

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Avançado

Professor: Alexandre de Bustamante Simas

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 1

Exercícios

1. Demonstre que $\forall x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.
2. Quando dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ satisfazem $|x + y| = |x| + |y|$?
3. Demonstre que se $x, y \in \mathbb{R}^n$, então $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
4. Demonstre que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n: |z - x| \leq |x - y| + |y - z|$.
5. Demonstre que se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação que preserva normas, então T é necessariamente invertível e T^{-1} também preserva normas.
6. Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x e y são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. Demonstre que se x e y são ortogonais, então $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.
7. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, o semi-plano aberto superior do \mathbb{R}^2 . Demonstre que X é aberto. Obs.: Relembre que pelo que vimos em sala de aula, para ser aberto, pode-se tanto mostrar que para cada ponto $x \in X$, existe um retângulo aberta contido em X que contém x , como também, que para cada $x \in X$, existe uma bola aberta contida em X que contém x .
8. Seja $\bar{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$, o semi-plano fechado superior do \mathbb{R}^2 . Demonstre que X não é aberto.