UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 11

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. (*O Fibrado Tangente*) Seja M_n uma variedade diferenciável e seja

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in TM_p\}.$$

Mostre que TM é uma variedade de dimensão $2n$. Se M é de classe C^k, qual a classe de TM? Mostre ainda que TM é orientável, ainda que M não seja.

2. Seja M uma variedade diferenciável que pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de tal forma que $V_1 \cap V_2$ é um conjunto conexo. Mostre que M é orientável.

3. Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão e seja p um ponto de M. Mostre que existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ é um homeomorfismo. Ou seja, mostre que toda imersão é localmente um mergulho.

4. Sejam ω, η e θ as seguintes formas em $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = xdx - ydy, \quad \eta = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz, \quad \theta = zdy.$$

Calcule $\omega \wedge \eta, \theta \wedge \omega \wedge \eta, d\omega, d\eta, d\theta$.

5. (*A Operação Hodge-estrela*): Dada $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, nós definimos $*\omega \in \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ como

$$*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = (-1)^\sigma (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}),$$

e extendendo linearmente, onde $i_1 < \cdots < i_k, j_1 < \cdots < j_{n-k}$ são tais que $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ é uma permutação de $(1, \ldots, n)$, e $\sigma = 0$ ou 1, dependendo da permutação ser par ou ímpar, respectivamente. Mostre que

a) Se $\omega = a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3$ é uma 2-forma em $\mathbb{R}^3$, então

$$*\omega = a_{12}dx_3 - a_{13}dx_2 + a_{23}dx_1.$$

b) Se $\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2$ é uma 1-forma em $\mathbb{R}^2$, então,

$$*\omega = a_1dx_2 - a_2dx_1.$$

c) $**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$.

6. (*A divergência*): Considere uma função diferenciável $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, e seja ω a 1-forma $\omega(x) = v_1(x_1)dx_1 + \cdots + v_n(x)dx_n$ induzida por v. Seja $\nu = \det$ o elemento de volume do $\mathbb{R}^n$. A divergência de v pode ser obtida como

$$v \mapsto \omega \mapsto *\omega \mapsto d(*\omega) = (div\, v)\nu.$$

Mostre que

$$div\, v = tr(Dv),$$

onde tr é o traço da matriz.

7. (*O Laplaciano*): Dada uma função duas vezes diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nós definimos o Laplaciano $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\Delta f = div(grad\, f).$$

Mostre que:

a) $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$;

b) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle grad\, f, grad\, g\rangle$;

c) $d * (df) = (\Delta f)\nu$, onde ν é o elemento de volume do $\mathbb{R}^n$.

8. (*O Rotacional*): Seja $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. O rotacional $rot\, v$ é a $(n-2)$-forma definida por

$$v \mapsto \omega \mapsto d\omega \mapsto *d\omega = rot\, v,$$

onde ω é a 1-forma induzida por v (veja o exercício 6).

a) Prove que $rot(grad\, f) = 0$;

b) No caso particular $n = 3$, a 1-forma $rotv$ induz um campo vetorial que também é denotado por $rot\, v$. Mostre que, para $n = 3$:

b1)

$$rot\left(\sum_{i=1}^{3} a_i e_i\right) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)e_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)e_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)e_3.$$

b2) $div(rot\, v) = 0$.

9. Seja M_n uma variedade diferenciável compacta. Mostre que se M é orientável, então existe uma n-forma diferencial definida em M que não se anula em nenhum ponto.

Dica: Use partições da unidade para construir uma n-forma que não se anula e que está definida globalmente em M.

10. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Se $m < n$ e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, com $k > m$, mostre que $f^*\omega = 0$.