Sumário

Matemática Elementar - Primeiro Semestre de 2012

19 de maio de 2012

Capítulo 1

Tipos de Provas

1.1 introdução

Uma das principais atividades dos matemáticos é classificar como verdadeiras ou falsas as sentenças que surgem em seu trabalho. A veracidade de uma sentença, em geral, é obtida através de uma demonstração. Uma demonstração só é considerada correta se todas as sentenças usadas na sua construção forem verdadeiras, ou admitidas como verdadeiras em contextos anteriores. Não existem regras para se fazer uma demonstração. E nem poderiam mesmo existir, pois o mistério que envolve a sua elaboração é um dos motores que faz da Matemática um organismo vivo. Segundo o matemático húngaro Paul Erdös (1913-1996), Deus possuiria um livro no qual estariam guardadas as provas mais perfeitas dos teoremas matemáticos. Ainda segundo Erdös, você poderia até nem acreditar em Deus, mas como matemático deveria acreditar no Livro. Para o matemático inglês Goodfrey Hardy (1877-1947), o quesito beleza é fundamental. No mundo, para ele, não haveria lugar para matemática feia. Depreende-se de sua afirmação que, além da busca pela verdade, pelo conhecimento da prova de um resultado, o matemático também persegue a beleza. Uma bela prova de um resultado difícil é o sonho de todo matemático.

1.2 Provas diretas

Há basicamente dois tipos de demonstrações: as que são diretas e aquelas em que se recorre ao método da redução ao absurdo. Em uma demonstração direta mostramos que, a partir das informações fornecida(s) pela(s) hipótese(s), podemos concluir a tese. Isso em geral é obtido através de relações entre os fatos que estão sendo admitidos na(s) hipótese(s) e fatos que são conhecidos previamente. Veremos nos exemplos a seguir alguns exemplos desse tipo de demonstração.

1. Imagine a seguinte afirmação: Se um aluno está matriculado na turma de Matemática Elementar então ele é paraibano. Essa afirmação é falsa pois temos alunos na turma que nasceram em outros estados. Basta um aluno que satisfaça a hipótese dessa afirmação mas que não satisfaça a tese dessa afirmação para torná-la falsa. Agora analisemos a outra afirmação: Se um aluno está matriculado na turma de Matemática Elementar então ele é brasileiro. Como não temos alunos estrangeiros matriculados no curso, somos levados a concluir que todos são brasileiros. Também poderíamos ter perguntado, aluno por aluno, qual a sua nacionalidade e veríamos que todos são brasileiros. Isso é uma demonstração direta desse fato. $\blacksquare$

2. Se m e n são números pares então a soma $m+n$ é um número par. Vamos demonstrar esse fato. Em primeiro lugar, vamos identificar claramente o nosso objetivo. Queremos provar que um certo número é par. Muito bem! Mas o que siginfica um número ser par? Aqui precisamos recordar a definição. Um número inteiro b será chamado **par** se puder ser escrito na forma $b = 2a$, onde a é um número inteiro. A sentença que assumimos como verdadeira é que m e n são números inteiros pares. Isso quer dizer que $m = 2p$ e que $n = 2q$, com p e q sendo inteiros. Portanto, $m + n = 2p + 2q = 2\,(p + q)$, pela propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição. Como $p + q$ também é um número inteiro, podemos chamá-lo de r. Daí, temos que $m + n = 2r$, o que comprova ser $m + n$ um número par. $\blacksquare$

3. Se n é um número inteiro então n^2+n é um número inteiro par. Inicialmente vamos supor que n seja um inteiro par. Então $n = 2k$, onde k é um inteiro. Portanto,
$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2k\,(2k + 1) = 2m,$$
onde $m = k\,(2k + 1)$, de modo que $n^2 + n$ é par.
Suponhamos agora que n é ímpar. Então $n = 2k+1$, onde k é um inteiro. Portanto,
$$n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 2\left(2k^2 + 3k + 1\right) = 2m,$$
onde $m = 2k^2 + 3k + 1$, de modo que $n^2 + n$ é par, também nesse caso. $\blacksquare$

4. Seja $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ uma matriz triangular superior 2×2 e suponha que x, y e z são inteiros. Vamos demonstrar que as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) $\det M = 1$,

(b) $x = z = \pm 1$,

(c) $x + z = \pm 2$ e $x = z$.

O que se afirma nesse resultado é que $a \leftrightarrow b, a \leftrightarrow c, b \leftrightarrow c$. Para isso, deveríamos provar que $a \to b, b \to a, a \to c, c \to a, b \to c$ e $c \to b$. Na prática não fazemos assim. A idéia é usar uma certa transitividade que existe nas implicações e provar, por exemplo, que $a \to b \to c \to a$. Poderíamos provar também que $a \to c, c \to b$ e que $b \to a$. Também poderíamos, alternativamente, provar que $a \to c, c \to a, a \to b$ e $b \to a$. O que é fundamental na escolha da seqüência é que ela traduza o fato de que as sentenças sejam equivalentes entre si.
Vejamos então a prova de que $a \to b, b \to c$ e $c \to a$.
Vamos provar que $a \to b$. Suponha que $\det M = 1$. Daí, temos que $xz = 1$. Como x e z são números inteiros, devemos ter $x = 1 = z$ ou $x = -1 = z$.
Provemos agora que $b \to c$. Suponha que $x = z = \pm 1$. Primeiro vamos supor que $x = z = 1$. Então $x+z = 2$. Suponhamos agora que $x = z = -1$. Então $x+z = -2$. Daí $x = z$ e $x + z = \pm 2$.
Provemos agora que $c \to a$. Como $x + z = \pm 2$, devemos ter $(x + z)^2 = 4$. Assim, $x^2 + 2xz + z^2 = 4$. Como $x = z$, devemos ter $x^2 = z^2$. Dessa forma, $4 = 4xz$, ou seja, $xz = 1$. Como $\det M = xz$, concluímos que $\det M = 1$. ■

1.3 Provas por redução ao absurdo

Vejamos agora como se processa uma demonstração por redução ao absurdo ou por contradição. Vamos supor que estamos interessados em provar um determinado fato. Se não soubermos como fazê-lo diretamente, como nos exemplos acima, então podemos supor que tal fato não ocorra. Usamos então a hipótese - que é admitida como verdadeira - e essa informação adicional, a negação do que se está tentando demonstrar. Através de uma sucessão de argumentos usando fatos conhecidos e esses fatos novos, chega-se a algo contraditório, absurdo, como por exemplo a negação da hipótese ou a violação de uma verdade anteriormente aceita. Veremos a seguir três exemplos de demonstrações por redução ao absurdo.

1. Se m^2 é um número par, vamos demonstrar que m é um número par. Vamos negar a tese, isto é, supor também que n seja ímpar. Aqui precisamos da definição. Um

número inteiro b é dito ímpar quando ele puder ser escrito na forma $b = 2a+1$, sendo a um número inteiro. Assim, assumindo que m é ímpar, temos que $m = 2a + 1$, para algum inteiro a. Logo,

$$m^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2\left(2a^2 + a\right) + 1.$$

Mas $2a^2 + a$ é um inteiro. Chamando-o de p, temos que $m^2 = 2p + 1$, ou seja, m^2 é um número ímpar. Mas a hipótese era de que m^2 era par. Logo isso que obtivemos é uma contradição, um absurdo. E de onde veio esse absurdo? Veio do fato de supormos que m era ímpar. Logo, ele não pode ser ímpar e portanto será necessariamente par. ■

2. Vamos provar que o número $log_{10}3$ é irracional. Aqui cabe uma pergunta: o que é um número irracional? Uma resposta meio evasiva poderia ser: um número irracional aquele que não é racional. E um número racional é aquele que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, com m e n sendo números inteiros e $n \neq 0$. Portanto, vamos supor que $log_{10}3$ seja racional, isto é o mesmo que dizer que existem números inteiros m, n tais que $log_{10}3 = \frac{m}{n}$. Usando as propriedades dos logarítmos, temos $10^{\frac{m}{n}} = 3$. Elevando ambos os membros a n, temos $10^m = 3^n$. Nessa igualdade temos algo impossvel de acontecer, pois o número 10^m é par, enquanto que o número 3^n é ímpar. Esse absurdo veio de supormos que o número $log_3 10$ era racional. Como só existem duas possibilidades para ele e, ele não pode ser racinal, ele só pode ser irracional.■

3. Vamos mostrar que não existem números inteiros ímpares a, b, c, d, e, f tais que:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1.$$

Suponhamos, por absurdo, que existam os tais números. Então usando as propriedades de soma de frações, temos que:
$$\frac{bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde}{abcdef} = 1,$$
ou seja,

$$bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde = abcdef.$$

Agora vamos olhar para os dois lados dessa igualdade. Do lado esquerdo cada parcela é um número ímpar, pois é igual a um produto de números ímpares. Como são seis parcelas, a sua soma resultará num número par. Do lado direito, temos um produto de números ímpares, cujo resultado é um número ímpar. Aqui temos uma contradição: um número que é ao mesmo tempo par e ímpar. Como essa contradição surgiu? Surgiu do fato de termos afirmado a existência dos números ímpares satisfazendo aquela propriedade. Portanto, os tais números não existem. ∎

4. Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Negar que $\sqrt{2}$ seja um número irracional é dizer que ele é racional. Sendo então ele racional, existem m e n inteiros tais que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Esse será o ponto de partida que nos conduzirá a uma contradição. Como $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, podemos supor que os fatores comuns de m e de n já foram cancelados. Isso é absolutamente plausível, uma vez que estamos lidando com frações. Vamos elevar ambos os membros ao quadrado. Feito isso, teremos $2 = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja, $m^2 = 2n^2$. Essa última igualdade nos diz que m^2 é par. Como vimos acima, isso acarreta que m também é par, ou seja, $m = 2p$, para algum inteiro p. De volta àquela igualdade, vemos que $m^2 = 4p^2 = 2n^2$, ou seja, $2p^2 = n^2$, o que acarreta que n^2 é par e pelo mesmo motivo, n é par. Agora vemos que tanto m como n são ambos pares, ou seja possuem um fator primo em comum. Mas isso está em contradição à nossa hipótese. Logo, $\sqrt{2}$ não pode ser racional, ou seja, ele é irracional. ∎

5. Sejam m e n inteiros. Vamos provar que mn é ímpar se e somente se ambos m e n são ímpares. Como se trata de uma equivalência, é interessante identificarmos as duas sentenças que a compõem. Uma delas diz que: se m e n são ímpares então mn é um número ímpar. A outra diz que: se mn é ímpar então m e n são ímpares. Comecemos pela primeira delas. Suponhamos que m e n sejam ímpares. Então $m = 2p + 1$ e $n = 2q + 1$, onde p e q são números inteiros. Agora note que

$$mn = (2p + 1)(2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2(2pq + p + q) + 1 = 2r + 1,$$

onde $r = 2pq + p + q$. Daí podemos concluir que mn é um número ímpar.
Suponhamos agora que o produto mn é ímpar. Vamos supor, por absurdo, que pelo menos um deles - m ou n - é par. Digamos que m seja par (se fosse n o raciocínio seria análogo). Então $m = 2k$, onde k é um número inteiro. Logo

$$mn = 2kn = 2r,$$

onde $r = kn$. Assim, mn é um número par. Mas isso é uma contradição, pois estamos supondo que o produto é ímpar. Logo, nenhum dos dois - m e n - pode ser par, donde ambos são ímpares, como queríamos. ■

Capítulo 2

Conjuntos

2.1 Introdução

O termo **conjunto** não será definido. Para nós ele será um sinônimo de coleção ou agrupamento de objetos. Esses objetos serão chamados os seus **elementos**. A natureza dos elementos de um conjunto pode ser bastante diversa. Podemos ter conjuntos de canetas, cores, bolas, números, funções, matrizes, etc. Um dos pioneiros no estudo dos conjuntos foi o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) que fez relevantes contribuições à Teoria dos Conjuntos quando estava estudando séries trigonométricas.

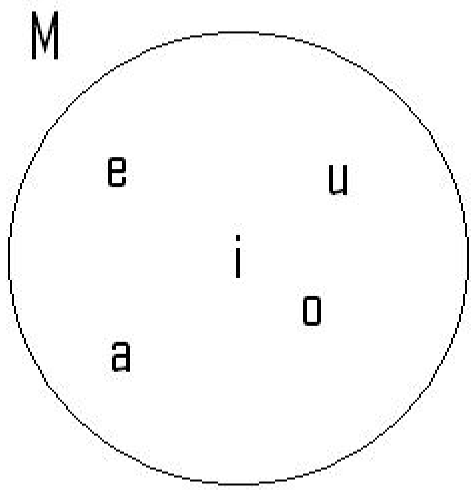
Plate XXVI. Cantor at Halle University, 1894.
(In the possession of the *Universitätsarchiv*, Halle/Saale, E. Germany D.D.R.)

Observação 2.1.1 *O ponto de vista aqui usado é chamado de ingênuo, pois não se faz uso de axiomas para construir uma teoria. O outro ponto de vista é o axiomático, onde se enunciam axiomas para se construir de modo rigoroso toda a teoria. Dentre os modos axiomáticos de tratar a teoria dos conjuntos, destacamos o modelo axiomático de Zermelo-Fraenkel desenvolvido pelos matemáticos Ernest Zermelo (1871-1953) e Adolf Fraenkel (1891-1965).*

2.2 Definições Básicas

Introduziremos agora uma série de termos e definições que encontraremos pela frente no decorrer do curso. Sejam A um conjunto e a um objeto. Se a for um elemento de A escreveremos $a \in A$ para simbolizar esse fato. Caso o elemento a não seja um elemento de A, escreveremos $a \notin A$, para simbolizar isso.
Para repesentarmos um conjunto podemos escrever todos seus elementos entre chaves, quando isso for possível. Também podemos descrever um conjunto por uma propriedade comum que todos os seus elementos possuam. Uma outra representação muito útil dos conjuntos é feita através dos chamados **Diagramas de Venn** criados pelo lógico inglês John Venn (1834-1923). Um Diagrama de Venn é uma curva fechada no plano, tendo

em seu interior os elementos do conjunto, conforme o conjunto da figura a seguir. No conjunto M estão representadas as vogais.



Vamos discutir agora alguns exemplos.

Exemplo 2.2.1 *Seja A o conjunto das letras da palavra* **Atordoado.** *Então podemos escrever simplesmente*

$$A = \{a, t, o, r, d\}.$$

Exemplo 2.2.2 *Existem quatro conjuntos numéricos que estudamos desde os primeiros anos na escola. São eles o conjunto dos números naturais, representado por*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

O conjuntos dos números inteiros, representado por

$$\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

O conjunto dos números racionais, representado por

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z} \ com \ n \neq 0\right\}.$$

E finalmente o conjunto dos números reais, simplesmente representado por $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.3 *Seja A o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 2. Evidentmente não podemos listar todos os elementos de A como foi feito no exemplo precedente. Porém, podemos escrever*

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}.$$

Na notação acima utilizamos a propriedade comum aos elementos de A para, ao invés de listar os seus elementos, darmos um critério de quando um elemento pertence ou não ao dito conjunto. Mais especificamente: para que um número real pertença ao conjunto A, é preciso que ele seja maior que ou igual a 2.

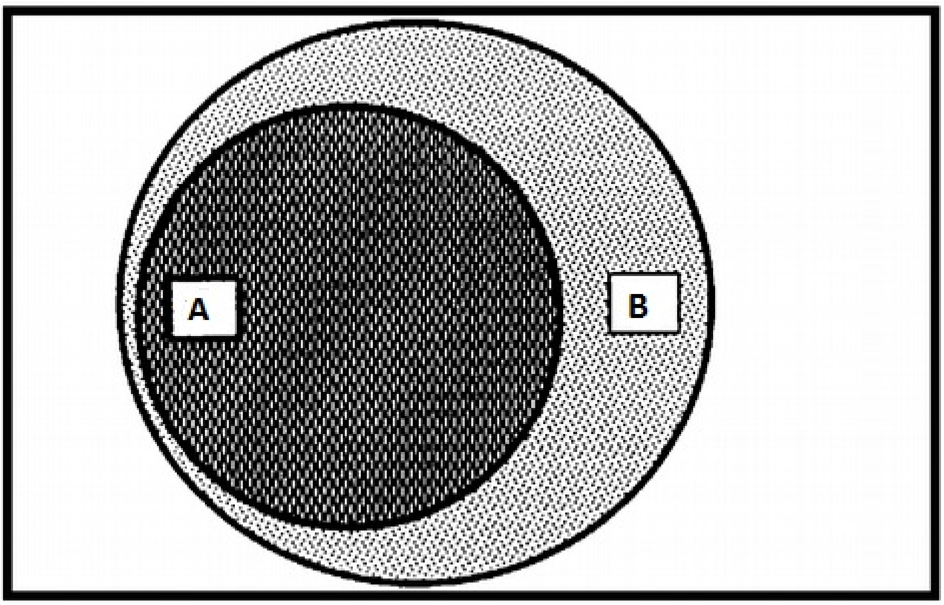
Observação 2.2.1 *Existe um conjunto muito importante em Matemática que é o conjunto que não possui elemento algum. Este conjunto será chamado de* **conjunto vazio** *e será representado por $\emptyset$ que é uma letra do alfabeto norueguês. Podemos descrever o conjunto vazio através de uma propriedade que não é satisfeita por qualquer objeto. Por exemplo, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; x > x+1\}$ é vazio, uma vez que essa propriedade não é satisfeita por nenhum número real.*

2.3 Inclusão

Uma importante relação entre conjuntos é a relação de **inclusão** que veremos a seguir. Dados dois conjuntos A e B, diremos que A é um **subconjunto** de B se todo elemento de A for também elemento de B. Usaremos o símbolo $A \subseteq B$ para denotar este fato. Simbolicamente podemos escrever:

$$A \subseteq B \text{ quando } (\forall x)\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Uma maneira de visualizar a inclusão de conjuntos utilizando os diagramas de Venn está mostrada abaixo. Na figura temos $A \subset B$.



Quando A não for um subconjunto de B, simbolizaremos isso por $A \nsubseteq B$. Isso siginifica que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B.

Observação 2.3.1 *Existem na literatura outros termos que também significam que A é um subconjunto de B. Diz-se também que A* **está contido** *em B, que A* **é uma parte de** *B, que B* **é um superconjunto de** *A, ou que B* **contém** *A.*

Observação 2.3.2 *A notação $A \subset B$, no nosso curso indicará o fato de que A é um subconjunto de B mas que é diferente dele. Diz-se nesse caso que A é um subconjunto* **próprio** *de B.*

Observação 2.3.3 *É preciso ter bastante cuidado no uso dos símbolos $\in$ e $\subseteq$. Em alguns casos um conjunto pode ser, ele mesmo, elemento de um outro conjunto.*

Veremos agora alguns exemplos.

Exemplo 2.3.1 *Sejam A e B conjuntos dados respectivamente por $A = \{1, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos que $A \subset B$ e que $B \nsubseteq A$.*

Exemplo 2.3.2 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Nesse caso não temos nem $A \subseteq B$ nem $B \subseteq A$.*

Exemplo 2.3.3 *Seja $A = \{a, b, c\}$. As afirmações $a \in A$ e $\{a\} \subseteq A$ são ambas verdadeiras. Agora, se $A = \{\{a\}, b, c\}$, então as afirmações $a \in A$ e $\{a\} \subseteq A$ são ambas falsas.*

Veremos agora algumas propriedades da inclusão de conjuntos.

Teorema 2.3.1 *Se A, B e C são conjuntos então valem as seguintes propriedades:*

(i) $A \subseteq A$,

(ii) $\emptyset \subseteq A$,

(iii) *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$,*

Demonstração: A primeira propriedade decorre imediatamente da definição de inclusão.
Provemos a segunda. Ela equivale a provar que se $a \in \emptyset$ então $a \in A$. Como uma implicação deste tipo será sempre verdadeira, uma vez que a hipótese nunca acontece,

somos levados a concluir que vale a propriedade (ii).
Para mostrar que $A \subseteq C$, devemos mostrar que, dado $a \in A$, temos que $a \in C$. Ora, mas dado $a \in A$, segue que $a \in B$, por hipótese e, também por hipótese, segue que $a \in C$, como queríamos. ■
Surge agora uma importante pergunta: *Quando dois conjuntos são iguais?* A resposta mais simples é dizer que eles são iguais quando tiverem os mesmos elementos. Para os nossos propósitos usaremos uma definição que é bem mais fácil de se trabalhar que é a seguinte: Dados dois conjuntos A e B diremos que ele são **iguais** e representamos isso por $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplo 2.3.4 *Os conjuntos $A = \{a, t, o, r, d\}$ e $B = \{$ letras da palavra atordoado $\}$ são iguais.*

Exemplo 2.3.5 *Os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 < 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 3\}$ são iguais. De fato, seja $x \in A$. Assim, $x^2 - 5x + 6 < 0$. Mas $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Assim, se $x \in A$, então $(x - 2)(x - 3) < 0$. Portanto, devemos ter*

1. $(x - 2) > 0$ *e* $(x - 3) < 0$ *ou*

2. $(x - 2) < 0$ *e* $(x - 3) > 0$.

No primeiro caso, devemos ter $x > 2$ e $x < 3$, ou seja, $2 < x < 3$. No segundo caso, devemos ter $x - 2 < 0$ e $x - 3 > 0$. Como não existem números satisfazendo as essas duas condições simultaneamente, esse caso não pode ocorrer. Logo, devemos ter $2 < x < 3$, ou seja, $x \in B$.
Seja $x \in B$. Então $x - 2 > 0$ e $x - 3 < 0$, donde $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) < 0$, ou seja, $x \in A$. ■

Observação 2.3.4 *A definição de igualdade entre conjuntos possui interessantes propriedades, a saber: Se A, B e C são conjuntos então vale o seguinte*

1. $A = A$,

2. *se* $A = B$ *então* $B = A$,

3. *se* $A = B$ *e* $B = C$ *então* $A = C$.

Como vimos anteriormente, um conjunto pode ser elemento de um outro conjunto. Vamos nos aprofundar um pouco mais nessa idéia e definirmos um importante conjunto cujos elementos são conjuntos. Seja A um conjunto. Definimos o **Conjunto das Partes** de A como sendo o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Vamos representá-lo por $\wp(A)$. Em símbolos:

$$\wp(A) = \{X | X \subseteq A\}.$$

Exemplo 2.3.6 *Se* $A = \{a\}$ *então* $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Exemplo 2.3.7 *Se* $A = \emptyset$, *então* $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Exemplo 2.3.8 *Se* $A = \{a, b\}$ *então* $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Observação 2.3.5 *O conjunto* $\wp(A)$ *nunca é vazio pois o conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto.*

Observação 2.3.6 *Se o conjunto* A *tiver* n *elementos então o conjunto* $\wp(A)$ *terá* 2^n *elementos. Não vamos provar isso agora. Primeiro vamos entender o que significa* **ter** n **elementos**. *Isso ficará para breve quando estivermos falando de conjuntos finitos e infinitos.*

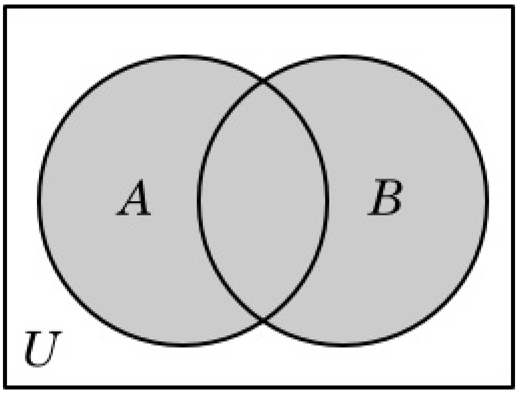
2.4 Operações com conjuntos

A nossa idéia agora é formar novos conjuntos a partir de outros. A formação desses novos conjuntos usará fortemente os termos **e**, **ou** e **não** vistos na disciplina de Argumentação em Matemática.

Sejam A e B conjuntos. A **união** de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos A ou B. Vamos representá-la por $A \cup B$. Em símbolos temos

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

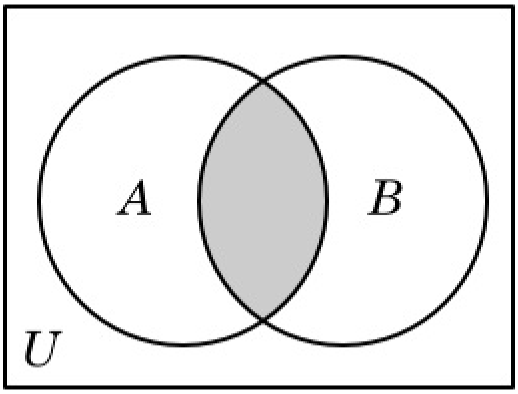
Em outras palavras, o conjunto $A \cup B$ é o conjunto contendo todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos. Na figura a seguir temos uma representação de $A \cup B$ em um diagrama de Venn. Nessa figura A e B estão contidos num conjunto maior U denominado **Conjunto Universo**.



Sejam A e B conjuntos. A **interseção** de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B. Vamos representá-la por $A \cap B$. Em símbolos temos

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Na figura a seguir temos uma representação de $A \cap B$ em um diagrama de Venn. Nessa figura A e B estão contidos num conjunto maior U denominado **Conjunto Universo**.



Exemplo 2.4.1 *Sejam* $A = \{x, y, z, p\}$ *e* $B = \{x, q\}$. *Então* $A \cup B = \{x, y, z, p, q\}$ *e* $A \cap B = \{x\}$.

Exemplo 2.4.2 *Sejam* $A = \{p \in \mathbb{N} | p$ *é um número par*$\}$ *e* $B = \{p \in \mathbb{N} | p$ *é um número ímpar*$\}$. *Então* $A \cup B = \mathbb{N}$ *e* $A \cap B = \emptyset$.

Observação 2.4.1 *Vemos imediatamente da definição que* $A, B \subseteq A \cup B$ *e que* $A \cap B \subseteq A, B$.

Observação 2.4.2 *Se* A *e* B *são conjuntos tais que* $A \cap B = \emptyset$, *diremos que* A *e* B *são* **Conjuntos disjuntos**.

Reuniremos no Teorema a seguir as principais propriedades das União e da Interseção de conjuntos:

Teorema 2.4.1 *Sejam A, B e C conjuntos. Então valem as seguintes propriedades:*

1. *Se $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$ então $X \subseteq A \cap B$,*
2. *Se $A \subseteq Y$ e $B \subseteq Y$ então $A \cup B \subseteq Y$,*
3. **Comutatividade** $A \cup B = B \cup A$, *e* $A \cap B = B \cap A$,
4. **Associatividade** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, *e* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
5. **Distributividade** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *e* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. **Identidade** $A \cup \emptyset = A$ *e* $A \cap \emptyset = \emptyset$,
7. **Idempotência** $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$,
8. **Absorção** *Se* $A \subseteq B$ *então* $A \cup B = B$ *e* $A \cap B = A$,
9. **Monotonicidade** *Se* $A \subseteq B$ *então* $A \cup C \subseteq B \cup C$ *e* $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Demonstração: Todas as propriedades decorrem das definições. Vamos provar uma das igualdades da propriedade (5), ficando outra igualdade e as demais como exercício para o leitor. Seja $x \in A \cap (B \cup C)$. Então $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Assim, $x \in B$ ou $x \in C$. No primeiro caso, temos que $x \in A \cap B$, enquanto que no segundo, temos que $x \in A \cap C$. Em qualquer dos casos teremos então $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$, ou seja, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, provando que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Seja agora $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. No primeiro caso, temos que $x \in A$ e $x \in B$. Como $x \in B$, segue que $x \in B \cup C$. Portanto, do primeiro caso, concluímos que $x \in A \cap (B \cup C)$. Por um raciocínio totalmente análogo concluímos que, ocorrendo o segundo caso, teremos $x \in A \cap (B \cup C)$. Portanto, em qualquer dos casos teremos $x \in A \cap (B \cup C)$, mostrando que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Portanto, a igualdade está provada. ■

Observação 2.4.3 *Os adjetivos dados a algumas das propriedades acima vêm dos mesmos adjetivos dados a propriedades análogas que os números e as operações com eles* *definidas possuem. Apenas a título de curiosidade, vamos atentar para a propriedade distributiva do produto com relação à adição que nos diz que se x, y e z são números reais, então*

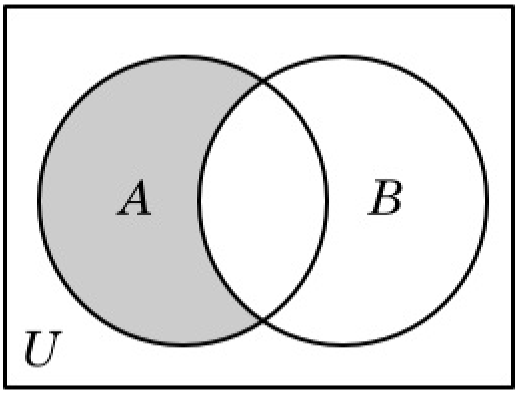
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Perceba a analogia existente entre essa propriedade e aquela que é válida para conjuntos.

Sejam A e B conjuntos. A **Diferença entre** A e B é o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A mas que não pertencem ao conjunto B. Vamos representá-la por $A - B$. Em símbolos temos

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Na figura a seguir temos uma representação de $A - B$ em um diagrama de Venn. Nessa figura A e B estão contidos num conjunto maior U denominado **Conjunto Universo**.



Exemplo 2.4.3 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Então $A - B = \{1, 2, 3\}$. Também vemos que $B - A = \{7, 8, 9, 10\}$.*

Exemplo 2.4.4 *Se $A = \mathbb{N}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x > 10\}$. Então $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Nesse caso, $B - A = \emptyset$, uma vez que $B \subset A$.*

Vejamos agora as principais propriedades da diferença de conjuntos.

Teorema 2.4.2 *Sejam A, B e C conjuntos. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $A - B \subseteq A$,

2. $(A - B) \cap B = \emptyset$,

3. $A - B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq B$,

4. Se $A \subseteq B$, então $A - C = A \cap (B - C)$,

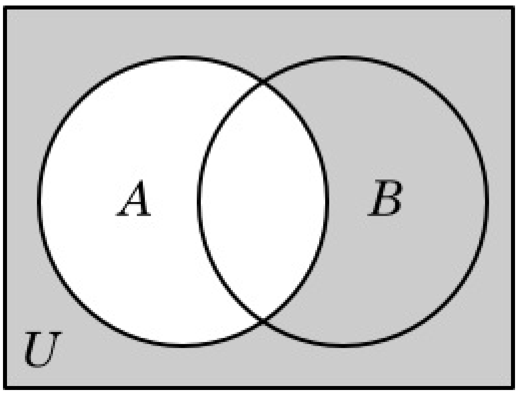
5. Se $A \subseteq B$, então $C - B \subseteq C - A$,

6. $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ e $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$,

Demonstração: Vamos provar apenas uma das igualdades da parte (6), deixando a outra e as demais propriedades como exercício para o leitor. Seja $x \in C - (A \cup B)$. Então $x \in C$ e $x \notin A \cup B$. Assim concluímos que $x \notin A$ e $x \notin B$. Como $x \in C$ e $x \notin A$, temos que $x \in (C - A)$. Analogamente, $x \in C$ e $x \notin B$, daí, $x \in (C - A) \cap (C - B)$, acarretando que $C - (A \cup B) \subseteq (C - A) \cap (C - B)$. Suponha agora que $x \in (C - A) \cap (C - B)$. Concluímos que $x \in C - A$ e que $x \in C - B$. Logo, $x \in C$ e $x \notin A$ e $x \notin B$. Assim, $x \in C - (A \cup B)$. Isso acarreta que $(C - A) \cap (C - B) \subset C - (A \cup B)$, donde a igualdade está provada. ■

Observação 2.4.4 *A propriedade (6) é conhecida como as* **Leis de De Morgan,** *em homenagem ao matemático Augustus de Morgan.*

A existência de um conjunto de todos os conjuntos, ou um conjunto universo leva a algumas contradições na Teoria dos Conjuntos. Entretanto, tomando-se o devido cuidado, podemos assumir essa hipótese sem problemas. Faremos isso a seguir para definirmos um importante conjunto. Suponha que $\mathbb{U}$ seja um conjunto universo e que $A \subseteq \mathbb{U}$. O **Complementar** de A com relação a $\mathbb{U}$ é o conjunto $\mathbb{U} - A$. Vamos representá-lo por A'. Na figura a seguir temos uma representação de A' em um diagrama de Venn. Nessa figura A e B estão contidos num conjunto maior U.



Supondo que A e B estejam contidos em um conjunto universo $\mathbb{U}$, podemos dar algumas propriedades dos complementares:

Teorema 2.4.3 *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto universo $\mathbb{U}$. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $A - B = A \cap B'$,
2. $(A')' = A$,
3. $\emptyset' = \mathbb{U}$ *e* $\mathbb{U}' = \emptyset$,
4. $A \cap A' = \emptyset$ *e* $A \cup A' = \mathbb{U}$,
5. $A \subseteq B \leftrightarrow B' \subseteq A'$,
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Demonstração: A demonstração é feita usando as definições e o Teorema (2.4.2). Deixamos para o leitor como exercício.$\blacksquare$

Capítulo 3

Famílias indexadas de conjuntos

Vamos supor que I seja um conjunto não-vazio e que, a cada $i \in I$, esteja associado um conjunto A_i. O conjunto $\mathbb{F}$ cujos elementos são os conjuntos A_i é chamado de **Família de conjuntos indexada pelo conjunto** I. O conjunto I é chamado de **Conjunto de índices.** Em geral usa-se a notação $\{A_i\}_{i \in I}$ para se representar a família $\mathbb{F}$. Uma outra notação é $\mathbb{F} = \{A_i | i \in I\}$.
Se $\mathbb{F}$ é uma família indexada por I, diremos que $A \in \mathbb{F}$ se existir $i \in I$ de tal modo que $A = A_i$.

Exemplo 3.0.5 *A família* $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{2, 4\}, ..., A_n = \{n, 2n\}, ...$ *é uma família de conjuntos indexada pelo conjunto* $\mathbb{N}$.

Exemplo 3.0.6 *A família* $A_\partial = \emptyset, A_\nabla = \mathbb{N}, A_\infty = \mathbb{Z}, A_\diamond = \mathbb{Q}$ *e* $A_\hbar = \mathbb{R}$ *é uma família indexada pelo conjunto* $I = \{\partial, \nabla, \infty, \diamond, \hbar\}$.

Veremos agora como definir a união e a interseção de elementos em uma família. Seja $\mathbb{F}$ uma família indexada pelo conjunto I. Definimos a **União dos conjuntos de** $\mathbb{F}$ como sendo o conjunto

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}.$$

A **Interseção dos conjuntos de** $\mathbb{F}$ é o conjunto

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}.$$

Exemplo 3.0.7 *Seja* $\mathbb{F} = \{[-n, n] | n \in \mathbb{N}\}$. *Então*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$$

e

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [-1,1]\,.$$

Exemplo 3.0.8 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *considere a família*

$$\mathbb{F} = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] | n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = [-1,1]$ *e* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{0\}$.

Reuniremos agora no Teorema abaixo as principais propriedades de uniões, interseções e diferenças entre famílias de conjuntos:

Teorema 3.0.4 *Sejam* I *um conjunto não-vazio,* $\{A_i\}_{i\in I}$ *uma família de conjuntos indexada por* I, *e* B *um conjunto. Então:*

1. $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$, *para todo* $k \in I$. *Se* $B \subseteq A_k$, *para todo* $k \in I$, *então* $B \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$,
2. $A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, *para todo* $k \in I$. *Se* $A_k \subseteq B$, *para todo* $k \in I$, *então* $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$,
3. **Lei distributiva** $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$,
4. **Lei distributiva** $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)$,
5. **Lei de De Morgan** $B - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B - A_i)$,
6. **Lei de De Morgan** $B - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B - A_i)$.

Demonstração: Provaremos apenas a parte (3), deixando as demais como exercício. Seja $x \in B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Então $x \in B$ e $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Assim, $x \in A_k$ para algum $k \in I$. Assim, $x \in B \cap A_k$. Dessa forma, $x \in \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$, pela parte (1). Assim $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$. Agora seja $x \in \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$. Assim, $x \in B$ e $x \in A_k$. Dessa forma, $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ pela parte (1). Assim, $x \in B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Portanto, $\bigcup_{i\in I} (B \cap A_i) \subseteq B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Daí concluímos que $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$. ■

Capítulo 4

Relações

4.1 Pares ordenados

Sejam A e B conjuntos e $a \in A$ e $b \in B$. O **Par ordenado cujo primeiro elemento é** a **e o segundo elemento é** b é, por definição, o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Vamos denotá-lo por (a, b). A principal propriedade dos pares ordenados é aquela que diz respeito à igualdade entre dois deles. Sendo mais específicos, temos o seguinte

Teorema 4.1.1 $(a, b) = (c, d)$ *se e somente se* $a = c \wedge b = d$.

Demonstração: De fato, se $a = c$ e $b = d$ então $(a, b) = (c, d)$, imediatamente. Suponha agora que $(a, b) = (c, d)$. Então os conjuntos $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ e $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ são iguais. Daí concluímos que $a = c$ e que $b = d$. ■

Observação 4.1.1 *Daqui por diante e, em praticamente toda a sua vida, você só vai utilizar o símbolo* (a, b) *para falar do par ordenado cujo primeiro elemento é* a *e o segundo é* b.

4.2 Produto cartesiano

Sejam A e B conjuntos. O **Produto cartesiano de** A **por** B, denotado por $A \times B$, é o conjunto dos pares ordenados cujo primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence ao conjunto B. Em símbolos:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo 4.2.1 *Se* $A = \{a, b\}$ *e* $B = \{1, 2, 3\}$, *então*

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Exemplo 4.2.2 *Se* $A = \{1, 3, 5\}$, *então*

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Algumas das principais propriedades do produto cartesiano de dois conjuntos estão listadas no Teorema a seguir. Vamos provar apenas uma e deixar o restante como exercício.

Teorema 4.2.1 *Sejam* A, B *e* C *conjuntos. Então valem as propriedades:*

1. *Se* $A \subseteq B \wedge C \subseteq D$ *então* $A \times C \subseteq B \times D$,
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
3. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$,
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
5. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$,
6. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Demonstração: Vamos provar a propriedade (2). Seja $(a, b) \in A \times (B \cup C)$. Então $a \in A$ e $b \in B \cup C$. Assim, $b \in B$ ou $b \in C$. No primeiro caso, teremos $(a, b) \in A \times B \subseteq A \times B \cup A \times C$. No segundo teremos $(a, b) \in A \times C \subseteq A \times B \cup A \times C$. Portanto, em qualquer dos casos teremos $A \times (B \cup C) \subseteq A \times B \cup A \times C$. Seja agora $(a, b) \in A \times B \cup A \times C$. Então há dois casos: $(a, b) \in A \times B$ ou $(a, b) \in A \times C$. Se ocorrer o primeiro caso, então $a \in A$ e $b \in B \subset B \cup C$, ou seja $(a, b) \in A \times (B \cup C)$. Se ocorrer o segundo caso, então $(a, b) \in A \times C$. Daí, $a \in A$ e $b \in C \subseteq B \cup C$, ou seja, $(a, b) \in A \times (B \cup C)$. Portanto, qualquer que seja o caso, temos $A \times B \cup A \times C \subseteq A \times (B \cup C)$. ■

Observação 4.2.1 *Em geral* $A \times B \neq B \times A$. *Dê um exemplo para ilustrar isso.*

Observação 4.2.2 *Se* $B = A$ *então* $A \times B$ *será denotado por* A^2 *ou* B^2.

Observação 4.2.3 *Pode-se definir o produto cartesiano sem necessariamente se fazer menção a pares ordenados. Esse ponto de vista será abordado quando formos definir produtos cartesianos de uma quantidade infinita de conjuntos. Isso será feito no curso de Matemática Elementar II.*

4.3 Relações

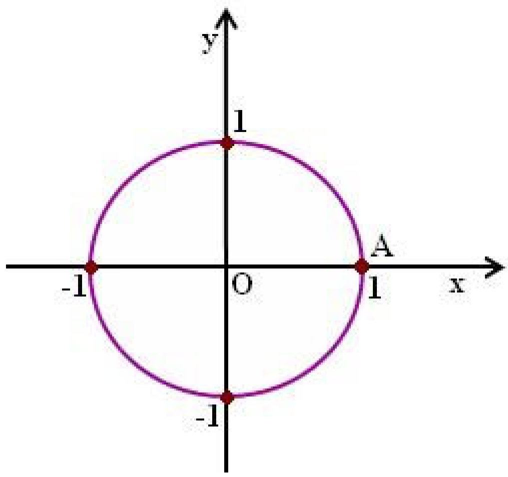
Sejam A e B conjuntos. Uma **Relação binária** $\Re$ **de** A **em** B ou simplesmente uma **Relação** $\Re$ **de** A **em** B é qualquer subconjunto de $A \times B$.

Observação 4.3.1 *Se $B = A$ então diremos que $\Re$ é uma relação* **em** A *ou* **sobre** A.

Observação 4.3.2 *Se $(x, y) \in \Re$, escreveremos $x\Re y$. Caso contrário, isto é, se $(x, y) \notin \Re$, escreveremos $x \not\Re y$, para simbolizar isso.*

Exemplo 4.3.1 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y, z\}$ e $\Re = \{(1, y), (1, z), (2, y)\}$ é uma relação de A em B.*

Exemplo 4.3.2 *Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e $\Re = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Então $\Re$ é uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou simplesmente uma relação em $\mathbb{R}$. Geometricamente ela pode ser representada por um círculo de centro na origem e raio 1, conforme a figura a seguir.*



Exemplo 4.3.3 *Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e $\Re$ definida por $x\Re y \leftrightarrow x + 2y = 1$. Geometricamente podemos representá-la por uma reta no plano.*

Exemplo 4.3.4 *Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Em $A = \wp(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ podemos definir a seguinte relação: $P\Re Q \leftrightarrow P \subseteq Q$. Observe que $\emptyset\Re X$, qualquer que seja $X \subset \{1, 2, 3\}$. Temos $\{1\} \Re \{1, 2\}$ e $\{2\} \not\Re \{1, 3\}$.*

Exemplo 4.3.5 *Podemos definir em $A = \mathbb{Z}$ a seguinte relação*

$$a\Re b \leftrightarrow a - b \text{ é divisível por } 5.$$

Observe que $8\Re - 2, -4\Re 6$ e $3 \not\Re 9$. Esa relação será estudada bastante por nós em dois momentos. O primeiro quando estudarmos Relações de Equivalência e o segundo, quando estudarmos Teoria dos Números.

Exemplo 4.3.6 *Seja* $A = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *o conjunto das matrizes quadradas* 2×2. *Em* A *definimos a seguinte relação:*

$$X\Re Y \leftrightarrow x_{11} + x_{22} = y_{11} + y_{22}.$$

Exemplo 4.3.7 *Seja* A *o conjunto das retas no plano. Em* A*, podemos definir a seguinte relação:*

$$r\Re s \leftrightarrow r \text{ é paralela a } s.$$

Observação 4.3.3 *Observe que em quase todos os exemplos acima não dissemos quem eram explicitamente os pares ordenados que pertenciam à relação. Ao invés disso, dissemos quando dois elementos se relacionam. É muito importante que você se convença de que isso que fizemos é equivalente a dar os pares ordenados da relação.*

4.4 Domínio e Imagem

Seja $\Re$ uma relação de A em B. O conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados que pertencem a $\Re$ é chamado de **Domínio** da relação $\Re$ e representado por $D(\Re)$ ou por $Dom(\Re)$. Em símbolos

$$D(\Re) = \{a \in A | \text{ Existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in \Re\}.$$

A **Imagem** de $\Re$, por sua vez, é o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados que pertencem a $\Re$. Vamos denotá-la por $I(\Re)$ ou $Im(\Re)$. Em símbolos

$$I(\Re) = \{b \in B | \text{ Existe } a \in A \text{ tal que } (a,b) \in \Re\}.$$

Exemplo 4.4.1 *No caso do exemplo (4.3.1), temos que* $D(\Re) = \{1,2\}$ *e* $I(\Re) = \{y,z\}$.

Exemplo 4.4.2 *No caso do exemplo (4.3.2), temos que* $D(\Re) = [-1,1]$ *e* $I(\Re) = [-1,1]$.

Exemplo 4.4.3 *No caso do exemplo (4.3.3), temos que* $D(\Re) = I(\Re) = \mathbb{R}$.

4.5 Relação Composta e Relação Inversa

Sejam A, B e C conjuntos e R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. A **Relação Composta de** S e R é relação de A em C, denotada por $S \circ R$, e definida por

$$S \circ R = \{(a,c) \in A \times C | \text{ Existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}.$$

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 4.5.1 *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z, w\}$ *e* $C = \{5, 6, 7, 8\}$ *e as relações* R *de* A *em* B *e* S *de* B *em* C *definidas, respectivamente, por*

$$R = \{(1, x), (1, y), (2, x), (3, w), (4, w)\}$$

e

$$S = \{(y, 5), (y, 6), (z, 8), (w, 7)\}.$$

Então

$$S \circ R = \{(1, 5), (1, 6), (3, 7), (4, 7)\}.$$

Exemplo 4.5.2 *Sejam* $A = B = C = \mathbb{R}$ *e as relações em* A *definidas por*

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\right\}$$

e

$$S = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | 2y + 3z = 4\right\}.$$

Se $(x, y) \in R$ *e* $(y, z) \in S$, *então*

$$x^2 + y^2 = 1$$

e

$$2y + 3z = 4.$$

Portanto, $y = \dfrac{4 - 3z}{2}$ *o que acarreta* $y^2 = \dfrac{16 - 24z + 9z^2}{4}$. *Logo,*

$$x^2 + \frac{16 - 24z + 9z^2}{4} = 1,$$

ou seja,

$$4x^2 - 24z + 9z^2 + 12 = 0$$

e daí

$$S \circ R = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | 4x^2 - 24z + 9z^2 + 12 = 0\right\}.$$

Sejam A e B conjuntos e $\Re$ uma relação de A em B. A **Relação Inversa** de $\Re$ é a relação de B em A, denotada por $\Re^{-1}$ e definida por

$$\Re^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in \Re\}.$$

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 4.5.3 *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{a, b\}$ *e considere a relação de* A *em* B *definida por*

$$\Re = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}.$$

Então, por definição segue que

$$\Re^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}.$$

Exemplo 4.5.4 *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$ *e considere a relação em* A *definida por*

$$\Re = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\right\}.$$

Vemos que

$$\Re^{-1} = \left\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2y\right\}.$$

Exemplo 4.5.5 *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$ *e considere a relação em* A *definida por*

$$\Re = \left\{(x, y) | x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\right\}.$$

Então vemos que

$$\Re^{-1} = \left\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\right\},$$

ou seja,

$$\Re^{-1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Observação 4.5.1 *Se* $\Re$ *é uma relação de* A *em* B *então valem as seguintes propriedades:*

1. $D(\Re^{-1}) = Im(\Re)$,

2. $I(\Re^{-1}) = D(\Re)$

3. $(\Re^{-1})^{-1} = \Re$.

Todos esses fatos seguem das definições. Para treinar no uso delas sugerimos que você prove-os como exercício.

4.6 Relações de Equivalência

Há dois tipos muito importantes de relações: as Relaões de Ordem e as Relações de Equivalência. Aqui vamos estudar as Relações de Equivalência. Para isso, definiremos alguns termos.

Definição 4.6.1 *Seja A um conjunto e $\Re$ uma relação em A. Diremos que $\Re$ é uma relação:*

- **Reflexiva** *Se para todo $x \in A$, tivermos $(x, x) \in A$. Em outros termos, $\Re$ é uma relação reflexiva se, para todo $x \in A$, tivermos $x \Re x$.*
- **Simétrica** *Se $(x, y) \in \Re$ implicar $(y, x) \in \Re$. Em outros termos, $\Re$ é uma relação simétrica se $x \Re y \Rightarrow y \Re x$.*
- **Transitiva** *Se $(x, y) \wedge (y, z) \in \Re$ implicar $(x, z) \in \Re$. Em outros termos, $\Re$ é uma relação transitiva se $x \Re y \wedge y \Re z \Rightarrow x \Re z$.*

Veremos agora vários exemplos.

Exemplo 4.6.1 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\Re$ a relação em A definida por $\Re = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1),$ Observe que:*

1. *$\Re$ não é reflexiva pois $(2, 2) \notin \Re$.*
2. *$\Re$ não é simétrica pois $(4, 1) \in \Re$, mas $(1, 4) \notin \Re$.*
3. *$\Re$ não é transitiva pois $(2, 4) \in \Re$ e $(4, 1) \in \Re$ mas $(2, 1) \notin \Re$.*

Exemplo 4.6.2 *Sejam $A = \mathbb{R}$ e $\Re$ a relação em A definida por $x \Re y \leftrightarrow x < y$. Observe que:*

1. *$\Re$ não é reflexiva pois $1 \not\Re 1$.*
2. *$\Re$ não é simétrica pois $1 \Re 2$ mas $2 \not\Re 1$.*
3. *$\Re$ é transitiva pois se $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

Exemplo 4.6.3 *Sejam $X = \{1, 2, 3\}$ e $A = \wp(X)$. Defina em A a relação $P \Re Q \leftrightarrow P \subseteq Q$. Observe que:*

1. *$\Re$ é reflexiva pois, para cada $P \in A$, teremos $P \Re P$ uma vez que todo conjunto está contido em si mesmo.*

2. *$\Re$ não é simétrica pois $\emptyset \Re \{1\}$ mas $\{1\} \not\Re \emptyset$.*

3. *$\Re$ é transitiva pois se $P \Re Q$ e $Q \Re T$ então teremos $P \subseteq Q$ e $Q \subseteq T$ e daí $P \subseteq T$, ou seja, $P \Re T$.*

Exemplo 4.6.4 *Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\Re$ a relação definida em A por $x \Re y \leftrightarrow x$ é divisor de y.[1] Observe que:*

1. *$\Re$ é reflexiva pois, para cada $x \in A$, temos que x é divisor de x.*

2. *$\Re$ não é simétrica pois $1 \Re 2$ mas $2 \not\Re 1$.*

3. *$\Re$ é transitiva pois se $x \Re y$ e $y \Re z$ então $y = k_1 x$ e $z = k_2 y$. Logo $z = k_1 k_2 x$, donde $x \Re z$.*

Exemplo 4.6.5 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\Re$ a relação em A definida por $\Re = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3),$ Observe que:*

1. *$\Re$ não é reflexiva pois $(1, 1) \notin \Re$.*

2. *$\Re$ não é simétrica pois $(2, 3) \in \Re$ mas $(3, 2) \notin \Re$.*

3. *$\Re$ não é transitiva pois $(1, 3) \in \Re$ e $(3, 1) \in \Re$ mas $(1, 1) \notin \Re$.*

Exemplo 4.6.6 *Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\Re$ a relação em A definida por $x \Re y \leftrightarrow x + y = 8$. Observe que*

1. *$\Re$ não é reflexiva pois $3 \not\Re 3$.*

2. *$\Re$ é simétrica pois se $x \Re y$ então $x + y = 8 = y + x$, logo $y \Re x$.*

3. *$\Re$ não é transitiva pois $2 \Re 6$ e $6 \Re 2$ mas $2 \not\Re 2$.*

Exemplo 4.6.7 *Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $\Re$ a relação em A por $\Re = \{(a, b), (c, b), (b, a), (a, c)\}$. Observe que:*

1. *$\Re$ não é reflexiva pois $(a, a) \notin \Re$.*

2. *$\Re$ não é simétrica pois $(c, b) \in \Re$ mas $(b, c) \notin \Re$,*

3. *$\Re$ não é transitiva pois $(a, b) \in \Re$ e $(b, a) \in \Re$ mas $(a, a) \notin \Re$.*

[1] Lembre que x ser divisor de y significa que existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $y = kx$.

Agora podemos definir o que entendemos por uma Relação de Equivalência.

Definição 4.6.2 *Sejam A um conjunto e $\Re$ uma relação em A. Diremos que $\Re$é uma* **Relação de Equivalência se ela for reflexiva, simétrica e transitiva**.

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 4.6.8 *Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $\Re$ a relação definida em A por $x\Re y \leftrightarrow x-y$ é divisível por 5. Observe que:*

1. *$\Re$ é reflexiva pois, para cada $x \in A$, temos que $x - x = 0$ e 0 é divisível por 5.*

2. *$\Re$ é simétrica pois se $x\Re y$ então $x - y$ é divisível por 5. Mas isso siginifica que $x - y = 5k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $y - x = -5k = 5(-k) = 5p$, donde concluímos que $y\Re x$.*

3. *$\Re$ é transitiva pois se $x\Re y$ e $y\Re z$ então $x - y = 5k_1$ e $y - z = 5k_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Daí $x - z = 5(k_1 - k_2) = 5p$, ou seja, $x\Re z$.*

Exemplo 4.6.9 *Sejam A o conjunto dos triângulos do plano e $\Re$ a relação em A definida por $S\Re T \leftrightarrow S$ é congruente a T. Observe que $\Re$ é uma relação de equivalência em A.*

Exemplo 4.6.10 *Sejam $A = \mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais e R a relação definida em A por $\frac{p}{q}\Re\frac{s}{t} \leftrightarrow pt = sq$. Observe que:*

1. *$\Re$ é reflexiva pois $pq = pq$.*
2. *$\Re$ é simétrica pois se $\frac{p}{q}\Re\frac{s}{t}$ então $pt = sq$. Mas isso acarreta que $\frac{s}{t}\Re\frac{p}{q}$.*
3. *$\Re$ é transitiva pois se $\frac{p}{q}\Re\frac{s}{t}$ e $\frac{s}{t}\Re\frac{u}{v}$ então $pt = sq$ e $sv = tu$. Logo $pv = uq$, ou seja, $\frac{p}{q}\Re\frac{u}{v}$.*

Exemplo 4.6.11 *Sejam A o conjunto dos segmentos orientados do plano ou do espaço e $\Re$ a relação em A definida por $u\Re v \leftrightarrow u$ e v têm o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido. Observe que a relação $\Re$ é de equivalência.*

Após os exemplos, vamos definir alguns termos.

Definição 4.6.3 *Sejam A um conjunto, $\Re$ uma relação de equivalência em A e $a \in A$. O conjunto dos elementos de A que se relacionam com a é chamado* **Classe de Equivalência do elemento** *a e será representado por $[a]$. Em símbolos:*

$$[a] = \{b \in A | a\Re b\}.$$

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 4.6.12 *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $\Re$ *a relação de equivalência definida em* A *por*

$$\Re = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}.$$

Então:

1. $[1] = \{1, 2\}$,
2. $[2] = \{1, 2\} = [1]$,
3. $[3] = \{3\}$,
4. $[4] = \{4\}$.

Exemplo 4.6.13 *No exemplo (4.6.8) observe que:*

1. $[0] = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ...\}$,
2. $[1] = \{..., -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, ...\}$,
3. $[2] = \{..., -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, ...\}$,
4. $[3] = \{..., -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, ...\}$,
5. $[4] = \{..., -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, ...\}$,

Vamos agora provar uma importante propriedade das classes de equivalência

Teorema 4.6.1 *Sejam* A *um conjunto,* $\Re$ *uma relação de equivalência em* A *e* $a, b \in A$*, dois elementos quaisquer. As seguintes condições sobre* a *e* b *são equivalentes:*

1. $a\Re b$,
2. $a \in [b]$,
3. $b \in [a]$,
4. $[a] = [b]$.

Demonstração:

(1)→(2) Suponha que $a\Re b$. Então, pela definição de $[b]$, segue que $a \in [b]$.

(2)→(3) Suponha que $a \in [b]$. Então $a\Re b$. Como $\Re$ é simétrica, temos que $b\Re a$. Daí, $b \in [a]$.

(3)→(4) Suponha que $b \in [a]$ e seja $x \in [b]$. Então temos que $b\Re a$ e $x\Re b$. Como $\Re$ é simétrica, segue que $a\Re b$ e $b\Re x$. Pela transitividade de $\Re$ segue que $a\Re x$. Novamente usando a simetria de $\Re$, segue que $x\Re a$, e daí $x \in [a]$. Logo $[b] \subseteq [a]$. Seja $x \in [a]$. Daí $x\Re a$. Como $b \in [a]$ e $\Re$ é simétrica, temos que $x\Re b$, ou seja, $x \in [b]$. Portanto $[a] \subseteq [b]$.

(4)→(1) Como $\Re$ é reflexiva, segue que $a \in [a] = [b]$. Portanto, $a\Re b$. ■

O teorema anterior traz algumas interessantes conclusões:

Corolário 4.6.1 $[a] = [b] \Leftrightarrow a\Re b$.

Corolário 4.6.2 $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$.

Definição 4.6.4 *Sejam A um conjunto e $\Re$ uma relação de equivalência em A. O conjunto cujos elementos são as classes de equivalência de $\Re$ é chamado de* **Conjunto Quociente** *da relação $\Re$ e é representado por $A/\Re$. Em símbolos*

$$A/\Re = \{[a] \,|a \in A\}.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.6.14 *No exemplo (4.6.8) temos* $A/\Re = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$.

Exemplo 4.6.15 *No exemplo (4.6.12) temos* $A/\Re = \{[1], [3], [4]\}$.

Observação 4.6.1 *Do Teorema (4.6.1) tiramos importantes conclusões acerca das classes de equivalência:*

1. *Toda classe de equivalência é não vazia, isto é, para todo $a \in A$, temos $[a] \neq \emptyset$,*

2. *Duas classes de equivalência distintas são disjuntas, isto é, $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.*

3. *A união de todas as classes de equivalência é igual ao conjunto A, isto é, $\bigcup_{a\in A} [a] = A$.*

Por causa das propriedades acima, diremos que o conjunto quociente de uma relação de equivalência $\Re$ num conjunto A é uma **partição** *do conjunto A.*

Definição 4.6.5 *Seja A um conjunto não vazio. Um subconjunto $\mathbb{A} \subseteq \wp(A)$ é dito uma* **Partição** *do conjunto A se satisfizer as seguintes condições:*

P1 - $X \neq \emptyset$ *para todo* $X \in \mathbb{A}$,

P2 - *Quaisquer que sejam* $X, Y \in \mathbb{A}$, *vale* $X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$,

P3 - $\bigcup_{X \in \mathbb{A}} = A$.

Exemplo 4.6.16 *Seja $A = \{1, 2\}$. Então as únicas partições de A são:*

1. $\mathbb{A}_1 = \{A\}$,
2. $\mathbb{A}_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$.

Exemplo 4.6.17 *Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então as únicas partições de A são:*

1. $\mathbb{A}_1 = \{A\}$,
2. $\mathbb{A}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$,
3. $\mathbb{A}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$,
4. $\mathbb{A}_4 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$,
5. $\mathbb{A}_5 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

Exemplo 4.6.18 *Seja $A = \mathbb{N}$ e considere $\mathbb{A} = \{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_1\}$, onde $\mathbb{A}_1 = \{$ naturais pares $\}$ e $\mathbb{A}_2 = \{$ naturais ímpares $\}$. Vemos que $\mathbb{A}$ é uma partição de A.*

Se tivermos definida em um conjunto A uma relação de equivalência então o conjunto quociente fornece uma partição de A. Isso foi o que vimos anteriormente. O que provaremos agora é que dada uma partição de um conjunto A podemos definir uma relação de equivalência em A e o conjunto quociente desta relação é justamente a partição dada.

Teorema 4.6.2 *Seja A um conjunto não vazio e seja $\mathbb{A}$ uma partição de A. Defina em A a seguinte relação*

$$x \Re y \Leftrightarrow x, y \text{ pertencem ao mesmo conjunto da partição.}$$

Então $\Re$ é uma relação de equivalência em A e $A/\Re = \mathbb{A}$.

Demonstração: Vejamos a reflexividade. Dado $x \in A$ temos, pela definição de partição, que ele pertence a algum membro, digamos X de $\mathbb{A}$. Daí $x\Re x$, portanto, $\Re$ é reflexiva. Vejamos agora a simetria. Suponha que $x\Re y$. Então x, y estão no mesmo membro da partição, ou seja, $y\Re x$. Suponha agora que $x\Re y$ e que $y\Re z$. Então x e y pertencem ao mesmo membro da partição e y e z também. Como dois membros quaisquer da partição não se interceptam, segue que x e z pertencem ao mesmo membro da partição. Assim $\Re$ é de equivalência. Vamos provar agora a última afirmação. Seja $X \in \mathbb{A}$. Então dado $x \in X$, temos que $[x] = X$, portanto $X \in A/\Re$, ou seja $\mathbb{A} \subseteq A/\Re$. Seja agora $a \in A$ e considere a classe de equivalência determinada por a. Então, pela definição da relação $\Re$, a classe de equivalência $[a]$ coincide com o conjunto ao qual a pertence. Logo, $[a] \in \mathbb{A}$. Portanto $A/\Re \subseteq \mathbb{A}$. ■

.

Exemplo 4.6.19 *Considere A o conjunto dos alunos de nossa sala de aula. Se agruparmos os alunos em conjuntos formados por alunos que nasceram no mesmo ano, teremos uma partição do conjunto A. A relação de equivalência associada a essa partição é: o aluno x está relacionado com o aluno y quando x e y tiverem nascido no mesmo ano.*

Exemplo 4.6.20 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\mathbb{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6, 7\}\}$. Essa partição de A induz uma relação de equivalência $\Re$ em A dada por*

$$\Re = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5),(4,4),(4,6),(4,7),(6,4),(6,6),(6,7),(7,4),(7,6$$

Exemplo 4.6.21 *Encontre as relações de equivalência associadas às partições dadas nos exemplos (4.6.16),(4.6.17) e (4.6.18).*

Capítulo 5

Funções

5.1 Definições e nomenclatura

Definição 5.1.1 *Sejam A e B conjuntos e f uma relação de A em B. Diremos que f é uma* **função de** A **em** B *se, para cada $a \in A$, existir um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

Observação 5.1.1 *Se f é uma função de A em B usaremos a notação $f : A \to B$ para denotarmos isso.*

Exemplo 5.1.1 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ e $f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$. Nesse caso, f é uma função de A em B.*

Exemplo 5.1.2 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ e $g = \{(1, 5), (2, 4), (1, 6)\}$. Nesse caso, g não é uma função de A em B pois não existe $b \in B$ de modo que $(3, b) \in f$. Além disso, temos $(1, 5) \in f$ e $(1, 6) \in f$.*

Exemplo 5.1.3 *Sejam C o conjunto das cidades, P o conjunto dos países e*

$$h = \{(c, p) \in C \times P | \text{ a cidade } c \text{ está no país } p\}.$$

Como cada cidade pertence a exatamente um país, temos que h é uma função de C em P.

Exemplo 5.1.4 *Sejam P o conjunto das pessoas e $i = \{(p, q) \in P \times P | \text{ A pessoa } p \text{ é genitor(a) da pes}$ Observe que como existem pessoas que não são genitores então i não é função. Além do mais, existem pessoas que são genitoras de mais de uma pessoa.*

Exemplo 5.1.5 *Sejam P o conjunto das pessoas e seja*

$$d = \{(p, x) \in P \times \wp(P) \,|x \text{ é conjunto de todos os filhos de } p\}.$$

Nesse caso, d é uma função de P em $\wp(P)$.

Exemplo 5.1.6 *Sejam A um conjunto não-vazio e $i_A = \{(a, a) \in A \times A | a \in A\}$. Nesse caso, i_A é uma função de A em A conhecida como* **função identidade** *em A.*

Exemplo 5.1.7 *Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$. Nesse caso temos que f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois o dado $x \in \mathbb{R}$, o seu quadrado assume apenas um valor.*

Exemplo 5.1.8 *Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y^2\}$. Nesse caso temos que f não é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. De fato, $(1, 1) \in f$ e $(1, -1) \in f$. Além disso, não existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(-1, b) \in f$, já que o quadrado de qualquer número real é positivo.*

Observação 5.1.2 *Seja $f : A \to B$ uma função de A em B. Então dado $a \in A$, a definição de função atesta que existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Este único b é chamado de* **Valor de f em** *a ou* **imagem de** *a* **por** *f ou* **resultado de aplicar** *f* **em** *a ou apenas* f **de** *a. Vamos representá-lo de uma forma bem sugestiva, por $f(a)$). A relação mais importante entre a e $f(a)$ é*

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow b = f(a).$$

Observação 5.1.3 *Em geral uma função $f : A \to B$ é dada especificando um modo que permita obter,* **de maneira única** *$f(a)$ a partir de a. Essa maneira pode ser através de*

- *Uma* **Fórmula***, como nos cursos de Cálculo, no ensino médio.*
- *Uma* **Tabela***, como nas copiadoras, padarias, etc.*
- *Um* **Gráfico***, como nos eletrocardiogramas.*

Tanto é assim que temos a seguinte definição alternativa de função que também é bastante utilizada, principalmente no ensino médio e na maioria dos cursos universitários.

Definição 5.1.2 *Dados os conjuntos A e B, uma função de A em B (simbolizada por $f : A \to B$) é uma regra (uma maneira, um modo, um procedimento) que permite associar a cada elemento $a \in A$, um único elemento do conjunto B.*

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.1.9 *Sejam A o conjunto de todos os triângulos do plano, $B = \mathbb{R}$ e f a regra que associa cada triângulo à sua área. Essa regra determina una função de $f : A \to B$.*

Exemplo 5.1.10 *Sejam S o conjunto dos segmentos de reta do plano, Δ o conjunto das retas desse mesmo plano e g a regra que associa cada segmento à sua mediatriz (i.e. a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular a ele). Essa regra determina uma função $g : A \to \Delta$.*

Exemplo 5.1.11 *Sejam $A = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ e* det *a regra que associa cada matriz ao seu determinante. Essa regra determina uma função* $\det : A \to B$.

Exemplo 5.1.12 *Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e j a regra que associa cada número x ao seu quadrado x^2. Essa regra determina uma função $j : A \to B$.*

Definição 5.1.3 *Seja $f : A \to B$ uma função de A em B. O conjunto A é chamado de* **Domínio da função** f *e o conjunto B de* **Contra-domínio da função** f**.**

Definição 5.1.4 *Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ duas funções. Diremos que elas são* **iguais** *e representaremos isso por $f = g$, se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.*

5.2 Imagens diretas e inversas

Definição 5.2.1 *Seja $f : A \to B$ uma função e $P \subseteq A$. A* **Imagem direta do conjunto** P **pela função** f *é o conjunto representado por $f(P)$ e definido por*

$$f(P) = \{f(p) \,|p \in P\} = \{b \in B | b = f(p) \text{ para algum } p \in P\}.$$

Em palavras, a imagem direta de um conjunto P por uma função f é o conjunto formado pelos valores assumidos por f quando olhamos para a função restrita ao conjunto P. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.2.1 *Sejam $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3\}$ e $f : A \to B$ dada por $f(a) = 1, f(b) = 2$ e $f(c) = 1$. Então:*

- $P = \{a, b\} \Rightarrow f(P) = \{f(a), f(b)\} = \{1, 2\},$

- $P = \{b, c\} \Rightarrow f(P) = \{f(b), f(c)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\},$

- $P = \{a, c\} \Rightarrow f(P) = \{f(a), f(c)\} = \{1\}$.

Exemplo 5.2.2 *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Então:*

- $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow f(P) = \{0, 1, 4\}$.

- $P = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2\} \Rightarrow f(P) = \{x | 1 < x < 4\} = (1, 4)$.

- $P = \mathbb{R} \Rightarrow f(P) = [0, +\infty) = \mathbb{R}_+$.

Definição 5.2.2 *Seja* $f : A \to B$ *uma função de* A *em* B. *O conjunto* $f(A)$ *é chamado de* **Imagem da função** f. *Vamos denotá-la por* $I(f)$.

Exemplo 5.2.3 *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : A \to B$ *a função definida por* $f(x) = x^2 + 1$. *Veja que* $I(f) = [1, +\infty)$. *Para provarmos isso, seja* $y \in [1, +\infty)$. *Queremos encontrar* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = y$. *Vamos ver quem deveria ser um* x *nessas condições. Precisamos resolver a equação* $f(x) = y$, *ou seja, descobrir um* x *que a satisfaça. Mas isso equivale a descobrir pelo menos um* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x^2 + 1 = y$. *Com isso temos que,* $x^2 = y - 1$ *e daí* $x = \pm\sqrt{y-1}$. *Observe que* $x \in \mathbb{R}$, *já que* $y \in [1, +\infty)$. *Isso nos mostra que* $f(x) = y$. *Na realidade encontramos dois valores para* x *para os quais* $f(x) = y$. *Mas isso não é problema, já que dois elementos distintos no domínio podem ter a mesma imagem.*

Exemplo 5.2.4 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (x + y, x - y)$. *Então* $I(f) = \mathbb{R}^2$. *De fato, podemos provar esse fato usando argumentos de Álgebra Linear, mas preferiremos fazer essa prova de uma maneira mais construtiva. Seja* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Queremos encontrar um par* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = (a, b)$. *Para fazer isso, devemos encontrar um par* (x, y) *tal que* $x + y = a$ *e* $x - y = b$. *Isso equivale a resolver o sistema:*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

que é um sistema possível e determinado. Sendo assim, existe um par (x, y) *tal que* $f(x, y) = (a, b)$ *e, portanto,* $I(f) = \mathbb{R}^2$.

Definição 5.2.3 *Seja* $f : A \to B$ *uma função e* $Q \subseteq B$. *A* **Imagem inversa de** Q **pela função** f *é o conjunto representado por* $f^{-1}(Q)$ *e definido por*

$$f^{-1}(Q) = \{a \in A | f(a) \in Q\}.$$

Em palavras, a imagem inversa de um conjunto Q pela função f é o conjunto formado pelos elementos do domínio cuja imagem pertence ao conjunto Q. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.2.5 *No exemplo (5.2.1) temos* $f^{-1}(\{1\}) = \{a, c\}$ *e* $f^{-1}(\{2,3\}) = \{b\}$.

Exemplo 5.2.6 *No exemplo (5.2.2) temos:*

- $f^{-1}(\{-9\}) = \emptyset$,
- $f^{-1}(\{4,9\}) = \{-2, 2, -3, 3\}$,
- $f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}) = \emptyset$,
- $f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} | 4 \leq x \leq 25\}) = f^{-1}([4, 25]) = [-5, -2] \cup [2, 5]$,

Vamos agora enunciar algumas propriedades das imagens diretas e inversas de uma função.

Teorema 5.2.1 *Sejam* $f : A \to B$ *uma função,* $X, Y \subseteq A$ *e* $Z, W \subseteq B$. *Então valem as seguintes propriedades:*

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
2. $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.
3. $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$.
4. $f(\emptyset) = \emptyset$.
5. $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$.
6. $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$.
7. $f^{-1}(A') = (f^{-1}(A))'$, *onde a* $'$ *indica o complementar.*
8. $Z \subseteq W \Rightarrow f^{-1}(Z) \subseteq f^{-1}(W)$.
9. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Demonstração:

1. Seja $b \in f(X \cup Y)$. Então $b = f(a)$, com $a \in X \cup Y$. Há então dois casos: $a \in X$ ou $a \in Y$. Se $a \in X$ então, como $b = f(a)$, segue que $b \in f(X) \subset f(X) \cup f(Y)$. Se $a \in Y$ então, como $b = f(a)$, segue que $b \in f(Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$. Portanto, $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$. Seja agora $b \in f(X) \cup f(Y)$. Então há dois casos: $b \in f(X)$ ou $b \in f(Y)$. Se $b \in f(X)$, então $b = f(a)$, com $a \in X$. Como $a \in X$ acarreta $a \in X \cup Y$, segue que $b = f(a)$, com $a \in X \cup Y$, ou seja, $b \in f(X \cup Y)$. Se $b \in f(Y)$ então $b = f(a)$ com $a \in Y$. Como $a \in Y$ acarreta $a \in X \cup Y$, segue que $b = f(a)$, com $a \in X \cup Y$, ou seja, $b \in f(X \cup Y)$. Assim $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$.

2. Seja $b \in f(X \cap Y)$. Então $b = f(a)$, com $a \in X \cap Y$. Como $a \in X$, temos que $b \in f(X)$ e, como $a \in Y$, segue que $b \in f(Y)$. Logo, $b \in f(X) \cap f(Y)$.

3. Seja $b \in f(X)$. Então $b = f(a)$, onde $a \in X$. Como $X \subseteq Y$, segue que $a \in Y$, e daí $b \in f(Y)$.

4. Se $f(\emptyset) \neq \emptyset$, então existiria $b \in f(\emptyset)$. Assim, $b = f(a)$, com $a \in \emptyset$. Mas o conjunto $\emptyset$ não possui elementos e isso é uma contradição. Logo $f(\emptyset) = \emptyset$.

5. Seja $b \in f^{-1}(Z \cup W)$. Então $f(b) \in Z \cup W$. Daí $f(b) \in Z$ ou $f(b) \in W$. Se ocorrer o primeiro caso, temos que $b \in f^{-1}(Z)$ e se ocorrer o segundo, $b \in f^{-1}(W)$, de modo que, em qualquer dos casos, temos que $b \in f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$. Agora tome $b \in f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$. Então $b \in f^{-1}(Z)$ ou $b \in f^{-1}(W)$. Se ocorrer o primeiro caso, temos que $f(b) \in Z \subseteq Z \cup W$, o que acarreta $b \in f^{-1}(Z \cup W)$. Se ocorrer o segundo caso, temos que $f(b) \in W \subseteq Z \cup W$, o que acarreta $b \in f^{-1}(Z \cup W)$. Assim, em qualquer dos dois casos, temos que $b \in f^{-1}(Z \cup W)$.

6. Seja $b \in f^{-1}(Z \cap W)$. Então $f(b) \in Z \cap W$. Daí $f(b) \in Z$ e $f(b) \in W$. Assim, temos que $f(b) \in Z \cap W$ e, dessa forma, temos que $b \in f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$. Agora tome $b \in f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$. Então $b \in f^{-1}(Z)$ e $b \in f^{-1}(W)$. Dessa forma temos que $f(b) \in Z$ e $f(b) \in W$, o que acarreta $f(b) \in Z \cap W$ e, portanto, $b \in f^{-1}(Z \cap W)$.

7. Seja $b \in f^{-1}(A')$. Daí, $f(b) \in A'$, o que significa que $f(b) \notin A$, o que significa ainda que $f(b) \in A'$, o que nos permite concluir que $b \in (f(A))'$.

8. Seja $b \in f^{-1}(Z)$. Então $f(b) \in Z$. Como $Z \subset W$, temos que $f(b) \in W$, o que acarreta $b \in f^{-1}(W)$.

9. Se $f^{-1}(\emptyset) \neq \emptyset$, existiria b tal que $f(b) \in \emptyset$. Mas isso é absurdo. Logo $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. ■

5.3 Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Definição 5.3.1 *Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função de A em B. Diremos que f é* **Injetora** *se elementos diferentes em A tiverem imagens diferentes em B. Em símbolos,*

$$f : A \to B \text{ é injetora } \Leftrightarrow (a, b \in A)\,(a \neq b) \Rightarrow (f\,(a) \neq f\,(b))\,.$$

Observação 5.3.1 *Se $f : A \to B$ é injetora, também usam-se os termos:* **Injetiva** *ou* **um-a-um** *para dizer isso.*

Observação 5.3.2 *Uma maneira mais prática de provar que uma dada função é injetora é provar que*

$$(a, b \in A)\,(f\,(a) = f\,(b)) \Rightarrow (a = b)\,.$$

Definição 5.3.2 *Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função de A em B. Diremos que f é* **Sobrejetora** *se todo elemento de B for imagem de pelo menos um elemento de A. Em símbolos,*

$$f : A \to B \text{ é sobrejetora } \Leftrightarrow (\forall b \in B)\,(\exists a \in A)\,(b = f\,(a))\,.$$

Observação 5.3.3 *Se $f : A \to B$ é sobrejetora, também usam-se os termos:* **Sobrejetiva** *ou* **Sobre** *para dizer isso.*

Definição 5.3.3 *Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função de A em B. Diremos que f é* **Bijetora** *se f for injetora e sobrejetora.*

Vamos revisitar agora diversos exemplos vistos anteriormente.

Exemplo 5.3.1 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}\,, B = \{4, 5, 6\}$ e $f = \{(1, 5)\,, (2, 4)\,, (3, 5)\}$. A função f não é injetora nem sobrejetora.*

Exemplo 5.3.2 *Sejam $C = \{$ conjunto de todas as cidades $\}\,, N = \{$ conjunto de todos os países$\}$ e*

$$h = \{(c, n) \in C \times N |\ \text{a cidade } c \text{ está no país } n\}\,.$$

Essa função não é injetora, mas é sobrejetora.

Exemplo 5.3.3 *Sejam P o conjunto das pessoas e*

$$d = \{(p, x) \in P \times \wp\,(P)\,| x = \{ \text{ conjunto de todos os filhos naturais de } p\}\}\,.$$

A função d não é injetora nem sobrejetora.

Exemplo 5.3.4 *Sejam A o conjunto de todos os triângulos do plano, $B = \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ a regra que associa cada triângulo à sua área. Essa função não é injetora mas é sobrejetora.*

Exemplo 5.3.5 *Sejam S o conjunto dos segmentos de reta do plano e Δ o conjunto das retas do mesmo plano. A função que associa cada segmento à sua mediatriz não é injetora e é sobrejetora.*

Exemplo 5.3.6 *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. A função f é injetora mas não é sobrejetora pois não existe elemento $x \in \mathbb{Z}$ que satisfaz $f(x) = \pi$. Por outro lado, se considerarmos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 3$, então g é injetora e sobrejetora e, portanto, bijetora.*

Exemplo 5.3.7 *A função $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ é injetora, mas não é sobrejetora.*

5.4 Função Inversa

Em geral, mesmo que uma dada relação seja função, pode não acontecer o mesmo com a sua relação inversa. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ e $f = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, d)\}$. A relação f é uma função de A em B. Agora note que $f^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (c, 3), (d, 4)\}$, **NÃO** é uma função de B em A. Um interessante resultado que estabelece quando a relação inversa de uma função também é função é o seguinte:

Teorema 5.4.1 *Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função bijetora. Então f^{-1} é uma função de B em A. Além disso, f^{-1} é bijetora.*

Demonstração: Primeiro vamos provar que f^{-1} é uma função de B em A. Para isso, seja $b \in B$. Devemos mostrar que existe um único $a \in A$ tal que $(b, a) \in f^{-1}$. Vamos lá. Como f é sobrejetora, existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Daí $(a, b) \in f$ e, portanto, $(b, a) \in f^{-1}$. Mostraremos agora que esse a é único. Suponha que $(b, a_1) \in f^{-1}$ e que $(b, a_2) \in f^{-1}$. Logo, $(a_1, b) \in f$ e $(a_2, b) \in f$. Assim, $f(a_1) = b = f(a_2)$. Como f é injetora, segue que $a_1 = a_2$. Portanto, f^{-1} é função.
Agora vamos provar que f^{-1} é uma função bijetora. Começamos mostrando que ela é injetora. Suponha que $f^{-1}(a) = f^{-1}(b)$. Digamos que esse valor comum seja c, ou seja,$f^{-1}(a) = c = f^{-1}(b)$. Portanto, $(a, c) \in f^{-1}$ e $(b, c) \in f^{-1}$. Daí, $(c, a) \in f$ e

$(c, b) \in f$. Como f é função, devemos ter $a = b$, o que mostra que f^{-1} é injetora. Mostremos agora que f^{-1} é sobrejetora. Seja $a \in A$. Então, $b = f(a)$ é tal que $(a, b) = (a, f(a)) \in f$. Portanto, $(b, a) \in f^{-1}$, ou seja, $f^{-1}(b) = a$ e daí f^{-1} é sobrejetora. ■

Observação 5.4.1 *Quando $f : A \to B$ é bijetora, a função $f^{-1} : B \to A$ é chamada de* **Função Inversa de** *f.*

5.5 Composição de Funções

Como as funções são casos particulares de relações então faz sentido falarmos na composta de duas funções. O fato mais importante agora é que a composta de duas funções é uma função. De fato, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são duas funções, a relação composta de g e f é a relação de A em C definida por

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C | \text{ Existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in f \wedge (b, c) \in g\}.$$

Para provarmos que ela é uma função, precisamos provar duas coisas:

1. **Todo elemento de A se relaciona com algum elemento de C.**
   De fato, seja $a \in A$. como f é função de A em B temos que existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Por outro lado, $g : B \to C$ é função e daí, existe $c \in C$ tal que $(b, c) \in g$. Logo, pela definição de composta, $(a, c) \in g \circ f$.

2. **Todo elemento de A se relaciona com um único elemento de C.**
   Suponha que $(a, c_1) \in g \circ f$ e $(a, c_2) \in g \circ f$. Então, por definição, existem $b_1 \in B$ tais que $(a, b_1) \in f$ e $(b_1, c_1) \in C$, bem como $b_2 \in B$ tal que $(a, b_2) \in f$ e $(b_2, c_2) \in g$. como f é função, devemos ter $b_1 = b_2$. Como g é função, devemos ter $c_1 = c_2$.

Agora sim, podemos definir a **Função Composta de g e f** definida como sendo a relação composta de g e f. Pelo que provamos acima ela de fato é uma função.

Exemplo 5.5.1 *Considere $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{x, y, z, w, t\}$ e as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definidas respectivamente por $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 4), (d, 5)\}$ e $g = \{(1, x), (2, y), (3, y), (4, w), (d, x)\}$. Então $g \circ f$ é dada por $g \circ f = \{(a, x), (b, x), (c, w), (d, x)\}$.*

Observação 5.5.1 *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções dadas por regras então $g \circ f$ é definida pela regra $g \circ f(x) = g(f(x))$, para cada $x \in A$.*

Exemplo 5.5.2 *Se* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é dada por* $f(x)=x+1$ *e* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *por* $g(x)=x^2$*, então* $g\circ f(x)=g(f(x))=(x+1)^2$ *e* $f\circ g(x)=f(g(x))=x^2+1$.

Recordamos que, dado um conjunto $A\neq\emptyset$, a função $i_A:A\to A$ dada por $i(x)=x$ é conhecida como função identidade de A.

Teorema 5.5.1 *Suponha que* $f:A\to B$ *é uma função. Então* f *é bijetora se e somente se, existe uma função* $g:B\to A$ *tal que*

$$g\circ f=id_A \text{ e } f\circ g=id_B.$$

Demonstração: Suponhamos que $f:A\to B$ seja bijetora. Vamos mostrar que a função $g=f^{-1}$ satisfaz $g\circ f=id_A$ e $f\circ g=id_B$. Vamos lá. Seja $x\in A$. Então $(x,f(x))\in f$. Daí $(f(x),x)\in f^{-1}$. Logo, por definição,

$$g(f(x))=f^{-1}(f(x))=x,$$

donde segue que $g\circ f=id_A$. Seja agora $y\in B$. Então $(y,f^{-1}(y))\in f^{-1}$. Logo $(f^{-1}(y),y)\in f$. Portanto, $f^{-1}(f(y))=f(g(y))=y$. Portanto $f\circ g=id_B$.
Suponha agora que exista $g:B\to A$ tal que $g\circ f=id_A$ e $f\circ g=id_B$. Vamos provar primeiro que f é injetora. Para isso, sejam $a,b\in A$ tal que $f(a)=f(b)$. Logo $g(f(a))=g(f(b))$, ou seja, $a=b$. Portanto f é injetora. Mostremos agora que f é sobrejetora. Seja $b\in B$. Então sabemos que $f(g(b))=b$. Se fizermos $g(b)=a$ teremos $f(a)=b$ e, portanto, f é sobrejetora. ■

Capítulo 6

Cardinais

Estudaremos neste texto a noção de número cardinal de um conjunto. Para conjuntos finitos ele corresponde ao que esperamos: o número cardinal de um conjunto finito é a sua quantidade de elementos. Para conjuntos infinitos isso já muda. O número cardinal não será definido. Diremos apenas quando dois conjuntos têm o mesmo número cardinal. A partir disso podemos comparar números cardinais e fazermos operações aritméticas entre eles.

6.1 Definições e alguns exemplos

Definição 6.1.1 *Sejam A e B conjuntos. Diremos que A e B têm a* **mesma cardinalidade** *ou que* **são equivalentes** *ou que* **têm o mesmo número cardinal** *se existe uma função bijetora $f : A \to B$. Denotaremos isso por $A \sim B$.*

Exercício 1 *Sejam A, B e C conjuntos. Prove que:*

1. $A \sim A$,
2. *Se* $A \sim B$ *então* $B \sim A$,
3. *Se* $A \sim B$ *e* $B \sim C$ *então* $A \sim C$.

Observação 6.1.1 *Na definição acima não está dito o que é número cardinal de um conjunto. O que está dito é quando dois conjuntos possuem o mesmo número cardinal.*

Observação 6.1.2 *Logo mais será conveniente tratar o número cardinal de um conjunto A como um número no sentido em que entendemos. Portanto, será conveniente adotarmos uma notação para ele. A mais usada é $|A|$.*

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 6.1.1 *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{\nabla, \diamond, \odot\}$. *Observe que os conjuntos* A *e* B *têm o mesmo cardinal. Nesse caso, bem como no caso de qualquer conjunto finito, podemos interpretar o número cardinal como sendo o número de elementos do conjunto. Assim, podemos dizer que* $|A| = 3$, *onde o símbolo* 3 *tem o significado de que qualquer conjunto equivalente ao conjunto* A *possui essa mesma quantidade de elementos. Por um raciocínio análogo, o conjunto* $\{1, 2, ..., n\}$ *tem número cardinal igual a* n. *Faremos a convenção de que* $|\emptyset| = 0$. *Trataremos dos conjuntos com número cardinal finito mais detalhadamente na próxima seção.*

Exemplo 6.1.2 *Seja* $A = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, ...\}$ *e* $B = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. *Aqui as coisas começam a ficar diferentes porque aparentemente o conjunto* A *tem mais elementos que o conjunto* B, *já que ele tem o elemento* 0 *a mais. Entretanto, a função* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x - 1$ *é bijetora . Assim* A *e* B *têm o mesmo cardinal.*

Exercício 2 *Prove que a função do exemplo anterior é bijetora*

Exemplo 6.1.3 *Em seu livro "Diálogo sobre duas novas ciências"o cientista italiano Galileu Galilei já discutia acerca de conjuntos com a mesma cardinalidade. O seguinte diálogo foi extraído da tradução [2]:*

Salviati: *...Portanto se digo que todos os números, compreendendo os quadrados e os não-quadrados, são mais [numerosos] que os simples quadrados, enunciarei uma proposição verdadeira, não é assim?*
Simplício: *Não se pode dizer de outro modo.*
Salviati: *Se pergunto a seguir, quantos são os números quadrados, pode-se responder com certeza que são tantos quanto são as raízes, posto que cada quadrado tem sua raiz, cada raiz tem seu quadrado, nem existe quadrado que possua mais que uma só raiz, nem raiz com mais que um só quadrado.*
Simplício: *Assim é.*
Salviati: *Mas se pergunto quantas são as raízes, não se pode negar que elas são tantas quanto os números, visto que não existe nenhum número que não seja raiz de algum quadrado. Sendo assim, é conveniente dizer que temos tantos números quadrados quanto números, porque são tantos quanto suas raízes, e as raízes são todos os números.*
Em uma terminologia moderna, Galileu estabelece que o conjunto dos números naturais

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *e o conjunto dos quadrados* $S = \{1, 4, 9, 16, ...\}$ *têm o mesmo número cardinal. O argumento de Galileu é precisamente o mesmo que usamos, ou seja, a função* $h : \mathbb{N} \to S$ *dada por* $h(n) = n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *é bijetora. Isso segue do fato de que* $k : S \to \mathbb{N}$ *dada por* $k(n) = \sqrt{n}$ *para todo* $n \in S$*, é a inversa de* h*.*

Exemplo 6.1.4 *Os conjuntos* $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$ *têm o mesmo número cardinal. De fato, a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *dada por*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & se \quad n \text{ é par}, \\ -\frac{n-1}{2}, & se \quad n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

é bijetora.

Exercício 3 *Prove que a função definida no exemplo anterior é bijetora.*

Exemplo 6.1.5 *Sejam* $[a, b]$ *e* $[c, d]$ *dois intervalos fechados em* $\mathbb{R}$*, com* $a < b$ *e* $c < d$*. Então* $[a, b] \sim [c, d]$*. Seja* $g : [a, b] \to [c, d]$ *dada por*

$$g(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c,$$

para todo $x \in [a, b]$*. Não é difícil mostrar que a função* g *é bijetora. Um argumento semelhante mostra que intervalos abertos da forma* (a, b) *e* (c, d) *têm o mesmo número cardinal.*

Exercício 4 *Prove que a função* g *do exemplo anterior é bijetora.*

Exercício 5 *Prove que:*

1. $[c, +\infty) \sim [a, b]$,

2. $(-\infty, c] \sim [a, b]$,

3. $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

6.2 Números Cardinais Finitos

Veremos agora um importante tipo de número cardinal que é aquele associado aos conjuntos finitos. Já possuímos contato com ele desde pequenos quando efetuamos contagens. Seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por I_n o conjunto dos números naturais entre 1 e n, ou seja, $I_n = \{1, ..., n\} = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq n\}$. Assim, $I_1 = \{1\}, I_2 = \{1, 2\}$, etc.

Definição 6.2.1 *Diremos que um conjunto A é **finito** se $A = \emptyset$ ou se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim I_n$. Um conjunto que não é finito será chamado de **infinito**.*

Exemplo 6.2.1 *O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. De fato, seja $f : \mathbb{N} \to I_n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Usaremos o seguinte truque para mostrarmos que f não pode ser bijetora: suporemos que ela é sobrejetora e mostraremos que ela não pode ser injetora. Vamos lá. Como f é sobrejetora, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{N}$ tais que $f(x_1) = 1, f(x_2) = 2, ..., f(x_n) = n$. Como o conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ é finito, ele possui maior elemento, digamos x_k. Como $x_k + 1 > x_k$, segue que $x_k + 1 \notin \{x_1, ..., x_n\}$. Agora note que $f(x_k + 1) \in \{1, 2, ..., n\}$. Daí, $f(x_k + 1) = f(x_j)$, mas $x_k + 1 \neq x_j$, donde concluímos que f não é injetora. Portanto ela não pode ser bijetora. Daí, $\mathbb{N}$ é infinito.*

Observação 6.2.1 *Se A é um conjunto finito não vazio então, por definição, existe uma bijeção entre I_n e A para algum $n \in \mathbb{N}$. Essa bijeção pode ser pensada como uma contagem dos elementos de A. Podemos perguntar: Pode existir $m \in \mathbb{N}$, com $m \neq n$ de modo que exista uma bijeção entre I_m e A? Dito de outra maneira: Será que duas contagens dos elementos de A podem fornecer diferentes resultados? Bom, caso as contagens tenham sido feitas corretamente a resposta a essa pergunta é **NÃO** e a demonstração será dada logo adiante. Portanto, o número n que aparece na definição anterior é único para cada conjunto A e será chamado o seu **Número de elementos.***

Observação 6.2.2 *Denotaremos por n o número cardinal de um conjunto finito com n elementos.*

Observação 6.2.3 *Se A for um conjunto finito, então tanto existe uma bijeção entre I_n e A como uma entre A e I_n. No que segue sempre usaremos esse fato sem maiores comentários.*

O Teorema a seguir será muito importante para o restante de nossa discussão.

Teorema 6.2.1 *Sejam m e n números naturais com $m > n$ e $f : I_m \to I_n$ uma função. Então f não é injetora.*

Demonstração: Usaremos indução em n. O que queremos provar é que, para todo número natural $m > n$, se $f : I_m \to I_n$ é uma função, então f não é injetora. Comecemos com o caso $n = 1$. Temos que se $m > 1$ então $f : I_m \to \{1\}$ é tal que $f(1) = f(m) = 1$. Como $m \neq 1$, temos que f não é injetora. Suponhamos agora que o resultado seja válido para n e vamos prová-lo para $n+1$. Seja $f : I_m \to I_{n+1}$ uma função, com $m > n+1$. Suponhamos, por absurdo, que f seja injetora. Considere k, com $1 \leq k \leq m$, o único número para o qual $f(k) = n+1$. Defina então a seguinte função $g : I_m \to I_{n+1}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \neq k, m \\ n+1, & \text{se} \quad x = m \\ f(m) & \text{se} \quad x = k \end{cases}$$

Veja que a única diferença entre f e g é nos valores em k e em m. Como $m > n+1$, temos que $m-1 > n$ e podemos definir uma função $h : I_{m-1} \to I_n$ por $h(x) = g(x)$. Note que h é injetora, pois g o é. Mas isso é uma contradição. Logo f não pode ser injetora e o resultado está provado. ∎

Veremos agora algumas conseqüências desse resultado.

Corolário 6.2.1 *Se $f : I_m \to I_n$ é injetora então $m \leq n$.*

Demonstração: Imediatamente a partir do Teorema 1. Pois se $m > n$ então f não pode ser injetora, um absurdo. ∎

Corolário 6.2.2 *Se $f : I_m \to I_n$ é sobrejetora então $m \geq n$.*

Demonstração: Suponha que não, isto é, que $m < n$. Como f é sobrejetora, podemos definir $g : I_n \to I_m$ da seguinte maneira $g(x) = y$, onde y é algum elemento de I_m cujo f vale x. A função g é injetora porque se $g(a) = g(b) = c$, então pela definição de g segue que $a = f(c) = b$. Mas o que encontramos foi uma função injetora de I_n em I_m com $n > m$. Isso é um absurdo pelo Teorema 1. ∎

Corolário 6.2.3 *Se $f : I_m \to A$ e $g : I_n \to A$ são bijeções então $m = n$.*

Demonstração: É imediata a partir dos dois corolários anteriores. ∎

Corolário 6.2.4 *Se $f : A \to B$ é bijeção e um dos dois conjuntos for finito, o outro também o será.*

Demonstração: Suponha que A seja finito e que $f : A \to B$ seja uma bijeção. Como A é finito, existe uma bijeção $g : I_n \to A$. Então $f \circ g : I_n \to B$ é uma bijeção pois é composta de bijeções. Logo B é finito. Se B for finito, usa-se o mesmo argumento para mostrar que A também é finito. ∎

Teorema 6.2.2 *Se $B \subset A$ e A é finito, então B é finito.*

Demonstração: Primeiro vamos provar no caso particular de A ser algum I_n. O que queremos provar é que se $B \subset I_n$ então B é finito. Se $B = \emptyset$, então ele é finito por definição. Suponhamos então que $B \neq \emptyset$. Vamos provar que B é finito por indução em n. Comecemos pelo caso $n = 1$. Se $n = 1$ então $I_1 = \{1\}$ e, como $B \neq \emptyset$, temos que $B = I_1$, sendo, portanto, finito. Suponhamos agora o resultado válido para n e vamos prová-lo para $n+1$. Seja $B \subset I_{n+1}$, não-vazio. Se $n+1 \notin B$, segue que $B \subset I_n$ e é finito, pela hipótese de indução. Se $n+1 \in B$, então $B - \{n+1\} \subset I_n$ sendo, pois, finito. Assim, existe $f : I_k \to B - \{n+1\}$, para algum k. Defina agora a função $g : I_{k+1} \to B$ por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq k+1 \\ n+1 & \text{se} \quad x = k+1 \end{cases}$$

É fácil ver que a função g é uma bijeção. Logo o resultado vale para $n+1$ e pelo princípio de indução, ele vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha agora que A não seja necessariamente I_n. Como A é finito, existe $f : A \to I_n$ bijetora. Então se considerarmos g como sendo a restrição de f a B, vemos que $g : B \to I(g)$ é bijetora. Como $I(g) \subset I_n$, segue que ele é finito. Logo, pelo Corolário anterior temos que B é finito. ∎

Teorema 6.2.3 *Sejam A um conjunto finito e $B \subset A$ com $B \neq A$, não pode existir bijeção entre A e B.*

Demonstração: Comecemos como antes, provando no caso particular de $A = I_n$. Se $B = \emptyset$, então não existe nenhuma função entre I_n e B, muito menos alguma que seja bijetora. Vamos provar por indução em n. Aqui um detalhe, a indução começa em $n = 2$. Observe que $B \subset I_2$ e $B \neq I_2$. Como B é finito, existe uma bijeção entre B e I_1 e portanto, se houver uma bijeção entre B e I_2, teremos encontrado uma bijeção entre I_1 e I_2, o que não é possível pelo Corolário (3). Assim, provamos o caso $n = 2$. Suponhamos agora o resultado válido para n e vamos prová-lo para $n+1$. Seja então $B \subset I_{n+1}$ e suponhamos, por absurdo, que exista $f : I_{n+1} \to B$, bijetora. Aqui há dois casos a considerar:

1. Se $n+1 \in B$, temos que $B - \{n+1\} \subset I_n$ e $B - \{n+1\} \neq I_n$. Seja $k \in I_{n+1}$ tal que $f(k) = n+1$. Defina $g : I_{n+1} \to B$ por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq n+1, k \\ f(n+1), & \text{se} \quad x = k \\ n+1, & \text{se} \quad x = n+1 \end{cases}$$

Observe que essa construção continua consistente, mas desnecessária, para o que vem em seguida se $f(n+1) = n+1$. A função g só difere da f nos pontos k e $n+1$. Agora defina $h : I_n \to B - \{n+1\}$, como sendo a restrição de g a I_n. Vemos que g é bijetora e, conseqüentemente h. Portanto, acabamos de violar a hipótese de indução, ocasionando um absurdo.

2. Se $n+1 \notin B$, então $B \subset I_n$, mas já não podemos afirmar que eles são diferentes. Se eles forem iguais, temos que f é uma bijeção entre I_n e I_{n+1}, o que é absurdo. Então podemos trabalhar sossegados com a hipótese de que $B \subset I_n$ e $B \neq I_n$. Considere então $k = f(n+1)$, e defina $h : I_n \to B - \{k\}$, como sendo a restrição de f a I_n. Como h é a restrição de f que estamos supondo bijetora, segue que h também o é. Assim, outra vez a hipótese de indução foi violada.

Logo, como em ambos os casos temos uma contradição, não podemos ter f uma bijeção, donde o resultado está provado para $n+1$ e, então ele vale para todo $n \in \mathbb{N}$.
Suponhamos agora que A não seja necessariamente I_n. Como ele é finito, existe uma bijeção f entre A e algum I_n. Sendo $B \subset A$, com $B \neq \emptyset$, vamos supor, por absurdo, que exista uma bijeção h entre B e A. Como B é um subconjunto próprio de A, segue que $I(g)$ é um subconjunto próprio de I_n, onde g é a restrição de f a B. Daí, $f \circ h \circ g^{-1} : I(g) \to I_n$ é uma bijeção, o que é impossível, pelo que provamos antes . Logo, não pode existir a bijeção h como afirmado. Portanto, o resultado está provado. ■

Observação 6.2.4 *O Teorema anterior nos dá um critério muito bom para dizer quando um conjunto é infinito: basta que sejamos capazes de exibir uma bijeção entre ele e uma parte própria sua. Checar se um conjunto é infinito apenas usando a negação da definição de conjunto finito é algo por vezes difícil. Tente, por exemplo, sem recorrer ao referido teorema, mostrar que* $\mathbb{Z}$ *é infinito.*

Observação 6.2.5 *O matemático alemão Julius Dedekind, baseado no resultado acima, definiu conjunto infinito como sendo aquele que possui uma bijeção com uma parte própria sua. Para ver como a teoria se desenvolve a partir dessa definição, consulte [3].*

Exemplo 6.2.2 $\mathbb{N}$ *é infinito. De fato, basta ver que* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ *dada por* $f(n) = 2n$ *é uma bijeção, onde* $\mathbb{P}$ *é o conjunto dos números naturais pares.*

Exemplo 6.2.3 $\mathbb{Z}$ *é infinito. De fato, considere a função dada pelo exemplo 6.1.4.*

Exercícios

1. Se A é finito e $b \notin A$, prove que $A \cup b$ é finito.

2. Se A e B são conjuntos finitos, prove que $A \cup B$ é finito e encontre uma fórmula para o seu número cardinal.

3. Se A e B são conjuntos finitos, prove que $A \times B$ é finito.

4. Suponha que $f : A \to B$ é uma função injetora e que B é finito. Prove que A também é finito. Vale a recíproca desse resultado ?

5. Suponha que $f : A \to B$ é uma função sobrejetora e que A é finito. Prove que B também é finito. Vale a recíproca desse resultado ?

6. A ideia agora é generalizar o exercício 2. Prove que a união de uma quantidade finita de conjuntos finitos também é um conjunto finito. Pesquise sobre uma fórmula para o número cardinal dessa união.

7. Se A é um conjunto finito prove que $f : X \to X$ é injetora se e somente se é sobrejetora.

6.3 Números cardinais infinitos

Na seção anterior definimos os conjuntos finitos e denotamos o número cardinal associado ao conjunto I_n, ou a qualquer conjunto a ele equivalente, por n. Galileu Galilei em seu trabalho "Discurso sobre duas novas ciências", postulou que todos os conjuntos infinitos teriam o mesmo número cardinal, conforme o trecho abaixo extraído de [2]:
Salviati: *Não vejo que se possa chegar a outra conclusão: que infinitos são todos os números, infinitos os quadrados, infinitos suas raízes, que a quantidade dos quadrados não é menor que aquela de todos os números, nem esta maior que aquela; e finalmente, que os atributos de maior, menor e igual não se aplicam aos infinitos, mas apenas às quantidades finitas. Desse modo, quando o Sr. Simplício me propõe linhas desiguais e me pergunta como pode acontecer que nas maiores não existem mais pontos que nas menores, respondo-lhe que não existem nem mais, nem menos, nem outros tantos, mas infinitos em cada uma. Se sinceramente respondesse que os pontos de uma linha são tantos quanto são os números quadrados, que noutra linha maior são tantos quanto todos os números, e que na menor tantos quanto são os números cubos, não estaria dando uma*

resposta satisfatória.

Galileu estava essencialmente dizendo que todos os conjuntos infinitos têm o mesmo número cardinal. Um dos principais feitos do grande matemático alemão Georg Cantor foi perceber que, na categoria dos conjuntos infinitos, existem aqueles que possuem diferentes números cardinais, como, por exemplo $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Provaremos esse fato mais adiante. Introduziremos agora um novo número cardinal. Ele vai estar associado ao conjunto dos números naturais e a todos os conjuntos a ele equivalentes.

Definição 6.3.1 *Diremos que um conjunto é enumerável quando for finito ou, no caso de ser infinito, existir uma bijeção entre ele e* $\mathbb{N}$.

Exemplo 6.3.1 *Por definição I_n é enumerável, pois é finito. Também são enumeráveis $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Veremos logo mais outro exemplo importante de conjunto enumerável, a saber,* $\mathbb{Q}$.

Observação 6.3.1 *O número cardinal do conjunto $\mathbb{N}$ será denotado por $\aleph_0$, que lemos* **alef-zero**. *Assim, o número cardinal de qualquer conjunto infinito e enumerável será* $\aleph_0$.

Observação 6.3.2 *Dois fatos serão usados aqui repetidas vezes.*

Fato 1 *Se $f : A \to B$ é uma função injetora então $f : A \to f(A)$ é bijetora. Lembre: $f(A)$ indica a imagem do conjunto A por f.*

Fato 2 *Se $f : A \to B$ é uma função sobrejetora então existe uma função injetora $g : B \to A$.*

Veremos agora algumas importantes propriedades dos conjuntos enumeráveis. Doravante, para evitar trivialidades, suporemos que os nossos conjuntos enumeráveis serão sempre infinitos. Quando não for assim, chamaremos à atenção.

Teorema 6.3.1 *Todo conjunto X contém algum subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração: Vamos definir uma função injetora $f : \mathbb{N} \to X$. Se fizermos isso, é só lembrar do fato 1 e ver que entre $f(\mathbb{N})$ e $\mathbb{N}$ vai existir uma bijeção. Aí pronto, $f(\mathbb{N})$ será o nosso conjunto procurado. Então vamos lá. Como X é infinito, existe um elemento $x_1 \in X$. Defina $f(1) = x_1$. Como X é infinito, $X - \{x_1\}$ é infinito. Então existe um $x_2 \in X - \{x_1\}$. Defina $f(2) = x_2$. Agora é só prosseguir. De uma maneira geral, o conjunto $X - \{x_1, ..., x_n\}$ é infinito e portanto existe $x_{n+1} \in X - \{x_1, ..., x_n\}$. Definimos então $f(n+1) = x_{n+1}$. Veja que essa função é injetora, pois se $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \neq n$, devemos ter necessariamente $f(m) \neq f(n)$. De fato, se $m \neq n$, então, digamos, $m > n$. Daí, na hora de encontrar o x_m, vamos escolhê-lo no conjunto $X - \{x_1, ..., x_n, ..., x_{m-1}\}$. Daí, não há perigo em coincidirem os valores de x_n e x_m pois este último vai ser escolhido num conjunto onde o primeiro não está. Como $f(n) = x_n$ e $f(m) = x_m$, segue que $f(n) \neq f(m)$, e a demonstração acabou. ∎

Teorema 6.3.2 *Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é enumerável*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se X for finito, então por definição ele será enumerável e acabou a demonstração. Se ele for infinito, vamos definir uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to X$. Como $X \neq$, existe, pelo (PBO) o menor elemento de X. Defina $f(1)$ como sendo o menor elemento de X. Como $X - \{f(1)\} \neq \emptyset$, pelo (PBO), ele possui menor elemento. Defina $f(2)$ como sendo o menor elemento de $X - \{x_1\}$. Como $X - \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$, pelo (PBO), ele possui menor elemento. Defina $f(x_3)$ como sendo o menor elemento de $X - \{x_1, x_2\}$. Agora é só prosseguir. De uma maneira geral, o conjunto $X - \{x_1, ..., x_n\} \neq \emptyset$ e portanto possui menor elemento. Defina $f(n+1)$ como sendo o menor elemento de $X - \{x_1, ..., x_n\}$. Vamos provar agora que essa função é bijetora. Como $f(1) < f(2) < f(3) < ...$ então f é injetora. Agora,vamos ver que ela também é sobrejetora. Suponha que não seja. Então existe $k \in \mathbb{N}$ que não pertence à imagem de f. Daí temos $k > f(1), k > f(2), ...$ ou seja $k > f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas o conjunto $\mathbb{N}$ possui uma propriedade muito importante que diz que um subconjunto de $\mathbb{N}$ é infinito se e somente se ele não possuir cotas superiores. Logo, o que nós encontramos com o número k foi uma cota superior para um conjunto de números naturais infinito. Não pode pela propriedade que acabamos de citar! Conclusão: um tal k não existe e, portanto, f é sobrejetora. Logo, X é enumerável. ∎

Teorema 6.3.3 *Se $f : A \to B$ é injetora e B é enumerável, então A também o é.*

Demonstração: Se B é enumerável, então existe $g : B \to \mathbb{N}$ bijetora. Logo, $g \circ f : A \to \mathbb{N}$ é injetora. Portanto, pelo fato (1), $g \circ f : A \to g \circ f(A)$ é uma bijeção. Mas $g \circ f(A) \subset \mathbb{N}$, logo é enumerável, donde concluímos que A também é enumerável. ∎

Teorema 6.3.4 *Se $f : A \to B$ é sobrejetora e A é enumerável, então B também o é.*

Demonstração: Comece lembrando do Fato 2. Agora veja que temos uma função injetora de B em A. Use agora a propriedade anterior, trocando A por B. Acabou. ■

Exemplo 6.3.2 *Vamos mostrar neste exemplo que* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é enumerável. Considere a função* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por* $f(m,n) = 2^m 3^n$. *Não é difícil mostrar*[1] *que* f *é injetora. Logo, pelo teorema 6.3.3 temos que* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Teorema 6.3.5 *Se* A *e* B *são enumeráveis então* $A \times B$ *também o é.*

Demonstração: Como A e B são enumeráveis, existem $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$ ambas bijetoras. Agora considere a função $\mathcal{F} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dada por $\mathcal{F}(m,n) = (f(m), g(n))$. Observe que $\mathcal{F}$ é sobrejetora, pois f e g o são. Logo, pelo teorema 6.3.4, temos que $A \times B$ é enumerável. ■

Exemplo 6.3.3 *Já vimos que* $\mathbb{Z}$ *é enumerável. Não é difícil mostrar que* $\mathbb{Z}^*$ *também é enumerável. Pelo teorema 6.3.5, temos que* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ *também é enumerável. Agora defina* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star \to \mathbb{Q}$ *por* $f(m,n) = m/n$. *Veja que* f *é sobrejetora. Logo, pelo teorema 6.3.4, temos que* $\mathbb{Q}$ *é enumerável.*

Teorema 6.3.6 *Seja* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *uma famiília de conjuntos enumeráveis indexada por* $\mathbb{N}$. *Então* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *é enumerável.*

Demonstração: Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que existe uma função bijetora, em particular sobrejetora, $f_m : \mathbb{N} \to A_m$. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ por $f(m,n) = f_m(n)$. Essa função é sobrejetora. De fato, seja $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Então $x \in A_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo, como f_m é sobrejetora, segue que $f_m(n) = x$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, $f(m,n) = f_m(n) = x$. Assim, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, o teorema 6.3.4 nos garante que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ também o será. ■

Exemplo 6.3.4 *Vamos ver outra prova da enumerabilidade de* $\mathbb{Q}$. *Considere os conjuntos* $A_1 = \{0/1\}, A_2 = \{1/1, -1/1\}, A_3 = \{1/2, 2/1, -1/2, -2/1\}, A_4 = \{1/3, 3/1, -1/3, -3/1\}, A_5 = \{1/4, 2/3, 3/2, 4/1, -1/4, -2/3, -3/2, -4/1\}$. *De uma maneira mais geral,*

$$A_r = \{1/(r-1), 2/(r-2), ..., (r-1)/1 \text{ e seus negativos } \},$$

[1] Não mesmo!

de onde excluímos o 1 *e o* -1 *pois eles já aparecem em* A_2*. Observe duas coisas. A primeira é que qualquer número racional pertence a algum dos* A_i*. A segunda é que cada* A_i *é finito, sendo, portanto, enumerável. Logo, temos* $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *e, pelo teorema 6.3.6, temos que* $\mathbb{Q}$ *é enumerável.*

Exemplo 6.3.5 *O conjunto* $\mathbb{R}$ *não é enumerável. Para provarmos isso, suponhamos que* $\mathbb{R}$ *o fosse. Então teríamos uma função bijetora* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Denotando por* $f(n) = x_n$*, temos que* $\mathbb{R}$ *pode ser representado por uma lista, ou seja,* $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$*. Agora seja* I_1 *um intervalo fechado que não contenha* x_1*. Agora seja* I_2 *um intervalo fechado que não contenha* x_2 *e que esteja contido em* I_1*. Seja agora* I_3 *um intervalo fechado que não contém* x_3 *e que esteja contido em* I_2*. Agora continuamos com esse processo. Vamos encontrar um número real que não está na lista acima, logo ela não poderá conter todos os números reais. Vamos olhar para a interseção dos intervalos* I_n*. Observe que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ *não pode conter nenhum dos números da lista acima, porque* $x_n \notin I_n$ *já que eles foram escolhidos assim. Então nenhum dos* x_n *pode pertencer à* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$*. Mas existe em* $\mathbb{R}$ *a seguinte propriedade, cuja demonstração foge um pouco ao nível do nosso curso:*[2]

Teorema 6.3.7 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, suponha que sejam dados intervalos fechados* $I_n = [a_n, b_n]$*, que satisfazem à propriedade de que* $I_{n+1} \subset I_n$*. Então a interseção dessa família de intervalos é não vazia.*

Logo, pela propriedade acima, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ *é não vazia e, pelo que vimos, contém um elemento que não está na lista dos números reais. Mas isso é um absurdo, porque supomos que esta lista continha todos os números reais. Logo,* $\mathbb{R}$ *não pode ser enumerável.*

Exercícios

1. Suponha que $f : A \to B$ é uma função injetora e que A é infinito. Prove que B também é infinito. Vale a recíproca desse resultado ?

2. Suponha que $f : A \to B$ é uma função sobrejetora e que B é infinito. Prove que A também é infinito. Vale a recíproca desse resultado ?

3. Seja Aum conjunto e suponha que B é um subconjunto infinito de A. Prove que A também é infinito.

4. Sejam A, um conjunto infinito, B, um conjunto finito e $f : A \to B$ uma função. Prove que existe $b \in B$ tal que $f^{-1}(\{b\})$ é infinito.

[2] Veja a demonstração no **Curso de Análise**, volume 1, de Elon Lages Lima.

5. Se $A \cup B$ é infinito, prove que pelo menos um deles deve ser infinito.

6. Se $B \subset A$, com B finito e A infinito, mostre que $A - B$ é infinito. Se B for infinito esse resultado ainda continua válido ?

7. Prove que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e o intervalo (a, b) , com $a < b$, são conjuntos infinitos.

8. Prove que se A é infinito, então $A \times A$ também é infinito.

9. Pode a interseção de uma quantidade infinita de conjuntos infinitos ser um conjunto finito, mesmo se essa interseção for não-vazia ?

10. Prove que se A é um conjunto infinito e B é um conjunto finito, existem $f : A \to B$ sobrejetora e $g : B \to A$ injetora.

11. Sejam A um conjunto infinito e enumerável e $B \subset A$ um conjunto finito. Mostre que $A - B$ é infinito e enumerável. É possível, nas condições anteriores, termos $A - B$ infinito e enumerável se B fosse infinito ?

12. Sejam A um conjunto não enumerável e $B \subset A$ um conjunto infinito e enumerável. Mostre que $A - B$ é não-enumerável. É possível, nas condições anteriores, termos $A - B$ não-enumerável se B fosse não-enumerável ?

13. Mostre que $\mathbb{C}$ é não-enumerável.

14. Mostre que o conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\{0, 1\}$ é não-enumerável.

15. Mostre que se $f : A \to B$ uma bijeção. Mostre que se um dos conjuntos for enumerável o outro também será. Se trocarmos a palavra enumerável pela expressão não-enumerável chegamos à mesma conclusão ?

16. Mostre que existe uma bijeção entre $\wp(\mathbb{N})$ e o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. O que se pode dizer a respeito da enumerabilidade do primeiro ?

17. Mostre que o conjunto de todos os intervalos não degenerados de $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

18. Descubra o erro na seguinte demonstração de que o conjunto da questão anterior é enumerável: Denotemos por $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ o conjunto dos números racionais e seja I qualquer intervalo não degenerado. Cada I contém infinitos números racionais x_n, porém entre eles haverá aquele que fornecerá o *menor índice* n. Definamos uma função f definida no conjunto dos intervalos não-degenerados em $\mathbb{N}$ por $f(I) = n$,

onde x_n é o número racional com menor índice no intervalo I. Esta função é injetora e, portanto, o conjunto dos intervalos de $\mathbb{R}$ é enumerável.

6.4 Mais exemplos de números cardinais

No que segue, denotaremos o número cardinal de um conjunto A por $|A|$.

Exemplo 6.4.1 *Um número complexo z será dito* algébrico *se for raiz de um polinômio*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

*onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_n \neq 0$. Um número que não é algébrico é chamado de Transcendente. Não é difícil verificar que todo número racional é algébrico (***prove como exercício***). Alguns irracionais como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ são algébricos (***prove como exercício***). Entretanto nem todos os irracionais são algébricos. Pode-se mostrar, veja [1], que e e π são transcendentes. Nosso propósito nesse exemplo é mostrar que o conjunto dos números algébricos é enumerável e, portanto, tem cardinal $\aleph_0$. Para isso, vamos introduzir a definição de altura de um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Definimos a sua altura como sendo $h(p) = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0| + n$. Por exemplo calcule a altura dos polinômios $p(x) = 2x^3 + 5x^2$ e $p(x) = x^2 - 2$, para você se familiarizar com a noção. Agora observe que dado $k \in \mathbb{N}$, existe uma quantidade finita de polinômios de altura k. Para ver isso você começa observando que um polinômio de altura k tem que ter o grau menor que k. Agora observe que, pelo teorema fundamental da álgebra qualquer polinômio de grau n tem exatamente n raízes complexas. Pronto, agora estamos quase lá. Vamos chamar de A_n o conjunto das raízes de todos os polinômios de altura n. Note que A_n é um conjunto finito, pois só existe uma quantidade finita de polinômios de altura n e cada um só possui uma quantidade finita de raízes. Agora o passo final. O conjunto dos números algébricos é igual a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Isso porque qualquer número algébrico está em algum dos $A_n's$ e portanto estará na sua união e, todo elemento de cada um dos $A_n's$ é um número algébrico. Como a união enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável segue que o conjunto dos números algébricos é enumerável, como queríamos. Portanto, o conjunto dos números algébricos tem cardinal $\aleph_0$.*

Exemplo 6.4.2 *Sabemos que o conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável. Portanto, $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$. O cardinal de $\mathbb{R}$ será denotado por c, de continuum. Outros conjuntos com cardinal igual a*

c são o conjunto dos números irracionais, o conjunto dos números reais transcendentes, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\wp(\mathbb{N})$. Vamos provar essas afirmações no decorrer do texto.

Exemplo 6.4.3 *Vamos agora conhecer um novo cardinal. Seja F o conjunto das funções $f : (0,1) \to \mathbb{R}$. Vamos provar que o cardinal de F é diferente de c. De fato, suponha, por absurdo, que $|F| = c$. Assim, F e $\mathbb{R}$ são equivalentes. Como $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ são equivalentes também, segue que F e $(0,1)$ também o são. Assim, para cada número real $r \in (0,1)$, existe uma única função, que denotaremos por f_r, em F. Ou seja, cada uma das funções de F é uma das f_r com $r \in (0,1)$. Vamos construir uma função de F que é diferente de todas as f_r's. De fato, defina $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ apenas exigindo que $g(r) \neq f_r(r)$. Em termos mais claros, a função g pode ser definida de qualquer modo, desde que, no ponto r ela tenha um valor diferente da f_r calculada naquele ponto. Pronto, essa g não é nenhuma das f_r's e portanto não pode haver bijeção entre F e $(0,1)$ e, conseqüentemente, $|F| \neq c$. O cardinal de F será denotado por f.*

Observação 6.4.1 *Conhecemos até agora quatro tipos de cardinais. O primeiro foi n que é o cardinal dos conjuntos finitos que possuem n elementos. O segundo foi $\aleph_0$ que é o cardinal dos conjuntos equivalentes a $\mathbb{N}$, ou seja, dos conjuntos infinitos e enumeráveis. O terceiro foi c, que é o cardinal de $\mathbb{R}$ e o quarto foi f, que é o cardinal do conjunto das funções de $(0,1)$ em $\mathbb{R}$.*

Vamos provar um resultado importante.

Teorema 6.4.1 *Sejam M um conjunto infinito e A um subconjunto enumerável de M. Se o conjunto $M - A$ [3] é infinito então ele possui o mesmo cardinal de M.*

Demonstração: Suponha que M seja infinito e que $A \subset M$ seja enumerável. Vamos denotar $M - A$ por R. Assim $M = A \cup R$, com esta união sendo disjunta. Como R é infinito ele possui um subconjunto infinito e enumerável que denotaremos por $\overline{A}$. Denotando $R - \overline{A}$ por $\overline{R}$, temos que $R = \overline{A} \cup \overline{R}$ e, portanto, $M = A \cup R = A \cup \overline{A} \cup \overline{R}$, com esta união novamente sendo disjunta. Como $A \cup \overline{A}$ e $\overline{A}$ são infinitos e enumeráveis, eles são equivalentes, ou seja, existe uma bijeção entre eles. Vamos denotar por f uma função bijetora de $A \cup \overline{A}$ em $\overline{A}$ e vamos definir uma função $g : A \cup \overline{A} \cup \overline{R} \to \overline{A} \cup \overline{R}$ da seguinte maneira

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in A \cup \overline{A} \\ x & \text{se} \quad x \in \overline{R} \end{cases}$$

[3] isto é, o complementar de A em M.

Note que a função g é bijetora. Assim o cardinal de $A \cup \overline{A} \cup \overline{R}$ é o mesmo de $\overline{A} \cup \overline{R}$. Mas $A \cup \overline{A} \cup \overline{R} = M$ e $\overline{A} \cup \overline{R} = R$, donde o cardinal de M é o mesmo de R. ∎

Exemplo 6.4.4 *De posse desse resultado podemos concluir que os números irracionais e o conjunto dos números reais transcendentes têm cardinal igual a c. Além disso, os intervalos* $(0, 1], [0, 1]$ *e* $[0, 1)$ *todos têm cardinal igual a c.*

Veremos agora mais alguns exemplos de cardinais.

Exemplo 6.4.5 *Vamos provar que o conjunto* $(0, 1) \times (0, 1)$ *é equivalente a* $(0, 1)$. *Recordemos que cada* $x \in (0, 1)$ *possui uma representação decimal infinita única como* $x = 0, a_1a_2a_3...$, *onde* $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *No caso de* $1/4$ *usamos a representação* $0, 2499999...$ *De forma análoga tratamos aqueles que possuem uma representação decimal finita. Defina então a função* $f : (0, 1) \times (0, 1) \to (0, 1)$ *por*

$$f (x, y) = f (0, x_1x_2x_3..., 0, y_1y_2y_3...) = 0, x_1y_1x_2y_2....$$

Vamos provar que ela é bijetora. Começamos pela injetivitdade. Suponha que $f (x, y) = f (z, w)$. *Então*

$$0, x_1y_1x_2y_2... = 0, z_1w_1z_2w_2...$$

Como a representação é única, temos que $x_1 = z_1, x_2 = z_2, ..., x_n = z_n, ...$ *e* $y_1 = w_1, y_2 = w_2, ..., y_n = w_n, ...$, *ou seja,* $(x, y) = (z, w)$. *Vamos provar agora a sobrejetividade. Seja* $r = 0, r_1r_2r_3... \in (0, 1)$. *Considere* $x = r_1r_3r_5...r_{2n+1}...$ *e* $y = r_2r_4r_6...r_{2n}...$ *Então vemos que* $f (x, y) = 0, r_1r_2r_3r_4r_5r_6... = r$, *ou seja,* f *é sobrejetiva. Daí* f *é bijeção. Portanto* $| (0, 1) \times (0, 1) | = c$.

Exemplo 6.4.6 *Seja* A *um conjunto não-vazio. Vamos denotar por* 2^A *o conjunto das funções* $f : A \to \{0, 1\}$. *Os conjuntos* $\wp (A)$ *e* 2^A *são equivalentes, consequentemente, têm o mesmo cardinal. Para ver isso, defina* $\Phi : 2^A \to \wp (A)$ *por* $\Phi (f) = \{x \in A; f (x) = 1\}$. *Pode-se mostrar que* Φ *é uma bijeção.*

Exemplo 6.4.7 *Sejam* A *e* B *conjuntos não vazios tais que* $|A| = |B|$. *Pode-se mostrar que* $|\wp (A) | = |\wp (B) |$. *Para ver isso, seja* $f : A \to B$ *uma bijeção. Defina* $\Psi : \wp (A) \to \wp (B)$ *por* $\Psi (X) = f (X)$, *onde* $f (X)$ *indica a imagem de* X *por* f. *Pode-se provar que* Ψ *é bijeção.*

Exemplo 6.4.8 *Uma outra maneira de ver que o intervalo semi-fechado* $(0,1]$ *e o intervalo* $(0,1)$ *são equivalentes, sem usar o teorema 6.4.1 é definir uma bijeção entre eles. A construção a seguir é muito curiosa. Seja* $S = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ *um subconjunto enumerável contido em* $(0,1)$ *. Defina a função* f *de* $(0,1)$ *em* $(0,1]$ *por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x = x_1 \\ x_n & se \quad x = x_{n+1}, \forall n \geq 1 \\ x & se \quad x \in (0,1) - S. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que essa função é bijetora. Logo $(0,1)$ *e* $(0,1]$ *são equivalentes, ou, o que dá no mesmo, possuem o mesmo número cardinal.*

Exercícios

1. Investigue o número cardinal do conjunto dos pontos de um retângulo com lados medindo 1 e 2 unidades.
2. Determine o número cardinal do conjunto dos números complexos.
3. Determine o número cardinal do conjunto dos números irracionais algébricos.
4. Determine o número cardinal do conjunto das potências n^m onde $n, m \in \mathbb{N}$.
5. Seja n o número cardinal do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Mostre que $n \preceq \aleph_0$.
6. Seja A um conjunto infinito. Mostre que $\aleph_0 \preceq |A|$. Em outras palavras $\mathbb{N}$ tem o menor cardinal infinito.
7. Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subset B$. Mostre que $|A| \preceq |B|$.
8. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \subset B \subset C$ e $|A| = |C|$. Mostre que $|A| = |B|$.
9. Seja A um conjunto enumerável. Mostre que o conjunto $\wp(A)$ é não-enumerável.
10. Determine o número cardinal do conjunto de retas $y = c_1 x + c_2$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

6.5 Comparação de números cardinais

Definição 6.5.1 *Sejam* A *e* B *conjuntos. Diremos que o cardinal de* A *é menor ou igual que o cardinal de* B *e simbolizamos isto por* $|A| \preceq |B|$*, quando existir uma função injetora de* A *em* B*.*

Exemplo 6.5.1 *1.* $n \preceq \aleph_0$, *para todo* n,

2. $\aleph_0 \preceq c$,

3. $c \preceq f$.

Destacamos a seguir algumas propriedades desta relação.

(P1) $|A| \preceq |A|$,

(P2) Se $|A| \preceq |B|$ e $|B| \preceq |A|$ então $|A| = |B|$,

(P3) Se $|A| \preceq |B|$ e $|B| \preceq |C|$ então $|A| \preceq |C|$.

Vamos provar **(P1)** e **(P3)**. A propriedade **(P1)** vale pois a aplicação identidade é injetora. A propriedade **(P3)** é válida pois, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é também injetora pois é a composta de funções injetoras. A propriedade **(P2)** tem uma prova mais delicada. Ela inicialmente foi conjecturada por Cantor e posteriormente provada, de forma independente, por F. Bernstein e E. Schröder. Em vista disso ela ficou conhecida como **Teorema de Schröder-Bernstein.** Há diversas provas, mas escolhemos uma devida à G. Birkhoff e S. MacLane. Suponha que $f : A \to B$ e $g : B \to A$ sejam funções injetoras. Queremos construir uma função bijetora $F : A \to B$. Podemos supor que nem f nem g são sobrejetoras. De fato, se $f : A \to B$ fosse sobrejetora, como ela já é injetora, segue que ela também seria bijetora e tomamos F para ser f. Caso g fosse sobrejetora, então g é bijetora e consideramos a sua inversa $g^{-1} : A \to B$ que também seria bijetora. Agora tomamos F para ser g^{-1}. Assim, em ambos os casos, o trabalho estaria terminado. Vamos considerar as inversas de f e de g definidas respectivamente em $f(A)$ e em $g(B)$. A idéia é tentar decompor A e B em termos de uma relação de "ancestralidade"entre seus elementos que passaremos agora a definir. Seja $a \in A$. Se for possível, aplicamos a ele a função g^{-1} e obtemos um elemento $g^{-1}(a) \in B$, que será chamado o **primeiro ancestral** de a. Novamente, se for possível aplicamos a $g^{-1}(a)$ a função f^{-1} obtendo o elemento $f^{-1}(g^{-1}(a)) \in A$ que será chamado o **segundo ancestral** de a. Outra vez, se pudermos aplicar g^{-1} ao elemento $f^{-1}(g^{-1}(a))$ obteremos o elemento $g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(a))) \in B$ que será chamado o **terceiro ancestral** de a. Nesse processo há três possibilidades:

1. a tem infinitos ancestrais e nós denotaremos por A_i o conjunto dos elementos de A que possuem infinitos ancestrais,

2. a tem um número par de ancestrais. Isso significa que a tem um último ancestral que pertence a A. Vamos denotar o conjunto desses elementos por A_e.

3. a tem un número ímpar de ancestrais. Isso significa que a tem um último ancestral e que pertence a B. Vamos denotar o conjunto desses elementos por por A_o.

Esses três conjuntos formam uma partição do conjunto A. Por um raciocínio análogo podemos particionar o conjunto B em B_i, B_e e B_o. Agora vamos provar alguns fatos curiosos acerca dessa situação:

Afirmação 6.5.1 *Se $a \in A_i$ então $f(a) \in B_i$.*

Demonstração: Seja $a_1 = g^{-1}(a), a_2 = f^{-1}(g^{-1}(x)), ...$ a seqüência infinita dos ancestrais de a. Queremos mostrar que a seqüência $b_1, b_2, ...,$ dos ancestrais de $f(a)$ também é infinita. Observe que $b_1 = f^{-1}(f(a)) = a, b_2 = g^{-1}(b_1) = g^{-1}(a) = a_1, b_3 = f^{-1}(b_2) = f^{-1}(g^{-1}(a)) = a_2, ..., b_{n+1} = a_n, ...$ ou seja, a seqüência dos ancestrais de $f(a)$ é infinita, donde concluímos que $f(a) \in Y_i$. ■

Afirmação 6.5.2 *Se $b \in B_i$ então existe $a \in A_i$ tal que $f(a) = b$.*

Demonstração: Como $b \in B_i$ faz sentido considerar $f^{-1}(b)$. Ponha $a = f^{-1}(b)$. Pelo fato de que $b \in B_i$ segue que $a \in X_i$. Ademais, pela escolha de a temos que $f(a) = b$. ■

Afirmação 6.5.3 *Se $a \in A_e$ então $f(a) \in B_o$.*

Demonstração: De fato, sejam

$$a_1 = g^{-1}(a), a_2 = f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right), ..., a_{2k} = f^{-1}\left(g^{-1}\left(f^{-1}...\left(f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right)\right)...\right)\right)$$

a seqüência dos ancestrais de a que possui um número par de elementos, no caso, $2k$. Agora, denotando por $b_1, b_2, ...$ a seqüência dos ancestrais de $f(a)$, temos que

$$b_1 = f^{-1}(f(a)) = a, b_2 = g^{-1}(b_1) = g^{-1}(a) = a_1, b_3 = f^{-1}(b_2) = f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right) = a_2, ...,$$

ou seja, $b_{2k+1} = a_{2k}$ e, portanto, o conjunto dos ancestrais de $f(a)$ tem um número ímpar de elementos, ou seja, $2k+1$, donde concluímos que $f(a) \in B_o$. ■

Afirmação 6.5.4 *Se $b \in B_o$ então existe $a \in A_e$ tal que $f(a) = b$.*

Demonstração: Como $b \in B_o$ faz sentido considerar $f^{-1}(b)$. Ponha $a = f^{-1}(b)$. Pelo fato de que $b \in B_o$ segue que $a \in A_e$. Ademais pela escolha de a temos que $f(a) = b$. ■

Afirmação 6.5.5 *Se $a \in A_o$ então $g^{-1}(a) \in B_e$.*

Demonstração: De fato, sejam

$$a_1 = g^{-1}(a), a_2 = f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right), ..., a_{2k+1} = g^{-1}\left(f^{-1}\left(g^{-1}\left(f^{-1}...\left(f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right)\right)...\right)\right)\right),$$

a seqüência dos ancestrais de a que possui um número ímpar de elementos, no caso, $2k+1$. Agora, denotando por $b_1, b_2, ...$ a seqüência dos ancestrais de $g^{-1}(a)$, temos que

$$b_1 = f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right) = a_2, b_2 = g^{-1}(b_1) = g^{-1}\left(f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right)\right) = a_3, ...,$$

ou seja, o conjunto dos ancestrais de $g^{-1}(a)$ tem um número par de elementos donde concluímos que $g^{-1}(a) \in B_e$. $\blacksquare$

Afirmação 6.5.6 *Se $b \in B_e$ então existe $a \in A_o$ tal que $g^{-1}(a) = b$.*

Demonstração: Se $b \in B_e$ podemos tomar $a = g(b)$. Vemos que $g^{-1}(a) = b$ e que $a \in A_o$. $\blacksquare$

Agora definimos a função $F : \underbrace{A_i \cup A_e \cup A_o}_{A} \rightarrow \underbrace{B_i \cup B_e \cup B_o}_{B}$ por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in A_i \cup A_e \\ g^{-1}(x) & \text{se} \quad x \in A_o \end{cases}$$

Observe que F é sobrejetora pois é obtida através de uma colagem de funções sobrejetoras, pelas afirmações 2,4 e 6. Como f e g^{-1} são injetoras, segue que F também é injetora. Portanto, F é bijetora e a propriedade **(P2)** está provada.

Observação 6.5.1 *As propriedades **(P1)**,**(P2)** e **(P3)** nos dizem que a relação $\preceq$ é uma ordem parcial. Vermos posteriormente, com o auxílio do Lema de Zorn, que essa relação de ordem também é total.*

Definição 6.5.2 *Sejam A e B conjuntos. Diremos que o cardinal de A é estritamente menor que o cardinal de B, e representaremos isso por $|A| \prec |B|$, quando $|A| \preceq |B|$ mas $|A| \neq |B|$.*

Por exemplo, $n \prec \aleph_0 \prec c \prec f$. Provaremos agora um importante resultado devido à Cantor

Teorema 6.5.1 *(Cantor) Seja A um conjunto. Então $|A| \prec |\wp(A)|$.*

Demonstração: Suponha que $A = \emptyset$. Então nesse caso temos $|A| = 0 < 1 = |\wp(A)|$. Suponha agora que $A \neq \emptyset$. Primeiro vamos mostrar que $|A| \preceq |\wp(A)|$. Defina $g : A \to \wp(A)$ por $g(x) = \{x\}$. Se $g(a) = g(b)$ então $\{a\} = \{b\}$ e daí $a = b$ e portanto g é injetora. Logo $|A| \preceq |\wp(A)|$. Suponha agora que exista uma função $f : A \to \wp(A)$ que seja bijetora. Considere o conjunto $P = \{x \in A; x \notin f(x)\}$. Pode muito bem acontecer que $F = \emptyset$. Como f é bijetora, existe $y \in A$ tal que $f(y) = P$. Há dois casos a considerar: $y \in P$ e $y \notin P$. Vejamos o primeiro. Se $y \in P$, então $y \notin f(Y) = P$, ou seja, $y \in P$ e $y \notin P$, um absurdo. Agora suponha que $y \notin P$. Então $y \notin f(y)$, ou seja, $y \in P$, ou seja, $y \notin P$ e $y \in P$, outro absurdo. Logo não pode existir tal função e, portanto, $|A| \prec |\wp(A)|$, como queríamos.■

Observação 6.5.2 *Uma das conseqüências mais importantes do Teorema de Cantor é mostrar que podemos formar uma seqüência crescente de números cardinais, ou seja:*

$$|A| \prec |\wp(A)| \prec |\wp(\wp(A))| \prec |\wp(\wp(\wp(A)))| \prec ...$$

6.6 Operações com números cardinais

Definição 6.6.1 *Sejam A e B conjuntos disjuntos tais que $|A| = a$ e $|B| = b$. Definimos a* ***soma cardinal*** *de a e b como sendo $|A \cup B|$. Vamos representar a soma cardinal de a e b por $a + b$.*

Duas observações sobre a definição acima devem ser feitas

Observação 6.6.1 *Se A e B são conjuntos não necessariamente disjuntos então existem conjuntos disjuntos A' e B' tais que $|A'| = |A|$ e $|B'| = |B|$. De fato, vamos tomar $A' = \{(a, 0); a \in A\}$ e $B' = \{(b, 1); b \in B\}$. Observe que $A' \cap B' = \emptyset$ pois os pares ordenados de A' possuem segundo elemento igual a 0 enquanto que os elementos de B' possuem segundo elemento igual a 1, logo não pode haver interseção entre eles. Não é difícil verificar que as funções $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ dadas, respectivamente, por $f(a) = (a, 0)$ e $g(b) = (b, 1)$ são bijetoras acarretando pois que $|A'| = |A|$ e $|B'| = |B|$. Portanto na definição acima podemos exigir que os conjuntos sejam disjuntos, sem perda de generalidade.*

Observação 6.6.2 *Se A' e B' são dois conjuntos disjuntos tais que $|A'| = |A|$ e $|B'| = |B|$ então $|A \cup B| = |A' \cup B'|$. De fato, como $|A'| = |A|$ existe $f : A \to A'$ bijetora. Como*

$|B| = |B'|$ existe $g : B \to B'$ bijetora. Defina $h : A \cup B \to A' \cup B'$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in A \\ g(x) & se \quad x \in B \end{cases}$$

Isso quer dizer que a definição de soma cardinal é boa, isto é, independe dos conjuntos que escolhermos para calculá-la.

Vejamos agora alguns exemplos

Exemplo 6.6.1 *Vamos calcular $4 + 3$. Sabemos que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{\partial, \otimes, \odot\}$ são tais que $|A| = 4, |B| = 3$ e $A \cap B = \emptyset$. Logo*

$$4 + 3 = |A \cup B| = |\{1, 2, 3, 4, \partial, \otimes, \odot\}| = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}| = 7.$$

Exemplo 6.6.2 *Calcule $\aleph_0 + \aleph_0$. Sejam $A = \{2, 4, 6, ...\}$ o conjunto dos números naturais pares e $B = \{1, 3, 5, ...\}$ o conjunto dos números naturais ímpares. Vemos que $|A| = \aleph_0 = |B|$ e $A \cap B = \emptyset$. Assim*

$$\aleph_0 + \aleph_0 = |\{2, 4, 6, ...\} \cup \{1, 3, 5, ...\}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Exemplo 6.6.3 *Calcule $\aleph_0 + c$. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $B = (0, 1)$. Vemos que $|A| = \aleph_0, |B| = c$ e $A \cap B = \emptyset$. Assim, $\aleph_0 + c = |\mathbb{N} \cup (0, 1)|$. Mas note que $(0, 1) \subset (0, 1) \cup \mathbb{N}$. Portanto, $|(0, 1)| \preceq |\mathbb{N} \cup (0, 1)|$. Por outro lado, $\mathbb{N} \cup (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Logo $|\mathbb{N} \cup (0, 1)| \preceq |\mathbb{R}| = c$. Assim, pelo Teorema de Schröder-Bernstein, temos que $\aleph_0 + c = c$.*

Veremos agora algumas propriedades da soma cardinal. Sejam A, B e C conjuntos disjuntos tais que $|A| = a, |B| = b$ e $|C| = c$. Então:

1. $a + b = b + a$,
2. $a + 0 = a$,
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$,

Demonstração: Temos que $a + b = |A \cup B| = |B \cup A| = b + a$, isso prova (1). Como $|A \cup \emptyset| = |A|$, vale a propriedade (2). Deixamos a (3) como exercício.■

Observação 6.6.3 *Não é possível definir uma subtração de cardinais. Com efeito, maneira mais natural de fazer isso seria: dados A, B com $B \subset A$, $|A| = a$ e $|B| = b$, poderíamos definir $a - b$ como sendo $|A - B|$. Entretanto isso não conduziria a resultados únicos conforme nos mostra o exemplo a seguir, onde tomamos $A = \{1, 2, 3, ...\}$.*

Seja	Então	Conclusão
$B = \{1, 2, 3, ...\}$	$A - B = \emptyset$	$\aleph_0 - \aleph_0 = \|A - A\| = \|\emptyset\| = 0$
$B = \{2, 3, ...\}$	$A - B = \{1\}$	$\aleph_0 - \aleph_0 = \|A - B\| = \|\{1, \}\| = 1,$
$B = \{3, 4, ...\}$	$A - B = \{1, 2\}$	$\aleph_0 - \aleph_0 = \|A - B\| = \|\{1, 2\}\| = 2,$
$B = \{2, 4, ...\}$	$A - B = \{1, 3, ...\}$	$\aleph_0 - \aleph_0 = \|A - B\| = \|A\| = \aleph_0,$

Definição 6.6.2 *Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = a$ e $|B| = b$. Definimos o* ***produto cardinal*** *de a e b como sendo $|A \times B|$. Vamos representar o produto cardinal de a e b por ab.*

Observação 6.6.4 *Seja A' e B' conjuntos tais que $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$. Vamos mostrar que $|A \times B| = |A' \times B'|$. Como $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$ existem $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ ambas bijetoras. Defina $h : A \times B \to A' \times B'$ por $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Não é difícil mostrar que h é bijetora. Logo $|A \times B| = |A' \times B'|$. Isso mostra, como no caso da soma, que a definição de produto cardinal é boa, isto é, independe dos conjuntos que usamos para claculá-lo.*

Vejamos algumas propriedades do produto cardinal. Veremos agora algumas propriedades do produto cardinal. Sejam A, B e C conjuntos tais que $|A| = a, |B| = b$ e $|C| = c$. Então:

1. $1a = a,$
2. $0a = 0,$
3. $ab = ba,$
4. $a(bc) = (ab)c,$
5. $a(b + c) = ab + ac.$

Deixamos a prova como exercício. Vejamos alguns exemplos

Exemplo 6.6.4 *Calcule $c\aleph_0$. Sabemos que*

$$c\aleph_0 = |(0, 1) \times \mathbb{N}| \preceq |(0, 1) \times \mathbb{R}| = |(0, 1) \times (0, 1)| = c.$$

Por outro lado, a função $f : (0, 1) \to (0, 1) \times \mathbb{N}$ definida por $f(x) = (x, 1)$ é injetora. Portanto, $c = |(0, 1)| \preceq |(0, 1) \times \mathbb{N}| = c\aleph_0$. Logo, pelo Teorema de Schröder-Bernstein, temos que $c\aleph_0 = c$.

Exemplo 6.6.5 *Calcule* $\aleph_0\aleph_0$. *Observe que* $\aleph_0\aleph_0 = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, *já que* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *é enumerável.*

Exemplo 6.6.6 *Calcule* nc. *Sabemos que*

$$nc = |\,\{1,2,...,n\}\cup(0,1)\,| = |\,\{1\}\times(0,1)\cup\{2\}\times(0,1)\cup...\cup\{n\}\times(0,1)\,|.$$

Agora note que a função $f:(0,1)\to\{1\}\times(0,1)\cup\{2\}\times(0,1)\cup...\cup\{n\}\times(0,1)$ *definida por* $f(x)=(1,x)$ *é injetora e, portanto,*

$$c = |\,(0,1)\,| \preceq |\,\{1\}\times(0,1)\cup\{2\}\times(0,1)\cup...\cup\{n\}\times(0,1)\,| = nc.$$

Agora, por outro lado,

$$nc = |\,\{1\}\times(0,1)\cup\{2\}\times(0,1)\cup...\cup\{n\}\times(0,1)\,| \preceq |\,[-n,n]\times(0,1)\,| = |\,(0,1)\times(0,1)\,| = c,$$

donde pelo Teorema de Schröder-Bernstein, $nc = c$.

Exemplo 6.6.7 *Calcule* cc. *Temos* $cc = |\,(0,1)\times(0,1)\,| = |\,(0,1)\,| = c$.

Observação 6.6.5 *A divisão de cardinais também não faz sentido uma vez que não conduz a resultados únicos. De fato, pelos exemplos anteriores deveríamos ter* $c\div c = c, c\div c = n$ *e* $c\div c = \aleph_0$.

Definição 6.6.3 *Sejam* A *e* B *conjuntos tais que* $|A| = a$ *e* $|B| = b \neq 0$. *Definimos a* ***potência cardinal*** *de base* a *e expoente* b *como sendo* $|A^B|$, *onde* A^B *denota o conjunto das funções de* B *em* A. *Vamos representar a potência cardinal de base* a *e expoente* b *por* a^b.

Observação 6.6.6 *A primeira coisa a se provar é a boa definição da potência cardinal. Sejam* A, A', B *e* B' *conjuntos tais que* $|A| = |A'|$ *e* $|B| = |B'| \neq 0$. *Então existem funções bijetoras* $f: A\to A'$ *e* $g: B\to B'$. *Agora definimos a função* $\Phi: A^B\to A'^{B'}$ *por*

$$\Phi(h) = f\circ h\circ g^{-1}.$$

Vamos provar que essa função é bijetora. Suponha que $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$. *Então* $f\circ h_1\circ g^{-1} = f\circ h_1\circ g^{-1}$. *Aplicando* f^{-1} *a ambos os membros dessa igualdade temos que* $h_1\circ g^{-1} = h_2\circ g^{-1}$. *Calculando essa igualdade em* g *temos* $h_1 = h_2$ *o que mostra que* Φ *é injetora. Seja agora* $m\in B'^{A'}$. *Considere a função* $h: B\to A$ *dada por* $h = f^{-1}\circ m\circ g$. *Calculando* $\Phi(h)$ *ficamos com* $\Phi(h) = f\circ(f^{-1}\circ m\circ g)\circ g^{-1} = f\circ f^{-1}\circ m\circ g\circ g^{-1} = m$, *donde concluímos que* Φ *é sobrejetora. Portanto,* Φ *é bijetora. Portanto,* $|A^B| = |A'^{B'}$.

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 6.6.8 *Vamos calcular* 2^3. *Sejam* $A = \{1, 2\}$ *e* $B = \{1, 2, 3\}$. *Então* $2^3 = |A^B| = 8$.

Exemplo 6.6.9 *Pela observação anterior temos que se* $|A| = |B|$ *então* $2^{|A|} = 2^{|B|}$. *Vamos usar esse fato para provarmos que* $2^{\aleph_0} = c$. *Primeiro mostraremos que* $c \preceq 2^{\aleph_0}$. *Com efeito, defina* $f\mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q})$ *por* $f(a) = \{x \in \mathbb{Q}; x < a\}$, *para cada* $a \in \mathbb{R}$. *Vamos mostrar que essa função é injetora. De fato, sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $a \neq b$. *Sem perda, digamos que* $a < b$. *Pode-se provar que existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a < r < b$. *Assim sendo,* $r \in f(b)$, *mas* $r \notin f(a)$. *Assim,* $f(a) \neq f(b)$ *e portanto* f *é injetora. Portanto* $c \preceq 2^{\aleph_0}$. *Agora vamos provar a desigualdade contrária. Defina* $\Psi : 2^{\mathbb{N}} \to (0, 1)$ *por*

$$\Psi(f) = 0, f(1) f(2) f(3) \dots .$$

Observe que se $\Psi(f) = \Psi(g)$ *então*

$$0, f(1) f(2) f(3) \dots = 0, g(1) g(2) g(3) \dots .$$

Como a representação decimal infinita é única, temos que $f(1) = g(1), f(2) = g(2), \dots$ *e daí* $f = g$. *Assim,* Ψ *é injetora e daí* $|2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} \preceq c$, *o que encerra a prova.*

Veremos agora algumas propriedades da exponenciação cardinal.

Propriedade 1 *Sejam* A, B *e* C *conjuntos tais que* $|A| = a, |B| = b$ *e* $|C| = c$. *Então vale* $a^b a^c = a^{b+c}$.

Demonstração: Suponhamos que B e C sejam disjuntos. Provaremos a propriedade se conseguirmos estabelecer uma função bijetora entre $A^C \times A^B$ e $A^{B\cup C}$. Defina então $\Psi(f, g) = f \otimes g$, onde $f \otimes g : B \cup C \to A$ é definida por

$$f \otimes g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in B \\ g(x) & \text{se} \quad x \in C \end{cases}$$

Vamos provar que Ψ é bijetora. Primeiro mostramos que ela é injetora. Suponha que $\Psi(f_1, g_1) = \Psi(f_2, g_2)$. Assim, $f_1 \otimes g_1 = f_2 \otimes g_2$, ou seja, se $x \in B$ então $f_1(x) = f_2(x)$ donde concluímos que $f_1 = f_2$. Analogamente, se $x \in C$ então $g_1(x) = g_2(x)$ donde concluímos que $g_2 = g_2$, e, portanto, $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$. Provemos agora que ela é sobrejetora. Suponha que $m \in A^{B\cup C}$. Assim m é uma função definida em $B \cup C$ e tomando valores em A. Como $B \cap C = \emptyset$ então vamos chamar de m_B a restrição da função m ao conjunto

B e de m_C a restrição de m ao conjunto C. Então, por construção, $\Psi(m_B, m_C) = m$. Logo Ψ é sobrejetora, sendo, pois, bijetora. ■

Propriedade 2 *Sejam A, B e C conjuntos como na* ***Propriedade 1.*** *Então vale* $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

Demonstração: A propriedade estará provada se conseguirmos estabelecer uma função bijetora entre $A^{B\times C}$ e $\left(A^B\right)^C$. Dada $f \in A^{B\times C}$. Seja $f \in A^{B\times C}$. Então f associa a cada par ordenado $(x, y) \in B \times C$ um único elemento de A. Agora, a partir dessa f vamos construir uma função $g : C \to A^B$, do seguinte modo: para cada $x \in C$, defina $g_x : B \to A$ por $g_x(y) = f(x, y)$. A correspondência que associa $f \in A^{B\times C}$ à $g \in \left(A^B\right)^C$ é bijetora. Deixamos a prova como exercício. Portanto, vale a propriedade.■

Propriedade 3 *Sejam A, B e C conjuntos como na* ***Propriedade 1.*** *Então vale* $(ab)^c = a^c b^c$.

Demonstração: Novamente a prova dessa propriedade estará completa se conseguirmos estabelecer uma bijeção entre os conjuntos $(A \times B)^C$ e $A^C \times B^C$. Seja $f : C \to A \times B$. A partir dessa f construímos duas funções: uma de C em A, que denotaremos por f_A e outra de C em B, que denotaremos por f_B. Essas funções nada mais são do que as projeções na primeira variável e na segunda, respectivamente. Assim definimos uma função $\Psi : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$, definida por $\Psi(f) = (f_A, f_B)$. Deixamos ao leitor a agradável tarefa de mostrar que essa função é bijetora.■

Exercícios

1. Prove que
   (a) $x + 0 = x$,
   (b) $x + y = y + x$,
   (c) $x + (y + z) = (x + y)$.
2. Seja n um número cardinal finito qualquer. Prove que $n + \aleph_0 = \aleph_0$ e que $n + c = c$, onde c denota o número cardinal de $(0, 1)$.
3. Prove que $c + c = c$, onde c denota o cardinal de $(0, 1)$.

4. Se $x \preceq y$ então $x+z \preceq y+z$. Se trocarmos $\preceq$ por $\prec$ essa afirmação continua válida ?

5. Sejam x, y, z números cardinais quaisquer. Prove que

   (a) $xy = yx$

   (b) $(xy)\, z = x\,(yz)\,,$

   (c) $x\,(y+z) = xy + xz.$

6. Se x, y são números cardinais quaisquer tais que $x \preceq y$, prove que $xz \preceq yz$.

7. Demonstre ou refute com um contra-exemplo a seguinte afirmação: Se x, y e z são números cardinais tais que $x \prec y$ e $z \neq 0$, então $xz \prec yz$.

8. Seja n um cardinal finito, $n \neq 0$. Prove que $n\aleph_0 = \aleph_0$.

9. Sejam x e y números cardinais. Prove que

   (a) Se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$,

   (b) Se $xy = 1$ então $x = 1$ e $y = 1$.

10. Seja a um número cardinal arbitrário. Prove que $a^1 = a, 0^a = 0$. Nesse último caso, pedimos que $a \neq 0$.

11. Prove que $a \prec 2^a$ para todo número cardinal a.

12. Sejam a, b, x, y números cardinais tais que $a \preceq b$ e $x \preceq y$. Prove que $a^x \preceq b^y$.

13. Prove que $c^{\aleph_0} = c = c^n$, para qualquer $1 \preceq n$ finito.

14. Prove que $n^{\aleph_0} = c = \aleph_0^{\aleph_0}$, para todo $2 \preceq n$ finito.

Capítulo 7

Ordinais

7.1 Introdução

Quando consideramos conjuntos com uma estrutura de ordem entre seus elementos a noção de número cardinal não é mais suficiente para diferenciarmos dois conjuntos. Isso porque, como veremos adiante, dois conjuntos podem ter o mesmo número cardinal mas com estruturas ordenadas diferentes. Para esse fim vamos introduzir novos objetos que serão os tipos ordinais e os números ordinais.

7.2 Conjuntos parcialmente ordenados

Sejam A um conjunto arbitrário e $\Re$ uma relação sobre A, isto é, $\Re$ é um subconjunto de $A \times A$. Diremos que $\Re$ é uma **Relação de Ordem Parcial** em A se ela possuir as seguintes propriedades:

O1. $\Re$ é reflexiva, isto é, $a\Re a$ para todo $a \in A$,

O2. $\Re$ é anti-simétrica, isto é, se $a\Re b$ e $b\Re a$ então $a = b$,

O3. $\Re$ é transitiva, isto é, se $a\Re B$ e $b\Re c$ então $a\Re c$.

Se $\Re$ é uma relação de ordem parcial num conjunto A, usaremos a notação $a \preceq b$ para simbolizar que $a\Re b$. Quando tivermos $a \preceq b$, diremos que a **é menor ou igual a** b ou que a **precede** b. Um conjunto A no qual está definida uma ordem parcial $\preceq$ é dito **Parcialmente Ordenado** e a notação usada para representar um conjunto parcialmente ordenado com sua ordem é $(A, \preceq)$. Vejamos agora alguns exemplos de conjuntos parcialmente ordenados.

Exemplo 7.2.1 *Os conjuntos* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$ *com suas ordens usuais são conjuntos parcialmente ordenados.*

Exemplo 7.2.2 *Sejam* X *um conjunto não-vazio e* $\wp(X)$ *o conjunto das partes de* X*. Se definirmos em* $A = \wp(X)$ *a relação*

$$P \preceq Q \text{ se e somente se } P \subseteq Q,$$

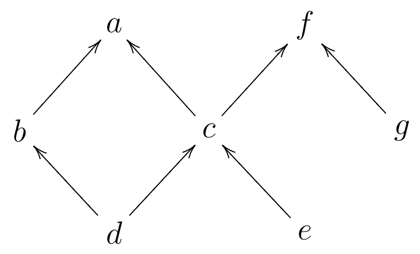
vemos que $(\wp(X), \preceq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado.*

Exemplo 7.2.3 *Seja* $\mathbb{N}$ *o conjunto dos números naturais e, em* $\mathbb{N}$ *defina a relação*

$$a \preceq b \text{ se e somente se } a \text{ é divisor de } b.$$

Vamos mostrar que $\preceq$ *é uma relação de ordem parcial em* $\mathbb{N}$*. Inicialmente vamos recordar a definição de divisor. Dados dois números naturais* a *e* b *dizemos que* a *é um* ***divisor*** *de* b *se existe um número natural* c *tal que* $b = ac$*. Passemos agora à prova propriamente dita. Seja* $a \in \mathbb{N}$*. Como* $a = 1a$*, segue que* a *é um divisor de* a *e, portanto,* $a \preceq a$*. Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$ *tais que* $a \preceq b$ *e* $b \preceq a$*. Então* a *é divisor de* b *e* b *é divisor de* a*, ou seja, existem naturais* c_1 *e* c_2 *tais que* $b = c_1 a$ *e* $a = c_2 b$*. Portanto,* $a = c_2 c_1 a$ *e daí* $c_1 c_2 = 1$*. Como* c_1 *e* c_2 *são números naturais, devemos ter* $c_1 = c_2 = 1$*. Logo* $a = b$*. Suponha agora que* $a \preceq b$ *e que* $b \preceq c$*. Então* a *é divisor de* b *e* b *é divisor de* c*. Assim existem números naturais* c_1 *e* c_2 *tais que* $b = c_1 a$ *e* $c = c_2 b$*. Logo* $c = c_2 c_1 a = c_3 a$*, ou seja,* a *é divisor de* c *e, portanto,* $a \preceq c$*. Observe que com essa ordem, acontecem coisas diferentes em* $\mathbb{N}$ *como, por exemplo* $3 \not\preceq 4$ *e* $4 \not\preceq 3$*. Também ocorre* $5 \not\preceq 12$*.*

Exemplo 7.2.4 *Seja* $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ *e considere o seguinte diagrama:*



Este diagrama induz uma relação de ordem parcial em X *da seguinte maneira:* $x \preceq y$ *se e somente se* $x = y$ *ou se pudermos nos deslocar de* x *para* y *sempre nos movendo no sentido ascendente. Assim, por exemplo, temos* $b \preceq a, d \preceq a, c \preceq a, e \preceq a$*. Com essa ordem o conjunto* X *é parcialmente ordenado. O diagrama acima é conhecido como* **Diagrama de Hasse** *e é muito útil para dar exemplos e contra-exemplos.*

Exercício 6 *Seja* $A = \{a, b, c\}$ *e defina em* $\wp(A)$ *a relação de ordem parcial* $X \preceq Y \leftrightarrow X \subseteq Y$. *Faça o diagrama de Hasse dessa relação de ordem.*

Exemplo 7.2.5 *Tomando* $X = \mathbb{Z}$ *e definindo* $x\Re y \leftrightarrow x \equiv y \mathbf{mod} 5$, *vemos que* $\Re$ *não é anti-simétrica e, portanto, não é uma relação de ordem em* $\mathbb{Z}$.

Exemplo 7.2.6 *Seja* X *o conjunto das palavras em língua portuguesa. No conjunto* X *defina a seguinte relação:* $p\Re q \leftrightarrow p = q$ *ou, se existir um número natural* n *tal que as* $n-1$ *primeiras letras de* p *são iguais às* $n-1$ *primeiras letras de* q *e a* $n-$*ésima letra de* p *vem antes da* $n-$*ésima letra de* q. *Essa relação é uma relação de ordem parcial no conjunto* X *e é conhecida como* **Ordem Lexicográfica**.

Exercício 7 *Tomando* X *como sendo o conjunto das retas do plano, verifique se a relação* $r\Re s \leftrightarrow r$ *é perpendicular a* s *é uma relação de ordem parcial em* X.

Exercício 8 *Desenhe o diagrama de Hasse da ordem do exemplo (7.2.3) no conjunto* $X = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$.

Exercício 9 *Dar um exemplo de uma relação em* $\mathbb{R}$ *que é transitiva e anti-simétrica mas que não é nem simétrica nem reflexiva.*

Exercício 10 *Seja* A *um conjunto não-vazio e* $\Re$ *uma relação em* A. *Suponha que* $\Re$ *é simétrica e anti-simétrica. Prove que qualquer elemento de* A *está relacionado, no máximo, com ele mesmo.*

7.3 Conjuntos totalmente ordenados

Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se, para todos $x, y \in X$ tivermos $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, diremos que o conjunto $(X, \preceq)$ é um conjunto **Totalmente Ordenado** e a ordem $\preceq$ será dita uma **Ordem Total** em X. Vamos analisar quais dos conjuntos listados nos exemplos anteriores são totalmente ordenados.

Exemplo 7.3.1 *Em geral a ordem parcial definida no exemplo (7.2.2) não é total. Por exemplo, considere* $X = \{a, b, c\}$. *Temos que* $\wp(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. *Note que* $\{a\} \npreceq \{b\}$ *e* $\{b\} \npreceq \{a\}$.

Exercício 11 *Dê um exemplo de um conjunto* X *onde a ordem do exemplo (7.2.2) seja total.*

Exemplo 7.3.2 *Os conjuntos do exemplo (7.2.1) são todos totalmente ordenados.*

Exemplo 7.3.3 *O conjunto do exemplo (7.2.3) não é totalmente ordenado pois* $3 \not\preceq 5$ *e* $5 \not\preceq 3$.

Exercício 12 *Existe algum subconjunto do conjunto do exemplo (7.2.3) que seja totalmente ordenado?*

Exemplo 7.3.4 *O conjunto do exemplo (7.2.4) não é totalmente ordenado pois nem* $b \preceq c$ *nem* $c \preceq b$.

Exercício 13 *Determinar todas as relações de ordem parcial sobre o conjunto* $A = \{a, b, c\}$ *e dizer quais delas são totais.*

Exercício 14 *Seja* $\leq$ *a ordem habitual sobre o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais. Mostre que a relação* R *sobre* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *definida por:*

$$(a, b)\, R\, (c, d) \leftrightarrow a \leq c \;\; e \;\; b \leq d$$

é uma ordem parcial que não é total.

Exercício 15 *Com as mesmas notações do exercício anterior, mostre que que a relação* S *definida por*

$$(a, b)\, S\, (c, d) \leftrightarrow a < c, \;\; ou, \; a = c \;\; e \;\; b < d$$

é uma ordem parcial que é total.

7.4 Um pouco mais de nomenclatura

Sejam $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq A$ um subconjunto não-vazio. Diremos que

1. $a \in Y$ é o **Primeiro Elemento** de Y se $a \preceq y$ para todo $y \in Y$. É comum também chamarmos o primeiro elemento de **Elemento Mínimo** ou **Menor Elemento** de Y.

2. $b \in Y$ é o **Último Elemento** de Y se $y \preceq b$ para todo $y \in Y$. É também costume chamarmos o último elemento de **Elemento Máximo** ou **Maior Elemento** de Y.

3. $a \in A$ é uma **Cota Superior** ou um **Majorante** de Y se $y \preceq a$, para todo $y \in Y$.

4. $b \in A$ é uma **Cota Inferior** ou um **Minorante** de Y se $b \preceq y$, para todo $y \in Y$.

5. $c \in A$ é o **Supremo** de Y se ele for o menor elemento do conjunto das cotas superiores de Y. Em símbolos, $c \in A$ é supremo de Y se e somente se

$$a \in A \wedge a \text{ cota superior de } Y \to c \preceq a.$$

6. $d \in A$ é o **Infimo** de Y se ele for o maior elemento do conjunto das cotas inferiores de Y. Em símbolos, $d \in A$ é ínfimo de Y se e somente se

$$a \in A \wedge a \text{ cota inferior de } Y \to a \preceq d.$$

7. $a \in Y$ é um **Elemento Maximal** de Y se $x \in Y, a \preceq x, a \to a = x$.

8. $b \in Y$ é um **Elemento Minimal** de Y se $x \in Y, x \preceq b \to b = x$.

Vamos ver agora alguns exemplos.

Exemplo 7.4.1 *Sejam* $A = \mathbb{R}$ *e* $Y = (0, 1]$, *onde* A *está munido da ordem usual. Assim temos:*

1. *O conjunto das cotas superiores de* Y *é* $[1, +\infty)$,
2. *O conjunto das cotas inferiores de* Y *é* $(-\infty, 0]$,
3. *O elemento máximo de* Y *é* 1,
4. *O conjunto* Y *não tem elemento mínimo,*
5. *O supremo do conjunto* Y *é* 1,
6. *O ínfimo de* Y *é* 0,
7. 1 *é o único elemento maximal de* y,
8. Y *não tem elementos minimais.*

Exercício 16 *Considere* $A = \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ *,munido da ordem da divisibilidade, conforme o exemplo (7.2.3), e* $Y = \{6, 10\}$ *. Faça o diagrama de Hasse dessa ordem e descubra quem são cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, elementos maximais e minimais de* Y*.*

Exercício 17 *Considere* $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,d,e\}\}$, *ordenado pela inclusão. Faça o diagrama de Hasse dessa ordem e descubra quem são cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, elementos maximais e minimais de* $Y = \{\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$.

Exercício 18 *Seja* $Y = \{x \in \mathbb{Q}; 0 \leq x^2 \leq 2\}$, *um subconjunto de* $\mathbb{Q}$, *onde está definida a relação de ordem habitual. Determinar as cotas superiores e inferiores, ínfimo e o supremo de* Y.

Exercício 19 *Seja* $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *e defina em* A *a relação :*

$$(a,b)\Re(c,d) \leftrightarrow a|c\text{[1]} \text{ e } b \leq d.$$

Mostre que essa relação é uma ordem parcial em A. *Sendo* $Y = \{(2,1),(1,2)\}$, *encontre as cotas superiores, inferiores, ínfimo, supremo, máximo e mínimo de* Y.

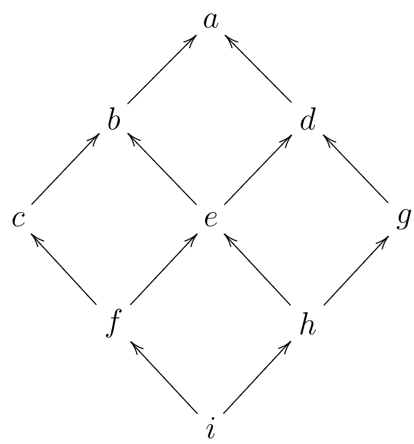
Exemplo 7.4.2 *Seja* $X = \{a,b,c,d\}$ *ordenado pelo diagrama de Hasse mostrado abaixo*

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& c \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& d \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Podemos ver que X *possui primeiro elemento, no caso,* d, *mas não possui último elemento. Podemos ainda ver que* a *e* b *são elementos maximais e* d *é minimal. Se olharmos para o conjunto* $Y = \{a,b,c\}$, *vemos que ele possui cota inferior, no caso* c *mas não possui cota superior. Portanto ele possui ínfimo, mas não possui supremo.*

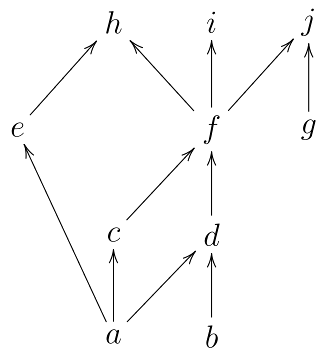
Exemplo 7.4.3 *Seja* $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ *ordenado pelo diagrama de Hasse mostrado abaixo*

[1] a divide c.



Se considerarmos $X = \{b, c, d, e, f, g, h\}$ *, vemos que* b *e* d *são elementos maximais,* f *e* h *são elementos minimais,* i *é cota inferior e ínfimo,* a *é cota superior e máximo,* X *não tem maior nem menor elemento.*

Exercício 20 *Seja* $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ *ordenado pelo diagrama de Hasse mostrado abaixo*



Em cada letra extraia, se possível, um subconjunto $X \subseteq A$*, satisfazendo à propriedade pedida:*

1. X *não tem menor elemento,*

2. X *não tem maior elemento,*

3. X *não tem cota inferior,*

4. X *não tem cota superior,*

5. X *não tem elemento minimal,*

6. X *não tem elemento maximal,*

7. *X tem supremo, mas não ínfimo,*

8. *X tem ínfimo, mas não supremo,*

9. *X tem elemento maximal, mas não tem minimal,*

10. *X tem elemento minimal, mas nãto tem maximal,*

Exemplo 7.4.4 *Seja X um conjunto não-vazio e $\wp(X)$ ordenado pela inclusão, conforme o exemplo 1. O conjunto $\wp(X)$ tem primeiro elemento, a saber, $\emptyset$ e último elemento, a saber, o próprio X.*

Exercício 21 *Prove que $Y \subseteq \mathbb{N}$ possui último elemento se e somente se Y é finito.*

Exercício 22 *Dê exemplo[2] de um conjunto X e subconjunto $Y \subseteq \wp(X)$ tais que*

1. *Y não possua primeiro elemento, mas possua último elemento,*

2. *Y possua primeiro elemento, mas não possua último elemento,*

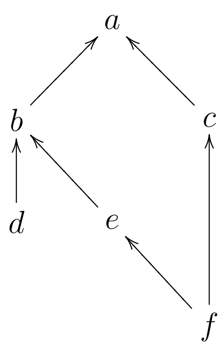
3. *Y possua primeiro elemento e último elemento,*

4. *Y não possua primeiro nem último elemento.*

Exemplo 7.4.5 *Considere $\mathbb{R}$ com a ordem usual e tome $Y = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$. Podemos ver que Y não tem nem primeiro nem último elemento.*

Exercício 23 *Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq A$. Mostre que, quando Y possuir maior ou menor elementos, eles são únicos.*

Exercício 24 *Seja $B = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado conforme o diagrama de Hasse abaixo:*



Encontre os elementos minimais e maximais de B. Será que B possui elemento mínimo ? e máximo ?

[2]busque exemplos inteligentes, evite trivialidades

Exercício 25 *Seja $M = \{2, 3, 4, 5, ...\}$ e considere em $M \times M$ a seguinte relação*

$$(a, b)\, R\, (c, d) \leftrightarrow a \text{ é divisor de } c \text{ e } b \text{ é um múltiplo de } d.$$

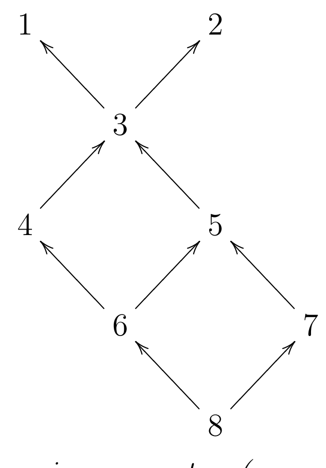
1. *Mostre que R é uma ordem parcial em $M \times M$,*
2. *R é uma ordem total ?*
3. *Ache todos os elementos minimais de $M \times M$,*
4. *Ache todos os elementos maximais de $M \times M$.*

Exercício 26 *Seja A um conjunto parcialmente ordenado e $B \subset A$. Coloque (V) para verdadeiro ou (F) para falso. Para aquelas que forem verdadeiras, exiba uma prova e para aquelas que forem falsas, exiba um contra-exemplo:*

1. *Se B possui apenas um elemento maximal então ele é elemento máximo de B,*
2. *Se B é totalmente ordenado, ele pode possuir mais de um elemento maximal,*
3. *Uma cota superior de B pode ser um elemento máximo de B,*
4. *Um elemento maximal de B também é cota superior dele,*
5. *Uma cota superior que pertença ao conjunto B também é elemento maximal dele,*

Exercício 27 *Mostre que se A é um conjunto parcialmente ordenado e $B \subset A$ que possua elemento máximo M e elemento mínimo m, então eles são únicos.*

Exercício 28 *Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, ordenado conforme o diagrama de Hasse abaixo:*



Para os conjuntos a seguir determine, as cotas (superiores e inferiores), os elementos maximais e minimais, o(s) elemento(s) máximo e mínimo, caso existam.

1. $B = \{4, 5, 7\}$,

2. $C = \{2, 3, 6\}$,

3. $D = \{1, 2, 4, 7\}$.

7.5 Conjuntos Bem Ordenados

Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $(X, \preceq)$ é **Bem Ordenado** se todo subconjunto não-vazio $Y \subseteq X$ possui primeiro elemento. Nesse caso a ordem parcial $\preceq$ é chamada uma **Boa Ordem.** Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.5.1 *O conjunto do exemplo 5 não é bem ordenado pois o conjunto*

$$Y = \{\{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

não possui menor elemento.

Exemplo 7.5.2 *Pelo que vimos anteriormente* $\mathbb{R}$*, com a ordem usual, não é bem ordenado.*

Exemplo 7.5.3 *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *com a ordem usual não é bem ordenado pois o conjunto* $\{..., -3, -2, -1, 0\}$ *não possui menor elemento. Assim esse exemplo também mostra que* ***Nem todo conjunto totalmente ordenado é bem ordenado.***

Exemplo 7.5.4 *Seja* $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ *com a sua ordem usual. Munido dessa ordem, qualquer subconjunto* $Y \subseteq \mathbb{N}$ *possui primeiro elemento. Isso pode ser provado com a ajuda do Princípio da Indução Finita. De fato, vamos supor, por contradição que exista um conjunto* $Y \subset \mathbb{N}$ *tal que* Y *não possua menor elemento. Vamos provar que* $Y = \emptyset$*. Considere a propriedade* $P(n)$ *dada por:*

$$\textit{Nenhum número } \leq n \textit{ pertence a } Y.$$

A nossa estratégia será mostrar que $P(n)$ *é verdadeira para todo* n*. Mostrando isso, teremos mostrado que* $Y = \emptyset$*. Então vamos lá. Veja que* $P(1)$ *é verdadeira, pois, se fosse falsa, então* $1 \in Y$*, o que acarretaria que* 1 *seria o menor elemento de* Y*, o que é absurdo. Logo* $P(1)$ *é verdadeira. Suponhamos agora que* $P(n)$ *é verdadeira para algum* $n \geq 1$*. Vamos provar que* $P(n+1)$ *também é verdadeira. Suponha que* $P(n+1)$ *seja falsa. Então* $n + 1$ *é o único natural menor que ou igual a* $n + 1$ *que pode pertencer a*

Y pois os demais não podem pertencer, por hipótese de indução. Assim $n+1 \in Y$ e, portanto, $n+1$ é o menor elemento de Y, o que se constitui num absurdo, pois Y não possui menor elemento. Portanto $P(n+1)$ é verdadeira e, portanto, $Y = \emptyset$. Entretanto, nem todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ possui último elemento, por exemplo, Y pode ser o conjunto dos números pares.

Definição 7.5.1 *Seja $(A, \preceq)$, um conjunto parcialmente ordenado. A* ***Ordem Inversa*** *em A, denotada por $\preceq_i$, é definida por:*

$$x \preceq_i y \Leftrightarrow y \preceq x.$$

Exemplo 7.5.5 *Seja $(\mathbb{N}, \leq)$ o conjunto dos números naturais com a sua ordem usual. O conjunto $(\mathbb{N}, \preceq_i)$ não é bem ordenado, pois não possui menor elemento.*

Observação 7.5.1 *A recíproca da afirmação contida no exemplo acima é verdadeira, ou seja, se $(X, \preceq)$ é um conjunto bem ordenado então ele também é totalmente ordenado. De fato, sejam $x, y \in X$ e considere o conjunto $Y = \{x, y\}$. Pelo fato de X ser bem ordenado, o subconjunto Y possui menor elemento. Se esse menor elemento for x então teremos $x \preceq y$. Se esse elemento for y então teremos $y \preceq x$. Em qualquer dos casos teremos $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, provando assim que $(X, \preceq)$ é totalmente ordenado.*

Exercício 29 *Considere $\mathbb{N}$ com a seguinte ordem: $n \preceq m$ se e somente se n é par e m é ímpar ou ambos são pares e $n \leq m$ ou ambos são ímpares e $n \leq m$. Prove que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$. Com essa ordem, $\mathbb{N}$ é bem ordenado ?*

Exercício 30 [3] *Prove que se X é um conjunto finito totalmente ordenado então ele também é bem ordenado.*

Exercício 31 *Mostre que o conjunto dos números racionais da forma $m - \frac{1}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$, munido da ordem usual de $\mathbb{Q}$, é bem ordenado.*

7.6 Conjuntos semelhantes e tipos ordinais

Sejam $(X, \preceq_X)$ e $(Y, \preceq_Y)$ conjuntos parcialmente ordenados. Diremos que eles são **semelhantes** se existir uma função bijetora $f : X \to Y$ com a seguinte propriedade

$$x \preceq_X y \text{ se e somente se } f(x) \preceq_Y f(y).$$

[3] Agradeço ao Thiago por essa sugestão.

A função f é conhecida como **Semelhança**. A propriedade acima diz que a função f preserva ordem. A relação de semelhança definida acima é uma relação de equivalência entre conjuntos parcialmente ordenados. Quando dois conjuntos estiverem na mesma classe de equivalência diremos que eles têm o mesmo **Tipo Ordinal.** Ou seja, dois conjuntos parcialmente ordenados possuem o mesmo tipo ordinal se e somente se forem semelhantes. Conjuntos com o mesmo tipo ordinal possuem o mesmo número cardinal. A recíproca disso é falsa conforme veremos mais adiante. Assim, cada tipo ordinal possui associado a ele um número cardinal que é o número cardinal de qualquer conjunto que possua aquele tipo ordinal. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 7.6.1 *Considere* $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *e* $Y = \mathbb{N} = \{2, 4, 6, ...\}$, *ambos com suas ordens usuais. A função* $f : X \to Y$ *dada por* $f(x) = 2x$ *é uma semelhança e asim* X *e* Y *possuem o mesmo tipo ordinal.*

Exemplo 7.6.2 *Sejam* $X = \{1, 2, 6, 8\}$ *parcialmente ordenado pela relação*

$$x \preceq y \text{ se e somente se } x \text{ é um divisor de } y$$

e $Y = \{a, b, c, d\}$ *ordenado pela ordem do diagrama de Hasse:*

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& c \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& d \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Se definirmos $f : X \to Y$ *por* $f(1) = d, f(2) = c, f(6) = b$ *e* $f(8) = a$ *vemos que* f *é uma semelhança e assim* X *e* Y *possuem o mesmo tipo ordinal.*

Para introduzirmos mais algunsm exemplos de tipos ordinais vamos precisar de uma definição e de algumas propriedades da relação de semelhança. Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado.

Proposição 7.6.1 *Sejam* $(X, \preceq_X)$ *e* $(Y, \preceq_Y)$ *conjuntos parcialmente ordenados com o mesmo tipo ordinal. Então se um deles possuir primeiro (ou último) elemento, o outro também o possuirá.*

Demonstração: Suponha que $a \in X$ seja o primeiro elemento de X. Então $a \preceq_X x$, para todo $x \in X$. Como f preserva ordem temos que $f(a) \preceq_Y f(x)$ para todo $x \in X$.

Como f é sobrejetora, temos que dado $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Assim, $f(a) \preceq_Y f(x) = y$, para todo $y \in Y$. Logo $f(a)$ é o primeiro elemento de Y. Analogamente provamos as demais afirmações. ■

Podemos dar agora um exemplo de conjuntos com o mesmo cardinal mas que não possuem o mesmo tipo ordinal.

Exemplo 7.6.3 *Considere $X = \mathbb{N}$, munido de sua ordem usual e $Y = \mathbb{N}$ munido da ordem inversa. Então X não tem o mesmo tipo ordinal de Y pois X possui menor elemento, ao passo que Y não possui. Ainda mais, Y possui maior elemento e X não possui.*

Exercício 32 *Se $(X, \preceq_X)$ é um conjunto parcialmente ordenado e Y é um conjunto tal que existe uma função bijetora $f : X \to Y$ então podemos definir uma ordem parcial em Y de modo que ele possua o mesmo tipo ordinal de X.* ***Sugestão:*** *Pense na inversa de f e veja o que deve acontecer para que eles sejam semelhantes, ou seja, tenham o mesmo tipo ordinal.* ■

Exercício 33 *Sejam $(X, \preceq_X)$ e $(Y, \preceq_Y)$ conjuntos parcialmente ordenados e finitos, com o mesmo número cardinal. Prove que eles possuem o mesmo tipo ordinal.* ***Sugestão:*** *Tente argumentar como no Exercício 7.*

Um pouco de notação. vamos denotar por:

- n o tipo ordinal de qualquer conjunto finito parcialmente ordenado cujo número cardinal seja n,
- ω o tipo ordinal do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com sua ordem usual,
- η o tipo ordinal do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com sua ordem usual,
- λ o tipo ordinal do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com sua ordem usual,
- μ^* o tipo ordinal de um conjunto parcialmente ordenado com a ordem inversa.

Exercício 34 *Prove que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não possuem o mesmo tipo ordinal.*

Exercício 35 *Considere $\mathbb{N}$ com a ordem usual. A proposição 1 nos garante que é possível reordená-lo de modo que ele e $\mathbb{Z}$ possuam o mesmo tipo ordinal. Encontre algumas reordenações possíveis de $\mathbb{N}$.*

Exercício 36 *Considere $\mathbb{Z}$ com a ordem usual. A proposição 1 nos garante que é possível reordená-lo de modo que ele e $\mathbb{N}$ possuam o mesmo tipo ordinal. Encontre algumas reordenações possíveis de $\mathbb{Z}$.*

Exercício 37 *Os conjuntos $X = (0, 1]$ e $Y = [0, 1)$ possuem o mesmo tipo ordinal se estiverem munidos da norma usual? Caso sua resposta seja negativa, reordene algum deles de modo que isso ocorra.*

Exercício 38 *Os conjuntos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $T = \{10, 20, 30, ..., 11, 21, 31, ..., 19, 29, 39, ...\}$ possuem o mesmo tipo ordinal? A ordem adotada é a usual, no caso de $\mathbb{N}$, e a ordem na seqüência em que aparecem, no caso de T.*

Exercício 39 *Prove que $\eta^* = \eta$ e que $\lambda^* = \lambda$.*

7.7 Operações com tipos ordinais

Vamos definir duas operações com tipos ordinais: a adição e a multiplicação. Comecemos com a adição. Sejam α e β dois tipos ordinais. Portanto existem dois conjuntos parcialmente ordenados e disjuntos $(A, \preceq_A)$ e $(B, \preceq_B)$ cujos tipos ordinais são, respectivamente, α e β. A adição dos tipos ordinais α e β, denotada por $\alpha + \beta$, é o tipo ordinal do conjunto $A \cup B$ munido da ordem parcial $\preceq_{A\cup B}$ definida por:

- Se $a, b \in A$ prevalece a ordem de A, ou seja $a \preceq_{A\cup B} b \Leftrightarrow a \preceq_A$,
- Se $a, b \in B$ prevalece a ordem de B, ou seja $a \preceq_{A\cup B} b \Leftrightarrow a \preceq_B$,
- Se $a \in A$ e $b \in B$ então, por definição, $a \preceq_{A\cup B}$.

Exercício 40 *Sejam α e β dois tipos ordinais. Mostre que existem dois conjuntos parcialmente ordenados e disjuntos $(A, \preceq_A)$ e $(B, \preceq_B)$ cujos tipos ordinais são, respectivamente, α e β. **Sugestão:** Busque a inspiração no caso da adição de cardinais.*

Exercício 41 *Suponha que $(A, \preceq_A)$ e $(A', \preceq_{A'})$ têm o mesmo tipo ordinal, $(B, \preceq_B)$ e $(B', \preceq_{B'})$ têm o mesmo tipo ordinal, $A \cap B = \emptyset$ e $A' \cap B' = \emptyset$ então $A \cup B$ e $A' \cup B'$ munidos das ordens parciais $\preceq_{A\cup B}$ e $\preceq_{A'\cup B'}$ possuem o mesmo tipo ordinal. Em outras palavras, a definição de adição de tipos ordinais independe dos conjuntos escolhidos para calculá-la.*

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 7.7.1 *Vamos calcular* $1+\omega$. *Escolha* $A = \{0\}$ *e* $B = \mathbb{N}$. *Então* $1+\omega$ *é o tipo ordinal de* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ *munido da ordem acima definida. Ademais, o tipo ordinal de* $\mathbb{N}_0$ *é* ω. *De fato, a função* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ *dada por* $f(n) = n + 1$ *é uma semelhança. Verifique os detalhes. Portanto,* $1 + \omega = \omega$.

Exercício 42 *Vamos calcular agora* $\omega + 1$. *Escolha* $A = \{0\}$ *e* $B = \mathbb{N}$. *Então* $\omega + 1$ *é o tipo ordinal do conjunto* $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, ..., 0\}$ *munido da ordem acima. Note que* $\mathbb{N}_1$ *e* $\mathbb{N}_0$ *com suas ordens, não são semelhantes pois* $\mathbb{N}_1$ *tem último elemento, enquanto que* $\mathbb{N}_0$ *não tem.*

Observação 7.7.1 *Dos exemplos anteriores podemos concluir que a adição ordinal não é, em geral, comutativa.*

Exercício 43 *Se* α, β *e* γ *são tipos ordinais então vale a propriedade* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Exemplo 7.7.2 *Vamos calcular* $\omega^* + \omega$. *Escolha* A *para ser oconjunto dos números naturais pares e* B *para ser o conjunto dos números naturais ímpares, sendo que* A *deve estar munido da ordem inversa da ordem usual! Então* $\omega^* + \omega$ *é o tipo ordinal do conjunto* $\mathbb{N}_2 = \{..., 6, 4, 2, 1, 3, 5, ...\}$. *Observe que a função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ *definida por*

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1 & se \quad n > 0 \\ -2n & se \quad n \leq 0 \end{cases}$$

é uma semelhança. Verifique essa afirmação.

Exercício 44 *Mostre que* $n + \omega = \omega$, *para todo tipo ordinal finito* n.

Exercício 45 *Mostre que* $\omega + n \neq n + \omega$, *para todo ordinal finito* n.

Exercício 46 *Com a ordem usual* (a, b), *tem o mesmo tipo ordinal de* $\mathbb{R}$, *ou seja,* λ.

Exemplo 7.7.3 *Em virtude do exemplo anterior, os conjuntos* $[0, 1), (0, 1]$ *e* $[0, 1]$, *quando munidos da ordem usual, possuem tipos ordinais iguais a* $1 + \lambda, \lambda + 1$ *e* $1 + \lambda + 1$. *Detalhe os tipos ordinais dos três são distintos dois a dois.*

Vejamos agora a multiplicação. Sejam α e β tipos ordinais. Portanto existem conjuntos parcialmente ordenados $(A, \preceq_A)$ e $(B, \preceq_B)$ cujos tipos ordinais são α e β respectivamente. A multiplição dos tipos ordinais α e β, denotada por $\alpha\beta$, é o tipo ordinal do conjunto $B \times A$ munido da ordem lexicográfica (a ordem do dicionário) $\preceq$ definida por:

$$(b_1, a_1) \preceq (b_2, a_2) \Leftrightarrow b_1 \prec_B b_2 \text{ ou } b_1 = b_2 \text{ e } a_1 \preceq_A a_2.$$

Exercício 47 *Suponha que $(A, \preceq_A)$ e $(A', \preceq_{A'})$ têm o mesmo tipo ordinal, $(B, \preceq_B)$ e $(B', \preceq_{B'})$ têm o mesmo tipo ordinal. Então $B \times A$ e $B' \times A'$ munidos da ordem lexicográfica possuem o mesmo tipo ordinal. Em outras palavras, a definição de multiplição de tipos ordinais independe dos conjuntos escolhidos para calculá-la.*

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 7.7.4 *Vamos calcular 2ω. Tome $A = \{a, b\}$, ordenado por $a \preceq b$, e $B = \mathbb{N}$, com a ordem usual. Daí, 2ω é o tipo ordinal do conjunto $B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), ...\}$, munido da ordem lexicográfica. Com essa ordem $B \times A$ tem tipo ordinal igual a ω. De fato, se definirmos $f : \mathbb{N} \to B \times A$ por $f(2n-1) = (n, a)$ e $f(2n) = (n, b)$, essa função é uma semelhança. Verifique essa afirmação. Só há um caso trabalhoso que é quando m e n têm paridades diferentes. Mas basta trabalhar com eles sendo consecutivos. Em sala discutiremos mais.*

Exemplo 7.7.5 *Vamos calcular $\omega 2$. Tomamos $A = \mathbb{N}$ e $B = \{a, b\}$, ordenados como no exemplo anterior. Daí $\omega 2$ é o tipo ordinal do conjunto*

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), ..., (b, 1), (b, 2), (b, 3), ...\},$$

munido da ordem lexicográfica. Observe que o seu tipo ordinal é $\omega + \omega$, pois é obtido "colando"duas cópias de $\mathbb{N}$ com a ordem usual. Logo, $\omega 2 = \omega + \omega$.

Observação 7.7.2 *Note que $2\omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega 2$, assim o produto de tipos ordinais não é, em geral, comutativo.*

Exercício 48 *Mostre que se α é um tipo ordinal então $\alpha 2 = \alpha + \alpha$.*

Exercício 49 *Sejam α, β e γ tipos ordinais. Prove que valem as seguintes propriedades: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ e $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.*

Observação 7.7.3 *Não vale, em geral, a propriedade* $(\alpha+\beta)\,\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$. *De fato,*

$$(\omega+1)\,2=\omega+1+\omega+1=\omega+(1+\omega)+1=\omega+\omega+1=\omega2+1.$$

Por outro lado,

$$\omega2+1\cdot2=\omega2+2.$$

Esses tipos ordinais são diferentes, pois o primeiro é o tipo ordinal do conjunto

$$\{(a,1)\,,(a,2)\,,(a,3)\,,...,(b,1)\,,(b,2)\,,(b,3)\,,...,c\}$$

ao passo que o segundo é o tipo ordinal do conjunto

$$\{(a,1)\,,(a,2)\,,(a,3)\,,...,(b,1)\,,(b,2)\,,(b,3)\,,...,e,f\}\,.$$

Agora note que o último elemento do segundo conjunto possui um antecessor imediato, ao passo que o último elemento do primeiro conjunto não o tem. Logo eles não podem ser semelhantes, conseqüentemente possuem tipos ordinais diferentes.

Observação 7.7.4 *Pode-se definir outras operações com tipos ordinais mas não faremos isso. Quem tiver interesse pode dar uma olhada no livro* ***Introduciòn a la teoría de conjuntos y fundamentos de las matematicas*** *de autoria de Carlos Augusto de Prisco ou em outros livros mais avançados de Teoria dos Conjuntos.*

Referências Bibliográficas

[1] Figueiredo, Djairo. *Números irracionais e transcendentes*. IMPA/SBM.

[2] Galilei, Galileu. *Duas novas ciências*. Nova Stella.

[3] Sampaio, João Carlos Vieira. *Introdução à teoria dos conjuntos.* Notas de aula.