UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 1

Observações:

1. Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas;

2. Para esta lista, utilize apenas resultados dados na primeira aula, resultados de álgebra linear e análise na reta.

Exercícios

1. Sejam x, y e $z \in \mathbb{R}^n$, tais que (na norma euclidiana) $| x - z |=| x - y | + | y - z |$. Prove que $\exists t \in [0,1]$, tal que $y = (1-t)x + tz$. Mostre que isso não é necessariamente verdadeiro nas normas do máximo e da soma.

2. Considerando a norma euclidiana. Tome $a \neq b$ em $\mathbb{R}^n$, tais que $| a |\leq r$ e $| b |\leq r$, mostre que $| (1-t)a + tb |< r$, para todo $t \in (0,1)$. Conclua que a esfera S^{n-1} não contém segmentos de retas.

3. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Fixe $p \in \mathbb{R}^n$, seja $\varphi : C \to \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) =| x - p |= \sqrt{\langle x-p, x-p\rangle}$. Mostre que existe no máximo um ponto $a \in C$ tal que $\varphi(a) = \inf\{\varphi(x); x \in C\}$.

4. Mostre que, qualquer que seja a norma adotada em $\mathbb{R}^n$, $(n > 1)$, a esfera S^{n-1} é um conjunto infinito.

5. Se $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ são convexos, então mostre que $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é convexo.

6. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, a envoltória convexa de X é a interseção $C(X)$ de todos os subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contém X. Prove que $C(X)$ é o conjunto de todas as combinações lineares $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$, com $x_1, \ldots, x_k \in X$ e $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_k \geq 0$, com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

7. Prove que $int\, X$ é o maior conjunto aberto contido em X, ou seja, prove que $int\, X$ é aberto e que se A é um aberto tal que $A \subset X$, então $A \subset int\, X$.

8. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, mostre que o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x) < y\}$ é aberto.

9. Mostre que se X é aberto, então $int(fr\, X) = \emptyset$. Dê um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, cuja fronteira tem interior não-vazio.

10. Dê um exemplo de aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, tal que $\exists a \in \mathbb{R}^n \setminus A$, com $A \cup \{a\}$ sendo um aberto em $\mathbb{R}^n$.

11. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, com $E \neq \mathbb{R}^n$. Mostre que $int\, E = \emptyset$ e obtenha $fr\, E$.