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

2. Mostre que todo conjunto discreto é enumerável.

3. Mostre que se um aberto A contém pontos do fecho de X, então A contém pontos de X.

4. Mostre que o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto é fechado.

5. Seja A aberto e convexo, prove que $A = int\overline{A}$. Dê exemplo de um aberto não-convexo tal que $A \subsetneqq int\overline{A}$.

6. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $fr\, X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$.

7. Mostre que se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, sua fronteira $fr\, F$ tem interior vazio.

8. Mostre que o conjunto das matrizes ortogonais forma um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^{n^2}$.

9. Mostre que todo conjunto infinito $X \subset \mathbb{R}^n$ possui um subconjunto não-compacto.

10. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é limitado, então $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ é limitado.

11. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, é uma aplicação contínua, então para todo $Y \subset X$, sua restrição $f|_Y : Y \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.

12. Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto e U é aberto. Mostre que existe $\varepsilon > 0$, tal que $\forall x \in K$, $B(x, \varepsilon) \subset U$.

13. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^n$, com $f(X) \subset Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^p$. Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a)$. Então mostre que $g \circ f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a. Ou seja, mostre que a composta de duas aplicações contínuas é contínua.