

Maxima : um completo programa de Computação Algébrica

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB – João Pessoa

23 de abril de 2011

1 Introdução

Maxima é um programa que executa cálculos numéricos e simbólicos, em desenvolvimento desde 1969. Seu nome original era Macsyma e foi elaborado nos laboratórios do MIT, nos Estados Unidos, com financiamento de várias agências governamentais norte-americanas.

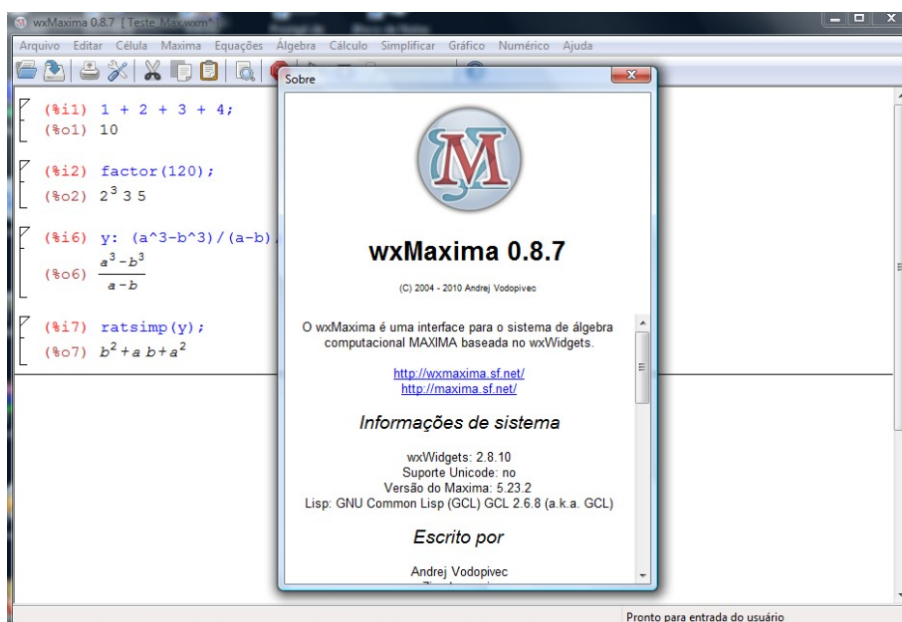
É capaz de simplificar expressões algébricas e trigonométricas, efetuar cálculos com matrizes e com números complexos, construir diversos tipos de gráficos, fatorar polinômios, resolver diversos tipos de equações e sistemas etc.

Trata-se de um programa livre. Pode ser copiado, utilizado e distribuído gratuitamente. Isso faz com que o *Maxima* seja uma excelente ferramenta pedagógica, facilmente acessível a todos.

É considerado um Sistema de Computação Algébrica de uso geral, podendo ser usado nos sistemas operacionais Windows, Linux e Mac-OS.

2 Interface wxMaxima

São várias as formas pelas quais o *Maxima* comunica-se com o usuário. Neste artigo, citamos apenas a interface denominada wxMaxima, que é bastante amigável, intuitiva e fácil de se usar. Sua tela inicial é parecida com a mostrada a seguir:



Podemos digitar os comandos para o *Maxima* linha por linha, e observar as respostas dadas pelo programa. Para isso, seguimos as seguintes regras:

- Os comandos vão sendo digitados ao lado de (%i1), (%i2), (%i3) etc. e o *Maxima* vai dando suas respostas ao lado de (%o1), (%o2), (%o3) etc.

- A linha de comando deve ser encerrada com um ponto e vírgula ou com um cifrão. Se for encerrada com um ponto e vírgula, o resultado obtido é mostrado imediatamente. Se for encerrada com um cifrão, o resultado não será mostrado de imediato, ficando guardado internamente.
- As operações aritméticas básicas são indicadas pelos símbolos $+$, $-$, $*$ (multiplicação), $/$ (divisão) e $^$ (potenciação).
- A raiz quadrada de x é indicada por $\text{sqrt}(x)$, o logaritmo natural de x é $\text{log}(x)$, as funções trigonométricas são $\text{sin}(x)$, $\text{cos}(x)$, $\text{tan}(x)$, $\text{sec}(x)$, $\text{cot}(x)$, $\text{csc}(x)$ e as trigonométricas inversas são $\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$, $\text{atan}(x)$.
- Uma variável pode ter seu nome formado por uma única letra como x , y , z , ... ou ter um nome longo onde apareçam várias letras, algarismos e caracter de sublinhado como em expr1 , expr2 , result_1 , result_2 , ...
- Podemos atribuir valor a qualquer variável digitando-se o seu nome seguido de dois pontos e do valor da variável como em $x : 2$, $y : 4$, $z : -1$...
- O último resultado calculado pode ser referenciado por um símbolo de porcentagem (%).
- As constantes matemáticas $\pi = 3,14159\dots$, $e = 2,71828\dots$, $i = \sqrt{-1}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são representadas por %pi, %e, %i e %phi, respectivamente.
- Usamos o comando $\text{float}(x)$ para obtermos a representação decimal de x .
- Uma função pode ser definida utilizando-se um $:=$, como no exemplo $f(x) := \cos(x) + x/5 - 3$.

Algumas vezes, ao invés de digitar linhas de comando, pode-se escolher uma janela no menu principal e usá-la exclusivamente para digitação do comando. O menu principal aparece no topo da tela: “Arquivo Editar Célula Maxima Equações Álgebra ...”.

A seguir, alguns exemplos de comandos digitados no *Maxima*, bem como suas respectivas respostas. Calculamos $30 \times 50 + 8 \times 10$, fatoramos o resultado em produto de potências de primos, calculamos $a = \sqrt{49}$, $b = \frac{\sqrt{81}}{6}$, $a + b$, $x = \log(\cos(\frac{\pi}{6}) + \text{sen}(\frac{\pi}{4}))$ e a sua representação decimal.

```
(%i1) 30*50 + 8*10;
(%o1) 1580

(%i2) factor(%);
(%o2) 2^2 5 79

(%i3) a: sqrt(49)$ b: sqrt(81)/6$ a+b;
(%o3) 17
      2

(%i4) x: log(cos(%pi/6) + sin(%pi/4)); float(x);
(%o4) log(sqrt(3)/2 + 1/sqrt(2))

(%o5) 0.45306865422064
```

Outros exemplos podem ser encontrados nas referências [1], [2], [3] ou nas telas de ajuda do próprio programa.

3 Simplificação e desenvolvimento de expressões

Expressões algébricas podem ser simplificadas com o comando $\text{ratsimp}(\dots)$ e desenvolvidas com um comando $\text{expand}(\dots)$. Se houver alguma função trigonométrica envolvida, então a expressão

pode ser simplificada com um *trigsimp(...)* e ser desenvolvida com um *trigexpand(...)*.

```
(%i6) ex1: a^3/((a-b)*(a-c)) + b^3/((b-c)*(b-a)) + c^3/((c-a)*(c-b));
(%o6) 
$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

```

```
(%i7) ratsimp(ex1);
(%o7) c + b + a
```

```
(%i8) ex2: ((3*x^2+4*x+1)^2 - (3*x^2+10*x+1)^2)/((3*x^2+11*x+1)^2 - (3*x^2+3*x+1)^2);
(%o8) 
$$\frac{(3x^2 + 4x + 1)^2 - (3x^2 + 10x + 1)^2}{(3x^2 + 11x + 1)^2 - (3x^2 + 3x + 1)^2}$$

```

```
(%i9) ratsimp(ex2);
(%o9) 
$$-\frac{3}{4}$$

```

```
(%i10) y: (sin(x)^3 - cos(x)^3)/(sin(x) - cos(x));
(%o10) 
$$\frac{\sin(x)^3 - \cos(x)^3}{\sin(x) - \cos(x)}$$

```

```
(%i11) trigsimp(y);
(%o11) cos(x) sin(x) + 1
```

4 Operações com polinômios

Diversas operações com polinômios podem ser efetuadas com o *Maxima*. A fatoração é realizada com um comando *factor(...)*, o máximo divisor comum entre *f* e *g* é feita com um *gcd(f, g)* e a divisão com um *divide(f, g)*. O resultado da divisão é apresentado no formato $[q, r]$ onde *q* é o quociente e *r* é o resto da divisão.

Neste exemplo, definimos os polinômios $f = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 84$ e $g = (x + 4)(x^2 + x + 7)^2$, fatoramos e calculamos o MDC entre eles. Por fim, dividimos *f* por $x^2 + 3x + 7$.

```
(%i12) f: x^4 + 2*x^3 - 4*x^2 - 5*x - 84;
(%o12)  $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 84$ 
```

```
(%i13) factor(%);
(%o13)  $(x - 3)(x + 4)(x^2 + x + 7)$ 
```

```
(%i14) g: expand((x + 4)*(x^2 + x + 7)^2);
(%o14)  $x^5 + 6x^4 + 23x^3 + 74x^2 + 105x + 196$ 
```

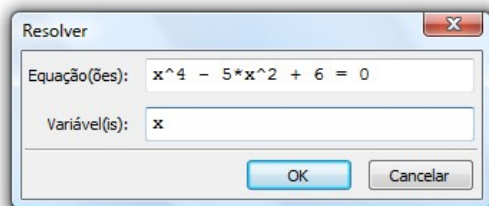
```
(%i15) factor(%);
(%o15)  $(x + 4)(x^2 + x + 7)^2$ 
```

```
(%i16) gcd(f, g);
(%o16)  $x^3 + 5x^2 + 11x + 28$ 
```

```
(%i17) divide(f, x^2 + 3*x + 7);
(%o17)  $[x^2 - x - 8, 26x - 28]$ 
```

5 Equações e sistemas

Uma equação pode ser resolvida com um comando *solve(equação, variável)*. Podemos digitar uma linha de comando ou fornecer a equação em uma janela exclusiva para entrada de equações. Para obter essa janela de equações, escolhemos no menu principal do programa a opção “Equações” e depois escolhemos “Resolver ...”. Resolvemos a equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.



```
(%i18) solve(x^4 - 5*x^2 + 6 = 0, x);  
(%o18) [x = -sqrt(2), x = sqrt(2), x = -sqrt(3), y = sqrt(3)]
```

Um sistema pode ser resolvido da mesma forma que uma equação, bastando colocar as equações e as variáveis entre colchetes. Resolvemos o sistema linear formado pelas equações $3x + 4y = 2$ e $2x - y = 3$.

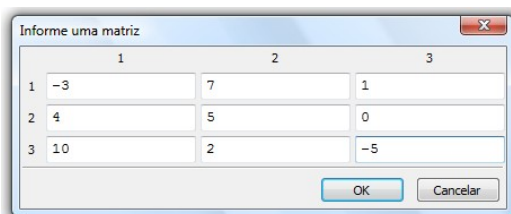
```
(%i19) solve([3*x + 4*y = 2, 2*x - y = 3], [x, y]);  
(%o19) [[x = 14/11, y = -5/11]]
```

Equações mais complicadas podem ter raízes no interior de um intervalo $[a, b]$ encontradas com um comando *find_root(equação, variável, a, b)*. Neste exemplo, determinamos uma raiz da equação $\sin(3x) - 2\sin(x) = 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

```
(%i20) find_root(sin(3*x) - 2*sin(x) = 1, x, -1, 1);  
(%o20) -0.86437521331831
```

6 Operações com matrizes

É possível fornecer uma matriz ao *Maxima* com um comando *matrix([linha 1], [linha 2], ...)* ou através de uma janela específica, obtida nos itens “Álgebra” e “Introduzir matriz...” do menu principal. A multiplicação de matrizes pode ser feita com um ponto como em $A.B$, o determinante com um comando *determinant(...)* e a inversa com um comando *invert(...)*. Definimos neste exemplo uma matriz M e calculamos seu determinante e sua matriz inversa.



```
(%i21) M: matrix([-3,7,1], [4,5,0], [10,2,-5]);  
(%o21) [ -3  7  1  
         4  5  0  
        10  2 -5 ]
```

(%i22) determinant(%);

(%o22) 173

(%i23) invert(%);

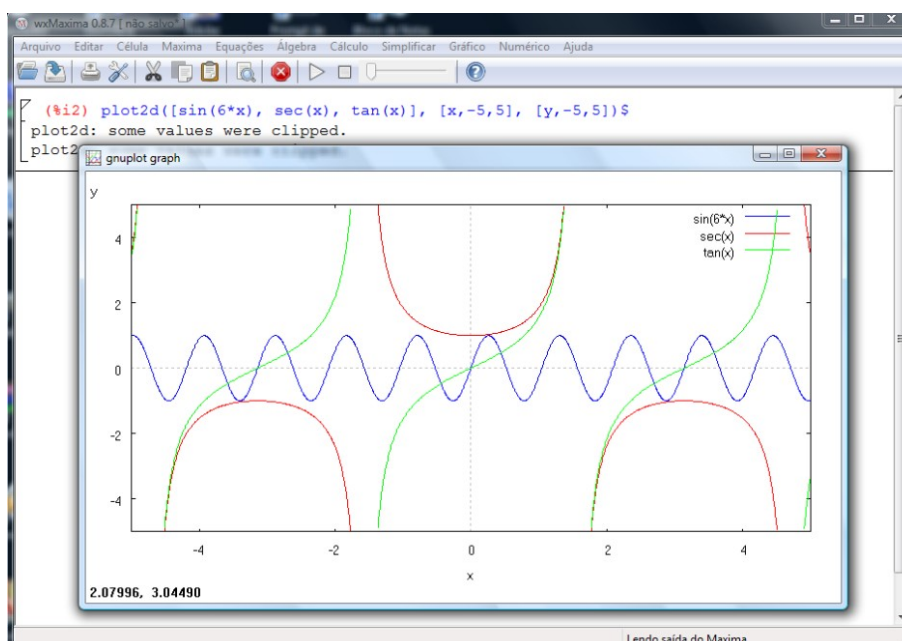
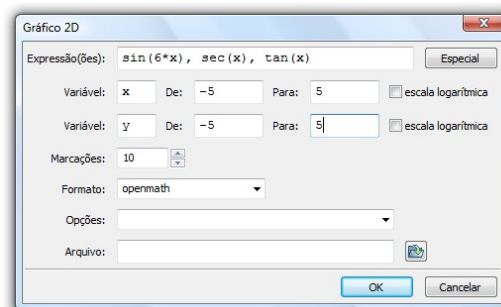
(%o23)
$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{173} & \frac{37}{173} & -\frac{5}{173} \\ \frac{20}{173} & \frac{173}{5} & \frac{173}{4} \\ \frac{173}{42} & \frac{173}{76} & \frac{173}{43} \\ -\frac{173}{173} & \frac{173}{173} & -\frac{173}{173} \end{bmatrix}$$

7 Gráficos

O *Maxima* constrói vários tipos de gráficos planos ou tridimensionais. A construção do mais simples tipo de gráfico plano com $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$ pode ser feita com um comando $\text{plot2D}(\text{função}, [x, a, b], [y, c, d])$. Mais de um gráfico podem ser construídos em um mesmo sistema de eixos, bastando colocar a lista de funções envolvidas entre colchetes e separadas entre si por vírgulas.

Neste exemplo construímos os gráficos de $\sin(6x)$, $\sec(x)$ e $\tan(x)$ com x e y variando de -5 a 5 . Uma janela exclusiva para a digitação dos dados do gráficos pode ser obtida com a opção “Gráfico” do menu principal, depois escolhendo-se “Gráfico2D ...”.

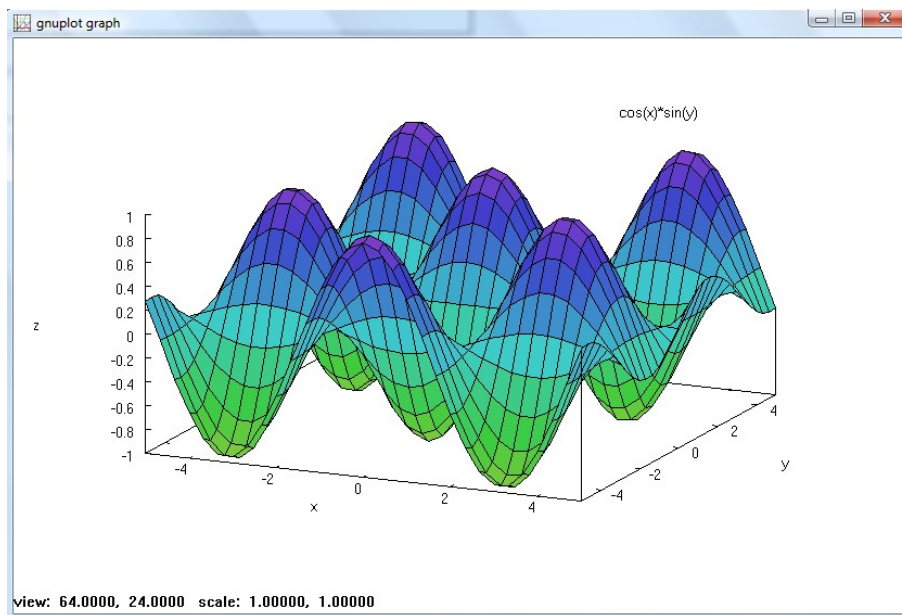
(%i24) $\text{plot2D}([\sin(6*x), \sec(x), \tan(x)], [x, -5, 5], [y, -5, 5]);$



8 Gráficos tridimensionais

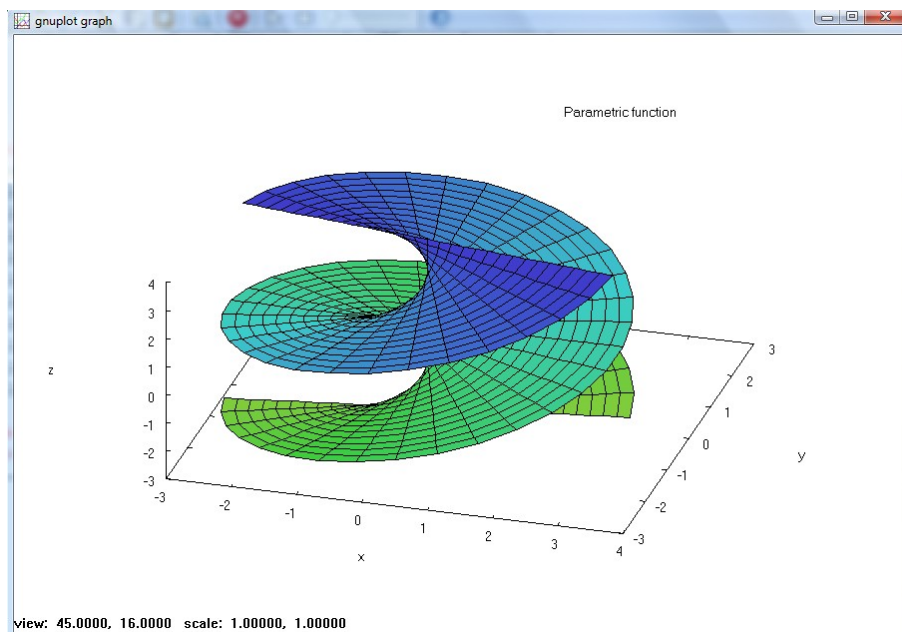
O gráfico tridimensional de uma função $f(x, y)$, com $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$ pode ser construído com um comando `plot3d(f(x, y), [x, a, b], [y, a, b])` ou fornecendo-se os dados do gráfico nas janelas “Gráfico” e “Gráfico3D ...” no menu principal.

```
(%i25) plot3d( cos(x)*sin(y), [x, -5, 5], [y, -5, 5] );
```



Se a superfície for definida por equações paramétricas, é possível construí-la de modo semelhante, fornecendo-se as equações entre colchetes.

```
(%i26) plot3d( [u*cos(v), u*sin(v), v], [u, 0, 3], [v, 0, 10] );
```



Depois de construído, um gráfico tridimensional pode ser girado pressionando-se o botão do *mouse* e arrastando-o para uma nova posição.

9 Limites

O limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é calculado com um comando $\text{limit}(f(x), x, x_0)$. O infinito pode ser codificado por inf e o menos infinito por minf . Se for colocado um apóstrofo antes do comando, ele será apenas mostrado, mas não calculado.

(%i27) $\text{limit}(\sin(4*x)/x, x, 0);$

(%o27) 4

(%i28) $\text{limit}((1 + 3/n)^n, n, \text{minf});$

(%o28) $\%e^3$

(%i29) $\text{'limit}(\text{sqrt}(x + \text{sqrt}(x)) - \text{sqrt}(x), x, \text{inf});$

(%o29) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

(%i30) $\text{limit}(\text{sqrt}(x + \text{sqrt}(x)) - \text{sqrt}(x), x, \text{inf});$

(%o30) $\frac{1}{2}$

10 Derivadas

A derivada de $f(x)$ com relação a x pode ser calculada com um $\text{diff}(f(x), x)$. Se for colocado um apóstrofo antes do nome do comando, ele não será executado.

(%i31) $\text{diff}(x^7 + 11*\sin(x), x);$

(%o31) $11 \cos(x) + 7x^6$

(%i32) $\text{'diff}(\cos(x^5), x) = \text{diff}(\cos(x^5), x);$

(%o32) $\frac{d}{dx} \cos(x^5) = -5x^4 \sin(x^5)$

(%i33) $\text{diff}((3*x + 5*y^3)^7, y);$

(%o33) $105y^2(5y^3 + 3x)^6$

11 Integrais

Integrais indefinidas podem ser calculadas com um comando do tipo $\text{integrate}(f(x), x)$ e integrais definidas em $[a, b]$ com comando do tipo $\text{integrate}(f(x), x, a, b)$. Os limites de integração podem ser infinitos.

(%i34) $\text{'integrate}(x^4*\cos(x), x);$

(%o34) $\int x^4 \cos(x) dx$

(%i35) $\text{integrate}(x^4*\cos(x), x);$

(%o35) $(x^4 - 12x^2 + 24) \sin(x) + (4x^3 - 24x) \cos(x)$

(%i36) $\text{'integrate}(x^5, x, a, b) = \text{integrate}(x^5, x, a, b);$

(%o36) $\int_a^b x^5 dx = \frac{b^6}{6} - \frac{a^6}{6}$

(%i37) 'integrate(%e^(-x^2), x, 0, inf) = integrate(%e^(-x^2), x, 0, inf);

(%o37) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

12 Equações diferenciais

O *Maxima* possui vários comandos para resolução de equações diferenciais. Um deles, o `ode2(EDO, var1, var2)` resolve equações diferenciais ordinárias EDO de primeira ou segunda ordens, com *var1* sendo a variável dependente e *var2* a independente. Neste caso, é preciso que se digite um apóstrofo antes das derivadas. Nas soluções, o *Maxima* apresenta as constantes genéricas como sendo %c, %k1, %k2 etc.

(%i38) eqn1: 'diff(y, x) + 4*y = cos(x);

(%o38) $\frac{d}{dx}y + 4y = \cos(x)$

(%i39) ode2(eqn1, y, x);

(%o39) $y = \%e^{-4x} \left(\frac{\%e^{4x}(\sin(x) + 4 \cos(x))}{17} + \%c \right)$

(%i40) eqn2: 'diff(y, x, 2) - 5*'diff(y, x) + 6 = 0;

(%o40) $\frac{d^2}{dx^2}y - 5 \left(\frac{d}{dx}y \right) + 6 = 0$

(%i41) ode2(eqn2, y, x);

(%o41) $y = \%k1\%e^{5x} + \frac{30x + 6}{25} + \%k2$

13 De onde copiar

O *Maxima* tem sua própria página na Internet, no endereço <http://maxima.sourceforge.net/download.html>. É denominada “*Maxima, a Computer Algebra System*” e a partir dela pode-se copiar o programa (cerca de 30 megabytes), além da sua documentação em diversos idiomas.

Referências

- [1] Gómez, A. J. A. e outros, *Prácticas de Matemáticas con Maxima*, disponível em <http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm>
- [2] Riotorto, M. R., *Primeros pasos en Maxima*, disponível em <http://www.telefonica.net/web2/biomates>
- [3] Urroz, G. E., *Maxima Book*, disponível em <http://www.neng.usu.edu/cee/faculty/gurro/Maxima.html>