UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 12

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, e seja $M_3 \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade diferenciável compacta, com bordo ∂M_2. Prove que:

a) (*A primeira identidade de Green*):

$$\int_M \langle grad\, f, grad\, g\rangle \nu + \int_M f \Delta g \nu = \int_{\partial M} f \langle grad\, g, N\rangle \sigma,$$

onde ν e σ são, resp., o elemento de volume de M e o elemento de área de ∂M, e N é a normal unitária exterior de ∂M.

b) (*A segunda identidade de Green*):

$$\int_M (f\Delta g - g\Delta f)\nu = \int_{\partial M} (f\langle grad\, g, N\rangle - g\langle grad\, f, N\rangle)\, \sigma.$$

2. (*Introdução à teoria do potencial em* $\mathbb{R}^3$): Uma função diferenciável $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dita *harmônica* num subconjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ se $\Delta g(p) = 0$, para todo $p \in B$. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma região limitada com bordo regular ∂B. Prove que:

a) Se g_1, g_2 são harmônicas em M e $g_1 = g_2$ em ∂M, então $g_1 = g_2$. Dica: Use a primeira identidade de Green.

b) Se g é harmônica em M e

$$\frac{\partial g}{\partial N} := \langle grad\, g, N\rangle = 0,$$

em ∂M, onde N é o vetor normal unitário exterior a ∂M, então $g =$ constante em M. Dica: Use a primeira identidade de Green.

c) Se g_1 e g_2 são harmônicas em M e

$$\frac{\partial g_1}{\partial N} = \frac{\partial g_2}{\partial N},$$

em ∂M, então $g_1 = g_2 + \text{const}$ em M.

d) Se g é harmônica em M, então

$$\int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial N} \sigma = 0.$$

e) Mostre que a função $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ é harmônica em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

f) (*O teorema do valor médio*): Seja f harmônica em

$$B_r = \{p \in \mathbb{R}^3; |p - p_0|^2 \leq r^2\},$$

cujo bordo é a esfera S_r com centro p_0. Então,

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} f\sigma.$$

Dica: Use a segunda identidade de Green na região $D = B_r - B_\rho, \rho < r$, com $f = f$ e $g = 1/r$ (função da letra e). Como g e f são harmônicas, temos

$$\int_{S_\rho} \left(f \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N} \right) \sigma = \int_{S_r} \left(f \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N} \right) \sigma.$$

Como $\frac{\partial}{\partial N}(1/r) = -1/r^2$, obtemos da letra d) que

$$\frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S_\rho} f\sigma = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} f\sigma.$$

Faça $\rho \to 0$.

g) (*O princípio do máximo*): Seja f uma função harmônica não-constante numa região limitada fechada $M \subset \mathbb{R}^3$ (i.e., M é a união de um conjunto conexo aberto com bordo que não é necessariamente regular). Então f assume seu máximo e seu mínimo no bordo ∂M de M.

Dica: Assuma que $f(p)$ é máximo, $p \in M \setminus \partial M$ e considere uma bola $B \subset M \setminus \partial M$ com centro em p e tal que $f(p) \geq f(q)$, para todo $q \in B$. Mostre que isso contradiz a letra f.

3. Generalize o Teorema da Divergência para uma variedade n-dimensional com bordo em $\mathbb{R}^n$.

4. (*Teorema do ponto fixo de Brouwer*):

a) Seja M_n uma variedade diferenciável compacta e orientável com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Mostre que não existe função diferenciável $f : M \to \partial M$, tal que $f|_{\partial M}$ é a identidade.

Dica: Suponha que existe tal f, e seja ω a $(n-1)$-forma não-nula em ∂M (dada pelo exercício 9 da lista 11). Temos que $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$ (exercício 10, lista 11). Portanto,

$$0 = \int_M d(f^*\omega) = \int_{\partial M} i^* f^* \omega = \int_{\partial M} \omega \neq 0.$$

Absurdo!

b) Prove o teorema do ponto fixo de Brouwer: Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola $\{p \in \mathbb{R}^n; |p| \leq 1\}$. Toda aplicação diferenciável $g : B \to B$ possui um ponto fixo.

Dica: Se $g(p) \neq p$ para todo $p \in B$, a semi-reta começando em $g(p)$ e passando por p intersecta ∂B num único ponto, digamos $q = f(p)$. A aplicação $f : B \to \partial B$ assim definida satisfaz as condições da letra a, o que implica numa contradição.

5. Sejam ω_1 e ω_2 formas diferenciais numa variedade diferenciável M. Se ω_1 e ω_2 são fechadas e ω_2 é exata, mostre que $\omega_1 \wedge \omega_2$ é fechada e exata.