UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 10

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Prove que a curva formada pelo número 6 em $\mathbb{R}^2$ não é uma superfície.

2. Grupo Ortogonal. Mostre que $\mathcal{O}(n)$ é uma superfície compacta de dimensão $\dfrac{n(n-1)}{2}$ e classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$. Dica: Considere $f : M(n) \to S(n)$, onde $S(n)$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas, dada por $f(X) = XX^T$.

3. a) Um subgrupo $G \subset GL(n)$ chama-se um *grupo de Lie* (de matrizes) quando é uma superfície C^∞ do espaço $M(n) = R^{n^2}$. Mostre que $\mathcal{O}(n)$ e $SL(n)$ são grupos de Lie de matrizes.

b) Dadas duas matrizes $n \times n$, A e B, define-se o colchete de Lie de A e B como sendo a matriz $n \times n$ dada por

$$[A, B] = AB - BA.$$

Mostre que a operação $(A, B) \mapsto [A, B]$ é bilinear, anti-comutativa (isto é, $[A, B] = -[B, A]$), e que vale a identidade de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0.$$

c) Seja $\mathfrak{U} \subset M(n)$ um subespaço vetorial de matrizes $n \times n$ tal que $A, B \in \mathfrak{U} \Rightarrow [A, B] \in \mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}$ é chamado de álgebra de Lie. Mostre que $T\mathcal{O}(n)_I$ e $T(SL(n))_I$ são álgebras de Lie.

4. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m. Prove que

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; p \in M, v \in TM_p\}$$

é uma superfície de classe C^{k-1} e dimensão $2m$. TM é chamado de *fibrado tangente*.

5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m. Prove que

$$\nu M = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; p \in M, v \in \nu M_p\}$$

é uma superfície de classe C^{k-1} e dimensão n. νM é chamado de *fibrado normal*.

6. Prove que os fibrados tangente e normal são sempre orientáveis (mesmo que M não seja).

7. Sejam $M_m, N_m \subset \mathbb{R}^n$ superfícies de classe C^k e $f : M \to N$ um difeomorfismo local. Mostre que se N é orientável, então M também é.

8. Seja M uma superfície não-orientável. Prove que existem duas vizinhanças parametrizadas conexas, $U, V \subset M$ tais que $U \cap V$ tem duas componentes conexas, uma das quais a mudança de coordenadas tem determinante jacobiano positivo enquanto na outra esse determinante é negativo.

9. a) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auto-adjunta. Seja $f(x) = \langle Tx, x\rangle$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar $x_1 \in S^{n-1}$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $Tx = \lambda x$.

b) Seja agora $V_1 = \{x_1\}^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x_1, y\rangle = 0\}$. Mostre que $T(V_1) \subset V_1$ e $T : V_1 \to V_1$ é auto-adjunta.

c) Aplique este resultado indutivamente e conclua que $\mathbb{R}^n$ possui uma base de auto-vetores de T.