Solução Geral para as Equações Diferenciais Parciais: $\mathbf{F(u_x, u_y) = 0}$; $\mathbf{F(f(x)u_x, u_y) = 0}$ (ou $\mathbf{F(u_x, h(y)u_y) = 0}$)

Maria Lewtchuk Espindola
Universidade Federal da Paraíba, DM/CCEN
58051-970, João Pessoa, PB, Brasil*

11/02/2010

Resumo

Um método para a obtenção de soluções gerais de EDPs, lineares ou não, dos tipos: $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$ (ou $F(u_x, h(y)u_y) = 0$) é desenvolvido baseado em uma transformação de Legendre e o teorema para formas diferenciais Pfaffianas. Como a solução obtida depende de uma função arbitrária logo temos uma solução geral.

*mariia@mat.ufpb.br

1 Introdução

Tanto o método de Charpit, como outros métodos, fornecem somente uma solução integral aplicados a EDPs, lineares ou não, dos tipos:

$$F(p,q)=0; \quad F(f(x)p,q)=0 \quad (ou \quad F(u_x,h(y)u_y)=0)$$

onde $p=\partial u/\partial x$, $q=\partial u/\partial y$ e $u=u(x,y)$[1, 2, 3]. No método proposto aqui obtém-se infinitas soluções integrais, i.e., a solução geral na forma implícita e em determinados casos a solução geral de forma explícita.

Uma das aplicações para EDPs não lineares é a obtenção da solução geral da equação de Hamilton-Jacobi. O procedimento desenvolvido tem como base uma transformação de Legendre e a utilização de um teorema para formas diferenciais Pfaffianas[4] que fornece a condição para que estas se tornem integráveis.

É relevante a importância desta equação como uma ferramenta prática para a obtenção de soluções de outras equações diferenciais[5], como também nas suas diversas aplicações em Mecânica Analítica[6, 7].

Na extensão do método podemos obter soluções para EDPs de segunda ordem de um dos tipos

$$F(r,s)=0 \quad e \quad F(s,t)=0, \quad r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \quad e \quad t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

desde que estas podem ser transformadas nas EDPs acima.

Outra extensão possível é para EDPs de primeira ordem com diversas variáveis

$$F(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)=0, \quad p_i=\partial u/\partial x_i, \quad q_i=\partial u/\partial y_i,$$

$$u=u(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n).$$

2 Solução Geral para a EDP $F(p,q)=0$

Considere a EDP de primeira ordem $F(p,q)=0$, onde $p=\partial u/\partial x$, $q=\partial u/\partial y$ e $u=u(x,y)$. A forma diferencial Pfaffiana para u é

$$du=p\,dx+q\,dy. \tag{2.1}$$

Aplicando uma transformação de Legendre obtemos

$$d(xp+yq)-du-xdp-ydq=0.$$

Desde que $dF=F_pdp+F_qdq=0$, logo $dp=-(F_q/F_q)dq$ então

$$d(xp+yq)-du+\left(x\frac{F_q}{F_p}-y\right)\,dq=0\,. \tag{2.2}$$

Sendo esta uma forma diferencial Pfaffiana pode ser aplicado o teorema[4]:

Teorema 2.1. *A condição necessária e suficiente para que a forma diferencial Pfaffiana* $\vec{X}\cdot\vec{dr}=0$ *seja integrável é que* $\vec{X}\cdot rot\,\vec{X}=0$.

Que neste caso resulta em

$$\vec{X}\cdot rot\,\vec{X}=-\left(\frac{\partial}{\partial(xp+yq)}+\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(x\frac{F_q}{F_p}-y\right)=0,$$

que integrada fornece

$$u-xp-yq=\phi(q). \tag{2.3}$$

Substituindo na equação (2.2) obtém-se

$$\left(x\frac{F_q}{F_p}-y\right)=-\phi'(q). \tag{2.4}$$

A solução geral da equação diferencial é dada pela equação (2.3) na qual q é determinado a partir de (2.4). Esta é uma solução geral desde que ela possui uma função arbitrária $\phi(q)$, i.e., a cada forma arbitrária de $\phi(q)$ a equação (2.4) e a EDP original formam um sistema de equações algébrico que determina $q = q(x, y)$ e $p = p(x, y)$, que uma vez substituídos em (2.3) fornecem uma solução da EDP.

Em alguns casos podemos explicitar $p = f(q)$ (ou $q = g(p)$) e a solução geral da EDP a partir de (2.3) fica

$$u = x\, f(q) + yq + \phi(q), \tag{2.5}$$

com a condição que é obtida de (2.4)

$$xf_q + y = -\phi'(q). \tag{2.6}$$

Um exemplo da aplicação do método no caso em que podemos explicitar p é a equação $F(p, q) = p-Bq+A = 0$, onde A, B são constantes. Portanto $p = f(q) = Bq - A$, e $f_q = B$ a solução será de (2.5)

$$u = xp + yq - \phi(q) = x(Bq - A) + yq - \phi(q),$$

onde devemos substituir $q = q(x, y)$ determinada a partir de (2.6).

Neste caso (2.6) fica $xf_q + y = Bx + y = \phi'(q)$, logo $q = \psi(Bx + y)$ e a solução geral da EDP é dada por

$$u = Ax + (Bx + y)\, \psi(Bx + y) - \phi^{-1}(\psi(Bx + y)) = Ax + \Phi(Bx + y).$$

Como outro exemplo consideramos a EDP não linear $p^n - q^m = A$, onde A é constante. Explicitando temos $p = (A + q^m)^{1/n} = f(q)$, logo $f_q = \frac{m}{n}(A + q^m)^{(1-n)/n} q^{m-1}$ e de (2.5) a solução geral é

$$u = x(A + q^m)^{1/n} + yq - \phi(q),$$

onde de (2.6)

$$\phi'(q) = \frac{mx}{n}(A + q^m)^{(1-n)/n} q^{m-1} + y.$$

Portanto teremos uma solução integral a cada escolha de $\phi(q)$.

3 Solução Geral para a EDP $F(f(x)p, q) = 0$ (ou $F(p, h(y)q) = 0$)

Utilizando um procedimento idêntico ao da seção anterior, explicitamos a partir da EDP $p = G(q)/f(x)$ substituímos na forma diferencial e aplicamos uma transformação de Legendre, obtendo

$$du = d[H(x)G(q) + yq] - [H(x)G'(q) + y]dq,$$

onde $H(x) = x/f(x)$.

Esta é uma forma diferencial Pfaffiana e a sua condição de integrabilidade obtida a partir do Teorema 2.1 é

$$H(x)G'(q) + y = \phi'(q). \tag{3.7}$$

Portanto a solução geral da EDP será

$$u = H(x)G(q) + yq - \phi(q), \tag{3.8}$$

onde $\phi(q)$ é uma função arbitrária que uma vez escolhida irá determinar o valor de $q = q(x, y)$ a partir da equação (3.7).

De maneira análoga se obtém a solução geral de $F(p, h(y)q) = 0$. Se $q = G(p)/h(y)$ então a solução geral é dada por

$$u = xp + G(p)H(y) - \phi(p),$$

onde $H(y) = y/h(y)$ e a condição de integrabilidade $\phi'(p) = G'(p)H(y) + x$.

Como uma observação final o procedimento acima descrito está sendo extendido a EDPS de primeira ordem lineares ou não dos tipos $u = f(p, q)$, $F(u, p, q) = 0$, $F(p, q, x) = 0$ ou $G(p, q, y) = 0$ e EDPS de segunda ordem p-harmônicas.

Referências

[1] I. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations (McGraw-Hill, Kogakusha, 1957), Cap.2.

[2] A. R. Forsyth, A Treatise on Differential Equations (McMillan, London, 1903), cap. IX.

[3] R. Courant e D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics (Interscience, New York, 1962), cap. 2, 140.

[4] I. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations (McGraw-Hill, Kogakusha, 1957), Cap.2, 22.

[5] A. Chodos e C. M. Sommerfield, J. Math. Phys., **24**, 271 (1983).

[6] V. Arnold, Méthodes Mathématiques Classique (Mir, Moscou, 1976).

[7] L. D. Dureau, Am. J. Phys.**33**. 895 (1965).

Gostaria de ressaltar que esta pesquisa foi iniciada por mim e pelo Dr. Oslim Espindola (in memoriam) sob orientação do Dr. Nelson Lima Teixeira (in memoriam).