

# Geometria Dinâmica com o *GeoGebra*

Lenimar Nunes de Andrade  
UFPB – João Pessoa

7 de julho de 2008

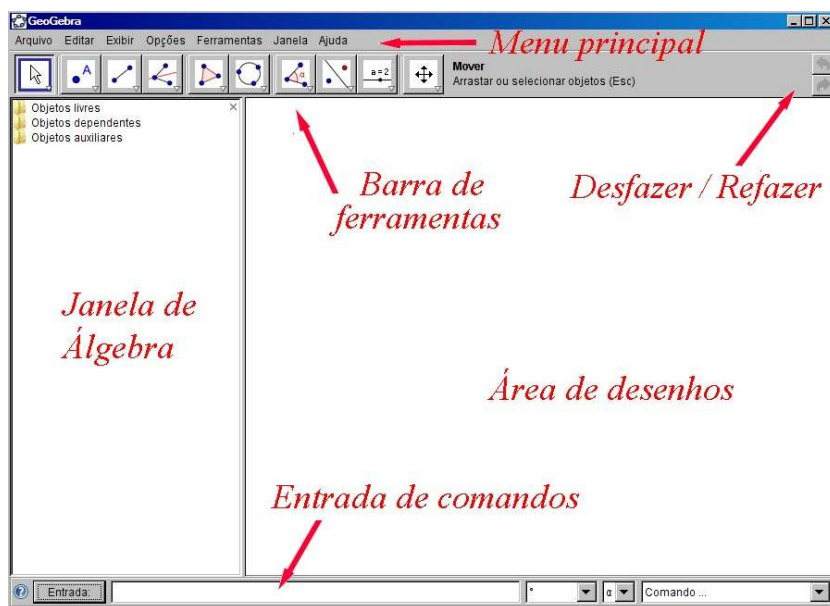
## 1 Introdução

*GeoGebra* (= **Ge**ometria + **Álgebra**) é um programa austríaco gratuito que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. De um modo bem simples, podem ser construídos pontos, segmentos de reta, polígonos, circunferências, vetores, gráficos de funções, cônicas e, depois, podem ser dinamicamente modificados com um simples movimento do *mouse*. Pode ser utilizado em dezenas de idiomas, inclusive português. Recebeu vários prêmios internacionais, incluindo o prêmio de melhor *software* educacional alemão e europeu.

A cada objeto geométrico constante da área de desenhos corresponde uma expressão algébrica, a qual aparece na janela ao lado. As alterações em cada objeto podem também ser feitas diretamente nas suas equações.

A execução do *GeoGebra* depende da prévia instalação da linguagem Java. Tudo pode ser copiado gratuitamente a partir do endereço na Internet citado em [4].

Sua tela inicial é parecida com a mostrada a seguir:



Para se desenhar uma reta que passa por dois pontos dados, por exemplo, pode-se proceder de uma das seguintes formas:

- Usando-se apenas o *mouse*:
  - Na barra de ferramentas, damos um clique com o *mouse* no ícone denominado “Novo ponto”.
  - Na área de desenhos, escolhemos uma posição e damos mais um clique. Com isso, é criado um ponto *A*.
  - Escolhemos outra posição e definimos um outro ponto *B*. À medida que são desenhados, esses pontos vão sendo definidos por suas coordenadas na janela de Álgebra, na seção dos objetos livres (independentes).

- Novamente na barra de ferramentas, escolhemos outro item. Dessa vez, damos um clique no item “Reta definida por dois pontos”.
  - Clicamos em cima do ponto  $A$  e outro em cima de  $B$ . E, assim, a reta  $AB$  está definida. Sua equação passa a fazer parte da janela de Álgebra na seção dos objetos dependentes.
  - Depois de definidos, os objetos livres podem ser movimentados. Para isso, basta arrastá-los com o *mouse*. Todos os demais itens que dependerem dos objetos livres acompanharão as mudanças.
- Através da janela de entrada de comandos:
    - À direita do botão com a palavra “Entrada”, que aparece na parte de baixo, digitamos as coordenadas dos pontos desejados. Por exemplo, digitamos  $A = (3, 4)$  e, depois,  $B = (0, -2)$ .
    - Digitamos  $r = \text{reta}[A, B]$  para criar a reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Note que o nome dos comandos também pode ser em português, se o programa estiver configurado para esta língua. Para ajustar o idioma, basta usar o item “Opções” do menu e escolher “Idioma”.
    - Com isso, uma reta definida por dois pontos fica desenhada na área de desenhos. Agora, ela pode ser modificada arrastando-se os pontos com o *mouse* ou dando um clique com o botão direito em cima das equações da janela de Álgebra e redefinindo-os.

Cada objeto definido pode ter sua aparência modificada através do item “Propriedades”, que aparece depois que for pressionado o botão direito do mouse em cima do objeto selecionado. Podem ser alterados a cor, a largura do traço, o traçado, etc.

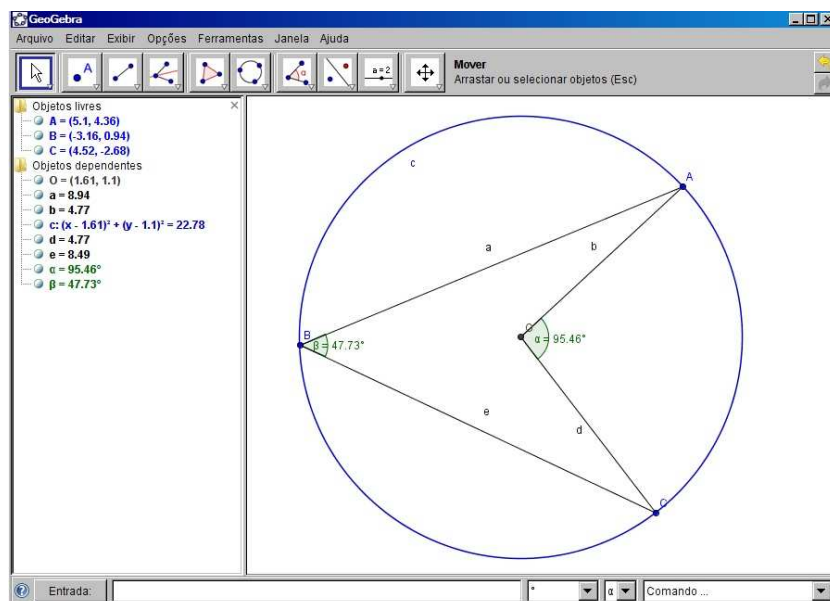
Uma vez definidos, os objetos podem ser exportados na forma de página da Internet (formato HTML). Assim, estarão à disposição na grande rede mundial de computadores, podendo ser vistos por qualquer um que tiver a linguagem Java instalada.

## 2 Exemplos

A seguir, fornecemos alguns exemplos de utilização desse programa. Outros exemplos podem ser encontrados em [2] e uma impressionante coleção de diversificadas aplicações em [1].

### 2.1 Exemplo 1

Neste exemplo, construímos uma circunferência e dois ângulos: um ângulo inscrito e outro ângulo central. Pode-se observar a relação que existe entre as medidas desses ângulos e modificar suas posições dinamicamente.



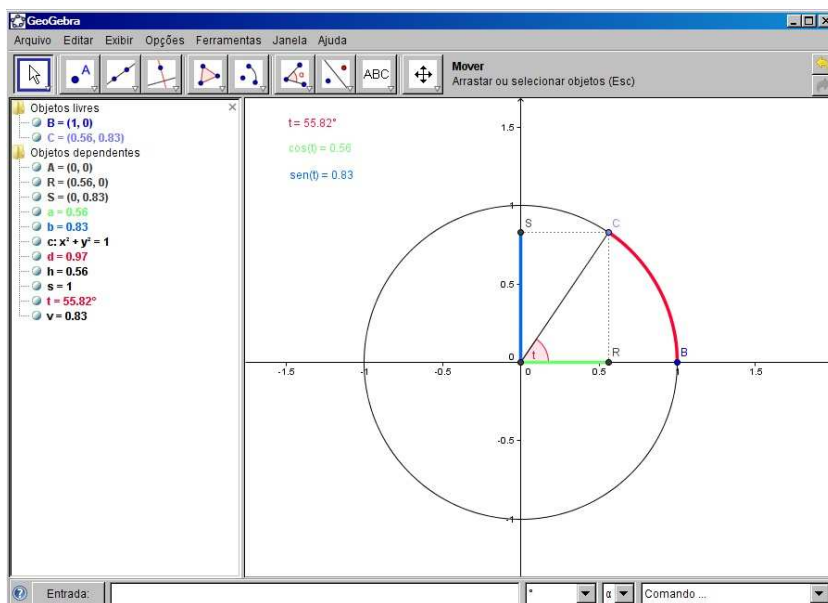
A construção é feita da seguinte forma:

- Desenharm-se três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Isso pode ser feito, por exemplo, selecionando-se o item “Novo ponto” na barra de ferramentas e clicando-se nas posições escolhidas para os pontos.
- Desenha-se a circunferência que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Para isso, basta digitar na janela de entrada de comandos o comando  $c = \text{círculo}[A, B, C]$ . Aqui, deve-se ter o cuidado de acentuar a palavra círculo, usar colchetes e colocar o nome dos pontos exatamente como eles foram introduzidos no item anterior (em letras maiúsculas). Uma opção à digitação do comando é procurá-lo na barra de ferramentas, no item dedicado à construção de círculos e circunferências, selecionar o item “Círculo definido por três pontos” e, depois, clicar na área de desenhos sobre cada um dos três pontos escolhidos.
- Na janela de entrada de comandos, digitar  $O = \text{Centro}[c]$ . Com isso, deverá ser mostrado o centro  $O$  do círculo.
- Selecione o item “Ângulo” da barra de ferramentas. Depois, clique sobre os pontos  $C$ ,  $O$  e  $A$  para definir o ângulo central e sobre os pontos  $C$ ,  $B$  e  $A$  para definir o ângulo inscrito. Outra opção é digitar  $\text{ângulo}[C,O,A]$  e  $\text{ângulo}[C,B,A]$  na janela de entrada de comandos.
- Após selecionar o item “Segmento definido por dois pontos” da barra de ferramentas, pressione sobre os pontos  $B$ ,  $C$ , sobre  $B$ ,  $A$ , sobre  $O$ ,  $C$  e sobre  $O$ ,  $A$  para completar as construções dos ângulos. Outra opção é digitar os comandos  $\text{segmento}[B, C]$ ,  $\text{segmento}[B, A]$ ,  $\text{segmento}[O, C]$  e  $\text{segmento}[O, A]$  na janela de entrada de comandos.
- Escondemos os eixos coordenados através do item “Exibir” do menu principal, onde desmarcamos o item “Eixo”.

Com isso, a construção está completa. Pode-se fazer, ainda, alguns acabamentos, tais como esconder os nomes de alguns objetos ou mudar suas cores. Para isso, é só clicar em cima do objeto, selecionar o item “Propriedades” e fazer as mudanças desejadas.

## 2.2 Exemplo 2

Neste exemplo, ilustramos as definições do seno e do cosseno de um ângulo de medida  $t$  radianos. Em uma circunferência de raio 1 e centro na origem  $A = (0, 0)$ , definimos um ponto fixo  $B = (1, 0)$  e um ponto livre  $C$ . Definimos  $t$  como sendo a medida do ângulo  $B\hat{A}C$  e calculamos as projeções  $R$  e  $S$  de  $C$  nos eixos coordenados. As coordenadas de  $C$ ,  $x(C)$  e  $y(C)$  correspondem ao cosseno e seno de  $t$ , respectivamente. Podemos deslocar  $C$  por toda a circunferência e observar a variação de  $t$ ,  $\text{sen}(t)$  e  $\text{cos}(t)$ .



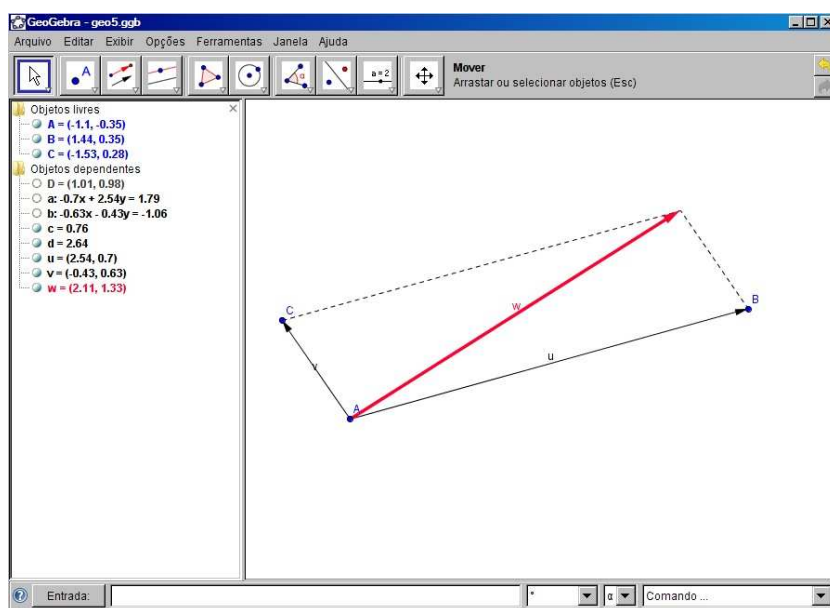
Usamos o seguinte roteiro na construção deste exemplo:

- Definimos na janela de entrada de comandos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$  e  $c = \text{Círculo}[A, B]$ , círculo de centro  $A$  e passando pelo ponto  $B$ . Clicamos com o botão direito sobre  $B$  e, no item “Propriedades” marcamos a opção “Fixar objeto”.
- Escolhemos um ponto  $C$  sobre o círculo  $c$  com o comando  $C = \text{ponto}[c]$
- Definimos o ângulo  $t = \hat{\text{Ângulo}}[B, A, C]$
- Definimos as projeções  $S = (0, y(C))$  e  $R = (x(C), 0)$
- Definimos os segmentos  $v = \text{Segmento}[R, C]$ ,  $h = \text{Segmento}[S, C]$  e o arco  $d = \text{ArcoCircular}[A, B, C]$
- Definimos os segmentos  $a = \text{Segmento}[A, R]$  e  $b = \text{Segmento}[A, S]$
- A partir da barra de ferramentas, selecionamos a ferramenta “Inserir texto”. Selecionamos três locais na área de desenhos com o *mouse* e, depois de cada clique, digitamos os seguintes textos:  $t = t$ ,  $\cos(t) = x(C)$  e  $\sin(t) = y(C)$ . Esses textos são digitados incluindo-se as aspas aqui mostradas. Com eles, é possível mostrar a cada momento os valores de  $t$ ,  $\cos(t)$  e de  $\sin(t)$ .

Faltam só alguns acabamentos, como por exemplo, alterar as propriedades dos segmentos  $a$ ,  $b$  e do arco  $d$  para modificar suas cores e as larguras dos seus traços. É recomendável também alterar as propriedades dos segmentos  $v$ ,  $h$ , modificando os estilos das retas para torná-las pontilhadas.

### 2.3 Exemplo 3

Neste exemplo, ilustramos a “regra do paralelogramo” para a soma de dois vetores. Depois de construído, os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  podem ser arrastados (modificados) com o *mouse*. Desse modo, podemos notar que sua soma  $\vec{v} + \vec{w}$  se adapta a cada nova posição.



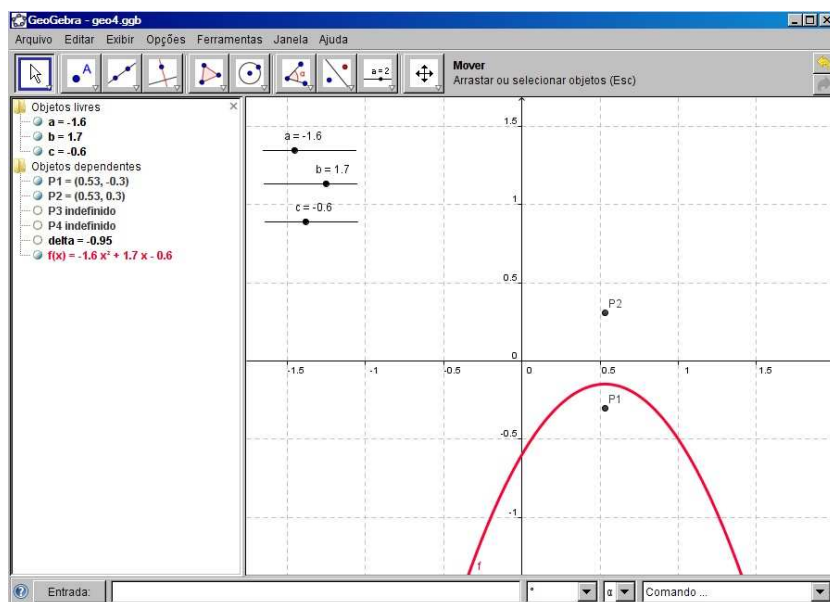
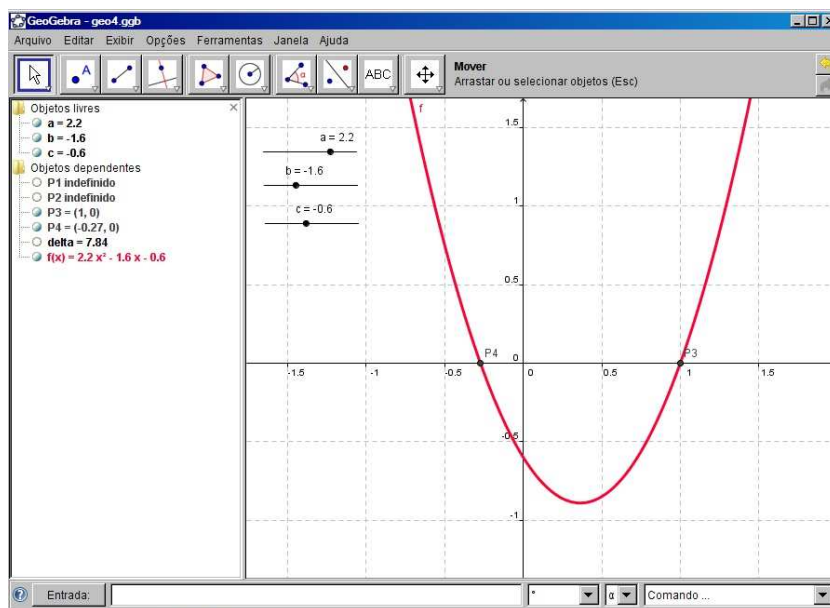
O roteiro de construção é:

- Definimos três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- Definimos os vetores  $u = \text{Vetor}[A, B]$  e  $v = \text{Vetor}[A, C]$
- Definimos as retas  $a = \text{Reta}[C, u]$ ,  $b = \text{Reta}[B, v]$  que passam pelos pontos  $C$ ,  $B$  e paralelas a  $u$ ,  $v$ , respectivamente. Alteramos as propriedades de cada uma de modo a torná-las invisíveis; para isso, basta desmarcar o item “Exibir objeto” em cada uma.
- Calculamos  $D = \text{Interseção}[a, b]$ , a interseção das retas  $a$  e  $b$ .

- Definimos  $w = \text{Vetor}[A, D]$  e alteramos suas propriedades de modo a deixá-lo com um traço mais largo e de outra cor.
- Definimos os segmentos  $c = \text{Segmento}[B, D]$  e  $d = \text{Segmento}[C, D]$  e alteramos seus estilos no item “Propriedades”, para deixá-los pontilhados.
- No item “Exibir” do menu principal, desmarcamos o item “Eixo” para esconder os eixos coordenados.

## 2.4 Exemplo 4

Neste exemplo, construímos o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e mostramos suas raízes nas duas figuras a seguir, sejam elas reais ou complexas. Os valores dos coeficientes podem ser modificados dinamicamente através de controles deslizantes (arrastados com o *mouse*).



Roteiro da construção:

- Na janela de entrada de comandos, definimos os coeficientes, por exemplo,  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = 3$ . Na janela de Álgebra, clicamos com o botão direito sobre cada um deles e marcamos o item “Exibir objeto”. Com isso, esses valores aparecem na área de desenho na forma de controles deslizantes. Com a ajuda do item “Mover” da barra de ferramentas, é possível reposicioná-los sobre qualquer ponto da área de desenho.

- Construímos o gráfico da função simplesmente digitando o comando  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Aqui, a multiplicação é denotada por um asterisco e a potenciação por um acento circunflexo.
- Usamos o item “Deslocar eixos” da barra de ferramentas para reposicionar o gráfico onde for conveniente.
- Definimos o discriminante da função como sendo  $\text{delta} = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ .
- Definimos os pontos P1 e P2 que correspondem às raízes complexas:  $P1 = (-b/(2 \cdot a), \sqrt{-\text{delta}}/(2 \cdot a))$  e  $P2 = (-b/(2 \cdot a), -\sqrt{-\text{delta}}/(2 \cdot a))$ . Aqui, a divisão é indicada por uma barra e a raiz quadrada por sqrt. No item “Propriedades” de cada um desses pontos, na aba “Avançado”, preencher o item “Condição para mostrar objeto” com o seguinte:  $\text{delta} < 0$ . Isso significa que P1 e P2 só vão ser mostrados quando  $\text{delta} < 0$ .
- Definimos P3 e P4 que correspondem às raízes reais:  $P3 = ((-b + \sqrt{\text{delta}})/(2 \cdot a), 0)$  e  $P4 = ((-b - \sqrt{\text{delta}})/(2 \cdot a), 0)$ . No item “Propriedades” de cada um desses pontos, na aba “Avançado”, preencher o item “Condição para mostrar objeto” com  $\text{delta} \geq 0$ .

No menu principal, no item “Exibir”, ao se marcar o item “Malha”, é mostrada uma grade de retas pontilhadas na área de desenhos.

## Referências

- [1] Allo, M. S. – *Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas diseñadas con GeoGebra*, disponível em <http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm>
- [2] Bortolossi, H. J. – *GeoGebra - Software de Matemática Dinâmica Gratuito*, disponível em <http://www.professores.uff.br/hjbortol/geogebra>
- [3] Braviano, G., Rodrigues, M. H. W. L. – *Geometria Dinâmica: uma nova geometria?*, RPM 49, 2002.
- [4] *GeoGebra Homepage*, disponível em [www.geogebra.at](http://www.geogebra.at) ou [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)