

Universidade Federal da Paraíba  
Universidade Federal de Campina Grande  
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática  
Doutorado em Matemática

# Multiplicidade de soluções do tipo multi-bump para problemas elípticos

por

Alânnio Barbosa Nóbrega

Campina Grande - PB

Outubro/2016

# Multiplicidade de solução do tipo multi-bump para problemas elípticos

por

Alânnio Barbosa Nóbrega

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Outubro/2016

**Universidade Federal da Paraíba**  
**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática**  
**Doutorado em Matemática**

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

---

**Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva-UFG**

---

**Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta-UNESP**

---

**Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López-USACH**

---

**Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros-UFPB**

---

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves-UFCG**

**Orientador**

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Outubro/2016**

# Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções multi-bump para uma determinada classe de problemas elípticos que envolvem o operador Biharmônico. Além disso, aplicamos o método desenvolvido para o biharmônico no estudo da existência de solução multi-bump para equação de Choquard.

**Palavras-chave:** Multi-bump, Solução Nodal, Operador Biharmônico, Equação de Choquard, Método Dual.

# Abstract

In this work we study the existence of multi-bump solutions to a certain class of elliptic problems involving biharmonic problems. Moreover, we apply the method developed to biharmonic for study the existence of multi-bump solutions to Choquard Equation.

**Keywords:** Multi-bump, Nodal solutions, Biharmonic, Choquard equation, Dual Method.

# Agradecimentos

A Deus, força ...

A minha mãe, ...

A minha esposa ...

*“Se o conhecimento pode criar problemas, não é através da ignorância que podemos solucioná-los.”*

*Isaac Asimov*

# Dedicatória

Aos meus pais ...

# Sumário

Introdução . . . . .	1
Notação e terminologia . . . . .	13
<b>1 Soluções do tipo multi-bump para um classe de problemas elípticos com o operador biharmônico</b>	<b>15</b>
1.1 A Condição $(PS)_c$ . . . . .	15
1.2 A Condição $(PS)_{c,\infty}$ . . . . .	25
1.3 Um Nível Minimax Especial . . . . .	29
1.4 Demonstração do Teorema Principal . . . . .	33
<b>2 Soluções multi-bump para equação de Choquard</b>	<b>41</b>
2.1 O problema $(C)_{\infty,\Gamma}$ . . . . .	42
2.1.1 Demonstração do Teorema 0.0.2 . . . . .	45
2.2 A condição $(PS)_c$ para $I_\lambda$ . . . . .	49
2.3 A condição $(PS)_{c,\infty}$ para $(C)_\lambda$ . . . . .	55
2.4 Outras proposições para $c_\Gamma$ . . . . .	59
2.5 Demonstração do Teorema 0.0.3 . . . . .	63
<b>3 Solução nodal de energia mínima para um problema com o operador biharmônico</b>	<b>66</b>
3.1 O método dual . . . . .	67
3.1.1 Solução de Energia Mínima . . . . .	75
3.2 Solução Nodal de Energia Mínima . . . . .	76
3.3 Demonstração do Teorema 0.0.4 . . . . .	84

<b>4</b>	<b>Existência de solução multi-bump nodal para uma classe de problemas com o operador biharmônico</b>	<b>91</b>
4.1	Preliminares . . . . .	92
4.2	Um valor crítico especial para $J_{\lambda,R}$ . . . . .	94
4.3	Demonstração do Teorema Principal . . . . .	99
<b>Apêndices</b>		
<b>A</b>	<b>Apêndice A: Princípio do Máximo para o Operador Biharmônico</b>	<b>102</b>
A.1	A função de Green . . . . .	102
A.2	O problema de Navier . . . . .	103
A.3	O problema de Dirichlet . . . . .	104
<b>B</b>	<b>Um exemplo especial</b>	<b>105</b>
	<b>Referências</b>	<b>107</b>

# Introdução

Nos últimos anos, vários autores estudaram problemas relacionados a existência e multiplicidade de solução da equação de Schrödinger não-linear

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad x \in \Omega, \quad (P_1)$$

considerando várias condições sobre  $V$  e  $f$ , além de diferentes hipóteses geométricas sobre o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Em [27], Berestycki e Lions consideraram o caso em que o potencial  $V$  era constante, isto é, existe  $C > 0$  tal que

$$V(x) = C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Rabinowitz, em [63], considerou  $V$  coerciva e limitada inferiormente por uma constante positiva,

$$V(x) \geq V_0 > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } V(x) \rightarrow \infty, \text{ quando } |x| \rightarrow \infty.$$

Posteriormente, Del Pino e Felmer [36] consideraram uma hipótese mais fraca que a de Rabinowitz, assumindo que existe  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto e limitado tal que

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} V(x) < \min_{x \in \partial\Omega} V(x).$$

Coti-Zelatti e Rabinowitz [35] e Pankov [56] consideraram o caso em que  $V$  é  $\mathbb{Z}^N$ -periódica, ou seja

$$V(x + y) = V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } y \in \mathbb{Z}^N.$$

O caso em que  $V$  é assintoticamente periódico, isto é, existe um potencial periódico  $V_p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$V(x) \leq V_p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } |V(x) - V_p(x)| \rightarrow 0, \text{ quando } |x| \rightarrow \infty,$$

foi considerado em Alves, Carrião e Miyagaki [4]. Em Alves, de Morais Filho e Souto [6] foi considerado o caso em que  $V$  é radialmente simétrica

$$V(x) = V(r), \text{ onde } |x| = r.$$

Por sua vez, Bartsch e Wang em [21] mostraram a existência e a multiplicidade de solução para um problema do tipo  $(P_1)$ , considerando a hipótese

$$\{x \in \mathbb{R}^N; V(x) \leq M\} < +\infty, \quad (1)$$

para alguma constante  $M$  positiva. Posteriormente, em [22], eles consideraram  $V(x) = \lambda a(x) + 1$ , com  $a$  satisfazendo (1) e provaram a existência de solução de energia mínima para  $\lambda$  suficientemente grande e que a sequência de soluções converge fortemente para uma solução de energia mínima em domínio limitado. Eles também mostraram a existência de pelo menos  $\text{cat}\Omega$  soluções positivas para  $\lambda$  suficientemente grande, onde  $\Omega = \text{int}(a^{-1}(0))$ . Os mesmos resultados foram estabelecidos por Clapp e Ding [34] para o caso de crescimento crítico.

Outro importante trabalho que trata de um problema do tipo  $(P_1)$  é devido a Ding e Tanaka [37]. Neste trabalho os autores consideraram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (P_2)$$

com  $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$  e  $N \geq 3$ . Eles mostraram que o problema  $(P_2)$  tem pelo menos  $2^k - 1$  soluções, para  $\lambda$  suficientemente grande, as quais são chamadas soluções multi-bump. Estas soluções têm a seguinte característica :

Para cada subconjunto não-vazio  $\Gamma \subset \{1, 2, \dots, k\}$  e  $\varepsilon > 0$  fixado, existe um  $\lambda^* > 0$  tal que,  $(P_1)$  possui uma solução  $u_\lambda$ , para  $\lambda \geq \lambda^* = \lambda^*(\varepsilon)$ , satisfazendo:

$$\left| \int_{\Omega_j} [|\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda^2] - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j \right| < \varepsilon, \quad \forall j \in \Gamma$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma} [|\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2] dx < \varepsilon,$$

onde  $\Omega_\Gamma = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_j$  e  $c_j$  é o nível minimax do funcional energia relacionado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = u^p, & \text{em } \Omega_j, \\ u > 0, & \text{em } \Omega_j, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_j. \end{cases}$$

Baseados no trabalho de Ding-Tanaka muitos autores estudaram a existência de solução multi-bump para problemas do tipo  $(P_2)$ , Alves [2] generalizou o resultado de Ding e Tanaka para o operador  $p$ -Laplaciano, Alves, de Moraes Filho e Souto [7] e Alves e Souto [15] estudaram o caso em que a não-linearidade apresenta crescimento crítico e exponencial, Alves e Ferreira [8] consideraram o problema para o operador  $p(x)$ -Laplaciano, já em [9] Alves e Figueiredo mostraram existência de solução multi-bump para um problema do tipo Kirchhoff e em [17] Alves e Yang estudaram o um sistema do tipo Schrödinger-Poisson. Citamos ainda trabalhos devido a Bartch e Tang [20], Fu, Jiao e Tang [39].

Uma característica comum do trabalho de Ding e Tanaka com os demais trabalhos que tratam de existência de solução multi-bump é que os autores recorrem ao método de penalização que foi desenvolvido por del Pino e Felmer em [36], que consiste em modificar a não-linearidade obtendo assim um novo problema. Encontra-se uma solução para o problema modificado e depois usando o método da interação de Moser, mostra-se que a solução obtida para o problema modificado também é solução para o problema  $(P_2)$ , ajustando-se  $\lambda$  adequadamente.

No **Capítulo 1** estudaremos a existência de solução multi-bump para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + (\lambda V(x) + 1)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N); \end{cases} \quad (B)_\lambda$$

onde  $N \geq 1$ ,  $\Delta^2$  denota o operador biharmônico,  $\lambda > 0$  é um parâmetro positivo e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$  verificando as seguintes hipóteses:

$$(f_1) \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

$$(f_2) \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f'(t)|}{|t|^{q-2}} < +\infty, \text{ para } q \in (2, 2_*) \text{ onde}$$

$$2_* = \begin{cases} \frac{2N}{N-4}, & N \geq 5 \\ +\infty, & 1 \leq N \leq 4. \end{cases}$$

( $f_3$ ) Existe  $\theta > 2$  tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t, \quad \text{para } t \neq 0.$$

( $f_4$ )  $\frac{f(t)}{|t|}$  é uma função crescente para  $t \neq 0$ .

Relacionado ao potencial,  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que satisfaz as seguintes hipóteses:

( $V_1$ )  $V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ ;

( $V_2$ )  $\Omega = \text{int}V^{-1}(\{0\})$  é um conjunto aberto, não-vazio, limitado com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Além disso,  $\Omega$  tem  $k$  componentes conexas, mais precisamente,

- $\Omega = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$ ;
- $\text{dist}(\Omega_i, \Omega_j) > 0, i \neq j$ .

( $V_3$ ) Existe  $M_0 > 0$  tal que  $|\{x \in \mathbb{R}^N; V(x) \leq M_0\}| < +\infty$ .

O estudo de problemas que envolvem o operador biharmônico tem grande importância devido as aplicações a vários problemas físicos, por exemplo , dada uma membrana elástica cuja a projeção vertical é a região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , a equação

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

chamada de modelo de Kirchhof-Love, descreve a deflexão da membrana na direção vertical, onde  $f$  denota uma força vertical externa e as diferentes condições de contorno descrevem como a membrana está presa no bordo, para mais detalhes sobre o modelo de Kirchhof-Love citamos [30], [40] e [44].

Uma outra importante aplicação do operador biharmônico foi apresentada por Lazer e McKenna em [46], neste trabalho eles usaram a equação

$$\Delta^2 u - \Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

para estudar as ondas viajantes em uma ponte suspensa. Sobre este tema citamos ainda o trabalho de Ferrero e Gazzola [38].

Destacamos que embora o espaço ambiente em que trabalhamos com o operador biharmônico seja um espaço de Hilbert e o mesmo seja um operador linear, existem

diversas dificuldades técnicas ao se trabalhar com problemas que envolvem este operador, por exemplo, não existe um princípio de máximo que vale em qualquer domínio limitado (trataremos mais desse assunto no **Apêndice A**), se  $u$  pertence  $H^2(\Omega)$ , não podemos afirmar que  $u^\pm$  pertence a  $H^2(\Omega)$ , também não podemos aplicar o método da interação de Moser ou método de simetrização de Scharwz.

Nos últimos anos muitos autores estudaram problemas relacionados ao operador biharmônico dentre os vários trabalhos destacamos, [45] onde Jung e Choi mostraram a existência e multiplicidade de solução para um problema do tipo (3) em domínio limitado, os tabalhos de Pimenta e Soares [60, 61, 62] em que foram estudados o comportamento de concentração para soluções de certas classes de problemas biharmônicos semilineares. Em [?], Ye e Tang mostraram a existência e multiplicidade de solução para um problema do tipo  $\Delta^2 u - \Delta u + \lambda V(x)u = f(x, u)$ , com  $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$  considerando que  $V$  satisfaz a hipótese de Bartsch-Wang, hipótese  $(V_3)$ , e que  $f$  é sublinear (ou superlinear) e superquadrática. Bechio e Gazzola [26] mostraram resultados de existência e não-existência para um problema envolvendo o biharmônico considerando uma perturbação linear de um termo de crescimento crítico com condição de contorno de Steklov. Já em [64], Ruf e Sani mostraram uma desigualdade ótima do tipo Adams para o biharmônico e em [57] Passalacqua e Ruf mostraram a existência de uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev para o biharmônico

No caso do problema  $(B)_\lambda$  a principal dificuldade encontrada é de não podermos aplicar o método de interação de Moser e conseqüentemente não podermos usar a técnica de penalização de del Pino e Felmer. Para contornar esse problema vamos considerar que  $V$  satisfaz  $(V_3)$  e baseados em argumentos devido a Bartch e Wang [21, 22], vamos mostrar na **Seção 1.1** que o funcional energia associado ao problema  $(B)_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  para  $c$  em um certo intervalo.

Outra ponto importante no estudo do problema  $(B)_\lambda$  é a necessidade de se modificar os conjuntos em que usaremos o Lema de Deformação.

O principal Teorema do **Capítulo 1** é o seguinte:

**Teorema 0.0.1** *Suponha que  $(f_1) - (f_4)$  e  $(V_1) - (V_3)$  valem. Então, para cada subconjunto não vazio  $\Gamma \subset \{1, \dots, k\}$  e  $\varepsilon > 0$  fixado, existe para cada  $\lambda$  suficientemente grande, uma solução  $u_\lambda$  de  $(B)_\lambda$ , satisfazendo:*

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_\lambda|^2 + (\lambda V(x) + 1)|u_\lambda|^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_\lambda) dx - c_j \right| < \varepsilon, \forall j \in \Gamma$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma} [|\Delta u_\lambda|^2 + |u_\lambda|^2] dx < \varepsilon,$$

onde  $\Omega_\Gamma = \cup_{j \in \Gamma} \Omega_j$  e  $c_j$  é o nível minimax do funcional energia relacionado ao problema:

$$\begin{cases} \Delta^2 u + u = f(u), & \text{em } \Omega_j \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial \Omega_j. \end{cases} \quad (4)$$

Os resultados apresentados neste capítulo deram origem ao artigo [11]:

C.O. Alves e A.B. Nóbrega, *Existence of multi-bump solutions for a class of elliptic problems involving the biharmonic operator*, Monatsh.Math. Aceito para publicação.

No **Capítulo 2** utilizamos a técnica desenvolvida no primeiro capítulo para mostrar a existência de solução multi-bump para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u|^p \right) |u|^{p-2}u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (C)_\lambda$$

com  $\mu \in (0, 3)$ ,  $p \in (2, 6 - \mu)$ ,  $\lambda \geq 0$  e  $V$  satisfazendo as hipóteses  $(V_1) - (V_3)$ .

Esse tipo de problema também tem grande importância devido a suas aplicações físicas, a equação não-linear de Choquard

$$-\Delta u + V(x)u = \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u|^p \right) |u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

$p = 2$  e  $\mu = 1$ , aparece na descrição da Teoria Quântica de um polaron em repouso feita por S. Pekar em 1954 [58] e a modelagem de um elétron preso em seu próprio buraco, feita em 1976, por P. Choquard, como uma certa aproximação à teoria de Hartree-Fock de um componente-plasma [47]. Em alguns casos particulares, esta equação é também conhecida como a equação de Schrödinger-Newton, a qual foi introduzida por Penrose em sua discussão sobre auto colapso gravitacional de uma função de onda da mecânica quântica [59].

A existência e propriedades qualitativas de (5) foram exaustivamente estudadas nas últimas décadas. Em [47], Lieb provou a existência e unicidade de soluções de energia mínima. Posteriormente, em [49], Lions mostrou a existência de uma sequência de soluções radialmente simétricas. Em [33] Cingolani, Clapp e Secchi mostraram resultados sobre regularidade das soluções, Ma e Zhao em [50] fizeram uma classificação de todas as soluções positivas e em [52] Moroz e Van Schaftingen mostraram simetria

radial das soluções de energia mínima e propriedades de decaimento no infinito. Além disso, Moroz and Van Schaftingen em [53] consideraram a existência de energia mínima sob as hipóteses do tipo Berestycki-Lions. Quando  $V$  é uma função contínua periódica com  $\inf_{\mathbb{R}^3} V(x) > 0$ , observando que o termo não-local é invariante por translação, podemos obter facilmente a existência de solução aplicando o Teorema do passo da montanha, veja [1] por exemplo. Para o potencial periódico  $V$  que muda de sinal e 0 situa-se no intervalo do espectro do operador de Schrödinger  $-\Delta + V$ , o problema é fortemente indefinido, e a existência de solução para  $p = 2$  foi considerada em [31]. No caso geral, Ackermann [1] propôs uma nova abordagem para provar a existência de infinitas soluções fracas geometricamente distintas. Para outros resultados relacionados, citamos Ghimenti e Shaftingen [42] e Ghimenti, Moroz e Shaftingen [43] para a existência de soluções que trocam de sinal, Moroz e Shaftingen [54], Secchi [65], Wei e Winter [69] para existência e concentração de soluções semi-clássicas, Moroz e Shaftingen [55] para o caso em que a parte não-local é crítica com respeito a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Para provar a existência de solução multi-bump para  $(C)_\lambda$ , o primeiro passo é considerar o problema limite

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \left( \int_{\Omega_\Gamma} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u, & \text{in } \Omega_\Gamma, \\ u \neq 0 \text{ em } \Omega_j, \quad j \in \Gamma, \\ u \in H_0^1(\Omega_\Gamma). \end{cases} \quad (C)_{\infty, \Gamma}$$

Na primeira seção do **Capítulo 2** vamos mostrar a existência de solução de energia mínima que não se anula em cada componente  $\Omega_j$ ,  $j \in \Gamma$ . Para encontrar este tipo de solução de energia mínima estudaremos o problema de minimização sobre um subconjunto da variedade de Nehari, o principal resultado desta seção é:

**Teorema 0.0.2** *Supondo que  $\mu \in (0, 3)$  e  $p \in (2, 6 - \mu)$ . O problema  $(C)_{\infty, \Gamma}$  possui uma solução de energia mínima  $u$  que não se anula em cada componente  $\Omega_j$  de  $\Omega_\Gamma$ ,  $j \in \Gamma$ .*

Na **Seção 2.2** adaptamos os argumentos desenvolvidos no **Capítulo 1** ao problema de Choquard não-linear para mostrar que o funcional energia associado ao problema satisfaz a condição  $(PS)_c$ . A escolha dessa técnica em detrimento ao Método de

Penalização de Del Pino e Felmer se deu pois a utilização do segundo acarretaria em maiores restrições sobre as constantes  $\mu$  e  $p$ . Todavia, da mesma forma que ocorreu para o problema  $(B)_\lambda$  surge a necessidade de modificar os conjuntos onde será utilizado o Lema de Deformação, o que será feito na **Seção 2.4**.

Por fim, na **Seção 2.5** provaremos o principal resultado deste capítulo,

**Teorema 0.0.3** *Supondo que  $\mu \in (0, 3)$  e  $p \in (2, 6 - \mu)$ . Existe uma constante  $\lambda_0 > 0$ , tal que para qualquer subconjunto não vazio  $\Gamma \subset \{1, \dots, k\}$  e  $\lambda \geq \lambda_0$ , o problema  $(C)_\lambda$  tem uma solução positiva  $u_\lambda$ , a qual possui a seguinte propriedade: Para qualquer sequência  $\lambda_n \rightarrow \infty$  podemos extrair uma subsequência  $(\lambda_{n_i})$  tal que  $(u_{\lambda_{n_i}})$  converge fortemente em  $H^1(\mathbb{R}^3)$  para uma função  $u$ , que satisfaz  $u = 0$  fora de  $\Omega_\Gamma = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_j$ , e  $u|_{\Omega_\Gamma}$  é uma solução de energia mínima para  $(C)_{\infty, \Gamma}$  no sentido do Teorema 0.0.2.*

Os resultados apresentados no **Capítulo 2** deram origem ao artigo [13]:

C.O. Alves, A.B. Nóbrega e M. Yang, *Multi-bump solutions for Choquard equation with deepening potential well*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55**(2016) 1-28.

Com o intuito de mostrarmos a existência de solução multi-bump nodal para um problema com o operador biarmônico (ver **Capítulo 4**), no **Capítulo 3** estudaremos a existência de solução nodal de energia mínima para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = Bu = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (N)$$

onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função satisfazendo  $(f_1)$  e as seguintes hipóteses:

$(f_5)$   $f$  é ímpar, isto é,  $f(t) = -f(-t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

$(f_6)$  Existem  $c_0 > 0$  e  $p \in (2, 2_*)$ , tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = c_0,$$

onde

$$2_* = \begin{cases} \frac{2N}{N-4}, & N \geq 5 \\ +\infty, & 1 \leq N \leq 4. \end{cases}$$

$(f_7)$  Existe  $b_0 > 0$  e  $q \in (2, p]$ , tais que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = b_0.$$

(f<sub>8</sub>)  $\frac{f(t)}{t}$  é crescente para  $t > 0$ .

Em relação as condições de contorno, consideraremos  $Bu = \Delta u$  (condição de Navier) ou  $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$  (condição de Dirichlet).

Soluções nodais para problemas com o operador Laplaciano foram exhaustivamente estudados nas últimas décadas por vários autores destacamos os trabalhos de Castro, Cossio e Neuberger [32], estudaram a existência de solução nodal para um problema de Dirichlet superlinear, Bartsch, Liu e Weth mostraram em [25] a existência de solução nodal para equação de Schrödinger estacionária, em [23] Bartsch, Weth e Willem mostraram a existência de solução nodal radialmente simétrica para um problema de Dirichlet apresentando exatamente dois domínios nodais, já em [24] Bartsch e Weth mostraram a existência de três soluções nodais para o problema de Dirichlet singularmente perturbado  $-\varepsilon \Delta u + u = f(u)$ , em um domínio limitado. Mais recentemente, Alves e Souto em [16] mostraram a existência de solução nodal de energia mínima para um sistema de Schrödinger-Poisson, esse trabalho apresenta uma nova abordagem para estudar a existência de soluções nodais de energia mínima para problemas que apresentam termos não-locais, inclusive essa técnica será muito importante para o estudo de existência de solução nodal de energia mínima para  $(N)$ .

Contudo, a bibliografia sobre soluções nodais para problemas que envolvem o operador biharmônico não é muito vasta, para problemas em domínio limitado citamos o trabalho de Weth [70] onde o autor utilizando a técnica de decomposição de Moreau (Cones Duais) para um espaço de Hilbert que foi desenvolvida por Gazzola e Grunau em [41], mostrou a existência de pelo menos três soluções, uma solução positiva, uma solução negativa e uma solução nodal para um problema do tipo  $(N)$ . Destacamos ainda os trabalhos Bonheure, Santos, Ramos e Tavares [28] e Bonheure, Santos e Tavares [29] em que a partir do estudo de sistemas Hamiltonianos os autores mostraram a existência de solução nodal de energia mínima para um problema do tipo  $(N)$ , mas considerando apenas a condição de contorno de Navier. No caso de problemas em  $\mathbb{R}^N$  o único trabalho que trata de solução nodal para uma equação com o operador biharmônico é o trabalho de Wang e Shen [?].

Nossa abordagem para determinar a solução nodal de energia mínima para o problema  $(N)$  baseia-se no Método Dual, o qual já foi usado por diversos autores

com os mais variados propósitos. Willem em [72] estudou a existência de infinitas funções subharmônicas para uma equação da onda não linear, em [19] Ambrosetti e Struwe mostraram uma prova alternativa do problema de Brézis-Nirenberg, Struwe [66] usou o método dual para estudar a existência de solução para certos sistemas Hamiltonianos e em [5] Alves, Carrião e Miyagaki empregaram o método no estudo de existência de soluções positivas para sistemas Hamiltonianos. Contudo, em nossa pesquisa bibliográfica observamos que o Método Dual ainda não havia sido utilizado para estudar diretamente problemas com o operador biharmônico. Tal método nos permite estudar o problema em um novo ambiente, a saber os espaços  $L^p$ , onde não há dificuldades em se trabalhar com as partes positiva e negativa das funções, na **Seção 3.1** definiremos o funcional dual e mostraremos suas principais propriedades.

No caso da condição de Dirichlet, para que possamos garantir que o princípio do máximo é válido assumiremos uma propriedade geométrica sobre o domínio  $\Omega$ :

(G) A função de Green associada  $\Delta^2$  em  $\Omega$ , denotada por  $G_{\Delta^2, \Omega}$ , é positiva se  $N \geq 2$ , sempre que  $B = \frac{\partial}{\partial \nu}$ .

mais detalhes sobre esta condição e tipos de domínio onde a mesma ocorre podem ser vistos no **Apêndice A**.

O principal resultado do **Capítulo 3** é o seguinte

**Teorema 0.0.4** *Supondo que (G) e  $(f_1) - (f_5)$  valem. Então, o problema (P) possui uma solução nodal de energia mínima.*

Destacamos ainda que além do fato de obtermos uma solução nodal de energia mínima para o problema (N), nosso estudo completa o trabalho de Weth em outro sentido, devido as hipóteses assumidas sobre o termo não linear  $f$  no Teorema 0.0.4, podemos considerar uma classe mais geral de não-linearidades].

Em [70], o autor considerou as seguintes hipóteses sobre  $f$ :

(W<sub>1</sub>)  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Caratheódory, e  $f(x, 0) = 0$  para quase todo  $x$  em  $\Omega$ .

(W<sub>2</sub>) Existem  $q^* > 0, q_* \in (0, \lambda_1)$ , e  $0 < p < \frac{8}{N-4}$  para  $N > 4$ , respectivamente  $p > 0$  para  $N \leq 4$ , tal que

$$|f(x, t) - f(x, s)| \leq [q_* + q_*(|t|^p + |s|^p)]|t - s| \quad \text{q.s. para } x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(W<sub>3</sub>) Existe  $R > 0$  e  $\eta > 2$  tais que

$$\eta F(x, t) \leq f(t)t, \quad \text{q.s. para } x \in \Omega, |t| \geq R.$$

(W<sub>4</sub>)  $f$  é não-decrescente em  $t \in \mathbb{R}$  q.s. para  $x \in \Omega$ .

Aqui,  $\lambda_1$  denota o primeiro autovalor de  $\Delta^2$  em  $\Omega$  relativamente as condições de contorno de Dirichlet ou Navier.

Nossas hipóteses permitem considerar algumas não-linearidades, que não podem ser consideradas em [70]. Por exemplo, podemos trabalhar com uma não-linearidade da forma

$$f(t) = \varphi(t)|t|^{p-2}t,$$

onde  $\varphi$  é uma função de classe  $C^1$ , crescente, positiva e limitada tal que para qualquer  $s > 1$ , a função  $\frac{f'(t)}{t^{s-2}}$  não é limitada no infinito. No entanto, este tipo de não linearidade não pode ser usada em [70], pois (W<sub>2</sub>) implica que  $\frac{f'(t)}{t^{p-2}}$  é limitada no infinito, ver **Apêndice B** para mais detalhes.

Os resultados desse capítulo deram origem ao artigo [12]:

C.O. Alves e A.B. Nóbrega, *Nodal ground state solution to a biharmonic equation via dual method*, J. Differential Equations **260** (2016), 5174-5201.

**Observação 0.0.5** *O estudo do trabalho do Weth motivou também outro trabalho nosso [10]:*

*C. O. Alves, G. M. Figueiredo e A. B. Nobrega, Existence of semi-nodal solution for a class of FitzHugh-Nagumo type system. Monatsh.Math. (2016), 1-12.*

*onde aplicamos o método dos cones duais para estudar a existência de solução semi-nodal para um sistema de equações elípticas do tipo Fitz-Hugh Nagumo*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) - v & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{em } \Omega \\ u^\pm \neq 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado em  $\mathbb{R}^N$ ,  $\delta > 0$ ,  $\gamma > 2\sqrt{\delta}$  e  $f$  é uma função superlinear de classe  $C^1$  com crescimento subcrítico. Por fugir do tema da tese os resultados obtidos neste artigo não fazem parte desse trabalho.

No **Capítulo 4** estudaremos a existência de solução multi-bump nodal para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda V(x)u = |u|^{p-2}u, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (B_1)_\lambda$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro positivo e  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua satisfazendo  $(V_2)$ ,  $(V_3)$  e a condição

$(V'_1)$   $V(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$  e existe  $R, V_0 > 0$  tal que

$$V(x) > V_0, \text{ quando } |x| \geq R.$$

Com o objetivo de usarmos os resultados obtidos no **Capítulo 3** vamos supor que o domínio  $\Omega = \bigcup_{j=1}^l \Omega_j$  é tal que cada  $\Omega_j$  satisfaz a propriedade **(G)**.

O seguinte teorema é o principal resultado do **Capítulo 4**:

**Teorema 0.0.6** *Supondo que valem  $(V'_1)$ ,  $(V_2)$  e  $(V_3)$ . Então, para cada subconjunto não vazio  $\Gamma \subset \{1, \dots, k\}$ , existe um  $\lambda^* > 0$  tal que, para  $\lambda \geq \lambda^*$ , o problema  $(B_1)_\lambda$  tem uma solução nodal  $u_\lambda$ . Além disso, a família  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda^*}$  satisfaz a seguinte propriedade: Para qualquer sequência  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , podemos extrair uma subsequência  $\lambda_{n_i}$  tal que  $\{u_{\lambda_{n_i}}\}$  converge forte  $H^2(\mathbb{R}^N)$  para uma função  $u$  que satisfaz  $u(x) = 0$  para  $x \notin \Omega_\Gamma = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_j$ , e a restrição  $u|_{\Omega_j}$  é uma solução nodal de energia mínima de*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega_j, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial \Omega_j, \end{cases} \quad (6)$$

para cada  $j \in \Gamma$ .

O estudo de solução do tipo multi-bump nodal para o problema  $(B_1)_\lambda$  foi motivado pelo trabalho [3], no qual Alves mostrou a existência de uma solução nodal do tipo multi-bump para um problema subcrítico no caso do operador Laplaciano e pelo trabalho de Alves e Pereira [14] em que os autores provaram a existência de solução multi-bump nodal para um problema com crescimento exponencial crítico. Contudo, no caso do problema  $(B_1)_\lambda$  foi necessário desenvolver uma nova abordagem baseada no método dos multiplicadores de Lagrange, pois as abordagens presentes na literatura não puderam ser adaptadas no caso do operador biharmônico, em grande parte pela falta de um princípio de máximo mais geral. Destacamos que abordagem desenvolvida por nós no **Capítulo 4** pode ser usada para obter soluções multi-bump positiva e nodal para problemas envolvendo o operador Laplaciano como

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = |u|^{p-2}u, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Por fim, no **Apêndice A** apresentamos um breve estudo sobre um princípio de máximo para problemas com o operador biharmônico e no **Apêndice B** apresentamos um exemplo especial de uma função que pode ser considerada como termo não-linear em  $(N)$ .

# Notação e terminologia

- Dado  $A \subset \mathbb{R}^N$  conjunto mensurável,  $|A|$  denota a medida de Lebesgue.
- $\Delta^2 u(x) = \Delta(\Delta u(x))$ .
- Dado  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ ,  $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u$
- $C^k(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; D^\alpha f \in C(\Omega), |\alpha| \leq k\}$ ,  $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$ .
- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ com } |\alpha| \leq m\}$ .
- $\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$ .
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ , onde o fecho é tomado segundo a norma  $\|u\|_{m,p}$ .
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$  e  $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ .
- O símbolo  $\rightarrow$  significa convergência em norma.
- O símbolo  $\rightharpoonup$  significa convergência fraca.
- A expressão *q.s.* é uma abreviação para quase sempre ou quase todo ponto.
- Dada uma função  $u$  denotaremos por  $u^+ = \max\{u, 0\}$  e  $u^- = \min\{u, 0\}$  as partes positiva e negativa da função  $u$ , respectivamente.

# Capítulo 1

## Soluções do tipo multi-bump para um classe de problemas elípticos com o operador biharmônico

Neste capítulo, baseados nos trabalhos de Ding-Tanaka [37] e Alves [2] estudaremos a existência de soluções multi-bump para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} \Delta^2 u + (\lambda V(x) + 1)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N); \end{cases} \quad (B)_\lambda$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  e  $V \in C(\mathbb{R}^N)$  satisfazem as hipóteses  $(f_1) - (f_4)$  e  $(V_1) - (V_3)$ , respectivamente.

### 1.1 A Condição $(PS)_c$

Uma das dificuldades para se garantir a existência de solução do tipo multi-bump no caso do operador biharmônico está no fato de mostrar que o funcional energia associado ao problema  $(B)_\lambda$  verifica a condição  $(PS)$ , pois o argumento usado nos trabalhos existentes consiste em modificar o termo não-linear e posteriormente usar o Método de Interação de Mozer. No entanto, sabe-se que o Método de Interação de Mozer não se aplica no caso do operador biharmônico, mas mostraremos nesta seção que recorrendo a argumentos devido a Bartsch-Wang [22] temos, para cada  $C \geq 0$

dado, que o funcional energia associado ao problema  $(B)_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  desde que  $c \in [0, C)$  e  $\lambda$  seja escolhido adequadamente.

Inicialmente, recordamos que o funcional energia associado ao problema  $(B)_\lambda$  é  $I_\lambda : E_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + (\lambda V(x) + 1) |u|^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx,$$

onde

$$E_\lambda = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^2 dx < +\infty \right\}.$$

O subespaço  $E_\lambda$  munido com o produto interno

$$(u, v)_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta u \Delta v + (\lambda V(x) + 1) uv] dx,$$

é um espaço de Hilbert e a norma gerada por este produto interno será denotado por  $\|\cdot\|_\lambda$ .

No que segue, se  $\Theta \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto mensurável, denotaremos por  $E_\lambda(\Theta)$  o espaço  $H^2(\Theta)$  munido com o produto interno

$$(u, v)_{\lambda, \Theta} = \int_{\Theta} [\Delta u \Delta v + (\lambda V(x) + 1) uv] dx.$$

A norma associada com este produto interno será denotado por  $\|\cdot\|_{\lambda, \Theta}$ .

No primeiro lema dessa seção mostraremos que toda sequência  $(PS)_c$  com  $c \geq 0$  é limitada .

**Lema 1.1.1** *Seja  $\{u_n\} \subset E_\lambda$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ , então  $\{u_n\}$  é limitada em  $E_\lambda$ . Além disso,  $c \geq 0$ .*

**Demonstração.** Como  $\{u_n\}$  é uma sequência  $(PS)_c$ ,

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow c \text{ e } I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0.$$

Então, para  $\theta$  dado em  $(f_3)$  e  $n$  suficientemente grande,

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\lambda(u_n) u_n \leq c + 1 + \|u_n\|_\lambda. \quad (1.1)$$

Por outro lado,

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\lambda(u_n) u_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{\theta} f(u_n) u_n - F(u_n) \right] dx.$$

Por  $(f_3)$ ,

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\lambda(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_\lambda^2. \quad (1.2)$$

Combinando (1.1) e (1.2), obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_\lambda^2 \leq c + 1 + \|u_n\|_\lambda,$$

mostrando que  $\{u_n\}$  é limitada. Usando a limitação de  $\{u_n\}$ , vemos que

$$c + o_n(1) \|u_n\|_\lambda \geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\lambda(u_n)u_n \geq \left(\frac{\theta - 2}{2\theta}\right) \|u_n\|_\lambda^2,$$

implicando em

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{2c\theta}{\theta - 2}, \quad (1.3)$$

de onde segue que  $c \geq 0$ . ■

O próximo corolário é uma consequência da demonstração do lema anterior.

**Corolário 1.1.2** *Seja  $\{u_n\} \subset E_\lambda$  uma sequência  $(PS)_0$  para  $I_\lambda$ . Então,  $u_n \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$ .*

**Demonstração.** Pelo Lema 1.1.1,

$$0 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_\lambda^2 \leq o_n(1).$$

Passando ao limite com  $n \rightarrow +\infty$ , encontramos

$$\|u_n\|_\lambda^2 \rightarrow 0,$$

e portanto

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } E_\lambda.$$

■

O próximo lema é um resultado do tipo Brezis-Lieb que será importante para garantir as condições de compacidade dos funcionais  $I_\lambda$  para  $\lambda$  suficientemente grande.

**Lema 1.1.3** *Seja  $\{u_n\}$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$  com  $c \geq 0$ . Se  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E_\lambda$ , então*

$$\begin{aligned} I_\lambda(v_n) - I_\lambda(u_n) + I_\lambda(u) &= o_n(1) \\ I'_\lambda(v_n) - I'_\lambda(u_n) + I'_\lambda(u) &= o_n(1), \end{aligned}$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Portanto,  $\{v_n\}$  é uma sequência  $(PS)_{c-I_\lambda(u)}$ .

**Demonstração.** Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(v_n) - I_\lambda(u_n) + I_\lambda(u) &= \frac{1}{2} (\|v_n\|_\lambda^2 - \|u_n\|_\lambda^2 + \|u\|_\lambda^2) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (F(v_n) - F(u_n) + F(u)) \, dx \\
&= o_n(1) - \int_{B_R(0)} (F(v_n) - F(u_n) + F(u)) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} (F(v_n) - F(u_n) + F(u)) \, dx,
\end{aligned}$$

onde  $R > 0$  será fixada posteriormente. Como  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E_\lambda$ , temos pelas imersões de Sobolev

- $u_n \rightarrow u$  em  $L^p(B_R(0))$  para  $1 \leq p < 2_*$ ;
- $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.s. em  $\mathbb{R}^N$ .

Além disso, existem  $h_1 \in L^2(B_R(0))$  e  $h_2 \in L^q(B_R(0))$  tais que

$$|u_n(x)| \leq h_1(x), h_2(x) \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N. \quad (1.4)$$

Por  $(f_1)$  e  $(f_2)$ ,

$$|f'(t)| \leq \varepsilon + C_\varepsilon |t|^{q-2}, \quad (1.5)$$

consequentemente,

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| + C_\varepsilon |t|^{q-1} \quad (1.6)$$

e

$$|F(t)| \leq \varepsilon |t|^2 + C_\varepsilon |t|^q. \quad (1.7)$$

Assim, de (1.4) – (1.7)

- $|F(v_n(x)) - F(u_n(x)) + F(u(x))| \rightarrow 0$  e
- $|F(v_n) - F(u_n) + F(u)| \leq \varepsilon (|u_n|^2 + |u|^2) + C_\varepsilon (|u_n|^q + |u|^q)$   
 $\leq 2\varepsilon h_1^2 + 2C_\varepsilon h_2^q \in L^1(B_R(0))$  ,

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{B_R(0)} |F(v_n) - F(u_n) + F(u)| \, dx \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Por outro lado, segue do Teorema do Valor Médio e por  $(f_1) - (f_2)$ , que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $C_\epsilon > 0$  satisfazendo

$$|F(v_n) - F(u_n)| \leq \epsilon (|u_n| + |u|) |u| + C_\epsilon (|u_n| + |u|)^{q-1} |u|.$$

A estimativa acima combinada com a limitação de  $\{u_n\}$  e as imersões de Sobolev resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |F(v_n) - F(u_n)| dx &\leq \epsilon C_1 \left( |u|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} + |u|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^2 \right) \\ &\quad + C_\epsilon \left( |u|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} + |u|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^q \right). \end{aligned}$$

Por essa última estimativa, podemos fixar  $R > 0$  suficientemente grande tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |F(v_n) - F(u_n)| dx \leq \epsilon.$$

Mais uma vez por  $(f_2)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |F(u)| dx \leq \epsilon |u|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^2 + C_\epsilon |u|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^q.$$

Então, aumentando  $R$  se necessário, podemos assumir que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |F(u)| dx \leq \epsilon.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |F(v_n) - F(u_n) + F(u)| dx \leq \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da arbitrariedade de  $\epsilon$ , segue que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |F(v_n) - F(u_n) + F(u)| dx = 0. \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9), obtemos a primeira das expressões.

Para mostrarmos a segunda identidade consideremos uma função teste  $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^N)$ , com  $\|\varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq 1$  então

$$|I'_\lambda(v_n)\varphi - I'_\lambda(u_n)\varphi + I'_\lambda(u)\varphi| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} [f(v_n) - f(u_n) + f(u)]\varphi dx \right|$$

Usando agora (1.6), temos  $f(v_n) - f(u_n) + f(u) \in L^{q/(q-1)}(B_R(0))$ , e portanto

$$\int_{B_R(0)} |f(v_n) - f(u_n) + f(u)| |\varphi| dx \leq |f(v_n) - f(u_n) + f(u)|_{L^{q/(q-1)}(B_R(0))} |\varphi|_{L^q(B_R(0))},$$

e pela imersões de Sobolev

$$\int_{B_R(0)} |f(v_n) - f(u_n) + f(u)| |\varphi| dx \leq C |f(v_n) - f(u_n) + f(u)|_{L^{q/(q-1)}(B_R(0))}.$$

Da mesma forma que fizemos na primeira parte, usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e concluímos que

$$\int_{B_R(0)} |f(v_n) - f(u_n) + f(u)| |\varphi| dx \rightarrow 0, \text{ uniformemente em relação a } \varphi. \quad (1.10)$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio e por (1.5)

$$|f(v_n) - f(u_n)| \leq \epsilon |u| + C_\epsilon (|u_n| + |u|)^{q-2} |u|.$$

Então, usando a Desigualdade Generalizada de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(v_n) - f(u_n)| |\varphi| dx &\leq \epsilon |u|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \\ &\quad + C_\epsilon |u_n|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^{q-2} |u|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} |\varphi|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}. \end{aligned}$$

Assim, usando as imersões de Sobolev, a limitação de  $\{u_n\}$  e fixando  $R$  suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(v_n) - f(u_n)| |\varphi| dx \leq \epsilon.$$

Repetindo os mesmos argumentos usados para mostrar a primeira identidade, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(u)| |\varphi| dx \leq \epsilon.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(v_n) - f(u_n) + f(u)| |\varphi| dx \leq \epsilon,$$

de onde segue que,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(v_n) - f(u_n) + f(u)| |\varphi| dx = 0, \quad (1.11)$$

uniformemente em relação a  $\varphi$ . De (1.10) e (1.11), obtemos a segunda identidade. ■

Agora mostraremos que existe uma estimativa por baixo para alguns níveis associados com as seqüências (PS), a qual é uniforme em relação a  $\lambda$ .

**Lema 1.1.4** *Seja  $\{u_n\}$  uma sequencia  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ . Então  $c = 0$ , ou existe  $c_* > 0$  independente de  $\lambda$ , tal que  $c \geq c_*$  para todo  $\lambda > 0$ .*

**Demonstração.** Pelo Lema 1.1.1,  $c \geq 0$ . Se  $c > 0$ , as condições de crescimento de  $f$  juntamente com as imersões de Sobolev implica em

$$I'_\lambda(u)u \geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - K \|u\|_\lambda^q,$$

para alguma constante positiva  $K$ . Por tanto, existe  $\delta > 0$  tal que

$$I'_\lambda(u)u \geq \frac{1}{4} \|u\|_\lambda^2, \text{ para } \|u\|_\lambda < \delta. \quad (1.12)$$

No que segue consideramos  $c_* = \delta^2 \frac{\theta - 2}{2\theta}$  e  $c < c_*$ , então pela estimativa (1.3) do Lema 1.1.1

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 < \delta^2,$$

implicando que para  $n$  suficientemente grande,

$$\|u_n\|_\lambda \leq \delta. \quad (1.13)$$

Assim, de (1.12) e (1.13)

$$I'_\lambda(u_n)u_n \geq \frac{1}{4} \|u_n\|_\lambda^2,$$

de onde segue que,

$$\|u_n\|_\lambda^2 \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Pela continuidade do funcional  $I_\lambda$ ,

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow I_\lambda(0) = 0,$$

o que contradiz a hipótese que  $\{u_n\}$  é uma sequência  $(PS)_c$  com  $c > 0$ . Consequentemente,  $c \geq c_*$ . ■

Os próximos dois lemas estabelecem algumas estimativas para a norma  $L^q$ — das sequências  $(PS)_c$ . Estas estimativas serão cruciais na demonstração da condição  $(PS)_c$ , veja a Proposição 2.2.7 para mais detalhes.

**Lema 1.1.5** *Seja  $\{u_n\}$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ . Então, existe  $\delta_0 > 0$  independente de  $\lambda$ , tal que*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \geq \delta_0 c.$$

**Demonstração.** Por  $(f_1)$  e  $(f_2)$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$\frac{1}{2} f(t)t - F(t) \leq \epsilon |t|^2 + C_\epsilon |t|^q, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$c \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \epsilon \|u_n\|_\lambda^2 + C_\epsilon |u_n|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \right). \quad (1.14)$$

Por outro lado, de (f<sub>3</sub>),

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\lambda(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_\lambda^2. \quad (1.15)$$

Combinando (1.14) com (1.15),

$$c \leq \frac{2\epsilon c \theta}{\theta - 2} + C_\epsilon \liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q.$$

Assim, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \geq \frac{c}{C_\epsilon} \left( 1 - \frac{2\epsilon\theta}{\theta - 2} \right) > 0.$$

Agora, o lema segue fixando

$$\delta_0 = \frac{1}{C_\epsilon} \left( 1 - \frac{2\epsilon\theta}{\theta - 2} \right).$$

■

**Lema 1.1.6** *Seja  $c_1 > 0$  uma constante independente de  $\lambda$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\Lambda = \Lambda(\epsilon) > 0$  e  $R = R(\epsilon, c_1) > 0$  tais que, se  $\{u_n\}$  é uma sequência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$  com  $c \in [0, c_1]$ , então*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^q \leq \epsilon, \quad \forall \lambda \geq \Lambda.$$

**Demonstração.** Para cada  $R > 0$ , fixemos

$$A(R) = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| > R \text{ e } V(x) \geq M_0\}$$

e

$$B(R) = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| > R \text{ e } V(x) < M_0\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{A(R)} |u_n|^2 dx &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + 1) |u_n|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \|u_n\|_\lambda^2 \\ &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right)^{-1} c + o_n(1) \right] \\ &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right)^{-1} c_1 + o_n(1) \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Como  $c_1$  independe de  $\lambda$ , por (1.16) existe  $\Lambda > 0$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{A(R)} |u_n|^2 dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda \geq \Lambda. \quad (1.17)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder para  $p \in [1, 2^*/2]$ , obtemos

$$\int_{B(R)} |u_n|^2 dx \leq \left( \int_{B(R)} |u_n|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} |B(R)|^{\frac{1}{p'}}.$$

Agora, da imersão contínua  $E_\lambda \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ , segue que

$$\int_{B(R)} |u_n|^2 dx \leq \beta \|u_n\|_\lambda^2 |B(R)|^{\frac{1}{p'}},$$

onde  $\beta$  é uma constante positiva. De (1.15),

$$\int_{B(R)} |u_n|^2 dx \leq \beta c_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right)^{-1} |B(R)|^{\frac{1}{p'}} + o_n(1).$$

Por  $(V_3)$ ,

$$|B(R)| \rightarrow 0 \quad \text{when} \quad R \rightarrow +\infty.$$

Por tanto, podemos escolher  $R$  suficientemente grande, de tal maneira que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B(R)} |u_n|^2 dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.18)$$

A desigualdade (1.17) juntamente com (1.18) implica em

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^2 dx < \epsilon.$$

Usando a desigualdade de interpolação,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^q dx \leq |u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^{q\alpha} |u_n|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^{q(1-\alpha)},$$

onde  $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2^*}$ , pelas imersões de Sobolev e pelo fato de  $\{u_n\}$  ser limitada em  $E_\lambda$ ,

$$|u_n|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^{q(1-\alpha)} \leq \|u_n\|_\lambda^{q(1-\alpha)} \leq C,$$

onde  $C$  é uma constante positiva. Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^q dx < \epsilon, \quad \lambda \geq \Lambda$$

augmentando  $R$  e  $\Lambda$  se necessário. ■

Agora, estamos aptos a provar que para uma escolha adequada de  $\lambda$  o funcional  $I_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_c$ .

**Proposição 1.1.7** Dado  $c_1 > 0$ , existe  $\Lambda = \Lambda(c_1)$  tal que  $I_\lambda$  verifica a condição  $(PS)_c$  para todo  $c \in [0, c_1]$  e  $\lambda \geq \Lambda$ .

**Demonstração.** Seja  $\{u_n\}$  uma sequência  $(PS)_c$ . Pelo Lema 1.1.1,  $\{u_n\}$  é limitada e consequentemente, passando a uma subsequência se necessário,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_\lambda; \\ u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N; \\ u_n \rightarrow u \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para } 1 \leq s < 2^*. \end{cases}$$

Então  $I'_\lambda(u) = 0$  e  $I_\lambda(u) \geq 0$ , pois

$$I_\lambda(u) = I_\lambda(u) - \frac{1}{\theta} I'_\lambda(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u\|_\lambda^2 \geq 0.$$

Considerando  $v_n = u_n - u$ , temos pelo Lema 1.1.3 que  $\{v_n\}$  é uma sequência  $(PS)_d$ , com  $d = c - I_\lambda(u)$ . Além disso,

$$0 \leq d = c - I_\lambda(u) \leq c \leq c_1.$$

Afirmamos que  $d = 0$ . De fato, se  $d > 0$ . Segue dos Lemas 1.1.4 e 1.1.5 que  $d \geq c_*$  e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \geq \delta_0 c_* > 0. \quad (1.19)$$

Aplicando o Lema 1.1.6 com  $\epsilon = \frac{\delta_0 c_*}{2} > 0$ , existem  $\Lambda, R > 0$  tais que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}^q \leq \frac{\delta_0 c_*}{2}, \text{ para } \lambda \geq \Lambda. \quad (1.20)$$

Combinando (1.19) com (1.20), obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^q(B_R(0))}^q \geq \frac{\delta_0 c_*}{2} > 0,$$

o que é absurdo, pois do fato que  $v_n \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$ , e da imersão compacta

$$E_\lambda \hookrightarrow L^q(B_R(0))$$

encontramos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^q(B_R(0))}^q = 0.$$

Portanto  $d = 0$  e  $\{v_n\}$  é uma sequência  $(PS)_0$ . Assim, pelo Corolário 1.1.2,  $v_n \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$ , ou equivalentemente,  $u_n \rightarrow u$  em  $E_\lambda$ , mostrando que para  $\lambda$  suficientemente grande,  $I_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  para todo  $c \in [0, c_1]$ . ■

## 1.2 A Condição $(PS)_{c,\infty}$

Nesta seção, estudaremos o comportamento de uma sequência  $(PS)_{c,\infty}$ , isto é, uma sequência  $\{u_n\} \subset H^2(\mathbb{R}^N)$  satisfazendo:

$$\begin{aligned} u_n &\in E_{\lambda_n} \text{ e } \lambda_n \rightarrow +\infty; \\ I_{\lambda_n}(u_n) &\rightarrow c, \quad \text{para algum } c \in [0, c_\Gamma]; \\ \|I'_{\lambda_n}(u_n)\|_{E'_{\lambda_n}} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde  $c_\Gamma$  é uma constante positiva, que será definida na próxima seção e independe de  $\lambda$ .

**Proposição 1.2.1** *Seja  $\{u_n\}$  uma sequência  $(PS)_{c,\infty}$  para  $I_\lambda$ . Então, existem uma subsequência de  $\{u_n\}$ , que ainda denotaremos por  $\{u_n\}$  e  $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$  tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^2(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$  e  $u$  é uma solução de

$$\begin{cases} \Delta^2 u + u = f(u), \text{ em } \Omega_j, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_j, \end{cases} \quad (1.21)$$

para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$ ;

ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

iii)  $\{u_n\}$  também satisfaz

$$\begin{aligned} \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^2 dx &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \\ \|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma}^2 &\rightarrow 0 \\ \|u_n\|_{\lambda_n, \Omega_j}^2 &\rightarrow \int_{\Omega_j} [|\Delta u|^2 + |u|^2] dx, \quad \forall j \in \Gamma. \end{aligned}$$

**Demonstração.** No que segue, fixamos  $c \in [0, c_\Gamma]$  verificando

$$I_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow c \text{ e } \|I'_{\lambda_n}(u_n)\|_{E'_{\lambda_n}} \rightarrow 0.$$

Então, usando os mesmos argumentos do Lema 1.1.1,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \frac{2c\theta}{\theta - 2}, \quad (1.22)$$

implicando que  $\{\|u_n\|_{\lambda_n}\}$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Como

$$\|u_n\|_{\lambda_n} \geq \|u_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)},$$

$\{u_n\}$  também é limitada em  $H^2(\mathbb{R}^N)$ , e então, existe uma subsequência de  $\{u_n\}$ , ainda denotada por ela mesmo, e  $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$  tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^2(\mathbb{R}^N).$$

Para mostrar (i), fixamos para cada  $m \in \mathbb{N}^*$  o conjunto

$$C_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N / V(x) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Assim,

$$\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_{C_m} |u_n|^2 dx &= \int_{C_m} \frac{\lambda_n V(x) + 1}{\lambda_n V(x) + 1} |u_n|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\frac{\lambda_n}{m} + 1} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \\ &\leq \frac{mM}{\lambda_n + m}, \end{aligned}$$

onde  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{\lambda_n}^2$ . Pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \int_{C_m} |u|^2 dx &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{mM}{\lambda_n + m} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $u = 0$  quase sempre em  $C_m$ , e conseqüentemente,  $u = 0$  quase sempre em  $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ . Por sua vez, seguindo os mesmos argumentos encontrados em [60] fixamos  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} \nabla u(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} u(x) \nabla \varphi(x) dx = 0,$$

de onde segue que

$$\nabla u(x) = 0, \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}.$$

Como  $\partial\Omega$  é suave,  $u \in H^2(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$  e  $\nabla u \in H^1(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$ , pelo Teorema do traço, existem constantes  $K_1, K_2 > 0$  satisfazendo

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})} = 0,$$

e

$$\|\nabla u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq K_2 \|\nabla u\|_{H^1(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})} = 0,$$

mostrando que  $u \in H_0^2(\Omega)$ . Para completar a demonstração de *i*), considere uma função teste  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  e observe que

$$I'_{\lambda_n}(u_n)\varphi = \int_{\Omega} [\Delta u_n \Delta \varphi + u_n \varphi] dx - \int_{\Omega} f(u_n) \varphi dx. \quad (1.23)$$

Como  $\{u_n\}$  é uma sequência  $(PS)_{c,\infty}$ ,

$$I'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \rightarrow 0. \quad (1.24)$$

Recordando que  $u_n \rightharpoonup u$  in  $H^2(\mathbb{R}^N)$ , devemos ter

$$\int_{\Omega} [\Delta u_n \Delta \varphi + u_n \varphi] dx \rightarrow \int_{\Omega} [\Delta u \Delta \varphi + u \varphi] dx \quad (1.25)$$

e

$$\int_{\Omega} f(u_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} f(u) \varphi dx. \quad (1.26)$$

Assim, de (1.23)-(1.26),

$$\int_{\Omega} [\Delta u \Delta \varphi + u \varphi] dx = \int_{\Omega} f(u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $H_0^2(\Omega)$ , a equação acima implica em

$$\int_{\Omega} [\Delta u \Delta v + uv] dx = \int_{\Omega} f(u) v dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

mostrando que  $u$  é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + u = f(u), & \text{em } \Omega_j, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_j. \end{cases} \quad (1.27)$$

Para *ii*), note que

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \|u\|_{\lambda_n}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta u_n \Delta u + (\lambda_n V(x) + 1) u_n u] dx. \quad (1.28)$$

De *i*),

$$\|u\|_{\lambda_n}^2 = \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2,$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\Delta u_n \Delta u + (\lambda_n V(x) + 1)u_n u] dx = \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + o_n(1).$$

Então, podemos reescrever (1.28) do seguinte modo

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + o_n(1). \quad (1.29)$$

Da limitação de  $\{\|u_n\|_{\lambda_n}\}$  e pelo limite  $\|I'_{\lambda_n}(u_n)\|_{E'_{\lambda_n}} \rightarrow 0$ , segue que

$$I'_{\lambda_n}(u_n)u_n \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\|u_n\|_{\lambda_n}^2 = I'_{\lambda_n}(u_n)u_n + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx + o_n(1). \quad (1.30)$$

Por outro lado, sabemos que o limite  $I'_{\lambda_n}(u_n)u \rightarrow 0$  é equivalente a

$$\int_{\Omega} [\Delta u_n \Delta u + u_n u] dx - \int_{\Omega} f(u_n)u dx = o_n(1),$$

o que conduz a

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + |u|^2] dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx. \quad (1.31)$$

Combinando (1.29) com (1.30) e (1.31), vemos que

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx + o_n(1).$$

Usando o mesmo argumento da demonstração do Lema 1.1.6 mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx,$$

finalizando a demonstração de *ii*). Por fim, para provar *iii*), é suficiente usar a desigualdade abaixo

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n - u|^2 dx \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0.$$

■

### 1.3 Um Nível Minimax Especial

Nesta seção, denotaremos por  $I_j : H_0^2(\Omega_j) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $I_{\lambda,j} : H^2(\Omega'_j) \rightarrow \mathbb{R}$  os funcionais dados por

$$I_j(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} [|\Delta u|^2 + |u|^2] dx - \int_{\Omega_j} F(u) dx$$

e

$$I_{\lambda,j}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'_j} [|\Delta u|^2 + (\lambda V(x) + 1) |u|^2] dx - \int_{\Omega'_j} F(u) dx.$$

Pode-se mostrar que  $I_j$  e  $I_{\lambda,j}$  satisfazem a geometria do passo da montanha. Desde que  $I_j$  e  $I_{\lambda,j}$  satisfazem a condição de Palais-Smale, temos pelo Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz, que existem  $w_j \in H_0^2(\Omega_j)$  e  $w_{\lambda,j} \in H^2(\Omega'_j)$  satisfazendo

$$I_j(w_j) = c_j, \quad I_{\lambda,j}(w_{\lambda,j}) = c_{\lambda,j} \quad \text{and} \quad I'_j(w_j) = I'_{\lambda,j}(w_{\lambda,j}) = 0$$

onde

$$c_j = \inf_{\alpha \in \Upsilon_j} \max_{t \in [0,1]} I_j(\alpha(t)),$$

$$c_{\lambda,j} = \inf_{\alpha \in \Upsilon_{\lambda,j}} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,j}(\alpha(t)),$$

$$\Upsilon_j = \{\alpha \in C([0, 1], H_0^2(\Omega_j)); \alpha(0) = 0, \text{ e } I_j(\alpha(1)) < 0\},$$

e

$$\Upsilon_{\lambda,j} = \{\alpha \in C([0, 1], H^2(\Omega'_j)); \alpha(0) = 0, \text{ e } I_{\lambda,j}(\alpha(1)) < 0\}.$$

Para maiores detalhes sobre a afirmação acima citamos o Capítulo 5 de [71].

No que segue,  $c_\Gamma = \sum_{j=1}^l c_j$  e  $R > 0$  é uma constante suficientemente grande verificando

$$0 < I_j\left(\frac{1}{R}w_j\right), I_j(Rw_j) < c_j, \quad \forall j \in \Gamma.$$

Logo, pela definição de  $c_j$ ,

$$\max_{s \in [1/R^2, 1]} I_j(sRw_j) = c_j, \quad \forall j \in \Gamma.$$

Considere  $\Gamma = \{1, 2, \dots, l\}$ , com  $l \leq k$  e fixe

$$\gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l)(x) = \sum_{j=1}^l s_j R w_j(x), \quad \forall (s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l.$$

Denotaremos por  $\Gamma_*$  a classe das funções contínuas  $\gamma \in C([1/R^2, 1], E_\lambda \setminus \{0\})$  satisfazendo as seguintes condições:

$$(a) \quad \gamma = \gamma_0 \text{ sobre } \partial([1/R^2, 1]^l)$$

e

$$(b) \quad I_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma}(\gamma(s_1, \dots, s_l)) \geq 0,$$

onde  $I_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} : H^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  é o funcional definido por

$$I_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} [|\Delta u|^2 + (\lambda V(x) + 1) |u|^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} F(u) dx.$$

Usando a classe  $\Gamma_*$ , definimos o seguinte nível minimax

$$b_{\lambda, \Gamma} = \inf_{\gamma \in \Gamma_*} \max_{(s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l} I_\lambda(\gamma(s_1, \dots, s_l)).$$

Observe que  $\Gamma_* \neq \emptyset$ , pois  $\gamma_0 \in \Gamma_*$ .

**Lema 1.3.1** *Para cada  $\gamma \in \Gamma_*$ , existe  $(t_1, \dots, t_l) \in [1/R^2, 1]^l$  verificando*

$$I'_{\lambda, j}(\gamma(t_1, \dots, t_l))\gamma(t_1, \dots, t_l) = 0, \text{ para } j \in \{1, \dots, l\}.$$

**Demonstração.** Dado  $\gamma \in \Gamma_*$ , considere a aplicação  $\tilde{\gamma} : [1/R^2, 1]^l \rightarrow \mathbb{R}^l$  definida por

$$\tilde{\gamma}(s_1, \dots, s_l) = (I'_{\lambda, 1}(\gamma(s_1, \dots, s_l))\gamma(s_1, \dots, s_l), \dots, I'_{\lambda, l}(\gamma(s_1, \dots, s_l))\gamma(s_1, \dots, s_l)).$$

Para  $(s_1, \dots, s_l) \in \partial([1/R^2, 1]^l)$ , sabemos que

$$\gamma(s_1, \dots, s_l) = \gamma_0(s_1, \dots, s_l).$$

Então,

$$I'_{\lambda, j}(\gamma_0(s_1, \dots, s_l))(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) = 0 \Rightarrow s_j \notin \{1/R^2, 1\}, \forall j \in \Gamma,$$

caso contrário,

$$I'_{\lambda, j}(\gamma_0(s_1, \dots, s_l))(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) = 0$$

para  $s_j = \frac{1}{R^2}$  ou  $s_j = 1$ , isto é,

$$I'_j\left(\frac{1}{R}w_j\right)\left(\frac{1}{R}w_j\right) = 0 \quad \text{ou} \quad I'_j(Rw_j)(Rw_j) = 0$$

implicando que

$$I_j\left(\frac{1}{R}w_j\right) \geq c_j \quad \text{ou} \quad I_j(Rw_j) \geq c_j,$$

o que contradiz a escolha de  $R$ . Por tanto,

$$(0, 0, \dots, 0) \notin \tilde{\gamma}(\partial([1/R^2, 1]^l)).$$

Assim, pelo Grau Topológico

$$\deg(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^l, (0, 0, \dots, 0)) = (-1)^l \neq 0,$$

de onde segue que existe  $(t_1, t_2, \dots, t_l) \in (1/R^2, 1)^l$  satisfazendo

$$I'_{\lambda,j}(\gamma(t_1, t_2, \dots, t_l))(\gamma(t_1, t_2, \dots, t_l)) = 0, \quad \text{para } j \in \{1, 2, \dots, l\}.$$

■

### Proposição 1.3.2

$$a) \quad \sum_{j=1}^l c_{\lambda,j} \leq b_{\lambda,\Gamma} \leq c_\Gamma, \quad \forall \lambda \geq 1.$$

$$b) \quad \text{Para } \gamma \in \Gamma_* \text{ e } (s_1, \dots, s_l) \in \partial([1/R^2, 1]^l),$$

$$I_\lambda(\gamma(s_1, \dots, s_l)) < c_\Gamma, \quad \forall \lambda \geq 1.$$

### Demonstração.

a) Desde que  $\gamma_0 \in \Gamma_*$ ,

$$\begin{aligned} b_{\lambda,\Gamma} &\leq \max_{(s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l} I_{\lambda,j}(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) \\ &\leq \max_{(s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l} I_{\lambda,j}\left(\sum_{i=1}^l s_i R w_i(x)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^l \max_{s_j \in [1/R^2, 1]} I_j(s_j R w_j(x)) \\ &\leq \sum_{j=1}^l c_j = c_\Gamma. \end{aligned}$$

Para cada  $\gamma \in \Gamma_*$  e  $(t_1, \dots, t_l) \in [1/R^2, 1]^l$ , pelo mesmo raciocínio usado no Lema 1.3.1

$$I_{\lambda,j}(\gamma(t_1, \dots, t_l)) \geq c_{\lambda,j}, \quad \forall j \in \Gamma.$$

Na última desigualdade usamos a seguinte caracterização

$$c_{\lambda,j} = \inf\{I_{\lambda,j}(u); u \in E_\lambda \setminus \{0\}; I'_{\lambda,j}(u)u = 0\}.$$

Por outro lado, recordando que  $I_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma}(\gamma(s_1, \dots, s_l)) \geq 0$ ,

$$I_\lambda(\gamma(s_1, \dots, s_l)) \geq \sum_{j=1}^l I_{\lambda,j}(\gamma(s_1, \dots, s_l)),$$

e então,

$$\max_{(s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l} I_\lambda(\gamma(s_1, \dots, s_l)) \geq I_\lambda(\gamma(t_1, \dots, t_l)) \geq \sum_{j=1}^l c_{\lambda,j}.$$

A última desigualdade combinada com a definição de  $b_{\lambda,\Gamma}$  implica que

$$b_{\lambda,\Gamma} \geq \sum_{j=1}^l c_{\lambda,j},$$

Isto completa a demonstração de a).

b) Como  $\gamma(s_1, \dots, s_l) = \gamma_0(s_1, \dots, s_l)$  sobre  $\partial([1/R^2, 1]^l)$ , temos

$$I_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) = \sum_{j=1}^l I_j(s_j R w_j), \forall (s_1, \dots, s_l) \in \partial([1/R^2, 1]^l).$$

Desde que

$$I_j(s_j R w_j) \leq \max_{s \in [1/R^2, 1]} I_j(s R w_j) = c_j, \quad \forall j \in \Gamma$$

e além disso, existe  $j_0 \in \Gamma$  tal que  $s_{j_0} \in \{1/R^2, 1\}$ , consequentemente

$$I_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) = \sum_{j \neq j_0} I_j(s_j R w_j) + I_{j_0}(s_{j_0} R w_{j_0}) < c_\Gamma,$$

pois pela escolha de  $R$

$$I_{j_0}\left(\frac{1}{R} w_{j_0}\right), I_{j_0}(R w_{j_0}) < c_{j_0}.$$

■

**Corolário 1.3.3**  $b_{\lambda,\Gamma} \rightarrow c_\Gamma$ , quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Demonstração.** Repetindo os mesmos argumentos usados na Proposição 1.2.1, podemos extrair uma subsequência  $\lambda_n \rightarrow \infty$  tal que

$$w_{\lambda_n, j} \rightarrow u_0 \text{ em } H^2(\Omega'_j),$$

onde  $u_0 \in H_0^1(\Omega_j)$  é uma solução de (1.21) e

$$I_{\lambda_n, j}(w_{\lambda_n, j}) \rightarrow I_j(u_0).$$

Como  $c_j$  é o menor nível de energia para  $I_j$ , temos

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} c_{\lambda, j} = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} I_{\lambda, j}(w_{\lambda, j}) = I_j(u_0) \geq c_j. \quad (1.32)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} c_{\lambda, j} &= \inf_{\alpha \in \Upsilon_{\lambda, j}} \max_{t \in [0, 1]} I_{\lambda, j}(\alpha(t)) \\ &\leq \inf_{\alpha \in \Upsilon_j} \max_{t \in [0, 1]} I_{\lambda, j}(\alpha(t)) \\ &\leq \inf_{\alpha \in \Upsilon_j} \max_{t \in [0, 1]} I_j(\alpha(t)) = c_j \end{aligned} \quad (1.33)$$

De (1.32) e (1.33),

$$c_{\lambda, j} \rightarrow c_j \text{ para cada } \forall j \in \Gamma.$$

Portanto, pela Proposição 1.3.2,  $b_{\lambda, \Gamma} \rightarrow c_\Gamma$  quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . ■

## 1.4 Demonstração do Teorema Principal

No que segue, consideramos

$$M = 1 + \sum_{j=1}^l \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) c_j},$$

$$\overline{B}_{M+1}(0) = \{u \in E_\lambda; \|u\|_\lambda \leq M + 1\},$$

e para  $\mu > 0$  suficientemente pequeno

$$A_\mu^\lambda = \left\{ u \in \overline{B}_{M+1}; \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} \leq \mu \text{ e } |I_{\lambda, j}(u) - c_j| \leq \mu, \forall j \in \Gamma \right\},$$

e

$$I_\lambda^{c_\Gamma} = \{u \in E_\lambda / I_\lambda(u) \leq c_\Gamma\}.$$

Observe que  $A_\mu^\lambda \cap I_\lambda^{\text{cr}} \neq \emptyset$ , pois  $w = \sum_{j=1}^l w_j \in A_\mu^\lambda \cap I_\lambda^{\text{cr}}$ . Fixando

$$0 < \mu < \frac{1}{4} \min\{c_j; j \in \Gamma\}, \quad (1.34)$$

temos a seguinte estimativa uniforme para  $\|I'_\lambda(u)\|$  no conjunto  $(A_{2\mu}^\lambda \setminus A_\mu^\lambda) \cap I_\lambda^{\text{cr}}$ .

**Proposição 1.4.1** *Seja  $\mu > 0$  satisfazendo (1.34). Então, existe  $\sigma_0 > 0$  independente de  $\lambda$  e  $\Lambda_* \geq 1$  tais que*

$$\|I'_\lambda(u)\| \geq \sigma_0 \text{ para } \lambda \geq \Lambda_* \text{ e para todo } u \in (A_{2\mu}^\lambda \setminus A_\mu^\lambda) \cap I_\lambda^{\text{cr}}. \quad (1.35)$$

**Demonstração.** Argumentando por contradição, suponha que existem  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  e  $u_n \in E_{\lambda_n}$ , com

$$u_n \in (A_{2\mu}^{\lambda_n} \setminus A_\mu^{\lambda_n}) \cap I_{\lambda_n}^{\text{cr}} \quad \text{e} \quad \|I'_{\lambda_n}(u_n)\| \rightarrow 0.$$

Desde que  $u_n \in A_{2\mu}^{\lambda_n}$ , a sequência  $\{\|u_n\|_{\lambda_n}\}$  é limitada. Consequentemente  $\{I_{\lambda_n}(u_n)\}$  também é limitada. Então, passando a uma subsequência se necessário,

$$I_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow c \in (-\infty, c_\Gamma].$$

Pela Proposição 1.2.1, novamente passando a uma subsequência se necessário,  $u_n \rightarrow u$  em  $H^2(\mathbb{R}^N)$  e  $u \in H_0^2(\Omega_\Gamma)$  é uma solução do problema (1.21). Além disso,

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^2 dx \rightarrow 0, \quad (1.36)$$

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma}^2 \rightarrow 0 \quad (1.37)$$

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \Omega_j}^2 \rightarrow \int_{\Omega_j} [|\Delta u|^2 + |u|^2] dx, \quad \forall j \in \Gamma. \quad (1.38)$$

Como  $c_\Gamma = \sum_{j=1}^l c_j$  e  $c_j$  é o nível de energia mínima de  $I_j$ , um dos seguintes casos ocorre:

- i)  $u|_{\Omega_j} \neq 0$ ,  $\forall j \in \Gamma$ , ou
- ii)  $u|_{\Omega_{j_0}} = 0$ , para algum  $j_0 \in \Gamma$ .

Se *i*) ocorre, de (1.36) – (1.38)

$$I_j(u) = c_j, \quad \forall j \in \Gamma.$$

Logo,  $u_n \in A_\mu^{\lambda_n}$  para  $n$  suficientemente grande, o que é uma contradição.

Se *ii*) ocorre, de (1.36) e (1.37)

$$|I_{\lambda_n, j_0}(u_n) - c_{j_0}| \rightarrow c_{j_0} \geq 4\mu,$$

o que contradiz a hipótese de  $u_n \in A_{2\mu}^{\lambda_n} \setminus A_{\mu}^{\lambda_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como *i*) ou *ii*) não acontecem, temos um absurdo, finalizando a demonstração. ■

**Proposição 1.4.2** *Sejam  $\mu$  satisfazendo (1.34) e  $\Lambda_* \geq 1$  a constante dada na Proposição 1.3.2. Então para  $\lambda \geq \Lambda_*$ , existe  $u_\lambda$  uma solução de  $(B)_\lambda$  satisfazendo  $u_\lambda \in A_\mu^\lambda \cap I_\lambda^{\text{cr}}$ .*

**Demonstração.** Mostraremos, por contradição, que não existem pontos críticos de  $I_\lambda$  em  $A_\mu^\lambda \cap I_\lambda^{\text{cr}}$ . Pela Proposição 2.2.7,  $I_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_d$  para  $d \in [0, c_\Gamma]$  e  $\lambda$  suficientemente grande. Assim, existe  $d_\lambda > 0$  tal que

$$\|I'_\lambda(u)\| \geq d_\lambda, \quad \forall u \in A_\mu^\lambda \cap I_\lambda^{\text{cr}}.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.4.1,

$$\|I'_\lambda(u)\| \geq \sigma_0, \quad \forall u \in (A_{2\mu}^\lambda \setminus A_\mu^\lambda) \cap I_\lambda^{\text{cr}},$$

onde  $\sigma_0$  é independente de  $\lambda$ . No que segue, definimos as funções contínuas  $\Psi : E_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  e  $H : I_\lambda^{\text{cr}} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= 1, & u \in A_{3\mu/2}^\lambda, \\ \Psi(u) &= 0, & u \notin A_{2\mu}^\lambda, \\ 0 &\leq \Psi(u) \leq 1, & \text{para } u \in E_\lambda, \end{aligned}$$

e

$$H(u) = \begin{cases} -\Psi(u) \|Y(u)\|^{-1} Y(u), & u \in A_{2\mu}^\lambda, \\ 0, & u \notin A_{2\mu}^\lambda, \end{cases}$$

onde  $Y$  é um campo vetorial pseudo-gradiente para  $I_\lambda$  sobre

$$X = \{u \in E_\lambda; I_\lambda(u) \neq 0\}.$$

Observe que

$$\|H(u)\| \leq 1 \text{ para todo } \lambda \geq \Lambda_* \text{ e } u \in I_\lambda^{\text{cr}}.$$

As informações acima garantem a existência de um fluxo  $\eta : [0, +\infty) \times I_\lambda^{\text{cr}} \rightarrow I_\lambda^{\text{cr}}$  definido por

$$\begin{cases} \frac{d\eta(t, u)}{dt} = H(\eta(t, u)) \\ \eta(0, u) = u \in I_\lambda^{\text{cr}}, \end{cases}$$

verificando

$$\frac{dI_\lambda(\eta(t, u))}{dt} \leq -\Psi(\eta(t, u)) \|I'_\lambda(\eta(t, u))\| \leq 0, \quad (1.39)$$

$$\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| = \|H(\eta)\| \leq 1, \quad (1.40)$$

e

$$\eta(t, u) = u, \quad \forall t \geq 0 \text{ e } u \in I_\lambda^{\text{cr}} \setminus A_{2\mu}^\lambda. \quad (1.41)$$

No que segue, definimos

$$\beta(s_1, \dots, s_l) = \eta(T, \gamma_0(s_1, \dots, s_l)), \quad \forall (s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l,$$

onde  $T > 0$  será fixado posteriormente.

Uma vez que,

$$\gamma_0(s_1, \dots, s_l) \notin A_{2\mu}^\lambda, \quad \forall (s_1, \dots, s_l) \in \partial([1/R^2, 1]^l),$$

deduzimos que

$$\beta(s_1, \dots, s_l) = \gamma_0(s_1, \dots, s_l), \quad \forall (s_1, \dots, s_l) \in \partial([1/R^2, 1]^l).$$

Além disso, é fácil checar que

$$I_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma}(\beta(s_1, \dots, s_l)) \geq 0, \quad \forall (s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l,$$

mostrando que  $\beta \in \Gamma_*$ .

Note que  $\text{supp}(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) \subset \overline{\Omega}_\Gamma$  para todo  $(s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l$  e  $I_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l))$  independente de  $\lambda \geq \Lambda$ . Além disso,

$$I_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) \leq c_\Gamma, \quad \forall (s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l$$

e

$$I_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) = c_\Gamma, \quad \text{se } s_j = 1/R, \forall j \in \Gamma.$$

Portanto,

$$m_0 = \max \{ I_\lambda(u); u \in \gamma_0([1/R^2, 1]^l) \setminus A_\mu^\lambda \},$$

é independente de  $\lambda$ , e verifica

$$m_0 < c_\Gamma.$$

De fato, se  $m_0 = c_\Gamma$  existe uma seqüência  $\{(s_1^n, \dots, s_l^n)\} \subset [1/R^2, 1]^l$  tal que

$$c_\Gamma - \frac{1}{n} \leq I_\lambda(\gamma_0(s_1^n, \dots, s_l^n)) \leq c_\Gamma,$$

e portanto

$$I_\lambda(\gamma_0(s_1^n, \dots, s_l^n)) \rightarrow c_\Gamma. \quad (1.42)$$

Por outro lado,  $\gamma_0(s_1^n, \dots, s_l^n) \notin A_\mu^\lambda$ , logo existe  $j_0 \in \Gamma$  tal que

$$|I_{j_0}(\gamma_0(s_1^n, \dots, s_l^n)) - c_{j_0}| > \mu,$$

desta desigualdade e pela definição de  $c_{j_0}$

$$I_{j_0}(\gamma_0(s_1^n, \dots, s_l^n)) < c_{j_0} - \mu$$

e conseqüentemente,

$$I_\lambda(\gamma_0(s_1^n, \dots, s_l^n)) < c_\Gamma - \mu,$$

desta forma

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(\gamma_0(s_1^n, \dots, s_l^n)) \leq c_\Gamma - \mu,$$

o que contradiz (1.42).

Desde que existe  $K_*$  tal que

$$|I_\lambda(u) - I_\lambda(v)| \leq K_* \|u - v\|_{\lambda, \Omega_j}, \quad \forall u, v \in \overline{B}_{M+1} \text{ e } \forall j \in \Gamma,$$

afirmamos que para  $T$  suficientemente grande,

$$\max_{(s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l} I_\lambda(\beta(s_1, \dots, s_l)) \leq \max\{m_0, c_\Gamma - \frac{1}{2K_*} \sigma_0 \mu\}. \quad (1.43)$$

De fato, fixe  $u = \gamma_0(s_1, \dots, s_l) \in E_\lambda$ . Se  $u \notin A_\mu^\lambda$ ,

$$I_\lambda(\eta(t, u)) \leq I_\lambda(\eta(0, u)) = I_\lambda(u) \leq m_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Por outro lado, se  $u \in A_\mu^\lambda$ , denotando por  $\tilde{\eta}(t) = \eta(t, u)$ ,  $\tilde{d}_\lambda = \min\{d_\lambda, \sigma_0\}$  e  $T = \frac{\sigma_0 \mu}{2K_* \tilde{d}_\lambda} > 0$ , analisamos os seguintes casos:

**Case 1:**  $\tilde{\eta}(t) \in A_{3\mu/2}^\lambda, \forall t \in [0, T]$ .

**Case 2:**  $\tilde{\eta}(t_0) \in \partial A_{3\mu/2}^\lambda$ , para algum  $t_0 \in [0, T]$ .

**Análise do Caso 1:** Neste caso,

$$\Psi(\tilde{\eta}(t)) \equiv 1, \quad \forall t \in [0, T]$$

e

$$\|I'_\lambda(\tilde{\eta}(t))\| \geq \tilde{d}_\lambda, \forall t \in [0, T].$$

Assim,

$$I_\lambda(\tilde{\eta}(T)) = I_\lambda(u) + \int_0^T \frac{d}{ds} I_\lambda(\tilde{\eta}(s)) ds \leq c_\Gamma - \int_0^T \tilde{d}_\lambda ds,$$

segue que

$$I_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq c_\Gamma - \tilde{d}_\lambda T = c_\Gamma - \frac{1}{2K_*} \sigma_0 \mu.$$

**Análise do caso 2:** Seja  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  satisfazendo  $\tilde{\eta}(t_1) \in \partial A_\mu^\lambda$ ,  $\tilde{\eta}(t_2) \in \partial A_{3\mu/2}^\lambda$  e  $\tilde{\eta}(t) \in A_{3\mu/2}^\lambda \setminus A_\mu^\lambda, \forall t \in [t_1, t_2]$ . Então

$$\|\tilde{\eta}(t_1) - \tilde{\eta}(t_2)\| \geq \frac{1}{2K_*} \mu. \quad (1.44)$$

De fato, denotando  $w_1 = \tilde{\eta}(t_1)$  e  $w_2 = \tilde{\eta}(t_2)$ , segue que

$$\|w_2\|_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} = \frac{3}{2} \mu \quad \text{ou} \quad |I_{\lambda, j_0}(w_2) - c_{j_0}| = \frac{3}{2} \mu.$$

Da definição de  $A_\mu^\lambda$ , temos  $\|w_2\|_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} \leq \mu$ . Logo,

$$\|w_2 - w_1\|_\lambda \geq \frac{1}{K_*} |I_{\lambda, j_0}(w_2) - I_{\lambda, j_0}(w_1)| \geq \frac{1}{2K_*} \mu.$$

Pelo Teorema do Valor Médio

$$\|\tilde{\eta}(t_1) - \tilde{\eta}(t_2)\|_\lambda \leq \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| |t_1 - t_2|. \quad (1.45)$$

Como  $\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| \leq 1$ , de (1.44) e (1.45),

$$|t_1 - t_2| \geq \frac{1}{2K_*} \mu. \quad (1.46)$$

Desde que,

$$I_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq I_\lambda(u) - \int_0^T \Psi(\tilde{\eta}(s)) \|I'_\lambda(\tilde{\eta}(s))\| ds,$$

segue de (1.46),

$$I_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq c_\Gamma - \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0 ds \leq c_\Gamma - \frac{\sigma_0}{2K_*} \mu,$$

provando (1.43).

Assim,

$$b_{\lambda,\Gamma} \leq \max_{[1/R^2, 1]^l} I_\lambda(\tilde{\eta}(s_1, \dots, s_l)) \leq \max\{m_0, c_\Gamma - \frac{1}{2K_*} \sigma_0 \mu\} < c_\Gamma,$$

que é um absurdo, pois  $b_{\lambda,\Gamma} \rightarrow c_\Gamma$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . ■

Das duas últimas proposições, podemos concluir que  $I_\lambda$  tem um ponto crítico  $u_\lambda$  em  $A_\mu^\lambda$  para  $\lambda$  suficientemente grande.

### Conclusão da Demonstração do Teorema 0.0.1:

Da última Proposição existe  $\{u_{\lambda_n}\}$  com  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  satisfazendo:

$$I'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0,$$

$$\|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} \rightarrow 0$$

e

$$I_{\lambda_n, j}(u_{\lambda_n}) \rightarrow c_j, \forall j \in \Gamma.$$

Logo, da Proposição 1.2.1,

$$u_{\lambda_n} \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{com} \quad u \in H_0^2(\Omega_\Gamma).$$

Alem disso,  $u$  é uma solução não trivial de

$$\begin{cases} \Delta^2 u + u = f(u), \text{ em } \Omega_j \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_j, \end{cases} \quad (1.47)$$

com  $I_j(u) = c_j$  para todo  $i \in \Gamma$ . Agora, afirmamos que  $u = 0$  em  $\Omega_j$ , para todo  $j \notin \Gamma$ . De fato, é possível provar que existe  $\sigma_1 > 0$ , o qual é independente de  $j$ , tal que se  $v$  é uma solução não trivial de (1.47), então

$$\|v\|_{H_0^2(\Omega_j)} \geq \sigma_1.$$

No entanto, a solução  $u$  verifica

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma)} = 0,$$

mostrando que  $u = 0$  em  $\Omega_j$ , para todo  $j \notin \Gamma$ . Isto finaliza a demonstração do Teorema 0.0.1.

## Capítulo 2

# Soluções multi-bump para equação de Choquard

No presente capítulo, vamos utilizar os argumentos desenvolvidos no Capítulo 1 para estudar a existência de solução multi-bump para equação não-linear de Choquard

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * |u|^p\right)|u|^{p-2}u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (C)_\lambda$$

onde  $\mu \in (0, 3)$ ,  $p \in (2, 6 - \mu)$  e  $V$  é uma função contínua não negativa satisfazendo mais uma vez as hipóteses

$$(V_1) \quad V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

(V<sub>2</sub>)  $\Omega = \text{int}V^{-1}(\{0\})$  é um conjunto aberto, não-vazio, limitado com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Além disso,  $\Omega$  tem  $k$  componentes conexas, mais precisamente,

- $\Omega = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$ ;
- $\text{dist}(\Omega_i, \Omega_j) > 0$ ,  $i \neq j$ .

(V<sub>3</sub>) Existe  $M_0 > 0$  tal que  $|\{x \in \mathbb{R}^N; V(x) \leq M_0\}| < +\infty$ .

## 2.1 O problema $(C)_{\infty, \Gamma}$

Para provar a existência de solução multi-bump para  $(C)_\lambda$ , o primeiro passo é considerar o problema limite

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \left( \int_{\Omega_\Gamma} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u, & \text{in } \Omega_\Gamma \\ u \neq 0 \text{ em } \Omega_j, \quad j \in \Gamma \\ u \in H_0^1(\Omega_\Gamma), \end{cases} \quad (C)_{\infty, \Gamma}$$

e estudar a existência de solução de energia mínima não nula sobre cada componente  $\Omega_j$ ,  $j \in \Gamma$ . A ideia principal é provar que o funcional energia associado a  $(C)_{\infty, \Gamma}$  definido por

$$I_\Gamma(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\Gamma} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega_\Gamma} \left( \int_{\Omega_\Gamma} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^p dx \quad (2.1)$$

atinge o valor mínimo sobre

$$\mathcal{M}_\Gamma = \{u \in \mathcal{N}_\Gamma : I'_\Gamma(u)u_i = 0 \text{ e } u_i \neq 0, \quad i \in \Gamma\}$$

onde  $\Gamma \subset \{1, \dots, k\}$ ,  $u_i = u|_{\Omega_i}$  e  $\mathcal{N}_\Gamma$  é a variedade de Nehari de  $I_\Gamma$  definida por

$$\mathcal{N}_\Gamma = \{u \in H_0^1(\Omega_\Gamma) \setminus \{0\} : I'_\Gamma(u)u = 0\}.$$

Mais precisamente, provaremos que existe  $w \in \mathcal{M}_\Gamma$  tal que

$$I_\Gamma(w) = \inf_{u \in \mathcal{M}_\Gamma} I_\Gamma(u) \quad \text{and} \quad I'_\Gamma(w) = 0. \quad (2.2)$$

Dizemos que  $w \in H_0^1(\Omega_\Gamma)$ , satisfazendo  $w_i = w|_{\Omega_i} \neq 0, i \in \Gamma$ , é uma solução de energia mínima para  $(C)_{\infty, \Gamma}$  se a condição (2.2) vale. Esta propriedade será usada para caracterizar a forma multi-bump das soluções de  $(C)_\lambda$ . Por simplicidade no decorrer dessa seção consideraremos apenas  $\Gamma = \{1, 2\}$ . Além disso, denotamos por  $\Omega$ ,  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  os conjuntos  $\Omega_\Gamma$ ,  $\mathcal{M}_\Gamma$  e  $\mathcal{N}_\Gamma$  respectivamente, e  $I_\Gamma$  será denotado por  $I$ . Logo,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{N} : I'(u)u_i = 0 \text{ e } u_i \neq 0, \quad i = 1, 2.\}$$

e

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : I'(u)u = 0\}.$$

No que segue, denotamos por  $\| \cdot \|$ ,  $\| \cdot \|_1$  e  $\| \cdot \|_2$  as normas em  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega_1)$  e  $H_0^1(\Omega_2)$  dados por

$$\|u\| = \left( \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_1 = \left( \int_{\Omega_1} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|u\|_2 = \left( \int_{\Omega_2} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

respectivamente.

Nesta seção e no decorrer desse capítulo recorreremos sucessivas vezes a seguinte desigualdade clássica de Hardy-Littlewood-Sobolev.

**Proposição 2.1.1** [48] [Desigualdade de Hardy – Littlewood – Sobolev]:

Sejam  $s, r > 1$  e  $0 < \mu < 3$  com  $1/s + \mu/3 + 1/r = 2$ . Dados  $f \in L^s(\mathbb{R}^3)$  e  $h \in L^r(\mathbb{R}^3)$ . Existe uma constante ótima  $C(s, \mu, r)$ , independente de  $f, h$ , tais que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)h(y)}{|x-y|^\mu} dy dx \leq C(s, \mu, r) |f|_{L^s(\mathbb{R}^3)} |h|_{L^r(\mathbb{R}^3)}.$$

O seguinte lema mostra que o conjunto  $\mathcal{M}$  é não vazio.

**Lema 2.1.2** Dados  $0 < \mu < 3$ ,  $2 < p < 6 - \mu$  e  $v \in H_0^1(\Omega)$  com  $v_j \neq 0$  para  $j = 1, 2$ , então existe  $(\beta_1, \beta_2) \in (0, +\infty)^2$  tais que  $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \in \mathcal{M}$ . Consequentemente  $\mathcal{M} \neq \emptyset$  e além disso,  $c_0 = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) > 0$ .

**Demonstração.** Fixada  $v \in H_0^1(\Omega)$  com  $v_i \neq 0$  para  $i = 1, 2$ , definimos a função

$$G(s_1, s_2) = I(s_1^{\frac{1}{p}} v_1 + s_2^{\frac{1}{p}} v_2),$$

assim como em [42], utilizamos a identidade

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x|^\mu} * (s_1 |v_1|^p + s_2 |v_2|^p)^2 dy dx = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|x|^{\frac{\mu}{2}}} * (s_1 |v_1|^p + s_2 |v_2|^p) \right)^2 dx,$$

a qual é consequência do Teorema 5.9 de [48] e rescrevemos  $G$  do seguinte modo

$$G(s_1, s_2) = \frac{s_1^{\frac{2}{p}}}{2} \|v_1\|_1^2 + \frac{s_2^{\frac{2}{p}}}{2} \|v_2\|_2^2 - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|x|^{\frac{\mu}{2}}} * (s_1 |v_1|^p + s_2 |v_2|^p) \right)^2 dx.$$

Como  $G$  é uma função contínua,  $G(0, 0) = 0$  e  $G(s_1, s_2) \rightarrow -\infty$  quando  $|(s_1, s_2)| \rightarrow +\infty$ , temos que  $G$  possui um ponto de máximo global  $(a, b) \in [0, +\infty)^2$ .

**Afirmção 2.1.3** O ponto  $(a, b) \in (0, +\infty)^2$  é o único máximo global para a função  $G$ .

De fato, dados  $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in (0, +\infty)^2$  e  $t \in (0, 1)$ , temos

$$G(t(s_1, s_2) + (1-t)(t_1, t_2)) = \frac{(ts_1 + (1-t)t_1)^{2/p}}{2} \|v_1\|_1^2 + \frac{(ts_2 + (1-t)t_2)^{2/p}}{2} \|v_2\|_2^2 - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} \left[ t \left( \frac{1}{|x|^{\frac{\mu}{2}}} * (s_1|v_1|^p + s_2|v_2|^p) \right) + (1-t) \left( \frac{1}{|x|^{\frac{\mu}{2}}} * (t_1|v_1|^p + t_2|v_2|^p) \right) \right]^2 dx.$$

Pela concavidade da função  $t \mapsto t^{2/p}$  e convexidade estrita da função  $t \mapsto t^2$  concluímos que  $G$  é uma função estritamente concava e conseqüentemente  $(a, b)$  é o único ponto de máximo global e  $\nabla G(a, b) = (0, 0)$ . Além disso, temos também  $a, b \neq 0$ , pois se um deles for nulo, digamos  $a = 0$ , então

$$\frac{\partial G}{\partial s_i}(s_1, s_2) = \frac{1}{p} s_i^{\frac{2-p}{p}} \|v_i\|_1^2 - \frac{1}{p} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|x|^{\frac{\mu}{2}}} * (s_1|v_1|^p + s_2|v_2|^p) |v_i|^p \right],$$

e desde que  $p > 2$  o número  $\frac{2-p}{p}$  é negativo e portanto,

$$\lim_{s_1 \rightarrow 0} \frac{\partial G}{\partial s_1}(s_1, s_2) = +\infty,$$

mas devemos ter,

$$\frac{\partial G}{\partial s_i}(a, b) = 0, \text{ para } i = 1, 2.$$

Agora, mostraremos que  $c_0 > 0$ . Inicialmente, recordamos que se  $w \in \mathcal{M}$ , então

$$\|w\|^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|w(y)|^p |w(x)|^p}{|x-y|^{\mu}} dy dx.$$

Usando a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, existe  $C > 0$  tal que

$$\|w\|^2 \leq C \|w\|_{L^{6p/(6-\mu)}}^{2p},$$

e pelas imersões de Sobolev,

$$\|w\|^2 \leq C \|w\|^{2p},$$

Como  $\|w\| \neq 0$ , a última desigualdade implica que existe  $\tau > 0$  satisfazendo

$$\|w\|^2 \geq \tau, \quad \forall w \in \mathcal{M}.$$

Logo,

$$I(w) = I(w) - \frac{1}{2p} I'(w)w = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|w\|^2 \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \tau > 0, \quad \forall w \in \mathcal{M}.$$

e então,  $c_0 \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \tau > 0$ . ■

Agora vamos enunciar mais um lema técnico.

**Lema 2.1.4** *Sejam  $0 < \mu < 3$ ,  $2 < p < 6 - \mu$  e  $\{w_n\}$  uma sequência limitada em  $\mathcal{M}$  com  $w_n \rightharpoonup w$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Desde  $\|w_{n,j}\| \not\rightarrow 0$ , então  $w_j \neq 0$ , onde  $w_{n,j} = w_n|_{\Omega_j}$  e  $w_j = w|_{\Omega_j}$  para  $j = 1, 2$ .*

**Demonstração.** Inicialmente, como  $\{w_n\} \subset \mathcal{M}$  temos para  $j = 1, 2$

$$\|w_{n,j}\|_j^2 = \int_{\Omega_j} \left( \int_{\Omega} \frac{|w_n|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |w_{n,j}|^p dx,$$

e pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev juntamente com as imersões de Sobolev, existe uma constante positiva  $C$  tal que

$$\|w_{n,j}\|_j^2 \leq C \|w_n\|^p \|w_{n,j}\|_j^p.$$

Como  $\{w_n\}$  é limitada e  $p > 2$ , existe uma constante positiva  $\rho$  de modo que

$$\|w_{n,j}\|_j \geq \rho > 0.$$

Logo,

$$\|w_{n,j}\|_j \not\rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Agora, suponha por contradição que  $w_1 = 0$ . Pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev e pelas imersões de Sobolev, vemos que

$$\int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega} \frac{|w_n|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |w_{n,1}|^p dx \rightarrow 0.$$

Por outro lado, como  $I'(w_n)(w_{n,j}) = 0$ , ou equivalentemente

$$\|w_{n,1}\|_1^2 = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega} \frac{|w_n|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |w_{n,1}|^p dx,$$

obtemos

$$\|w_{n,1}\|_1^2 \rightarrow 0$$

que é um absurdo. O caso  $w_2 \neq 0$  segue de forma similar. ■

Agora, estamos aptos a mostrar a existência de solução de energia mínima para  $(C)_{\infty, \Gamma}$ .

### 2.1.1 Demonstração do Teorema 0.0.2

Do Lema 2.1.2,  $c_0 > 0$  e existe uma sequência  $\{w_n\} \subset \mathcal{M}$  tal que

$$\lim_n I(w_n) = c_0.$$

Note que  $\{w_n\}$  é uma sequência limitada, pois

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right) \|w_n\|^2 = I(w_n) - \frac{1}{2p} I'(w_n)w_n \leq c_0 + o_n(1).$$

Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } w_n \rightarrow w \text{ em } L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, 6) \text{ e } n \rightarrow \infty.$$

Considerando a função

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2) = I(s_1^{\frac{1}{p}} w_{n,1} + s_2^{\frac{1}{p}} w_{n,2}) &= \frac{s_1^{\frac{2}{p}}}{2} \|w_{n,1}\|_1^2 + \frac{s_2^{\frac{2}{p}}}{2} \|w_{n,2}\|_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|x|^{\frac{\mu}{2}}} * (s_1 |w_{n,1}|^p + s_2 |w_{n,2}|^p) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Sabemos por estudos prévios que  $\nabla G(1, 1) = (0, 0)$ . Como  $G$  é uma função estritamente concava,  $(1, 1)$  é um ponto de máximo global. Logo,

$$I(w_n) = I(w_{n,1} + w_{n,2}) = \max_{t,s \geq 0} I(tw_{n,1} + sw_{n,2}).$$

Pelo Lema 2.1.4, sabemos também que  $w_j \neq 0$  para  $j = 1, 2$ . Então, pelo Lema 2.1.2 existem  $t_1, t_2 > 0$  tais que

$$t_1 w_1 + t_2 w_2 \in \mathcal{M},$$

e então,

$$c_0 \leq I(t_1 w_1 + t_2 w_2).$$

Usando o fato que  $w_n \rightharpoonup w$  em  $H_0^1(\Omega)$  e a imersão compacta de Sobolev, temos

$$I(t_1 w_1 + t_2 w_2) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I(t_1 w_{n,1} + t_2 w_{n,2}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I(w_n) = c_0,$$

de onde segue que

$$c_0 = I(t_1 w_1 + t_2 w_2) \quad \text{com} \quad t_1 w_1 + t_2 w_2 \in \mathcal{M}.$$

Mostraremos agora que  $w_* = t_1 w_1 + t_2 w_2$  é um ponto crítico para  $I$ . Suponha por contradição que  $\|I'(w_*)\| > 0$  e fixe  $\alpha > 0$  tal que

$$\|I'(w_*)\| \geq \alpha.$$

Além disso, fixaremos  $r > 0$  suficientemente pequeno tal que se  $(t, s) \in B = B_r(1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , então existe algum  $\epsilon_0 > 0$  com

$$I(t^{\frac{1}{p}}(w_*)_1 + s^{\frac{1}{p}}(w_*)_2) < c_0 - 2\epsilon_0, \quad \forall (t, s) \in \partial B. \quad (2.3)$$

Na sequência fixamos  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  e  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\|I'(u)\| \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \quad \forall u \in I^{-1}\{[c_0 - 2\epsilon, c_0 + 2\epsilon]\} \cap S$$

onde

$$S = \{t^{\frac{1}{p}}(w_*)_1 + s^{\frac{1}{p}}(w_*)_2 : (t, s) \in \overline{B}\}.$$

Usando o Lema de Deformação, existe uma aplicação contínua  $\eta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$\eta(u) = u \quad \forall u \notin I^{-1}\{[c_0 - 2\epsilon, c_0 + 2\epsilon]\} \cap S \quad (2.4)$$

e

$$\eta(I^{c_0+\epsilon} \cap S) \subset I^{c_0-\epsilon} \cap S_\delta \quad (2.5)$$

onde

$$S_\delta = \{v \in H_0^1(\Omega) : \text{dist}(v, S) \leq \delta\}.$$

Na sequência, fixamos  $\delta > 0$  de modo que

$$v \in S_\delta \Rightarrow v_1, v_2 \neq 0. \quad (2.6)$$

Assim, definindo  $\gamma(t, s) = \eta(t^{\frac{1}{p}}(w_*)_1 + s^{\frac{1}{p}}(w_*)_2)$ , (2.3) e (2.4) implicam que

$$\gamma(s, t) = t^{\frac{1}{p}}(w_*)_1 + s^{\frac{1}{p}}(w_*)_2, \quad \forall (s, t) \in \partial B. \quad (2.7)$$

Além disso, como

$$\max_{t, s \geq 0} I(t^{\frac{1}{p}}(w_*)_1 + s^{\frac{1}{p}}(w_*)_2) = I(t_1(w_*)_1 + t_2(w_*)_2) = c_0,$$

por (2.5),

$$I(\gamma(t, s)) \leq c_0 - \epsilon.$$

**Afirmção 2.1.5** *Existe  $(t_0, s_0) \in B$  tal que*

$$(I'(\gamma(t_0, s_0))(\gamma(t_0, s_0)_1), I'(\gamma(t_0, s_0))(\gamma(t_0, s_0)_2)) = (0, 0).$$

Assumindo por um momento que a afirmação seja verdadeira, deduzimos que  $\gamma(t_0, s_0) \in \mathcal{M}$ , e então,

$$c_0 \leq I(\gamma(t_0, s_0)) \leq c_0 - \epsilon$$

que é absurdo. Aqui, (2.6) foi usado para garantir que  $\gamma(t_0, s_0)_j \neq 0$  para  $j = 1, 2$ . Consequentemente,  $w_* = t_1 w_1 + t_2 w_2$  é um ponto crítico para  $I$ .

**Demonstração da afirmação 2.1.5:** Inicialmente, note que

$$(I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_1), I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_2)) = (0, 0)$$

ou equivalentemente

$$\left( \frac{1}{t} I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_1), \frac{1}{s} I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_2) \right) = (0, 0)$$

e por (2.7)

$$\left( \frac{1}{t} I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_1), \frac{1}{s} I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_2) \right) = \left( \frac{1}{t} I'(\gamma_0(t, s))(\gamma_0(t, s)_1), \frac{1}{s} I'(\gamma_0(t, s))(\gamma_0(t, s)_2) \right),$$

para todo  $(t, s) \in \partial B$ , onde

$$\gamma_0(t, s) = t^{\frac{1}{p}}(w_*)_1 + s^{\frac{1}{p}}(w_*)_2 \quad \forall (s, t) \in \overline{B}.$$

Considerando a função

$$G(t, s) = I(t^{\frac{1}{p}}(w_*)_1 + s^{\frac{1}{p}}(w_*)_2),$$

deduzimos que

$$\frac{1}{p} \left( \frac{1}{t} I'(\gamma_0(t, s))(\gamma_0(t, s)_1), \frac{1}{s} I'(\gamma_0(t, s))(\gamma_0(t, s)_2) \right) = \nabla G(t, s) \quad \forall (t, s) \in \overline{B}.$$

Como  $G$  é uma função estritamente concava e  $\nabla G(1, 1) = (0, 0)$ , segue que

$$0 > \langle \nabla G(t, s) - \nabla G(1, 1), (t, s) - (1, 1) \rangle = \langle \nabla G(t, s), (t, s) - (1, 1) \rangle \quad \forall (s, t) \neq (1, 1),$$

então,

$$0 > \langle \nabla G(t, s), (t, s) - (1, 1) \rangle \quad \text{para} \quad |(s, t) - (1, 1)| = r.$$

Definindo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$H(t, s) = \nabla G(t, s)$$

e  $f(t, s) = H(t + 1, s + 1)$ , temos que

$$0 > \langle f(t, s), (t, s) \rangle \quad \text{para} \quad |(s, t)| = r.$$

Usando o Teorema do ponto fixo de Brouwer, sabemos que existe  $(t_*, s_*) \in B_r(0, 0)$  tal que  $f(t_*, s_*) = (0, 0)$ , isto é,

$$H(t_* + 1, s_* + 1) = (0, 0),$$

de onde segue que existe  $(t_0, s_0) \in B$  tal que

$$\left( I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_1), I'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)_2) \right) = (0, 0),$$

o que completa a demonstração da afirmação.

## 2.2 A condição $(PS)_c$ para $I_\lambda$

Nesta seção, provaremos algumas propriedades de convergência para as sequências  $(PS)$  do funcional  $I_\lambda$ . Nosso principal objetivo é provar que, dado  $c \geq 0$  independente de  $\lambda$ , o funcional  $I_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_d$  para  $d \in [0, c)$ , desde que  $\lambda$  seja suficientemente grande.

**Lema 2.2.1** *Seja  $\{u_n\} \subset E_\lambda$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ , então  $\{u_n\}$  é limitada. Além disso,  $c \geq 0$ .*

**Demonstração.** Como  $\{u_n\}$  é uma sequência  $(PS)_c$ ,

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow c \text{ e } I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0.$$

Então, para  $n$  suficientemente grande

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2p} I'_\lambda(u_n) u_n \leq c + 1 + \|u_n\|_\lambda. \quad (2.8)$$

Por outro lado,

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2p} I'_\lambda(u_n) u_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|u_n\|_\lambda^2. \quad (2.9)$$

Além disso, de (2.8) e (2.9)

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|u_n\|_\lambda^2 \leq c + 1 + \|u_n\|_\lambda,$$

de onde segue a limitação de  $\{u_n\}$ . Assim, por (2.9),

$$0 \leq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|u_n\|_\lambda^2 \leq c + o_n(1), \quad (2.10)$$

e o Lema segue passando ao limite com  $n \rightarrow +\infty$ . ■

**Corolário 2.2.2** *Seja  $\{u_n\} \subset E_\lambda$  uma sequência  $(PS)_0$  para  $I_\lambda$ . Então  $u_n \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$ .*

**Demonstração.** Segue dos argumentos usados na demonstração do Lema 2.2.1. ■

No próximo Lema mostraremos uma propriedade para o funcional  $I_\lambda$  que está relacionada ao Lema de Brezis-Lieb para não-linearidades não locais, ver [1, 53].

**Lema 2.2.3** *Sejam  $c \geq 0$  e  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ . Se  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E_\lambda$ , então*

$$I_\lambda(v_n) - I_\lambda(u_n) + I_\lambda(u) = o_n(1) \quad (2.11)$$

$$I'_\lambda(v_n) - I'_\lambda(u_n) + I'_\lambda(u) = o_n(1), \quad (2.12)$$

onde  $v_n = u_n - u$ . Além disso,  $\{v_n\}$  é uma sequência  $(PS)_{c-I_\lambda(u)}$ .

**Demonstração.** Primeiramente, note que

$$I_\lambda(v_n) - I_\lambda(u_n) + I_\lambda(u) = \frac{1}{2} (\|v_n\|_\lambda^2 - \|u_n\|_\lambda^2 + \|u\|_\lambda^2) - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v_n(y)|^p |v_n(x)|^p - |u_n(y)|^p |u_n(x)|^p + |u(y)|^p |u(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) dx.$$

Como  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E_\lambda$ , temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(v_n) - I_\lambda(u_n) + I_\lambda(u) &= o_n(1) + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v_n(y)|^p (-|v_n(x)|^p + |u_n(x)|^p - |u(x)|^p)}{|x-y|^\mu} dy \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_n(y)|^p (-|v_n(x)|^p + |u_n(x)|^p - |u(x)|^p)}{|x-y|^\mu} dy \right) dx \quad (2.13) \\ &\quad + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^p (-|v_n(x)|^p + |u_n(x)|^p - |u(x)|^p)}{|x-y|^\mu} dy \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v_n(y)|^p |u(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v_n(y)|^p (|v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p)}{|x-y|^\mu} dy \right) dx &\leq \\ &C |v_n|_{\frac{6p}{6-\mu}}^p \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx \right)^{\frac{6-\mu}{6}}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx &= \int_{B_R(0)} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx + \quad (2.14) \\ &\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx. \end{aligned}$$

onde,  $R > 0$  será fixado posteriormente. Como  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E_\lambda$ , sabemos que

- $u_n \rightarrow u$ , em  $L^{\frac{6p}{6-\mu}}(B_R(0))$ ;
- $u_n(x) \rightarrow u(x)$ , q.s. em  $\mathbb{R}^3$ ,

e existe  $h_1 \in L^{\frac{6p}{6-\mu}}(B_R(0))$  tal que

$$|u_n(x)| \leq h_1(x) \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^3.$$

Desta forma,

$$|v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \rightarrow 0, \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^3,$$

e

$$\left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} \leq (2^p + 1)^{\frac{6}{6-\mu}} (h_1(x) + |u(x)|)^{\frac{6p}{6-\mu}} \in L^1(B_R(0)).$$

Logo, pelo Teorema de Lebesgue,

$$\int_{B_R(0)} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Além disso, temos também

$$\left| |u_n(x) - u(x)|^p - |u_n(x)|^p \right| \leq p2^{p-1} (|u_n(x)|^{p-1} |u(x)| + |u(x)|^p),$$

então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \left| |u_n(x) - u(x)|^p - |u_n(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx \leq & \quad (2.16) \\ C \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n(x)|^{\frac{6(p-1)}{6-\mu}} |u(x)|^{\frac{6}{6-\mu}} dx + C \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u(x)|^{\frac{6p}{6-\mu}} dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n(x)|^{\frac{6(p-1)}{6-\mu}} |u(x)|^{\frac{6}{6-\mu}} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n(x)|^{\frac{6p}{6-\mu}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u(x)|^{\frac{6p}{6-\mu}} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das imersões de Sobolev e pela limitação de  $\{u_n\}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n(x)|^{\frac{6(p-1)}{6-\mu}} |u(x)|^{\frac{6}{6-\mu}} dx \leq C |u|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0))}^{6/(6-\mu)}.$$

Como para cada  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher  $R > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u(x)|^{\frac{6p}{6-\mu}} dx \leq \varepsilon,$$

concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx \leq \varepsilon,$$

logo,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx = 0. \quad (2.17)$$

De (2.14)-(2.17),

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |v_n(x)|^p - |u_n(x)|^p + |u(x)|^p \right|^{\frac{6}{6-\mu}} dx \rightarrow 0.$$

Para finalizar a demonstração, precisamos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v_n(y)|^p |u(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) dx \rightarrow 0.$$

Uma vez que  $v_n \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$  e  $p \in (2, 6-\mu)$ , a sequência  $\{|v_n|^p\}$  é limitada em  $L^{\frac{6}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3)$ . Como  $v_n(x) \rightarrow 0$  q.s. em  $\mathbb{R}^3$ , garantimos que  $\{|v_n|^p\}$  converge fracamente para 0 em  $L^{\frac{6}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3)$ . Usando mais uma vez a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, sabemos que o funcional linear  $\Phi : L^{\frac{6}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\Phi(w) = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * w \right) |u(x)|^p dx$$

é contínuo. Consequentemente,  $\Phi(|v_n|^p) \rightarrow 0$ , ou equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |v_n(x)|^p \right) |u(x)|^p dx \rightarrow 0,$$

e a demonstração está completa. ■

**Lema 2.2.4** *Seja  $\{u_n\}$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ . Então  $c = 0$ , ou existe  $c_* > 0$ , independente de  $\lambda$ , tal que  $c \geq c_*$ , para todo  $\lambda > 0$ .*

**Demonstração.** Pelo Lema 2.2.1, sabemos que  $c \geq 0$ . Se  $c > 0$ , temos por um lado

$$c + o_n(1) \|u_n\|_\lambda = I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2p} I'_\lambda(u_n) u_n \geq \left( \frac{p-1}{2p} \right) \|u_n\|_\lambda^2,$$

ou equivalentemente,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{2pc}{p-1}. \quad (2.18)$$

Por outro lado, a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev juntamente com as imersões de Sobolev implicam que

$$I'_\lambda(u_n) u_n \geq \frac{1}{2} \|u_n\|_\lambda^2 - K \|u_n\|_\lambda^{2p},$$

onde  $K$  é uma constante positiva. Assim, existe  $\delta > 0$  tal que

$$I'_\lambda(u_n) u_n \geq \frac{1}{4} \|u_n\|_\lambda^2, \text{ para } \|u_n\|_\lambda < \delta. \quad (2.19)$$

Considere  $c_* = \delta^2 \frac{p-1}{2p}$  e  $c < c_*$ . Então segue que

$$\|u_n\|_\lambda \leq \delta \quad (2.20)$$

para  $n$  suficientemente grande. De onde,

$$I'_\lambda(u_n)u_n \geq \frac{1}{4}\|u_n\|_\lambda^2,$$

e conseqüentemente

$$\|u_n\|_\lambda^2 \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow I_\lambda(0) = 0,$$

o que contradiz o fato que  $(u_n)$  é uma seqüência  $(PS)_c$  com  $c > 0$ . Logo,  $c \geq c_*$ . ■

**Lema 2.2.5** *Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ . Então, existe  $\delta_0 > 0$  independente de  $\lambda$ , tal que*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3)}^{2p} \geq \delta_0 c.$$

**Demonstração.** Como  $\{u_n\}$  é uma seqüência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$ ,

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I_\lambda(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2} I'_\lambda(u_n)u_n \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p \right) |u_n|^p dx, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, obtemos

$$c \leq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) K \liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3)}^{2p}.$$

Portanto, a conclusão segue considerando

$$\delta_0 = \left( \frac{p-1}{2p} \right) K^{-1} > 0.$$

■

**Lema 2.2.6** *Seja  $c_1 > 0$  uma constante independente de  $\lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\Lambda = \Lambda(\varepsilon)$  e  $R = R(\varepsilon, c_1)$  tal que, se  $\{u_n\}$  é uma seqüência  $(PS)_c$  para  $I_\lambda$  com  $c \in [0, c_1]$ , então*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(B_R^c(0))}^{2p} \leq \varepsilon, \quad \forall \lambda \geq \Lambda.$$

**Demonstração.**

Para  $R > 0$ , considere

$$A(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 / |x| > R \text{ e } V(x) \geq M_0\}$$

e

$$B(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 / |x| > R \text{ e } V(x) < M_0\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{A(R)} u_n^2 dx &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \int_{\mathbb{R}^3} (\lambda V(x) + 1) u_n^2 dx \\ &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \|u_n\|_\lambda^2 \\ &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right)^{-1} c + o_n(1) \right] \\ &\leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right)^{-1} c_1 + o_n(1) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Desde que  $c_1$  é independente de  $\lambda$ , por (2.21) existe  $\Lambda > 0$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{A(R)} u_n^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \lambda \geq \Lambda. \quad (2.22)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder para  $s \in [1, 3]$  e a imersão contínua  $E_\lambda \hookrightarrow L^{2s}(\mathbb{R}^3)$ , vemos que

$$\int_{B(R)} u_n^2 dx \leq \beta \|u_n\|_\lambda^2 |B(R)|^{\frac{1}{s'}} \leq c_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right)^{-1} |B(R)|^{\frac{1}{s'}} + o_n(1),$$

onde  $\beta$  é uma constante positiva. Agora, pela hipótese  $(V_3)$  do potencial  $V$ , sabemos que

$$|B(R)| \rightarrow 0, \text{ when } R \rightarrow +\infty,$$

então podemos escolher  $R$  suficientemente grande tal que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B(R)} u_n^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.23)$$

De (2.22) e (2.23), obtemos que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx < \varepsilon.$$

Assim como no Lema 1.1.6, usamos a desigualdade de interpolação para mostrar que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n|^{\frac{6p}{6-\mu}} dx < \varepsilon, \quad \lambda > \Lambda,$$

umentando os valores de  $R$  e  $\Lambda$  se necessário. ■

**Proposição 2.2.7** Dado  $c_1 > 0$ , independente de  $\lambda$ , existe  $\Lambda = \Lambda(c_1) > 0$  tal que se  $\lambda \geq \Lambda$ , então  $I_\lambda$  verifica a condição  $(PS)_c$  para todo  $c \in [0, c_1]$ .

**Demonstração.** Seja  $\{u_n\}$  uma sequência  $(PS)_c$ . O Lema 2.2.1 implica que  $\{u_n\}$  é limitada. Passando a uma subsequência se necessário,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{em } E_\lambda; \\ u_n(x) \rightarrow u(x), & \text{q.s. em } \mathbb{R}^3; \\ u_n \rightarrow u, & \text{em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^3), 1 \leq s < 6. \end{cases}$$

Então,  $I'_\lambda(u) = 0$  e  $I_\lambda(u) \geq 0$ . Considerando  $v_n = u_n - u$ , o Lema 2.2.3 garante que  $\{v_n\}$  é uma sequência  $(PS)_d$  com  $d = c - I_\lambda(u)$ . Além disso,

$$0 \leq d = c - I_\lambda(u) \leq c \leq c_1.$$

Afirmamos que  $d = 0$ . Suponha que  $d > 0$ , pelos Lemas 2.2.4 e 2.2.5, sabemos que  $d \geq c_*$  e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3)}^{2p} \geq \delta_0 c_* > 0. \quad (2.24)$$

Aplicando o Lema 2.2.6 com  $\varepsilon = \frac{\delta_0 c_*}{2} > 0$ , existem  $\Lambda, R > 0$  tais que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(B_R^c(0))}^{2p} \leq \frac{\delta_0 c_*}{2}, \text{ para } \lambda \geq \Lambda. \quad (2.25)$$

Combinando (2.24) e (2.25), obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(B_R(0))}^{2p} \geq \frac{\delta_0 c_*}{2} > 0,$$

o que é absurdo, pois como  $v_n \rightharpoonup 0$  em  $E_\lambda$ , a imersão compacta  $E_\lambda \hookrightarrow L^{\frac{6p}{6-\mu}}(B_R(0))$  implica que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(B_R(0))}^{2p} = 0.$$

Logo,  $d = 0$  e  $\{v_n\}$  é uma sequência  $(PS)_0$ . Então, pelo Corolário 2.2.2,  $v_n \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$ . Portanto,  $I_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  para  $c \in [0, c_1]$  se  $\lambda$  é suficientemente grande.

■

## 2.3 A condição $(PS)_{c,\infty}$ para $(C)_\lambda$

Nesta seção apresentamos uma versão da condição  $(PS)_{c,\infty}$  para o problema de Choquard  $(C)_\lambda$ .

**Proposição 2.3.1** *Supondo que  $0 < \mu < 3$ ,  $2 \leq p < 6 - \mu$  e  $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$  é uma sequência  $(PS)_{d,\infty}$  para  $(I_\lambda)_{\lambda \geq 1}$  com  $0 < d \leq c_\Gamma$ . Então, passando a uma subsequência, existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  in  $H^1(\mathbb{R}^3)$ . Além disso,*

(i)  $u_n \rightarrow u$  em  $H^1(\mathbb{R}^3)$ ;

(ii)  $u = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$  é uma solução para

$$-\Delta u + u = \left( \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u \quad \text{em } \Omega;$$

(iii)  $\lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u_n|^2 \rightarrow 0$ ;

(iv)  $\|u_n - u\|_{\lambda,\Omega}^2 \rightarrow 0$ ;

(v)  $\|u_n\|_{\lambda,\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}^2 \rightarrow 0$ ;

(vi)  $I_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^p dx$ .

**Demonstração.** Por hipótese,

$$I_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow d \text{ and } \|I'_{\lambda_n}(u_n)\|_{E'_{\lambda_n}} \rightarrow 0.$$

Então, os mesmos argumentos empregados na demonstração do Lema 2.2.1 mostra que  $(\|u_n\|_{\lambda_n})$  e  $(u_n)$  são limitados em  $\mathbb{R}$  e  $H^1(\mathbb{R}^3)$  respectivamente. Logo, passando a uma subsequência, existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$  tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3) \text{ e } u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.s. para } x \in \mathbb{R}^3.$$

Agora, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , nós definimos  $C_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^3; V(x) \geq \frac{1}{m} \right\}$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\lambda_n < 2(\lambda_n - 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Logo

$$\int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \frac{2m}{\lambda_n} \int_{C_m} (\lambda_n V(x) + 1) |u_n|^2 dx \leq \frac{C}{\lambda_n}.$$

Pelo Lema de Fatou, obtemos que

$$\int_{C_m} |u|^2 dx = 0,$$

o que implica  $u = 0$  em  $C_m$ , assim,  $u = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ . Desta forma, estamos aptos a provar (i) – (vi).

(i) Por um cálculo simples, vemos que

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = I'_{\lambda_n}(u_n)u_n - I'_{\lambda_n}(u_n)u + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p \right) |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) dx + o_n(1),$$

então,

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p \right) |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) dx + o_n(1).$$

Como na demonstração do Lema 2.2.3,

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0,$$

o que significa que  $u_n \rightarrow u$  em  $H^1(\mathbb{R}^3)$ .

(ii) Como  $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$  e  $u = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ , temos  $u \in H_0^1(\Omega)$  e  $u|_{\Omega_j} \in H_0^1(\Omega_j)$ , para  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Além disso, levando em consideração  $u_n \rightarrow u$  em  $H^1(\mathbb{R}^3)$  e  $I'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \rightarrow 0$  para  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , obtemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx - \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u \varphi dx = 0, \quad (2.26)$$

mostrando que  $u|_{\Omega}$  é uma solução para o problema não-local

$$-\Delta u + u = \left( \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u \quad \text{em } \Omega.$$

(iii) Tendo (i) em mente,

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} V(x) |u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \lambda_n V(x) |u_n - u|^2 dx \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2.$$

Então

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} V(x) |u_n|^2 dx \rightarrow 0.$$

(iv) Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,

$$\|u_n - u\|_{2, \Omega_j}^2, \|\nabla u_n - \nabla u\|_{2, \Omega_j}^2 \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Em vista de (iii), sabemos

$$\int_{\Omega} \lambda_n V(x) |u_n|^2 dx \rightarrow 0,$$

implicando em

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \Omega}^2 \rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx.$$

(v) Combinando (i) e  $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ , obtemos

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega}^2 \rightarrow 0.$$

(vi) Podemos escrever o funcional  $I_{\lambda_n}$  da seguinte forma

$$I_{\lambda_n}(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n V(x) + 1)|u_n|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n V(x) + 1)|u_n|^2) dx \\ - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p \right) |u_n|^p dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p \right) |u_n|^p dx.$$

**Afirmação 2.3.2** Usando (i) – (v), obtemos

- (a)  $\int_{\Omega} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p \right) |u_n|^p dx \rightarrow \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^p dx;$
- (b)  $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \left( \frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p \right) |u_n|^p dx \rightarrow 0;$
- (c)  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n V(x) + 1)|u_n|^2) dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx;$
- (d)  $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n V(x) + 1)|u_n|^2) dx \rightarrow 0,$

De fato, para mostrarmos o item (a) consideremos

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Então,

$$\left| \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_n(y)|^p |u_n(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy dx - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(y)|^p |u(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy dx \right| \leq \\ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| |u_n(y)|^p - |u(y)|^p \right| |\widetilde{u}_n(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^p \left| |\widetilde{u}_n(x)|^p - |u(x)|^p \right|}{|x-y|^\mu} dy dx$$

Por Hardy-Littlewood-Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| |u_n(y)|^p - |u(y)|^p \right| |\widetilde{u}_n(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| |u_n(x)|^p - |u(x)|^p \right|^{6/(6-\mu)} dx \right)^{(6-\mu)/6} \|\widetilde{u}_n\|_{L^{\frac{6p}{6-\mu}}(\mathbb{R}^3)}^p.$$

Segue por (i) e das imersões de Sobolev que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| |u_n(y)|^p - |u(y)|^p \right| |\widetilde{u}_n(x)|^p}{|x-y|^\mu} dy dx \rightarrow 0.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^p \left| |\widetilde{u}_n(x)|^p - |u(x)|^p \right|}{|x-y|^\mu} dy dx \rightarrow 0.$$

Mostrando (a). Para provar (b) consideramos

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ 0, & \text{se } x \in \Omega, \end{cases}$$

e procedemos da mesma forma que no item (a). Os itens (c) e (d) seguem imediatamente de (iii) – (v).

Portanto, podemos concluir que

$$I_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^p dx.$$

■

## 2.4 Outras proposições para $c_{\Gamma}$

No que segue, sem perda de generalidade, we consideramos  $\Gamma = \{1, \dots, l\}$ , com  $l \leq k$ . Além disso, denotamos por  $\Omega'_{\Gamma} = \cup_{j \in \Gamma} \Omega'_j$ , onde  $\Omega'_j$  é uma vizinhança aberta  $\Omega_j$  com  $\Omega'_j \cap \Omega'_i = \emptyset$  se  $j \neq i$ . Usando esta notação, introduzimos o funcional

$$I_{\lambda, \Gamma}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'_{\Gamma}} (|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + 1)|u|^2) dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega'_{\Gamma}} \left( \int_{\Omega'_{\Gamma}} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^p dx,$$

que é o funcional energia associado a equação de Choquard com condição de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = \left( \int_{\Omega'_{\Gamma}} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega'_{\Gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial \Omega'_{\Gamma}. \end{cases} \quad (CN_{\lambda})$$

No que segue, denotamos por  $c_{\Gamma}$  o número dado por

$$c_{\Gamma} = \inf_{u \in \mathcal{M}_{\Gamma}} I_{\Gamma}(u)$$

onde

$$\mathcal{M}_{\Gamma} = \{u \in \mathcal{N}_{\Gamma} : I'_{\Gamma}(u)u_j = 0 \text{ e } u_j \neq 0, \forall j \in \Gamma\}$$

com  $u_j = u|_{\Omega_j}$  e

$$\mathcal{N}_{\Gamma} = \{u \in H^1(\Omega_{\Gamma}) \setminus \{0\} : I'_{\Gamma}(u)u = 0\}.$$

Analogamente, denotamos por  $c_{\lambda, \Gamma}$  o número dado

$$c_{\lambda, \Gamma} = \inf_{u \in \mathcal{M}'_{\Gamma}} I_{\lambda, \Gamma}(u)$$

onde

$$\mathcal{M}'_{\Gamma} = \{u \in \mathcal{N}'_{\Gamma} : I'_{\lambda, \Gamma}(u)u_j = 0 \text{ e } u_j \neq 0, \forall j \in \Gamma\}$$

com  $u_j = u|_{\Omega'_j}$  e

$$\mathcal{N}'_{\Gamma} = \{u \in H^1(\Omega'_{\Gamma}) \setminus \{0\} : I'_{\lambda, \Gamma}(u)u = 0\}.$$

Repetindo os mesmos argumentos da Seção 2, sabemos que existem  $w_{\Gamma} \in H_0^1(\Omega_{\Gamma})$  e  $w_{\lambda, \Gamma} \in H^1(\Omega'_{\Gamma})$  tais que

$$I_{\Gamma}(w_{\Gamma}) = c_{\Gamma} \text{ and } I'_{\Gamma}(w_{\Gamma}) = 0$$

e

$$I_{\lambda, \Gamma}(w_{\lambda, \Gamma}) = c_{\lambda, \Gamma} \text{ e } I'_{\lambda, \Gamma}(w_{\lambda, \Gamma}) = 0.$$

A seguinte proposição descreve uma importante relação entre  $c_{\Gamma}$  e  $c_{\lambda, \Gamma}$ .

**Lema 2.4.1** (i)  $0 < c_{\lambda, \Gamma} \leq c_{\Gamma}, \forall \lambda \geq 0$ ;

(ii)  $c_{\lambda, \Gamma} \rightarrow c_{\Gamma}$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Demonstração.** (i) Como  $H_0^1(\Omega_{\Gamma}) \subset H^1(\Omega'_{\Gamma})$ , é fácil ver que

$$0 < c_{\lambda, \Gamma} \leq c_{\Gamma}.$$

(ii) Consideremos a sequência  $\lambda_n \rightarrow \infty$ . Dos comentários acima, para cada  $\lambda_n$  existe  $w_n \in H^1(\Omega')$  com

$$I_{\lambda_n, \Gamma}(w_n) = c_{\lambda_n, \Gamma} \text{ e } I'_{\lambda_n, \Gamma}(w_n) = 0.$$

Como  $(c_{\lambda_n, \Gamma})$  é limitada, existe  $(w_{n_i})$ , subsequência de  $(w_n)$ , tal que  $(I_{\lambda_{n_i}, \Gamma}(w_{n_i}))$  converge e  $I'_{\lambda_{n_i}, \Gamma}(w_{n_i}) = 0$ . Repetindo as mesmas ideias exploradas na demonstração da Proposição 2.3.1, sabemos que existe  $w \in H_0^1(\Omega_{\Gamma}) \setminus \{0\} \subset H^1(\Omega'_{\Gamma})$  tal que

$$w_j = w|_{\Omega_j} \neq 0, \quad j \in \Gamma$$

e

$$w_{n_i} \rightarrow w \text{ em } H^1(\Omega'_{\Gamma}), \text{ quando } n_i \rightarrow \infty.$$

Além disso, temos também

$$c_{\lambda_{n_i}, \Gamma} = I_{\lambda_{n_i}, \Gamma}(w_{n_i}) \rightarrow I_{\Gamma}(w)$$

e

$$0 = I'_{\lambda_{n_i}, \Omega'}(w_{n_i}) \rightarrow I'_\Gamma(w).$$

Pela definição de  $c_\Gamma$ ,

$$\lim_i c_{\lambda_{n_i}, \Gamma} \geq c_\Gamma.$$

Então, combinando o último limite com a conclusão (i), podemos garantir que

$$c_{\lambda_{n_i}, \Gamma} \rightarrow c_\Gamma, \text{ quando } n_i \rightarrow \infty.$$

Isto estabelece o resultado enunciado. ■

Na sequência, denotaremos por  $w \in H_0^1(\Omega_\Gamma)$  a solução de energia mínima obtida na Seção 2, isto é,

$$w \in \mathcal{M}_\Gamma, \quad I_\Gamma(w) = c_\Gamma \quad \text{e} \quad I'_\Gamma(w) = 0. \quad (2.27)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $t_j = s_j^{\frac{1}{p}}$ , é óbvio que

$$\begin{aligned} I_\Gamma(t_1 w_1 + \cdots + t_l w_l) &= \sum_{j=1}^l \frac{t_j^2}{2} \|w_j\|_j^2 - \frac{1}{2p} \int_{\Omega_\Gamma} \left( \int_{\Omega_\Gamma} \frac{|\sum_{j=1}^l t_j w_j|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) \left| \sum_{j=1}^l t_j w_j \right|^p dx \\ &= \sum_{j=1}^l \frac{s_j^{\frac{2}{p}}}{2} \|w_j\|_j^2 - \frac{1}{2p} \int_{\Omega_\Gamma} \left( \int_{\Omega_\Gamma} \frac{\sum_{j=1}^l s_j |w_j|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) \left( \sum_{j=1}^l s_j |w_j|^p \right) dx. \end{aligned}$$

Argumentando mais uma vez como em [42],

$$\int_{\Omega_\Gamma} \left( \int_{\Omega_\Gamma} \frac{\sum_{j=1}^l s_j |w_j|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) \left( \sum_{j=1}^l s_j |w_j|^p \right) dx = \int_{\Omega_\Gamma} \left[ \frac{1}{|x|^{\mu/2}} * \left( \sum_{j=1}^l s_j |w_j|^p \right) \right]^2 dx.$$

Como  $s \mapsto s^{2/p}$  é concavo e  $s \mapsto s^2$  é estritamente convexo, concluímos que a função

$$G(s_1, s_2, \dots, s_l) = I_\Gamma(s_1^{\frac{2}{p}} w_1 + \cdots + s_l^{\frac{2}{p}} w_l)$$

é estritamente concava com  $\nabla G(1, \dots, 1) = 0$ . Logo,  $(1, \dots, 1)$  é o único ponto de máximo global de  $G$  sobre  $[0, +\infty)^l$  com  $G(1, \dots, 1) = c_\Gamma$ .

Assumindo  $p > 2$ , temos

$$\begin{aligned} I'_\Gamma \left( \sum_{j=1}^l t_j w_j \right) (t_i w_i) &= t_i^2 \|w_i\|_i^2 - t_i^{2p} \int_{\Omega_i} \left( \int_{\Omega_i} \frac{|w_i|^p}{|x-y|} dy \right) |w_i|^p dx \\ &\quad - \sum_{j=1, j \neq i}^l t_i^p t_j^p \int_{\Omega_j} \left( \int_{\Omega_i} \frac{|w_i|^p}{|x-y|} dy \right) |w_j|^p dx \end{aligned}$$

e conseqüentemente existem  $r > 0$  suficientemente pequeno e  $R > 0$  suficientemente grande tais que

$$I'_\Gamma\left(\sum_{j=1, j \neq i}^l t_j w_j(x) + R w_i\right)(R w_i) < 0, \quad \text{para } i \in \Gamma, \forall t_j \in [r, R] \text{ e } j \neq i, \quad (2.28)$$

$$I'_\Gamma\left(\sum_{j=1, j \neq i}^l t_j w_j(x) + r w_i\right)(r w_i) > 0, \quad \text{para } i \in \Gamma, \forall t_j \in [r, R] \text{ e } j \neq i. \quad (2.29)$$

e

$$I_\Gamma\left(\sum_{j=1}^l t_j w_j(x)\right) < c_\Gamma, \quad \forall (t_1, \dots, t_l) \in \partial[r, R]^l, \quad (2.30)$$

onde  $w_j := w|_{\Omega_j}$ ,  $j \in \Gamma$ . Usando estas informações, podemos definir

$$\gamma_0(t_1, \dots, t_l)(x) = \sum_{j=1}^l t_j w_j(x) \in H_0^1(\Omega_\Gamma), \quad \forall (t_1, \dots, t_l) \in [r, R]^l,$$

e denote por  $\Gamma_*$  a classe de funções contínuas  $\gamma \in C([r, R]^l, E_\lambda \setminus \{0\})$  que satisfaz as seguintes condições:

$$(a) \quad \gamma = \gamma_0 \text{ sobre } \partial[r, R]^l,$$

e

$$(b) \quad \Phi_\Gamma(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Gamma} (|\nabla \gamma|^2 + (\lambda a(x) + 1)|\gamma|^2) dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Gamma} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * |\gamma|^p\right) |\gamma|^p dx \geq 0,$$

onde  $R > 1 > r > 0$  são constantes positivas obtidas em (2.28) e (2.29). Como  $\gamma_0 \in \Gamma_*$ , sabemos que  $\Gamma_* \neq \emptyset$ . Por (a) para uma função  $\gamma$  e (2.30), temos

$$I_\lambda(\gamma(t_1, \dots, t_l)) < c_\Gamma, \quad \forall (t_1, \dots, t_l) \in \partial[r, R]^l, \forall \gamma \in \Gamma_*. \quad (2.31)$$

O próximo lema será usado para descrever a propriedade de interseção das funções de  $\Gamma_*$  e o conjunto  $\mathcal{M}_\Gamma$  na seção final.

**Lema 2.4.2** *Para todo  $\gamma \in \Gamma_*$ , existe  $(t_1, \dots, t_l) \in (r, R)^l$  tal que*

$$I'_{\lambda, \Gamma}(\gamma(t_1, \dots, t_l)) \gamma_j(t_1, \dots, t_l) = 0,$$

onde  $\gamma_j(t_1, \dots, t_l) = \gamma(t_1, \dots, t_l)|_{\Omega'_j}$ ,  $j \in \Gamma$ .

**Demonstração.** Desde que  $p > 2$  e  $\gamma = \gamma_0$  sobre  $\partial[r, R]^l$ , usando (2.28) e (2.29), vemos que o resultado segue pelo Teorema de Miranda [51]. ■

## 2.5 Demonstração do Teorema 0.0.3

Nesta seção, vamos encontrar uma família de soluções não negativas  $u_\lambda$  para valores grandes de  $\lambda$ , que convergem para uma solução de energia mínima de  $(C)_{\infty, \Gamma}$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ . Para este fim, provaremos duas proposições que, juntamente com a Proposição 2.3.1, nos ajudará a provar o Teorema 0.0.3.

Daqui em diante, denotamos por

$$\Theta = \left\{ u \in E_\lambda : \|u\|_{\lambda, \Omega_j^r} > \frac{r\tau}{2} \quad j = 1, \dots, l \right\},$$

onde  $r$  foi fixado em (2.28) e  $\tau$  é uma constante positiva tal que

$$\|u_j\|_j > \tau, \quad \forall u \in \Upsilon_\Gamma = \{u \in \mathcal{M}_\Gamma : I_\Gamma(u) = c_\Gamma\} \quad \text{and} \quad \forall j \in \Gamma.$$

Além disso,  $I_\lambda^{c_\Gamma}$  denota o conjunto

$$I_\lambda^{c_\Gamma} = \{u \in E_\lambda ; I_\lambda(u) \leq c_\Gamma\}.$$

Fixando  $\delta = \frac{r\tau}{8}$ , para  $\xi > 0$  suficientemente pequeno, definimos

$$\mathcal{A}_\xi^\lambda = \left\{ u \in \Theta_{2\delta} : \Phi_\Gamma(u) \geq 0, \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Gamma^r} \leq \xi \quad \text{e} \quad |I_\lambda(u) - c_\Gamma| \leq \xi \right\}. \quad (2.32)$$

Observe que

$$w \in \mathcal{A}_\xi^\lambda \cap I_\lambda^{c_\Gamma},$$

mostrando que  $\mathcal{A}_\xi^\lambda \cap I_\lambda^{c_\Gamma} \neq \emptyset$ . Temos a seguinte estimativa uniforme de  $\|I'_\lambda(u)\|_{E_\lambda^*}$  sobre a região  $(\mathcal{A}_{2\xi}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\xi^\lambda) \cap I_\lambda^{c_\Gamma}$ .

**Proposição 2.5.1** *Para cada  $\xi > 0$ , existem  $\Lambda_* \geq 1$  e  $\sigma_0 > 0$  independente de  $\lambda$  tal que*

$$\|I'_\lambda(u)\|_{E_\lambda^*} \geq \sigma_0, \quad \text{para } \lambda \geq \Lambda_* \text{ e todo } u \in (\mathcal{A}_{2\xi}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\xi^\lambda) \cap I_\lambda^{c_\Gamma}. \quad (2.33)$$

**Demonstração.** Nós assumimos que existem  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $u_n \in (\mathcal{A}_{2\xi}^{\lambda_n} \setminus \mathcal{A}_\xi^{\lambda_n}) \cap I_{\lambda_n}^{c_\Gamma}$  tal que

$$\|I'_{\lambda_n}(u_n)\|_{E_{\lambda_n}^*} \rightarrow 0.$$

Desde que  $u_n \in \mathcal{A}_{2\xi}^{\lambda_n}$ , sabemos que  $\{\|u_n\|_{\lambda_n}\}$  e  $\{I_{\lambda_n}(u_n)\}$  são ambas limitadas. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que  $\{I_{\lambda_n}(u_n)\}$  converge. Assim, da Proposição 2.3.1, existe  $u \in H_0^1(\Omega_\Gamma)$  tal que  $u$  é uma solução para

$$-\Delta u + u = \left( \int_{\Omega_\Gamma} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy \right) |u|^{p-2} u \quad \text{in } \Omega_\Gamma$$

com

$$u_n \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}^3), \|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \rightarrow 0 \text{ e } I_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow I_\Gamma(u).$$

Como  $(u_n) \subset \Theta_{2\delta}$ , resulta que

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \Omega_j} > \frac{r\tau}{4}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , obtemos a desigualdade

$$\|u\|_j \geq \frac{r\tau}{4} > 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

que implica  $u|_{\Omega_j} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, l$  e  $I'_\Gamma(u) = 0$ . Consequentemente,  $I_\Gamma(u) \geq c_\Gamma$ .  
 Todavia, do fato que  $I_{\lambda_n}(u_n) \leq c_\Gamma$  e  $I_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow I_\Gamma(u)$ , temos  $I_\Gamma(u) = c_\Gamma$ , então,  $u \in \Upsilon_\Gamma$ .

Logo, para  $n$  suficientemente grande

$$\|u_n\|_j > \frac{r\tau}{2} \quad \text{e} \quad |I_{\lambda_n}(u_n) - c_\Gamma| \leq \xi, \quad j = 1, \dots, l.$$

Desta forma  $u_n \in \mathcal{A}_\xi^{\lambda_n}$ , o que é uma contradição, finalizando a demonstração. ■

No que segue,  $\xi_1, \xi^*$  serão definidos como

$$\xi_1 = \min_{(t_1, \dots, t_l) \in \partial[r, R]^l} |I_\Gamma(\gamma_0(t_1, \dots, t_l)) - c_\Gamma| > 0$$

e

$$\xi^* = \min\{\xi_1/2, \delta, \rho/2\},$$

onde

$$\rho = 4R^2 c_\Gamma,$$

e  $R, \delta$  são dados em (2.28) e (2.32), respectivamente. Além, para cada  $s > 0$ ,  $B_s^\lambda$  denota o conjunto

$$B_s^\lambda = \{u \in E_\lambda; \|u\|_\lambda^2 \leq s\} \text{ para } s > 0.$$

**Proposição 2.5.2** *Dados  $0 < \mu < 3$  e  $2 < p < 6 - \mu$ . Sejam  $\xi \in (0, \xi^*)$  e  $\Lambda_* \geq 1$  dados na proposição anterior. Então, para  $\lambda \geq \Lambda_*$ , existe uma solução  $u_\lambda$  de  $(C)_\lambda$  tal que  $u_\lambda \in \mathcal{A}_\xi^\lambda \cap I_\lambda^{c_\Gamma} \cap B_{2\rho+1}^\lambda$ .*

**Demonstração.** A demonstração desta proposição segue da mesma forma da Proposição 1.4.2. ■

**[Demonstração do Teorema 0.0.3: Conclusão]** Da última Proposição, existe  $(u_{\lambda_n})$  com  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  satisfazendo:

$$(a) \quad I'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(b) \quad I_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \rightarrow c_\Gamma.$$

$$(c) \quad \|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Gamma} \rightarrow 0.$$

Portanto, da Proposição 2.3.1, obtemos que  $(u_{\lambda_n})$  converge em  $H^1(\mathbb{R}^3)$  para uma função  $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ , a qual satisfaz  $u = 0$  fora de  $\Omega$  e  $u|_{\Omega_j} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Agora, afirmamos que  $u = 0$  em  $\Omega_j$ , para todo  $j \notin \Gamma$ . Com efeito, é possível mostrar que existe  $\sigma_1 > 0$ , o qual é independente de  $j$ , tal que se  $v$  é uma solução não trivial de  $(C)_{\infty, \Gamma}$ , então

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega_\Gamma)} \geq \sigma_1.$$

Todavia, a solução  $u$  verifica

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma)} = 0,$$

mostrando que  $u = 0$  em  $\Omega_j$ , para todo  $j \notin \Gamma$ . Isto finaliza a demonstração do Teorema 0.0.3.

## Capítulo 3

# Solução nodal de energia mínima para um problema com o operador biharmônico

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução nodal de energia mínima para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = Bu = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (N)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) é um domínio limitado com fronteira suave,  $\Delta^2$  é o operador biharmônico,  $f$  é uma função satisfazendo  $(f_1), (f_4)$  e  $(f_5) - (f_7)$ .

Em relação as condições de contorno consideraremos  $Bu = \Delta u$  ou  $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ . Se  $Bu = \Delta u$ , temos a *condição de Navier*

$$u = \Delta u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega,$$

e para o caso  $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ , temos a *condição de Dirichlet*

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

No que segue, diremos que uma solução  $u$  de  $(N)$  é uma *solução nodal*, quando  $u^\pm \neq 0$ , onde  $u^+ = \max\{u, 0\}$  e  $u^- = \min\{u, 0\}$ .

Recordamos que o funcional energia  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  associado com  $(P)$  é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

onde  $H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  no caso da condição de Navier, e  $H = H_0^2(\Omega)$  para a condição de Dirichlet. Além disso, é bem conhecido que para estas condições de contorno,  $H$  é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx,$$

cuja a norma associada é

$$\|u\|_H = \left( \int_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por um argumento padrão mostra-se que pontos críticos de  $I$  são precisamente as soluções fracas de  $(P)$ . No que segue, diremos que  $u \in H$  é uma *solução nodal de energia mínima* se

$$I(u) = \min\{I(v) : v \text{ é uma solução nodal para } (P)\}.$$

### 3.1 O método dual

Nesta seção, definiremos e provaremos algumas propriedades do funcional dual associado a  $(N)$ . Usando um resultado do tipo Agmon-Dolglis-Nirenberg (ver [40]), para cada  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , existe uma única solução  $u \in W^{4, \frac{p}{p-1}}(\Omega)$  do problema linear

$$\begin{cases} \Delta^2 u = w, & \text{em } \Omega, \\ u = Bu = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_w)$$

Além disso, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_{W^{4, \frac{p}{p-1}}(\Omega)} \leq C \|w\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}.$$

Dos comentários acima, podemos considerar o operador linear  $T : L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \rightarrow W^{4, \frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , tal que para  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ ,  $Tw$  é a única solução de  $(P_w)$ . Pela última desigualdade,

$$\|Tw\|_{W^{4, \frac{p}{p-1}}(\Omega)} \leq C \|w\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}, \quad \forall w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

mostrando que  $T$  é contínua. Agora, recordando que as imersões abaixo

$$W^{4, \frac{p}{p-1}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad \forall s \in \left[ \frac{p}{p-1}, 4(p)_* \right)$$

são compactas para

$$4(p)_* = \begin{cases} \frac{Np}{p(N-4) - N}, & N \geq 5, \\ +\infty, & 1 \leq N \leq 4, \end{cases}$$

podemos garantir que  $T : L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  é um operador linear compacto, pois  $p \in \left(\frac{p}{p-1}, 4(p)_*\right)$ . Além disso,  $T$  satisfaz as seguintes propriedades:

(T<sub>1</sub>)  $T$  é *positivo*, isto é, para qualquer  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} wTw \, dx \geq 0$ . Além disso, se  $w$  é não negativa e  $w \neq 0$ ,  $Tw > 0$  em  $\Omega$ .

(T<sub>2</sub>)  $T$  é *simétrico*, no sentido que, se  $w_1, w_2 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , então

$$\int_{\Omega} w_1Tw_2 \, dx = \int_{\Omega} w_2Tw_1 \, dx.$$

Usando o funcional  $T$ , definimos  $\Psi : L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Psi(w) = \int_{\Omega} H(w) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} wTw \, dx,$$

onde  $H(t) = \int_0^t h(s) \, ds$  e  $h$  é a inversa de  $f$ . Note que  $f$  é invertível, pois (f<sub>1</sub>) – (f<sub>5</sub>) implicam que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é bijetiva. O funcional  $\Psi$  é chamado de *funcional dual* associado a (P).

No que segue, para qualquer  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , denotaremos por  $\|w\|$  a norma  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , isto é,

$$\|w\| = \left( \int_{\Omega} |w|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Agora, mostraremos algumas propriedades de  $h$ . Estas propriedades serão essenciais para o estudo do comportamento do funcional  $\Psi$ .

(h<sub>0</sub>)  $h$  é contínua,  $h(0) = 0$  e  $h(t) = -h(-t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

(h<sub>1</sub>)  $h$  verifica as seguintes condições de crescimento: Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta, M > 0$  tais que

$$\left( \frac{1}{c_0(1+\varepsilon)} t \right)^{1/(p-1)} \leq h(t) \leq \left( \frac{1}{c_0(1-\varepsilon)} t \right)^{1/(p-1)}, \quad \forall t \geq f(M), \quad (3.1)$$

e

$$\left( \frac{1}{b_0(1+\varepsilon)} t \right)^{1/(q-1)} \leq h(t) \leq \left( \frac{1}{b_0(1-\varepsilon)} t \right)^{1/(q-1)}, \quad \forall t \leq f(\delta). \quad (3.2)$$

De fato, de  $(f_3) - (f_4)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta, M > 0$  tais que

$$(1 - \varepsilon)c_0t^{p-1} \leq f(t) \leq (1 + \varepsilon)c_0t^{p-1}, \quad \forall t \geq M, \quad (3.3)$$

e

$$(1 - \varepsilon)b_0t^{q-1} \leq f(t) \leq (1 + \varepsilon)b_0t^{q-1}, \quad \forall t \leq \delta. \quad (3.4)$$

Agora, (3.1) – (3.2) segue de (3.3) – (3.4).

**(h<sub>2</sub>)** As funções  $H$  e  $h$  satisfazem as seguintes desigualdades

$$H(t) - \frac{1}{2}h(t)t \geq C_\varepsilon t^{p/(p-1)}, \quad \forall t \geq f(M). \quad (3.5)$$

Com efeito, para  $t \geq f(M)$ ,

$$H(t) \geq \left(\frac{p-1}{p}\right) \left(\frac{1}{c_0(1+\varepsilon)}\right)^{1/(p-1)} t^{p/(p-1)} + K$$

onde  $K$  é uma constante, a qual pode ser negativa. Uma vez que,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{H(t)}{t^{p/(p-1)}} \geq \left(\frac{p-1}{p}\right) \left(\frac{1}{c_0(1+\varepsilon)}\right)^{1/(p-1)},$$

obtemos

$$H(t) \geq \left[ \left(\frac{p-1}{p}\right) \left(\frac{1}{c_0(1+\varepsilon)}\right)^{1/(p-1)} - \varepsilon \right] t^{p/(p-1)}$$

para  $t$  suficientemente grande. Portanto, por (3.1),

$$H(t) - \frac{1}{2}h(t)t \geq C_\varepsilon t^{p/(p-1)}, \quad (3.6)$$

para  $t$  suficientemente grande e

$$C_\varepsilon = \left[ \frac{(p-1)}{p} \left(\frac{1}{c_0(1+\varepsilon)}\right)^{1/(p-1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_0(1-\varepsilon)}\right)^{1/(p-1)} - \varepsilon \right].$$

Como  $C_\varepsilon > 0$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a estimativa está provada.

**(h<sub>3</sub>)** Existem constantes positivas  $c_1, c_2$  e  $\delta'$  satisfazendo

$$H(t) \leq c_1 t^{\frac{p}{p-1}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.7)$$

e

$$H(t) \geq \begin{cases} c_2 t^{q/(q-1)}, & \text{para } t \in [0, \delta'), \\ c_2 t^{p/(p-1)}, & \text{para } t \geq \delta'. \end{cases} \quad (3.8)$$

A demonstração de **(h<sub>3</sub>)** segue o mesmo tipo de argumento explorado na demonstração de **(h<sub>2</sub>)**.

**(h<sub>4</sub>)** A função  $H(t) - \frac{1}{2}h(t)t$  é crescente para  $t > 0$ .

Está propriedade é uma consequência imediata do fato que  $h \in C^1(\mathbb{R})$  e  $\frac{h(t)}{t}$  é decrescente para  $t > 0$ .

Usando **(h<sub>0</sub>)**-**(h<sub>3</sub>)**, pode-se verificar que  $\Psi$  é  $C^1(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega), \mathbb{R})$  com

$$\Psi'(w)\eta = \int_{\Omega} h(w)\eta dx - \int_{\Omega} \eta Tw dx, \quad \forall w, \eta \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Além disso, se  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  é um ponto crítico de  $\Psi$ , então ele gera uma solução para  $(P)$ . Com efeito, para qualquer  $\eta \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , sabemos que  $\Psi'(w)\eta = 0$ , ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} (h(w) - Tw)\eta dx = 0, \quad \forall \eta \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

implicando que

$$Tw = h(w).$$

Portanto, fazendo  $u = Tw$ , temos

$$\Delta^2 u = \Delta^2 Tw = w = f(h(w)) = f(Tw) = f(u).$$

Além disso,  $u$  também verifica as condições de contorno  $Bu = 0$ . Logo,  $u$  é uma solução não trivial de  $(P)$ . Aqui, é importante observar que  $u$  é uma solução nodal se, e somente se,  $w$  é um ponto crítico noda, isto é,  $w^{\pm} \neq 0$ .

No próximo Lema mostraremos que  $\Psi$  satisfaz a geometria do passo da montanha.

**Lema 3.1.1**

- i) Existem  $\rho, \beta > 0$  tais que  $\Psi(w) \geq \beta$ , para  $\|w\| = \rho$ .*
- ii) Existe  $e \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , com  $\|e\| > \rho$  e  $\Psi(e) < 0$ .*

**Demonstração.** Para cada  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} H(w) dx \geq c_1 \int_{[|w(x)| \leq \delta']} |w(x)|^{q/(q-1)} dx + c_2 \int_{[|w(x)| > \delta']} |w(x)|^{p/(p-1)} dx.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\{|w(x)| \leq \delta'\}} |w(x)|^{p/(p-1)} dx \leq c \left( \int_{\{|w(x)| \leq \delta'\}} |w(x)|^{q/(q-1)} dx \right)^{p(q-1)/(p-1)q}$$

desde que  $q \in (2, p]$ , se  $\|w\|$  é suficientemente pequeno, vemos que

$$\int_{\{|w(x)| > \delta'\}} |w(x)|^{p/(p-1)} dx \geq \left( \int_{\{|w(x)| > \delta'\}} |w(x)|^{p/(p-1)} dx \right)^{q(p-1)/p(q-1)}.$$

Combinando as duas últimas desigualdades, temos

$$\begin{aligned} \Psi(w) &\geq \tilde{c}_1 \left( \int_{\{|w(x)| \leq \delta'\}} |w(x)|^{p/(p-1)} dx \right)^{q(p-1)/p(q-1)} + \\ &\quad + c_2 \left( \int_{\{|w(x)| > \delta'\}} |w(x)|^{p/(p-1)} dx \right)^{q(p-1)/p(q-1)} - c_3 \|w\|^2. \end{aligned}$$

Desde que dado  $\alpha > 0$  existe  $C > 0$  tal que

$$A^\alpha + B^\alpha \geq C(A + B)^\alpha, \quad \forall A, B > 0,$$

temos

$$\Psi(w) \geq C \|w\|^{q/(q-1)} - c_3 \|w\|^2, \quad \forall w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Como  $q > 2$ , fixando  $\rho$  suficientemente pequeno, encontramos  $\beta > 0$  verificando

$$\Psi(w) \geq \beta, \quad \text{for } \|w\| = \rho,$$

mostrando *i*). Para mostrar *ii*), é suficiente ver que para cada  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \setminus \{0\}$  e  $t > 0$ ,

$$\Psi(tw) \rightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Aqui, usamos as propriedades **(h<sub>3</sub>)** e **(T<sub>1</sub>)**. ■

O próximo lema será importante para conseguirmos demonstrar que  $\Psi$  verifica a condição *(PS)*.

**Lema 3.1.2** *Seja  $\{w_n\}$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $\Psi$ . Então,  $\{w_n\}$  é limitada em  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Como  $\{w_n\} \subset L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  é uma sequência  $(PS)_c$  para  $\Psi$ , devemos ter

$$\Psi(w_n) \rightarrow c \text{ e } \Psi'(w_n) \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\Psi(w_n) - \frac{1}{2}\Psi'(w_n)w_n \leq c + 1 + \|w_n\| \quad (3.9)$$

para  $n$  suficientemente grande. Por outro lado, de (3.5),

$$\begin{aligned} \Psi(w_n) - \frac{1}{2}\Psi'(w_n)w_n &= \int_{\Omega} \left( H(w_n) - \frac{1}{2}h(w_n)w_n \right) dx \\ &\geq \tilde{C}_\epsilon \int_{\Omega} |w_n|^{\frac{p}{p-1}} dx - \tilde{C} |\Omega|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.9) e (3.10),

$$\tilde{C}_\epsilon \|w_n\|^{\frac{p}{p-1}} - \tilde{C} |\Omega| \leq c + 1 + \|w_n\|,$$

para  $n$  suficientemente grande. Como  $p > 2$ , a última desigualdade implica que  $\{w_n\}$  é limitada em  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ . ■

Agora estamos aptos a mostrar que  $\Psi$  verifica a condição (PS).

**Lema 3.1.3** *O funcional  $\Psi$  satisfaz a condição (PS).*

**Demonstração.** Seja  $\{w_n\}$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $\Psi$ . Então,

$$\Psi(w_n) \rightarrow c \text{ e } \Psi'(w_n) \rightarrow 0.$$

Conseqüentemente,

$$\sup_{\|\eta\| \leq 1} |\Psi'(w_n)\eta| \rightarrow 0,$$

ou equivalentemente,

$$\sup_{\|\eta\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (h(w_n) - Tw_n)\eta dx \right| \rightarrow 0.$$

Aplicando o Teorema de Riez, podemos garantir que

$$|h(w_n) - Tw_n|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Por outro lado, do Lema 3.1.2,  $\{w_n\}$  é limitada em  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ . Como  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  é reflexivo, para alguma subsequencia de  $\{w_n\}$ , ainda denotada por ela mesma, existe  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  tal que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Da compacidade de  $T$  segue que  $Tw_n \rightarrow Tw$  em  $L^p(\Omega)$ , então

$$|h(w_n) - Tw|_{L^p(\Omega)} \leq |h(w_n) - Tw_n|_{L^p(\Omega)} + |Tw_n - Tw|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0,$$

implicando que para alguma subsequência, existe  $g \in L^p(\Omega)$  tal que

$$|h(w_n)(x)| \leq g(x) \quad \text{q.s. em } \Omega \quad (3.11)$$

e

$$h(w_n(x)) \rightarrow u(x) \quad \text{q.s. em } \Omega. \quad (3.12)$$

Recordando que  $h$  é a inversa de  $f$ , segue que

$$w_n(x) \rightarrow f(u(x)) := w(x) \quad \text{q.s. em } \Omega. \quad (3.13)$$

Combinando (3.1) e (3.2), existem constantes positivas  $M_1, M_2$  e  $\delta''$  tais que

$$|h(w_n)| \geq \begin{cases} M_1 |w_n|^{1/(p-1)} & , |w_n| > \delta'', \\ M_2 |w_n|^{1/(q-1)} & , |w_n| \leq \delta''. \end{cases} \quad (3.14)$$

Portanto, de (3.11) – (3.14), existe  $\tilde{g} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  tal que

$$|w_n(x)| \leq \tilde{g}(x) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Aplicando o Teorema de Lebesgue, temos

$$w_n \rightarrow w \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

finalizando a demonstração. ■

**Teorema 3.1.4** *O funcional  $\Psi$  tem um ponto crítico  $w_* \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , cuja energia é igual ao nível do passo da montanha. Além disso,  $w_*$  tem sinal definido, isto é, ela é positiva ou negativa sobre  $\Omega$ .*

**Demonstração.** Pelos Lemas 3.1.1 e 3.1.2, o funcional  $\Psi$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [18]. Logo, o nível do passo da montanha  $c$  é um nível crítico para  $\Psi$ , isto é, existe  $w_* \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  tal que  $\Psi'(w_*) = 0$  e  $\Psi(w_*) = c > 0$ . Além disso, como  $\Psi(0) = 0$ , concluímos que  $w_* \neq 0$ . Recordamos que  $c$  é dado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Psi(\gamma(t)) > 0, \quad (3.15)$$

onde

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1], L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)); \gamma(0) = 0 \text{ e } \Psi(\gamma(1)) < 0 \right\}.$$

O nível do passo da montanha,  $c$ , pode ser caracterizado das seguintes maneiras

$$c = \inf_{w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{t \geq 0} \Psi(tw) = \inf_{u \in \mathcal{N}} \Psi(u) = \inf_{u \in \mathcal{N}_\Psi} \Psi(u) \quad (3.16)$$

onde

$$\mathcal{N} = \{w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \setminus \{0\}; \Psi'(w)w = 0\}$$

e

$$\mathcal{N}_\Psi = \{w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \setminus \{0\}; \Psi'(w) = 0\}.$$

O conjunto  $\mathcal{N}$  é chamado de *Variedade de Nehari* associada a  $\Psi$ , para mais detalhes ver [71].

Agora, iremos mostrar que  $w_*$  tem um sinal definido. De fato, como

$$\int_{\Omega} w_* T w_* dx = \int_{\Omega} (w_*^+ + w_*^-) T (w_*^+ + w_*^-) dx \leq \int_{\Omega} w_*^+ T w_*^+ dx + \int_{\Omega} w_*^- T w_*^- dx,$$

temos

$$\Psi(w_*) = \max_{t \geq 0} \Psi(tw_*) \geq \Psi(tw_*) \geq \Psi(tw_*^+) + \Psi(tw_*^-), \quad \forall t \geq 0.$$

Argumentando por contradição, se  $w_*^\pm \neq 0$ , tem-se

$$\int_{\Omega} w_*^+ T w_*^+ dx > 0 \text{ e } \int_{\Omega} w_*^- T w_*^- dx > 0.$$

Portanto, existem  $t_0^\pm \in (0, +\infty)$  satisfazendo

$$\Psi(t_0^\pm w_*^\pm) = \max_{t \geq 0} \Psi(tw_*^\pm) > 0.$$

Usando a caracterização de  $c$  mencionado em (3.16),

$$\Psi(t_0^+ w_*^+), \Psi(t_0^- w_*^-) \geq c.$$

Assim,

$$c = \Psi(w_*) \geq \Psi(t_0^+ w_*^+) + \Psi(t_0^- w_*^-) \geq c + \Psi(t_0^- w_*^-),$$

de onde segue

$$\Psi(t_0^- w_*^-) \leq 0.$$

Conseqüentemente,

$$t_0^+ > t_0^-.$$

De maneira análoga,

$$t_0^+ < t_0^-,$$

obtendo uma contradição. ■

### 3.1.1 Solução de Energia Mínima

Nesta seção, mostraremos a existência de solução de energia mínima para (P), isto é, um ponto crítico  $u \in H$  de  $I$  verificando

$$I(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}_I} I(v)$$

onde

$$\mathcal{N}_I = \{u \in H, I'(u) = 0\}.$$

Com esse intuito, a afirmação abaixo é crucial em nossa abordagem

**Afirmção 3.1.5**  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  é um ponto crítico para  $\Psi$  se, e somente se,  $u = Tw$  é um ponto crítico para  $I$ . Além disso,  $\Psi(w) = I(u)$ .

De fato, sabemos que se  $w$  é um ponto crítico de  $\Psi$ , então  $u = Tw$  é um ponto crítico de  $I$ . Agora, dado um ponto crítico  $u \in H$  de  $I$  e considerando  $w_1 = f(u)$ , temos

$$\Delta^2 u = w_1,$$

isto é,

$$Tw_1 = u.$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} Tw_1 \eta dx = \int_{\Omega} u \eta dx = \int_{\Omega} h(w_1) \eta dx, \forall \eta \in L^{p/(p-1)}(\Omega),$$

mostrando que  $w_1$  é um ponto crítico de  $\Psi$ . Além disso,

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u) - I'(u)u = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \int_{\Omega} f(u)u dx \\ &= \int_{\Omega} [f(u)u - F(u)] dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx. \end{aligned}$$

Como,

$$\int_{\Omega} \Delta Tw_1 \Delta \eta dx = \int_{\Omega} w_1 \eta dx, \forall \eta \in H,$$

fixando  $\eta = Tw_1$ , encontramos

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx = \int_{\Omega} |\Delta Tw_1|^2 dx = \int_{\Omega} w_1 Tw_1 dx.$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis  $r = h(s)$ , temos

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds = \int_0^{h(t)} r f'(r)dr.$$

Usando integração por partes,

$$H(t) = \int_0^{h(t)} r f'(r)dr = h(t)t - \int_0^{h(t)} f(r)dr = f(h(t))h(t) - F(h(t)),$$

logo,

$$H(w_1) = f(h(w_1))h(w_1) - F(h(w_1)) = f(u)u - F(u),$$

conduzindo a

$$I(u) = \Psi(w_1).$$

Considerando

$$\mathcal{N}_I = \{u \in H, I'(u) = 0\}$$

e

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}_I} I(u),$$

da análise anterior, devemos ter  $c = d$ . Portanto,  $u = Tw_*$  é uma solução de energia mínima para  $(P)$ , onde  $w_*$  é o ponto crítico obtido no Teorema 3.1.4.

## 3.2 Solução Nodal de Energia Mínima

Nesta seção, usaremos o método dual para encontrar uma solução nodal de energia mínima para o problema  $(N)$ . Para este fim, procuraremos pontos críticos de  $\Psi$  no conjunto

$$\mathcal{M} = \{w \in L^{p/(p-1)}(\Omega); w^\pm \neq 0 \text{ e } \Psi'(w)w^+ = \Psi'(w)w^- = 0\}.$$

Mais precisamente, provaremos que existe  $w_0 \in \mathcal{M}$  verificando

$$\Psi(w_0) = \inf_{w \in \mathcal{M}} \Psi(w) \quad \text{e} \quad \Psi'(w_0) = 0.$$

Neste caso, temos que  $u_0 = Tw_0$  é uma solução nodal de energia mínima para  $(N)$ . Esta conclusão vem do estudo feito na Subseção 3.1.1, pois é fácil provar que

$$I(u_0) = \min\{I(u) : u \text{ é solução nodal para } (P)\}.$$

Como  $\Psi$  tem um termo não local  $\int_{\Omega} wTwdx$ , vemos que

$$\Psi'(w^+)w^+ = \int_{\Omega} w^+Tw^-dx < 0 \text{ and } \Psi'(w^-)w^- = \int_{\Omega} w^-Tw^+dx < 0.$$

A informação acima não nos permite repetir os argumentos usados para obter solução nodal no caso do operador Laplaciano. Para contornar essa dificuldade adaptamos para o nosso caso a abordagem explorada por Alves e Souto em [16].

Os próximos lemas são resultados técnicos que serão essenciais para obter a solução nodal de energia mínima.

**Lema 3.2.1** *Existe  $\rho > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega} wTwdx \geq \rho, \quad \forall w \in \mathcal{N}.$$

**Demonstração.** Suponha por contradição que exista  $\{w_n\} \subset \mathcal{N}$  tal que

$$\int_{\Omega} w_nTw_n dx \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Como

$$\int_{\Omega} h(w_n)w_n dx = \int_{\Omega} w_nTw_n dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e  $h(t)t \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos que

$$h(w_n)w_n \rightarrow 0 \text{ em } L^1(\Omega).$$

Consequentemente, para alguma subsequência, ainda denotada por ela mesma,

$$h(w_n(x))w_n(x) \rightarrow 0, \text{ q.s. em } \Omega, \quad (3.18)$$

e existe  $g \in L^1(\Omega)$  tal que

$$|h(w_n(x))w_n(x)| \leq g(x), \text{ q.s. em } \Omega. \quad (3.19)$$

Portanto, de  $(h_1)$  e (3.18),

$$w_n(x) \rightarrow 0, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Considerando

$$A_n = \{x \in \Omega, |w_n(x)| \geq f(M)\},$$

por (3.1) e (3.19), existe  $K > 0$  tal que

$$|w_n(x)| \leq \frac{1}{K} g^{\frac{p-1}{p}}(x) \quad \text{q.s. em } A_n.$$

Por outro lado, se  $x \notin A_n$ ,

$$|w_n(x)| \leq f(M).$$

Além disso,

$$|w_n(x)| \leq \frac{1}{K} g^{\frac{p-1}{p}}(x) + f(M) \in L^{p/(p-1)}(\Omega), \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

A última igualdade combinada com (3.7) implica em

$$H(w_n) \leq c |w_n(x)|^{\frac{p}{p-1}} \leq \left( \frac{1}{K} g^{\frac{p-1}{p}}(x) + f(M) \right)^{\frac{p}{p-1}} \in L^1(\Omega).$$

Como

$$H(w_n)(x) \rightarrow 0, \quad \text{q.s. em } \Omega$$

o Teorema de Lebesgue garante que

$$\int_{\Omega} H(w_n) dx \rightarrow 0. \tag{3.20}$$

De (3.15), (3.17) e (3.20),

$$0 < c \leq \Psi(w_n) \rightarrow 0,$$

o que é um absurdo. ■

**Lema 3.2.2** *Existe  $\rho > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega} w^{\pm} T w^{\pm} dx \geq \rho,$$

para todo  $w \in \mathcal{M}$  com  $w^{\pm} \neq 0$ .

**Demonstração.** Dado  $w \in \mathcal{M}$ , existem únicos  $t_{w^+}, t_{w^-} \in (0, 1)$  tais que

$$t_{w^+} w^+, t_{w^-} w^- \in \mathcal{N}.$$

Então, pelo Lema 3.2.1,

$$\int_{\Omega} t_{w^+} w^+ T (t_{w^+} w^+) dx \geq \rho.$$

Como  $t_{w^+} < 1$ , segue que

$$\int_{\Omega} w^+ T w^+ dx \geq \rho.$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega} w^- T w^- dx \geq \rho,$$

concluindo a demonstração. ■

**Lema 3.2.3** Dada uma função  $v \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  com  $v^\pm \neq 0$ . Então existem  $s, t > 0$  tais que  $\Psi'(tv^+ + sv^-)v^+ = 0$  e  $\Psi'(tv^+ + sv^-)v^- = 0$ .

**Demonstração.** No que segue, consideraremos o campo vetorial

$$V(s, t) = (\Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+, \Psi'(tv^+ + sv^-)sv^-).$$

Note que

$$\begin{aligned} \Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+ &= \int_{\Omega} tv^+ h(tv^+ + sv^-) dx - \int_{\Omega} tv^+ T(tv^+ + sv^-) dx \\ &= \int_{\Omega} tv^+ h(tv^+) dx - \int_{\Omega} tv^+ T(tv^+ + sv^-) dx. \end{aligned}$$

Como  $v^+ \neq 0$ , existe  $\alpha > 0$  tal que  $[v^+ \geq \alpha] = \{x \in \Omega : v^+(x) \geq \alpha\}$  tem medida positiva. Além disso,

$$\Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+ \geq \int_{[v^+ \geq \alpha]} tv^+ h(tv^+) dx - \int_{\Omega} tv^+ T(tv^+ + sv^-) dx.$$

Como  $h$  é crescente, para  $t$  suficientemente pequeno

$$\Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+ \geq \int_{[v^+ \geq \alpha]} t\alpha(t\alpha)^{1/(q-1)} dx - \int_{\Omega} tv^+ T(tv^+ + sv^-) dx.$$

Agora, usando a linearidade de  $T$  juntamente com o fato que  $\int_{\Omega} v^+ T(v^-) dx < 0$ , obtemos

$$\Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+ \geq t^{q/(q-1)} \alpha^{q/(q-1)} |[v^+ \geq \alpha]| - \|T\| t^2 \|v^+\|^2.$$

Logo, existe  $r > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\Psi'(rv^+ + sv^-)rv^+ > 0, \quad \forall s > 0. \quad (3.21)$$

Podemos usar os mesmos argumentos para provar que

$$\Psi'(tv^+ + rv^-)rv^- > 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.22)$$

Por outro lado,

$$\Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+ \leq c \int_{\Omega} tv^+ |tv^+|^{1/(p-1)} dx - t^2 \int_{\Omega} v^+ T(v^+) dx - ts \int_{\Omega} v^+ T(v^-) dx.$$

Desde que  $t, s \geq r$ , segue que

$$\Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+ \leq c \int_{\Omega} tv^+ |tv^+|^{1/(p-1)} dx - t^2 \int_{\Omega} v^+ T(v^+) dx - r^2 \int_{\Omega} v^+ T(v^-) dx,$$

então,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi'(tv^+ + sv^-)tv^+ = -\infty, \quad \text{uniformemente em } s \geq r.$$

Assim, podemos fixar  $R > r$  suficientemente grande, tal que

$$\Psi'(Rv^+ + sv^-)Rv^+ < 0, \quad \text{uniformemente para } s \geq r. \quad (3.23)$$

Analogamente,

$$\Psi'(tv^+ + Rv^-)Rv^- > 0 \quad \text{uniformemente para } t \geq r. \quad (3.24)$$

Portanto, de (3.21) – (3.24), podemos aplicar o Teorema de Miranda para encontrar  $(s, t) \in (r, R) \times (r, R)$  verificando  $V(s, t) = 0$ . ■

Na sequência, para cada  $v \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  com  $v^\pm \neq 0$ , definimos  $h^v : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h^v(t, s) = \Psi(tv^+ + sv^-).$$

Consideramos também, a função  $\phi^v : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\phi^v(t, s) = \left( \frac{\partial h^v}{\partial t}(t, s), \frac{\partial h^v}{\partial s}(t, s) \right).$$

**Proposição 3.2.4** *Se  $w \in \mathcal{M}$ , então*

- i)  $h^w(t, s) < h^w(1, 1) = \Psi(w)$ ,  $\forall s, t \geq 0$  com  $(s, t) \neq (1, 1)$ .
- ii)  $\det(\Phi^w)'(1, 1) < 0$ .

**Demonstração.**

Primeiro de tudo, precisamos mostrar a seguinte desigualdade

**Afirmção 3.2.5** *Se  $w \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$  com  $w^\pm \neq 0$ , então*

$$\left( \int_{\Omega} w^+ T w^- dx \right)^2 < \left( \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx \right) \left( \int_{\Omega} w^- T w^- dx \right).$$

De fato, pela positividade de  $T$ , temos a desigualdade abaixo

$$\int_{\Omega} (tw^+ + sw^-) T (tw^+ + sw^-) dx > 0, \quad (t, s) \neq (0, 0),$$

a qual combinada com a simetria de  $T$ , implica que

$$t^2 \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + 2st \int_{\Omega} w^+ T w^- dx + s^2 \int_{\Omega} w^- T w^- dx > 0.$$

Então, para  $s \neq 0$ ,

$$\left(\frac{t}{s}\right)^2 \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + 2 \left(\frac{t}{s}\right) \int_{\Omega} w^+ T w^- dx + \int_{\Omega} w^- T w^- dx > 0.$$

Fazendo  $X = \frac{t}{s}$ , deduzimos que

$$X^2 \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + 2X \int_{\Omega} w^+ T w^- dx + \int_{\Omega} w^- T w^- dx > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, o polinômio

$$P(X) = X^2 \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + 2X \int_{\Omega} w^+ T w^- dx + \int_{\Omega} w^- T w^- dx$$

não tem raízes reais. Além disso, como  $\int_{\Omega} w^+ T w^+ dx > 0$ , existe um  $X_0 \in \mathbb{R}$ , tal que

$$P(X) \geq P(X_0) > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

Desde que  $w \in \mathcal{M}$ , sabemos que  $\Psi'(w)w^+ = \Psi'(w)w^- = 0$ . Então,  $(1, 1)$  é um ponto crítico de  $h^w$  e as identidades abaixo são verdadeiras

$$\int_{\Omega} h(w^+)w^+ dx = \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + \int_{\Omega} w^+ T w^- dx$$

e

$$\int_{\Omega} h(w^-)w^- dx = \int_{\Omega} w^- T w^+ dx + \int_{\Omega} w^- T w^- dx.$$

Por outro lado, de (3.1) e (3.2),

$$\begin{aligned} h^w(t, s) &\leq C t^{p/(p-1)} \int_{\Omega} |w^+|^{p/(p-1)} dx + C s^{p/(p-1)} \int_{\Omega} |w^-|^{p/(p-1)} dx \\ &\quad - t^2 \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx - 2ts \int_{\Omega} w^- T w^+ dx - s^2 \int_{\Omega} w^- T w^- dx, \end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constante positiva. As estimativas acima juntamente com (3.25) garantem que

$$h^w(t, s) \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } |(s, t)| \rightarrow +\infty.$$

Combinando a continuidade de  $h^w$  com o último limite, deduzimos que  $h^w$  assume um máximo global em algum ponto  $(a, b)$ .

Mostraremos agora que  $a, b > 0$ . Com efeito, se  $b = 0$

$$\Psi(aw^+) \geq \Psi(tw^+), \quad \forall t > 0,$$

e

$$\frac{\partial h^w}{\partial t}(a, 0) = 0.$$

Então,

$$\Psi'(aw^+)w^+ = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{a} \int_{\Omega} h(aw^+)w^+ dx = \int_{\Omega} w^+ T(w^+) dx. \quad (3.26)$$

Recordando que  $\Psi'(w)w^+ = 0$ , sabemos que

$$\int_{\Omega} h(w^+)w^+ dx < \int_{\Omega} w^+ T(w^+) dx. \quad (3.27)$$

De (3.26)-(3.27),

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{h(aw^+)}{aw^+} - \frac{h(w^+)}{w^+} \right] (w^+)^2 dx > 0.$$

Usando o fato que  $\frac{h(t)}{t}$  é decrescente para  $t > 0$ , as desigualdades acima implicam que  $a < 1$ . Por outro lado, note que

$$h^w(a, 0) = \Psi(aw^+) = \Psi(aw^+) - \frac{1}{2}\Psi'(aw^+)aw^+ = \int_{\Omega} \left( H(aw^+) - \frac{1}{2}h(aw^+)aw^+ \right) dx.$$

Desde que  $H(t) - \frac{1}{2}h(t)t$  é crescente para  $t > 0$ ,  $a \in (0, 1)$  e

$$\int_{\Omega} \left( H(w^-) - \frac{1}{2}h(w^-)w^- \right) dx > 0,$$

temos

$$\begin{aligned} h^w(a, 0) &< \int_{\Omega} \left( H(w^+) - \frac{1}{2}h(w^+)w^+ \right) dx \\ &< \int_{\Omega} \left( H(w^+) - \frac{1}{2}h(w^+)w^+ \right) dx + \int_{\Omega} \left( H(w^-) - \frac{1}{2}h(w^-)w^- \right) dx \\ &< \int_{\Omega} \left( H(w^+ + w^-) - \frac{1}{2}h(w^+ + w^-)(w^+ + w^-) \right) dx \\ &< \Psi(w) - \frac{1}{2}\Psi'(w)w = \Psi(w) = h^w(1, 1), \end{aligned}$$

obtendo uma contradição, pois  $(a, 0)$  é um ponto de máximo global para  $h^w$ . O mesmo tipo de argumento mostra que  $a > 0$ , provando a afirmação.

A segunda afirmação é que  $0 < a, b \leq 1$ . Com efeito, uma vez que  $(a, b)$  é um ponto crítico de  $h^w$ , temos as seguintes identidades

$$\Psi'(aw^+ + bw^-)aw^+ = 0 \quad \text{e} \quad \Psi'(aw^+ + bw^-)bw^- = 0$$

ou equivalentemente

$$a^2 \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + ab \int_{\Omega} w^+ T w^- dx = a \int_{\Omega} h(aw^+) w^+ dx$$

e

$$b^2 \int_{\Omega} w^- T w^- dx + ab \int_{\Omega} w^+ T w^- dx = b \int_{\Omega} h(bw^+) w^+ dx.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que  $a \geq b$ . Então,

$$ab \int_{\Omega} w^+ T w^- dx \geq a^2 \int_{\Omega} w^+ T w^- dx.$$

Assim

$$\int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + \int_{\Omega} w^+ T w^- dx \leq \int_{\Omega} \frac{h(aw^+)}{aw^+} (w^+)^2 dx,$$

e

$$\int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + \int_{\Omega} w^+ T w^- dx = \int_{\Omega} \frac{h(w^+)}{w^+} (w^+)^2 dx.$$

Combinando as informações acima, temos a desigualdade

$$0 \leq \int_{\Omega} \left[ \frac{h(aw^+)}{aw^+} - \frac{h(w^+)}{w^+} \right] (w^+)^2,$$

a qual combinada com o fato que  $\frac{h(t)}{t}$  é decrescente para  $t > 0$  implica em  $a \leq 1$ .

Para concluir a demonstração do item *i*), mostraremos que  $h^w$  não tem máximo global em  $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(1, 1)\}$ . Observe que

$$\begin{aligned} h^w(a, b) &= \Psi(aw^+ + bw^-) - \frac{1}{2} \Psi'(aw^+ + bw^-)(aw^+ + bw^-) \\ &= \int_{\Omega} [H(aw^+) - h(aw^+)aw] dx + \int_{\Omega} [H(bw^-) - h(bw^-)bw^-] dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h^w(a, b) &< \int_{\Omega} [H(w^+) - h(w^+)w] dx + \int_{\Omega} [H(w^-) - h(w^-)bw^-] dx \\ &< \int_{\Omega} [H(w^+ + w^-) - h(w^+ + w^-)(w^+ + w^-)] dx = h^w(1, 1), \end{aligned}$$

provando *i*).

Para mostrar o item *ii*), note que

$$\det(\Phi^w)'(1, 1) = G(w^+)G(w^-) - \left( \int_{\Omega} w^+ T w^- dx \right)^2,$$

onde

$$G(v) = \int_{\Omega} h'(v)v^2 dx - \int_{\Omega} vTv dx.$$

Como  $w \in \mathcal{M}$  e  $\int_{\Omega} w^-T w^+ dx = \int_{\Omega} w^+T w^- dx$ , obtemos

$$\int_{\Omega} w^+T w^+ dx = \int_{\Omega} h(w^+)w^+ dx - \int_{\Omega} w^+T w^- dx$$

e

$$\int_{\Omega} w^-T w^- dx = \int_{\Omega} h(w^-)w^- dx - \int_{\Omega} w^+T w^- dx.$$

Portanto,

$$G(w^+) = \int_{\Omega} [h'(w^+)(w^+)^2 - h(w^+)w^+] dx + \int_{\Omega} w^+T w^- dx.$$

Por  $(\mathbf{h}_4)$ ,

$$h(t)t > h'(t)t^2, \quad \forall t \neq 0,$$

então,

$$G(w^+) < \int_{\Omega} w^+T w^- dx.$$

Analogamente,

$$G(w^-) < \int_{\Omega} w^+T w^- dx.$$

Com isto,

$$\det(\Phi^w)'(1, 1) < 0$$

■

### 3.3 Demonstração do Teorema 0.0.4

No que segue, denotamos por  $c_{\mathcal{M}}$  o ínfimo de  $\Psi$  em  $\mathcal{M}$ , isto é,

$$c_{\mathcal{M}} = \inf_{w \in \mathcal{M}} \Psi(w).$$

Como  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ , devemos ter

$$c_{\mathcal{M}} \geq c > 0.$$

Seja  $\{w_n\} \subset \mathcal{M}$  tal que

$$\Psi(w_n) \rightarrow c_{\mathcal{M}}.$$

Usando um argumento padrão, podemos mostrar que  $\{w_n\}$  é uma sequência limitada em  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ . Assim, passando a uma subsequência se necessário,

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

para algum  $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ .

**Afirmção 3.3.1**  $w_n^\pm \rightharpoonup w^\pm$  em  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ .

De fato, sendo  $\{w_n\}$  limitada em  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ ,  $\{w_n^+\}$  e  $\{w_n^-\}$  também são limitadas. Da reflexividade de  $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , existem  $w_1, w_2 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  tais que

$$w_n^+ \rightharpoonup w_1 \quad \text{e} \quad w_n^- \rightharpoonup w_2 \quad \text{em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$$

com

$$w_1(x) \geq 0, \quad w_2(x) \leq 0 \quad \text{q.s. em } \Omega \quad \text{e} \quad w = w_1 + w_2.$$

Pelo Lema 3.2.2,

$$\int_{\Omega} w_1 T w_1 dx, \int_{\Omega} w_2 T w_2 dx \geq \rho$$

implicando que

$$w_1, w_2 \neq 0.$$

Combinando a compacidade de  $T$  com o princípio do máximo encontrado no Apêndice A, temos  $T w_n^+ \rightarrow T w_1$  em  $L^p(\Omega)$  e  $T w_1 > 0$  em  $\Omega$ . Então,

$$T w_n^+(x) \rightarrow T w_1(x) \quad \text{q.s. em } \Omega. \tag{3.28}$$

Ainda pela compacidade de  $T$

$$w_n^+ T w_n^+ \rightarrow w_1 T w_1 \text{ em } L^1(\Omega),$$

de onde segue que

$$w_n^+(x) T w_n^+(x) \rightarrow w_1(x) T w_1(x) \quad \text{q.s. em } \Omega, \tag{3.29}$$

para alguma subsequência. De (3.28) e (3.29)

$$w_n^+(x) = \frac{w_n^+(x) T w_n^+(x)}{T w_n^+(x)} \rightarrow \frac{w_1(x) T w_1(x)}{T w_1(x)} = w_1(x) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Analogamente,

$$w_n^-(x) \rightarrow w_2(x) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Observe que, se  $w_1(x) > 0$ , então  $w_n^+(x) > 0$  para  $n$  suficientemente grande. Logo,

$$w_n(x) = w_n^+(x) \rightarrow w_1(x).$$

Usando o mesmo argumento para provar que

$$w_n(x) = w_n^-(x) \rightarrow w_2(x) \quad \text{se} \quad w_2(x) < 0.$$

Desta forma,  $w_1(x)w_2(x) = 0$  q.s. em  $\Omega$  e

$$\{x \in \Omega; w_2(x) < 0\} \cap \{x \in \Omega; w_1(x) > 0\} = \emptyset.$$

Portanto,

$$w^+(x) = \max\{w(x), 0\} = \max\{w_1(x) + w_2(x), 0\} = w_1(x) \quad \text{q.s. em} \quad \Omega$$

e

$$w^-(x) = \min\{w(x), 0\} = \min\{w_1(x) + w_2(x), 0\} = w_2(x) \quad \text{q.s. em} \quad \Omega,$$

finalizando a prova da afirmação.

Do Lema 3.2.3, existem  $t, s > 0$  tais que

$$\Psi'(tw^+ + sw^-)w^+ = \Psi'(tw^+ + sw^-)w^- = 0.$$

Mostraremos que  $t, s \leq 1$ . Recordando que  $\Psi'(w_n)w_n^\pm = 0$ , segue que

$$\int_{\Omega} w_n^+ h(w_n^+) dx = \int_{\Omega} w_n^+ T w_n^+ dx + \int_{\Omega} w_n^- T w_n^+ dx$$

e

$$\int_{\Omega} w_n^- h(w_n^-) dx = \int_{\Omega} w_n^- T w_n^- dx + \int_{\Omega} w_n^- T w_n^+ dx.$$

Então, passando ao limite com  $n \rightarrow +\infty$  nas expressões acima,

$$\int_{\Omega} w^+ h(w^+) dx = \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + \int_{\Omega} w^- T w^+ dx$$

e

$$\int_{\Omega} w^- h(w^-) dx = \int_{\Omega} w^- T w^- dx + \int_{\Omega} w^- T w^+ dx.$$

Uma vez que  $\Psi'(tw^+ + sw^-)tw^+ = 0$ , sabemos que

$$\int_{\Omega} h(tw^+)tw^+ dx = t^2 \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + ts \int_{\Omega} w^- T w^+ dx.$$

Supondo  $t \geq s$ , obtemos a desigualdade abaixo

$$\int_{\Omega} \frac{h(tw^+)}{tw^+} (w^+)^2 dx \geq \int_{\Omega} w^+ T w^+ dx + \int_{\Omega} w^- T w^+ dx \geq \int_{\Omega} \frac{h(w^+)}{w^+} (w^+)^2 dx,$$

isto é,

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{h(tw^+)}{tw^+} (w^+)^2 - \frac{h(w^+)}{w^+} (w^+)^2 \right] dx \geq 0.$$

Como  $\frac{h(t)}{t}$  é decrescente para  $t > 0$ , a última desigualdade garante que  $t \leq 1$ , então,  $s \leq 1$ .

No que segue, provaremos que  $\Psi(tw^+ + sw^-) = c_{\mathcal{M}}$ . Para este fim, como  $tw^+ + sw^- \in \mathcal{M}$ , devemos ter

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{M}} &\leq \Psi(tw^+ + sw^-) = \Psi(tw^+ + sw^-) - \frac{1}{2} \Psi'(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-) \\ &\leq \int_{\Omega} \left[ H(tw^+ + sw^-) - \frac{1}{2} h(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-) \right] dx, \\ &\leq \int_{\Omega} \left[ H(tw^+) - \frac{1}{2} h(tw^+)(tw^+) \right] dx + \int_{\Omega} \left[ H(sw^-) - \frac{1}{2} h(sw^-)(sw^-) \right] dx. \end{aligned}$$

Usando novamente que  $H(t) - \frac{1}{2} h(t)t$  é crescente para  $t > 0$ , obtemos

$$c_{\mathcal{M}} \leq \int_{\Omega} \left[ H(w^+) - \frac{1}{2} h(w^+)(w^+) \right] dx + \int_{\Omega} \left[ H(w^-) - \frac{1}{2} h(w^-)(w^-) \right] dx,$$

Pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{M}} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left[ H(w_n^+) - \frac{1}{2} h(w_n^+)(w_n^+) \right] dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left[ H(w_n^-) - \frac{1}{2} h(w_n^-)(w_n^-) \right] dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left[ H(w_n^+ + w_n^-) - \frac{1}{2} h(w_n^+ + w_n^-)(w_n^+ + w_n^-) \right] dx, \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[ \Psi(w_n) - \frac{1}{2} \Psi'(w_n)w_n \right] = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \Psi(w_n) = c_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

mostrando que

$$c_{\mathcal{M}} = \Psi(tw^+ + sw^-).$$

Definindo  $w_0 = tw^+ + sw^- \in \mathcal{M}$ , segue que

$$w_0 \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \Psi(w_0) = c_{\mathcal{M}}.$$

Para concluir a demonstração do Teorema 0.0.4, afirmamos que  $w_0$  é um ponto crítico para o funcional  $\Psi$ . Suponhamos que isso não ocorre, então existe  $\alpha > 0$  e  $v_0 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  com  $|v_0|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} = 1$  satisfazendo

$$\Psi'(w)v_0 = 2\alpha > 0.$$

Como  $\Psi'$  é contínua, fixamos  $r > 0$  tal que

$$\Psi'(v)v_0 > \alpha, \quad v^\pm \neq 0, \quad \text{para todo } v \in B_r(w) \subset L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Fixemos  $D = (\xi, \chi) \times (\xi, \chi) \subset \mathbb{R}^2$  com  $0 < \xi < 1 < \chi$  tal que

- (i)  $(1, 1) \in D$  e  $\Phi^w(t, s) = 0$  em  $\overline{D}$  se, e somente se,  $t = s = 1$ ;
- (ii)  $c_{\mathcal{M}} \notin h^w(\partial D)$ ;
- (iii)  $\{tw^+ + sw^-; (t, s) \in \overline{D}\} \subset B_r(w)$ .

Como  $\Psi$  é contínua, podemos fixar  $r' > 0$  tal que

$$\mathcal{B} = \overline{B_{r'}(w_0)} \subset B_r(w_0)$$

e

$$\mathcal{B} \cap \{tw^+ + sw^-; (t, s) \in \partial D\} = \emptyset.$$

Considere a aplicação contínua  $\rho : L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty)$  definida por

$$\rho(u) = \text{dist}(u, \mathcal{B}^c).$$

Além disso, definimos o campo vetorial Lipschitziano  $V : L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  dado por

$$V(u) = -\rho(u)v_0.$$

Para cada  $u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ , denotaremos por  $\eta(\tau) = \eta(\tau, u)$  a única solução da EDO

$$\begin{cases} \eta'(\tau) = V(\eta(\tau)), \tau > 0 \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

Afirmamos que,

- (1) se  $u \notin \mathcal{B}$ ,  $\eta(\tau, u) = u$ , para todo  $\tau$ ;
- (2) se  $u \in \mathcal{B}$ ,  $\tau \mapsto \Psi(\eta(\tau, u))$  é decrescente e  $\eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$ , para todo  $\tau > 0$ ;
- (3) existe  $\tau_0$  tal que  $\Psi(\eta(\tau, w_0)) \leq \Psi(w) - ((r'\alpha)/2)\tau$ , para todo  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ .

Com efeito, o item (1) é uma consequência imediata da definição de  $\rho$ . Por sua vez, o item (2) segue da desigualdade

$$\Psi'(\eta(\tau))\eta'(\tau) \leq -\rho(\eta(\tau))\alpha < 0, \quad \forall \eta(\tau) \in \mathcal{B}.$$

Por fim, para mostramos que (3) ocorre, fixemos  $\tau_0 > 0$  tal que

$$\|\eta(\tau, w_0) - w_0\| \leq \frac{r'}{2}, \quad \text{para todo } |\tau| \leq \tau_0.$$

Logo,

$$\frac{d}{d\tau}\Psi(\eta(\tau, w_0)) \leq -\rho(\eta(\tau))\alpha \leq -\frac{r'\alpha}{2}.$$

Integrando em  $[0, \tau_0]$ , temos

$$\Psi(\eta(\tau_0, w_0)) \leq \Psi(w_0) - \frac{r'\alpha}{2}\tau_0.$$

Considerando  $\gamma : \bar{D} \rightarrow L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  definida por

$$\gamma(t, s) = \eta(\tau_0, tw^+ + sw^-).$$

Note que,

$$\max_{(t,s) \in \bar{D}} \Psi(\gamma(t, s)) < c_{\mathcal{M}},$$

pois

$$\Psi(\gamma(t, s)) \leq h^w(t, s) < c_{\mathcal{M}}, \quad \forall (t, s) \in \bar{D} \setminus \{(1, 1)\}$$

e

$$\Psi(\gamma(1, 1)) \leq \Psi(w) - ((r'\alpha)/2)\tau_0 < c_{\mathcal{M}}.$$

Consequentemente,  $\gamma(\bar{D}) \cap \mathcal{M} = \emptyset$ .

Por outro lado, considerando  $\Upsilon : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\Upsilon(t, s) = (t^{-1}\Psi'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)^+), s^{-1}\Psi'(\gamma(t, s))(\gamma(t, s)^-)),$$

obtemos que

$$\Upsilon(t, s) = (\Psi'(tw^+ + sw^-)w^+, \Psi'(tw^+ + sw^-)w^-) = \Phi^w(t, s), \quad \forall (t, s) \in \partial D.$$

Então, usando o grau topológico de Brouwer

$$d(v, D, (0, 0)) = d(\Phi^w, D, (0, 0)) = \text{sgn}(\det(\Phi^w)'(1, 1)) = -1$$

o que implica que  $v$  tem um zero  $(a, b)$  em  $D$ . Portanto, existe  $(a, b) \in D$  verificando

$$\Psi'(\gamma(a, b))(\gamma(a, b)^\pm) = 0,$$

isto é,  $\gamma(a, b) \in \mathcal{M}$  o que é uma contradição. Desta forma concluímos que  $w_0$  é um ponto crítico de  $\Psi$  e conseqüentemente uma solução nodal do problema  $(P)$ .

## Capítulo 4

# Existência de solução multi-bump nodal para uma classe de problemas com o operador biharmônico

A proposta deste capítulo é mostrar a existência de solução multi-bump nodal para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda V(x)u = |u|^{p-2}u, & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N); \end{cases} \quad (B_1)_\lambda$$

onde  $\lambda > 0$  é um parâmetro positivo,  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $p \in (2, 2_*)$ , com  $2_* = \frac{2N}{N-4}$  se  $N \geq 5$  e  $2_* = +\infty$  se  $1 \leq N \leq 4$ .

Vamos supor que  $V$  satisfaz as propriedades  $(V_2)$  e  $(V_3)$ , além disso consideraremos a propriedade

$(V'_1)$   $V(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$  e existe  $R, V_0 > 0$  tal que

$$V(x) > V_0, \text{ quando } |x| \geq R.$$

Além disso, com o intuito de podermos usar os resultados obtidos no **Capítulo 3** vamos supor que o domínio  $\Omega = \bigcup_{j=1}^l \Omega_j$  é tal que cada  $\Omega_j$  satisfaz a propriedade **(G)**.

## 4.1 Preliminares

Nesta seção estabelecemos algumas notações que serão importantes no decorrer do capítulo. Primeiramente, recordamos que o funcional energia  $I_\lambda : E_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  associado ao problema  $(B_1)_\lambda$  é definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + \lambda V(x) |u|^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,$$

onde

$$E_\lambda = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^2 dx < +\infty \right\}$$

é equipado com a norma

$$\|u\|_\lambda = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + \lambda V(x) |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Por  $(V'_1)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx &\leq \int_{B_R(0)} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|^2 dx \\ &\leq C \int_{B_R(0)} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{\lambda V_0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \lambda V(x) |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, para  $\lambda$  suficientemente grande existe  $\Theta > 0$  independente de  $\lambda$ , tal que

$$\|u\| \leq \Theta \|u\|_\lambda,$$

onde

$$\|u\| = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Portanto,  $E_\lambda$  está imerso continuamente em  $H^2(\mathbb{R}^N)$ . Além disso, o funcional  $I_\lambda$  é de classe  $C^1$  e para cada  $v \in E_\lambda$

$$I'_\lambda(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta u \Delta v + \lambda V(x) uv] dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv dx.$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$  definimos o funcional  $I_i$  sobre  $H_0^2(\Omega_j)$  por

$$I_i(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega_i} |u|^p dx.$$

Como cada  $\Omega_i$  verifica a condição  $(G)$ , segue do estudo feito no **Capítulo 3** que para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$  o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |u|^{p-2} u, & \text{in } \Omega_i, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial \Omega_i. \end{cases} \quad (P_i)$$

tem uma solução nodal  $u_i \in H_0^2(\Omega_i)$ , a qual satisfaz

$$I_i(u_i) = c_i,$$

onde

$$c_i = \inf\{I_i(u); u \in H_0^2(\Omega_i) \setminus \{0\}, I_i'(u) = 0 \text{ e } u^\pm \neq 0\}.$$

A solução  $u_i$  é gerada a partir de um ponto crítico  $w_i$  do funcional dual  $\Psi_i : L^{p/(p-1)}(\Omega_i) \rightarrow$

$\mathbb{R}$  definido por

$$\Psi_i(w) = \frac{1}{p'} \int_{\Omega_i} |w|^{p'} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} w T_i w dx$$

onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  e  $T_i : L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega_i) \rightarrow W^{4, \frac{p}{p-1}}(\Omega_i)$  é o operador solução associado ao problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = w, & \text{em } \Omega_i, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_i. \end{cases} \quad (P_w)$$

O próximo lema mostra uma estimativa para a norma  $L^p$  das partes positiva e negativa das soluções nodais de  $(P_i)$ , este lema será crucial para nossos argumentos nas seções posteriores.

**Lema 4.1.1** *Para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$  existe  $\rho_i > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega_i} |u_i^\pm|^p dx \geq \rho_i.$$

**Demonstração.** Pelo exposto no **Capítulo 3**, para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$  a função  $w_i = |u_i|^{p-2} u_i$  é um ponto crítico para o funcional  $\Psi_i$ , ou seja

$$\int_{\Omega} |w_i|^{p'} dx = \int_{\Omega} w_i T w_i dx. \quad (4.1)$$

Pelo Lema 3.2.2, existe uma constante positiva  $\rho_i$  tal que

$$\int_{\Omega_i} w_i^\pm T w_i^\pm dx \geq \rho_i. \quad (4.2)$$

De (4.1) e (4.2),

$$\int_{\Omega} |w_i^\pm|^{p'} \geq \rho_i. \quad (4.3)$$

O lema segue da última desigualdade. ■

Dado um subconjunto  $\Gamma \subset \{1, \dots, l\}$ , definimos

$$\Omega_\Gamma = \bigcup_{i \in \Gamma} \Omega_i \quad \text{e} \quad C_\Gamma = \sum_{i \in \Gamma} c_i.$$

Além disso, fixamos  $R > 0$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^l \Omega_i \subset B_R(0),$$

e defina os funcionais  $I_{\lambda,R}, J_{\lambda,R} : H_0^2(B_R(0)) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$I_{\lambda,R}(u) = \frac{1}{2} \int_{B_R(0)} (|\Delta u|^2 + \lambda V(x)|u|^2) dx - \frac{1}{p} \int_{B_R(0)} |u|^p dx$$

e

$$J_{\lambda,R}(u) = \int_{B_R(0)} (|\Delta u|^2 + \lambda V(x)|u|^2) dx.$$

## 4.2 Um valor crítico especial para $J_{\lambda,R}$

Nesta seção mostraremos a existência de um valor crítico para  $J_\lambda$  que será usado para construir uma sequência de funções que, como mostraremos nas seções seguintes, converge para uma solução multi-bump do problema  $(B_1)_\lambda$ .

No que segue, consideraremos

$$C = \sum_{i=1}^l c_i, \quad \delta := \min_{i \in \{1, \dots, l\}} \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\rho_i}{C}, \quad 0 < \mu < \frac{\delta}{2}.$$

e

$$\xi = \min\{\rho_i, i \in \{1, \dots, l\}\}.$$

Usando estes números, denotamos por  $\mathcal{A}_{\lambda,R}$  o conjunto das funções  $u \in H_0^2(B_R(0))$  que verificam as propriedades abaixo:

$$\int_{B_R(0)} |u|^p dx = 1; \tag{4.4}$$

$$\int_{\Omega_i} |u^\pm|^p dx \geq \delta, \quad \forall i \in \Gamma; \tag{4.5}$$

$$\int_{\Omega_j} |u|^p dx \leq \mu, \quad \text{para cada } j \notin \Gamma. \tag{4.6}$$

Note que  $\mathcal{A}_{\lambda,R} \neq \emptyset$ , pois se considerarmos  $u_0 = \sum_{i \in \Gamma} u_i$ , temos

$$v_0 = \frac{u_0}{|u_0|_{L^p(B_R(0))}} \in \mathcal{A}_{\lambda,R}. \tag{4.7}$$

No que segue, também fixamos

$$0 < \mu < \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{\xi}{2} \|v_0\|^{-\frac{2p}{p-2}} \right\} \tag{4.8}$$

e

$$\gamma_{\lambda,R} = \inf_{u \in \mathcal{A}_{\lambda,R}} J_{\lambda,R}(u). \quad (4.9)$$

**Lema 4.2.1** *Existe  $u_{\lambda,R} \in \mathcal{A}_{\lambda,R}$  tal que*

$$J_{\lambda,R}(u_{\lambda,R}) = \gamma_{\lambda,R}.$$

*Além disso, existe  $\alpha_0 > 0$  independente de  $\lambda$  e  $R$ , tais que*

$$\gamma_{\lambda,R} \geq \alpha_0 \quad \text{para } \lambda \geq 1 \quad \text{e } R > 0.$$

**Demonstração.** Seja  $\{u_n\} \subset \mathcal{A}_{\lambda,R}$  uma sequência tal que

$$\|u_n\|_{\lambda}^2 = J_{\lambda,R}(u_n) \rightarrow \gamma_{\lambda,R}.$$

Então,  $\{u_n\}$  é limitada em  $H_0^2(B_R(0))$ , e passando a uma subsequência se necessário,

$$u_n \rightharpoonup u_{\lambda,R} \in H_0^2(B_R(0)) \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow u_{\lambda,R} \quad \text{em } L^p(B_R(0)).$$

Os limites acima garantem que  $u_{\lambda,R} \in \mathcal{A}_{\lambda,R}$ . Por outro lado,

$$\gamma_{\lambda,R} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J_{\lambda,R}(u_n) \geq J_{\lambda,R}(u_{\lambda,R}),$$

de onde segue que

$$J_{\lambda,R}(u_{\lambda,R}) = \gamma_{\lambda,R}.$$

Por outro lado, usando (4.5)

$$\gamma_{\lambda,R} = \|u_{\lambda,R}\|_{\lambda} \geq \frac{1}{C} \int_{\Omega_i} |u_{\lambda,R}^{\pm}|^p dx \geq \frac{\delta}{C} := \alpha_0 \quad \text{para } \lambda \geq 1 \quad \text{e } R > 0,$$

onde  $C > 0$  é a constante da imersão de Sobolev.

**Lema 4.2.2** *A função  $u_{\lambda,R} \in \mathcal{A}_{\lambda,R}$  obtida no lema anterior é um ponto crítico para  $J_{\lambda,R}$  sobre  $V = \left\{ u \in H_0^2(B_R(0)); \int_{B_R(0)} |u|^p dx = 1 \right\}$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $u_{\lambda,R}$  não é um ponto crítico para  $J_{\lambda,R}$ . Então existem constantes  $\varepsilon, \nu > 0$  e  $r > 0$  tais que

$$\|J'_{\lambda,R}(u_{\lambda,R})\|_* > \frac{8\varepsilon}{\nu}, \quad \forall u \in J_{\lambda,R}^{-1}([\gamma_{\lambda,R} - 2\varepsilon, \gamma_{\lambda,R} + 2\varepsilon]) \cap \overline{B_r(u_{\lambda,R})}.$$

Dado  $\tau > 0$ , fixe  $0 < s < \frac{r}{3}$  de maneira que

$$u \in B_{2s}(u_{\lambda,R}) \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega_i} |u^\pm|^p dx \geq \delta - \tau, \forall i \in \Gamma; \\ \int_{B_R(0) \setminus \Omega_\Gamma} |u|^p dx \leq \mu + \tau. \end{cases} \quad (4.10)$$

Aplicando o lema de deformação encontrado em [71, Lemma 5.15], existe um fluxo  $\eta : V \rightarrow V$  com

- $\eta(u) = u$ ,  $u \notin J_{\lambda,R}^{-1}([\gamma_{\lambda,R} - 2\varepsilon, \gamma_{\lambda,R} + 2\varepsilon]) \cap B_{3s}(u_{\lambda,R})$ ;
- $\eta(J_{\lambda,R}^{\gamma_{\lambda,R} + \varepsilon} \cap S) \subset J_{\lambda,R}^{\gamma_{\lambda,R} - \varepsilon} \cap B_{2s}(u_{\lambda,R})$ .

Como  $u_{\lambda,R} \in J_{\lambda,R}^{\gamma_{\lambda,R} + \varepsilon} \cap B_s(u_{\lambda,R})$ , temos

$$w_{\lambda,R} = \eta(u_{\lambda,R}) \in J_{\lambda,R}^{\gamma_{\lambda,R} - \varepsilon} \cap B_{2s}(u_{\lambda,R}). \quad (4.11)$$

Agora, consideramos  $\mathcal{A}_{\lambda,R}^\tau$  o conjunto das funções  $u \in H_0^2(B_R(0))$  que verificam as propriedades abaixo:

- $\int_{B_R(0)} |u|^p dx = 1$ ;
- $\int_{\Omega_i} |u^\pm|^p dx \geq \delta - \tau$ ,  $\forall i \in \Gamma$ ;
- $\int_{\Omega_j} |u|^p dx \leq \mu + \tau$ , para cada  $j \notin \Gamma$ .

Como  $\mathcal{A}_{\lambda,R} \subset \mathcal{A}_{\lambda,R}^\tau$ , concluímos que  $\mathcal{A}_{\lambda,R}^\tau \neq \emptyset$  e o número

$$\gamma_{\lambda,R}^\tau = \inf_{u \in \mathcal{A}_{\lambda,R}^\tau} J_{\lambda,R}(u),$$

está bem definido.

De (4.10) e (4.11),

$$\gamma_{\lambda,R}^\tau \leq J_{\lambda,R}(w_{\lambda,R}) \leq \gamma_{\lambda,R} - \varepsilon. \quad (4.12)$$

**Afirmção 4.2.3**  $\gamma_{\lambda,R}^\tau \rightarrow \gamma_{\lambda,R}$ , quando  $\tau \rightarrow 0$ .

Seja  $\{\tau_n\} \subset (0, +\infty)$  uma sequência com  $\tau_n \rightarrow 0$ . Dos argumentos usados no Lema 4.2.1, existe  $u_n = u_{\lambda,R}^{\tau_n} \in \mathcal{A}_{\lambda,R}^{\tau_n}$  tal que

$$J_{\lambda,R}(u_n) = \gamma_{\lambda,R}^{\tau_n}.$$

Observe que,

$$\|u_n\|^2 \leq \|u_n\|_\lambda^2 = J_{\lambda,R}(u_n) = \gamma_{\lambda,R}^{\tau_n} \leq \gamma_{\lambda,R}. \quad (4.13)$$

Então,  $\{u_n\}$  é uma sequência limitada com respeito a  $n$ . Então passando a uma sub-sequência se necessário

$$u_n \rightharpoonup u_0 \in H_0^2(B_R(0)).$$

Logo,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{\lambda,R}^{\tau_n} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J_{\lambda,R}(u_n) \geq J_{\lambda,R}(u_0). \quad (4.14)$$

Das imersões de Sobolev,  $u_0 \in \mathcal{A}_{\lambda,R}$  e conseqüentemente

$$J_{\lambda,R}(u_0) \geq \gamma_{\lambda,R}. \quad (4.15)$$

Como  $\{\tau_n\}$  é uma sequência arbitrária, a afirmação segue de (4.13)-(4.15).

A Afirmação 4.2.3 juntamente com (4.12) implicam em

$$\gamma_{\lambda,R} \leq \gamma_{\lambda,R} - \varepsilon,$$

o que é absurdo. ■

Agora, do Teorema dos multiplicadores de Lagrange existe  $\alpha_{\lambda,R} > 0$  tal que

$$J'_{\lambda,R}(u_{\lambda,R})w = \alpha_{\lambda,R} p \int_{B_R(0)} |u_{\lambda,R}|^{p-2} u_{\lambda,R} w dx, \quad \forall w \in H_0^2(B_R(0)),$$

isto é,  $u_{\lambda,R}$  é uma solução do problema

$$\begin{cases} 2\Delta^2 u + 2\lambda V(x)u = \alpha_{\lambda,R} p |u|^{p-2} u, & \text{em } B_R(0) \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Portanto,  $v_{\lambda,R} = \beta_{\lambda,R} u_{\lambda,R}$  é uma solução para

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda V(x)u = |u|^{p-2} u, & \text{em } B_R(0) \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial B_R(0), \end{cases}$$

onde,

$$\beta_{\lambda,R} = \gamma_{\lambda,R}^{1/(p-2)}.$$

Note que,

$$\frac{1}{\Theta} \|v_{\lambda,R}\|^2 \leq \|v_{\lambda,R}\|_\lambda^2 = \gamma_{\lambda,R}^{p/(p-2)} \int_{B_R(0)} |u_{\lambda,R}|^p dx = \gamma_{\lambda,R}^{p/(p-2)},$$

como  $v_0$  dado em (4.7) pertence a  $\mathcal{A}_{\lambda,R}$  para todo  $\lambda \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda,R}^{p/(p-2)} &\leq \left( J_{\lambda,R}(v_0) \right)^{p/(p-2)} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)^{-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \left( \frac{\int_{\Omega_\Gamma} |\Delta u_0|^2}{\left( \int_{\Omega_\Gamma} |u_0|^p \right)^{2/p}} \right)^{p/(p-2)} \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)^{-1} C_\Gamma. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Então considerando uma sequência  $\{R_n\}$  tal que  $R_n \rightarrow +\infty$ , temos  $\{v_{\lambda,R_n}\}$  é limitada em  $H^2(\mathbb{R}^N)$ . Consequentemente, passando a uma subsequência se necessário

$$v_{\lambda,R_n} \rightharpoonup v_\lambda, \text{ em } H^2(\mathbb{R}^N), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

**Proposição 4.2.4** *A função  $v_\lambda$  é um ponto crítico do funcional  $I_\lambda$ . Além disso, existem  $\mu^*, \delta^* > 0$  tais que*

$$\begin{aligned} (i) \quad &\int_{\Omega_i} |v_\lambda^\pm|^p dx \geq \delta^*, \quad \forall i \in \Gamma; \\ (ii) \quad &\int_{\Omega_j} |v_\lambda|^p dx < \frac{\xi}{2}, \quad \forall j \notin \Gamma. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Inicialmente, consideremos uma função teste  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Pelo estudo feito anteriormente, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\text{supt}\varphi} [\Delta v_{\lambda,R_n} \Delta \varphi + \lambda V(x) v_{\lambda,R_n} \varphi] dx = \int_{\text{supt}\varphi} |v_{\lambda,R_n}|^{p-2} v_{\lambda,R_n} \varphi dx.$$

De (4.17) e pelas imersões de Sobolev,

$$\int_{\text{supt}\varphi} [\Delta v_\lambda \Delta \varphi + \lambda V(x) v_\lambda \varphi] dx = \int_{\text{supt}\varphi} |v_\lambda|^{p-2} v_\lambda \varphi dx,$$

ou seja,

$$I'_\lambda(v_\lambda)\varphi = 0.$$

Pela arbitrariedade de  $\varphi$  e pela densidade de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  em  $H^2(\mathbb{R}^N)$ , concluímos que  $v_\lambda$  é um ponto crítico para  $I_\lambda$ .

Além disso, como  $u_{\lambda,R_n}$  pertencer a  $\mathcal{A}_{\lambda,R_n}$ , temos por (4.5) e (4.4) que

$$\int_{\Omega_i} |v_{\lambda,R_n}^\pm|^p dx \geq \beta_{\lambda,R_n}^p \delta \geq \alpha_0^{p/(p-2)} \delta := \delta^*, \quad \forall i \in \Gamma$$

e

$$\int_{\Omega_j} |v_{\lambda,R_n}|^p dx < \beta_{\lambda,R_n}^p \mu \leq \|v_0\|_{\frac{2p}{p-2}}^p \mu < \frac{\xi}{2}, \quad \forall j \notin \Gamma.$$

Desde que  $v_{\lambda,R_n} \rightharpoonup v_\lambda$ , segue da imersão compacta de Sobolev,  $H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ , que

$$\int_{\Omega_i} |v_\lambda^\pm|^p dx \geq \delta^*, \forall i \in \Gamma$$

e

$$\int_{\Omega_j} |v_\lambda|^p dx < \frac{\xi}{2}, \forall j \notin \Gamma.$$

■

### 4.3 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção demonstraremos o Teorema 0.0.6. Desde que,

$$\|v_\lambda\|^2 \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \|v_{\lambda,R}\|^2 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^{-1} C_\Gamma,$$

nós concluímos que para cada sequência  $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$  com  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , a sequência  $\{v_{\lambda_n}\}$  é limitada em  $H^2(\mathbb{R}^N)$ . Então, para alguma subsequência, existe  $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$v_{\lambda_n} \rightharpoonup v \text{ em } H^2(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} I_{\lambda_n,R}(v_{\lambda_n,R}) &= I_{\lambda_n,R}(v_{\lambda_n,R}) - \frac{1}{p} I'_{\lambda_n,R}(v_{\lambda_n,R}) v_{\lambda_n,R} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|v_{\lambda_n,R}\|_{\lambda_n}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left(\|u_{\lambda_n,R}\|_{\lambda_n}^2\right)^{p/(p-2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left(\gamma_{\lambda_n,R}\right)^{p/(p-2)} \end{aligned}$$

e pela estimativa (4.16) obtemos

$$I_{\lambda_n,R}(v_{\lambda_n,R}) \leq C_\Gamma.$$

Então,

$$0 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|v_{\lambda_n}\|_{\lambda_n}^2 \leq I_\lambda(v_{\lambda_n}) \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} I_{\lambda_n,R}(v_{\lambda_n,R}) \leq C_\Gamma, \quad (4.18)$$

assim, para alguma subsequência,

$$I_{\lambda_n}(v_{\lambda_n}) \rightarrow c \in [0, C_\Gamma].$$

Agora, argumentando como na Proposição 1.2.1, concluímos que

- (a)  $v \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{i=1}^l \Omega_i$  e  $v$  é uma solução de  $(P_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$ .
- (b)  $\|v_{\lambda_n} - v\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$ .

Além disso, como

$$\int_{\Omega_i} |v_\lambda^\pm|^p dx \geq \delta^*, \quad \forall i \in \Gamma$$

e

$$\int_{\Omega_j} |v_\lambda|^p dx \leq \frac{\xi}{2}, \quad \forall j \notin \Gamma,$$

o limite fraco  $v_\lambda \rightharpoonup v$  em  $H^2(\mathbb{R}^N)$  implica em

$$\int_{\Omega_i} |v^\pm|^p dx \geq \delta^*, \quad \forall i \in \Gamma \quad (4.19)$$

e

$$\int_{\Omega_j} |v|^p dx \leq \frac{\xi}{2}, \quad \forall j \notin \Gamma. \quad (4.20)$$

Por (4.19),  $v$  é uma solução nodal de  $(P_i)$  para cada  $i \in \Gamma$  e por (4.20)  $v \equiv 0$  em cada  $\Omega_j$  com  $j \notin \Gamma$ , por que se existe  $j \notin \Gamma$  com  $v \neq 0$  em  $\Omega_j$ , então por (4.8)

$$\xi \leq \int_{\Omega_j} |v|^p dx \leq \tilde{\mu} < \frac{\xi}{2}$$

o que é absurdo. De (a),

$$I_i(v) \geq c_i, \quad \text{para cada } i \in \Gamma.$$

Por outro lado, pelo item 2 e (4.18)

$$I_i(v) \leq C_\Gamma, \quad \forall i \in \Gamma, \quad (4.21)$$

então,

$$I_i(v) = c_i, \quad \forall i \in \Gamma,$$

pois se existir  $i_0 \in \Gamma$  tal que

$$I_{i_0}(v) > c_{i_0},$$

temos

$$\sum_{i \in \Gamma} I_i(v) > C_\Gamma,$$

o que contradiz (4.21).

Do estudo feito acima, a função  $v_\lambda$  é uma solução para  $(B_1)_\lambda$  e para cada sequência  $\{v_{\lambda_n}\}$ , podemos extrair uma subsequência  $\{v_{\lambda_{n_i}}\}$  tal que

$$v_{\lambda_{n_i}} \rightarrow v \text{ em } H^2(\mathbb{R}^N),$$

para algum  $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$ . Além disso, para cada  $i \in \Gamma$ ,  $v|_{\Omega_i}$  é uma solução nodal de energia mínima de  $(P_i)$  e  $v \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma$ .

# Apêndices

# Apêndice A

## Apêndice A: Princípio do Máximo para o Operador Biharmônico

Neste apêndice, baseados em [40], trataremos de um dos pontos mais delicados no estudo do operador Biharmônico,  $\Delta^2$ , que é determinar sobre quais condições teremos um princípio de máximo para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = Bu = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (P)$$

com  $Bu = \Delta u$  (Problema de Navier) ou  $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$  (Problema de Dirichlet).

### A.1 A função de Green

Para obtermos uma forma explícita para determinar uma solução pra o problema (P), o primeiro passo é definir a solução fundamental do operador biharmônico  $\Delta^2$  em  $\mathbb{R}^N$ . Consideramos

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{2\Gamma(n/2 - 2)}{Ne_N 8\Gamma(N/2)} |x|^{4-n} & \text{se } N > 4 \text{ ou } N \text{ é ímpar} \\ \frac{(-1)^{2-N/2}}{Ne_N 4\Gamma(N/2)(2 - N/2)!} |x|^{4-N} & \text{se } N \leq 4 \text{ é par,} \end{cases} \quad (A.1)$$

então, no sentido distribucional

$$\Delta^2 F_N(x) = \delta_0,$$

onde  $\delta_0$  é a massa de Dirac na origem

**Definição A.1** Uma função de Green para  $(P)$  é uma função  $(x, y) \mapsto G(x, y) : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  satisfazendo :

- $x \mapsto G(x, y) - F_N(x - y) \in C^4(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  para todo  $y \in \Omega$  se definido sequencialmente para  $x = y$ ;
- $\Delta_x^2(G(x, y) - F_N(x - y)) = 0$  para todo  $(x, y) \in \Omega^2$  se definido sequencialmente para  $x = y$ ;
- $\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \partial\Omega \times \Omega$ .

Se  $f \in C^\infty(\Omega)$ , então a função de Green permite que se escreva a solução única do problema  $(P)$  como

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy. \quad (\text{A.2})$$

Determinar a forma exata da função de Green não é uma tarefa simples, Boggio em 1905 conseguiu calcular explicitamente a função de Green para o biarmônico quando  $\Omega$  é a bola unitária em  $\mathbb{R}^N$ , para mais detalhes indicamos o capítulo 2 de [40].

## A.2 O problema de Navier

No caso do problema de Navier podemos reescrever o problema  $(P)$  como o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v, & \text{in } \Omega \\ -\Delta v = f, & \text{in } \Omega \\ u = v = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então se  $f > 0$ , segue do princípio do máximo para o operador Laplaciano ao problema

$$\begin{cases} -\Delta v = f, & \text{in } \Omega \\ v = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

temos,  $v$  positiva e aplicando novamente o princípio do máximo, agora ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = v, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

concluimos que  $u > 0$ .

### A.3 O problema de Dirichlet

O caso do Problema de Dirichlet é mais sutil e temos pela expressão (A.2) que se a função de Green  $G(x, y)$  for positiva, então

$$f > 0 \Rightarrow u > 0.$$

Todavia, não temos a positividade da função de Green em qualquer domínio limitado, Por exemplo, em uma elipse  $E_{ab} \subset \mathbb{R}^2$  de eixos  $a, b > 0$ . Se a excentricidade  $\frac{a}{b} \geq 1, 2$ , então a função de Green para  $\Delta^2$  em  $E_{a,b}$  troca de sinal. No caso da bola unitária  $B$ , a partir da expressão encontrada por Boggio mostra-se que a função de Green é positiva e conseqüentemente temos o seguinte resultado:

**Teorema A.1** *Para toda  $f \in L^p(B)$ ,  $1 < p < +\infty$ , existe uma única  $u \in W^{2,p}(B) \cap W_0^{1,p}(B)$  do problema de Dirichlet (P). Além disso,  $f \geq 0$ , então*

$$u > 0 \text{ em } B.$$

A positividade da função de Green para  $\Delta^2$  em uma bola unitária  $B$  não é um evento singular, mas continua verdadeiro sob pequenas  $C^{4,\alpha}$ -deformações suaves da bola, as quais definimos abaixo.

**Definição A.2** *Assumimos que  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são domínios limitados de classe  $C^{k,\alpha}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , dizemos que  $\Omega_2$  está  $\varepsilon$ -próximo de  $\Omega_1$  no sentido  $C^{k,\alpha}$ , se existir uma aplicação sobrejetiva  $g : \overline{\Omega_1} \rightarrow \overline{\Omega_2}$  de classe  $C^{k,\alpha}$  tal que*

$$\|g - Id\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_1})} \leq \varepsilon.$$

**Teorema A.3** *Seja  $B$  a bola unitária do  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ . Então existe  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N) > 0$  tal que para  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  a seguinte afirmação é verdadeira. Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio de classe  $C^{4,\alpha}$  que está  $\varepsilon$ -próximo de  $B$  no sentido  $C^{4,\alpha}$ , então a função de Green  $G_{\Delta^2, \Omega}$  para  $\Delta^2$  em  $\Omega$  sob a condição de Dirichlet é estritamente positiva, isto é*

$$G_{\Delta^2, \Omega}(x, y) > 0, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y.$$

# Apêndice B

## Um exemplo especial

No **Capítulo 3** apresentamos uma classe de termos não lineares que satisfazem nossas hipóteses mas que não satisfazem as hipóteses do artigo [70], a saber as funções da forma

$$f(t) = \varphi(t)|t|^{p-2}t,$$

onde  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função positiva, crescente e limitada escolhida de tal maneira que para cada  $s > 1$

$$\frac{f'(t)}{t^{s-2}} \rightarrow \infty, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Desde que,

$$f'(t) = \varphi'(t)|t|^{p-2}t + (p-1)\varphi(t)|t|^{p-2}.$$

vamos construir uma função  $\varphi$  com as características supra citadas e tal que

$$\frac{\varphi'(t)}{t^{s-2}} \rightarrow \infty, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Consideramos então que  $\varphi(0) = \frac{1}{2}$  e construímos uma sequência  $(t_n)$  tal que

$$t_1 = 2, \varphi(t_1) = 2 \text{ e } \varphi'(t_1) = e$$

$$t_2 = 4, \varphi(t_2) = 2 + \frac{1}{2} \text{ e } \varphi'(t_2) = e^{t_2}$$

$$t_3 = 2^3, \varphi(t_3) = 2 + \sum_1^3 \frac{1}{2^n} \text{ e } \varphi'(t_3) = e^{t_3} \dots$$

em geral,

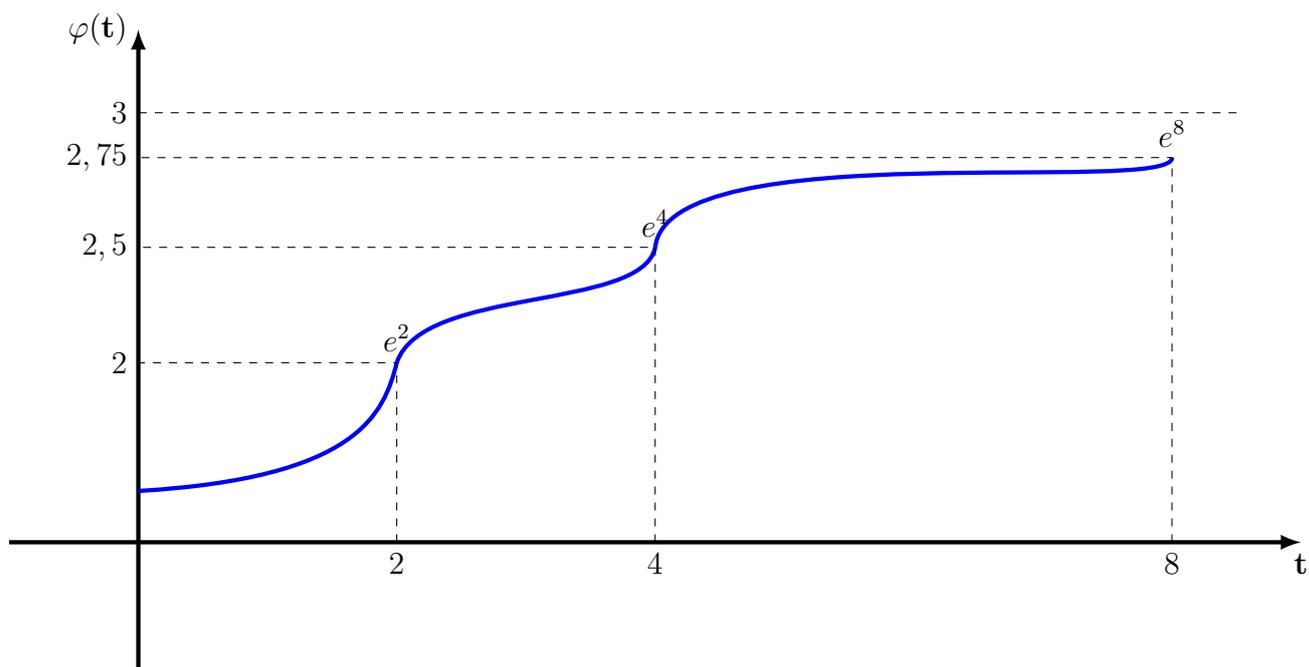
$$t_n = 2^n, \varphi(t_n) = 2 + \sum_1^n \frac{1}{2^n} \varphi'(t_n) = e^{t_n}.$$

Unindo estes pontos de forma que a função seja de classe  $C^1$ , temos a função desejada, pois a sequência  $(t_n)$  é tal que  $t_n \rightarrow \infty$ , temos

$$\varphi(t_n) \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\frac{\varphi'(t_n)}{t_n^s} = \frac{e^{t_n}}{t_n^s} \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$



# Referências Bibliográficas

- [1] N. Ackermann, *On a periodic Schrödinger equation with nonlocal superlinear part*, Math. Z. **248**(2004), 423-443.
- [2] C. O. Alves, *Existence of Multi-bump Solutions For a Class of Quasilinear Problems*, Adv. Nonlinear Stud. **6**(2006), 491-509.
- [3] C. O. Alves, *Multiplicity of multi-bump type nodal solutions for a class of elliptic problems in  $\mathbb{R}^N$* , Topol. Methods Nonlinear Anal. **34** (2009), 231-250.
- [4] C.O. Alves, P.C. Carrião, O.H. Miyagaki, *Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth*, J. Math. Anal. Appl. 260 (2001) 133-146
- [5] C.O.Alves, P. C. Carrião e O. H. Miyagaki, *On the existence of positive solutions of a perturbed Hamiltonian system in  $\mathbb{R}^N$* . J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), 673-690.
- [6] C.O. Alves, D.C. de Moraes Filho e M.A.S. Souto, *Radially symmetric solutions for a class of critical exponent elliptic problems in  $\mathbb{R}^N$* , Electron. J. Differential Equations 7 (1996) 1-12
- [7] C. O. Alves, D.C. De Moraes Filho e M. A. S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in  $\mathbb{R}^N$* , Proc. Edinb. Math. Soc. **52** (2009), 1-21.
- [8] C.O. Alves e M.C. Ferreira, *Multi-bump solutions for a class of quasilinear problems involving variable exponents*, Ann. Mat. Pura Appl. **194** (2015),1563-1593.
- [9] C. O. Alves e G. M. Figueiredo, *Multi-bump solutions for a Kirchhoff-type problem*, Adv. Nonlinear Anal. **5** (2016), 1-26.

- [10] C. O. Alves, G. M. Figueiredo e A. B. Nobrega, *Existence of semi-nodal solution for a class of FitzHugh-Nagumo type system*. Monatsh.Math. (2016), 1-12.
- [11] C.O. Alves e A.B. Nóbrega, *Existence of multi-bump solutions for a class of elliptic problems involving the biharmonic operator*, Monatsh.Math. Aceito para publicação.
- [12] C.O. Alves e A.B. Nóbrega, *Nodal ground state solution to a biharmonic equation via dual method*, J. Differential Equations **260** (2016), 5174-5201.
- [13] C.O. Alves, A.B. Nóbrega e M. Yang, *Multi-bump solutions for Choquard equation with deepening potential well*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55**(2016) 1-28.
- [14] C.O. Alves e D.S. Pereira, *Multiplicity of Multi-Bump type nodal solutions for a class of elliptic problems with exponential critical growth in  $\mathbb{R}^2$* , arXiv:1412.4219v1 [math.AP].
- [15] C. O. Alves e M. A. S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with exponential critical growth in  $\mathbb{R}^2$* , J. Differential Equations **244** (2008), 1502-1520.
- [16] C. O. Alves e M. A. S. Souto, *Existence of least energy nodal solution for a Schrödinger-Poisson system in bounded domains*, Z. Angew. Math. Phys. **65** (2014), 1153-1166.
- [17] C. O. Alves e M. Yang, *Existence of positive multi-bump solutions for a Schrödinger-Poisson system in  $\mathbb{R}^3$* . Discrete Contin. Dyn. Syst. **36**(2016), 5881 - 5910.
- [18] A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973) 349-381
- [19] A. Ambrosetti e M. Struwe, *A note on the problem  $\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u$* , Manuscripta Math. **54** (1986), 373-379.

- [20] T. Bartsch e Z. Tang, *Multibump solutions of nonlinear Schrödinger equations with steep potential well and indefinite potential*. Discrete Contin. Dyn. Syst, v. 33, n. 1, p. 7-26, 2013.
- [21] T. Bartsch e Z.Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on  $\mathbb{R}^N$* , Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), 1725-1741.
- [22] T. Bartsch e Z.Q. Wang, *Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, Z. Angew. Math. Phys. **51** (2000), 366-384.
- [23] T. Bartsch, T. Weth e M. Willem, *Partial symmetry of least energy nodal solution to some variational problems*, J. Anal. Math. 96(2005)1-18.
- [24] T. Bartsch e T. Weth, *Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology*, Ann. Inst. H.Poincaré Anal. Non Linéaire 22 (2005), 259-281.
- [25] T. Bartsch, Z. Liu e T. Weth, *Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations*, Comm. Partial Differential Equations 29(2004), 25-42.
- [26] E.Berchio e F. Gazzola, *Positive solutions to a linearly perturbed critical growth biharmonic problem*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **4** (2011), 809-823.
- [27] H. Berestycki e P.L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I: Existence of a ground state*, Arch. Ration. Mech. Anal. **82**(1983),313-346.
- [28] D. Bonheure, E. dos Santos, M. Ramos e H. Tavares, *Existence and symmetry of least energy nodal solutions for Hamiltonian elliptic systems*. J. Math. Pures Appl. 104 (2015), 1075-1107.
- [29] D. Bonheure, E. dos Santos e H. Tavares, *Hamiltonian elliptic systems: a guide to variational frameworks*. Port. Math. 71 (2014), no. 3-4, 301-395.
- [30] D. Bucur e F. Gazzola, *The first biharmonic Steklov eigenvalue: positivity preserving and shape optimization*, Milan J. Math. **79** (2011), 247-258.

- [31] B. Buffoni, L. Jeanjean e C.A. Stuart, *Existence of a nontrivial solution to a strongly indefinite semilinear equation*, Proc. Amer. Math. Soc., **119**(1993), 179-186.
- [32] A. Castro, J. Cossio e J. Neuberger, *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*, Rocky Mountain J. Math. 27 (1997), 1041-1053.
- [33] S. Cingolani, M. Clapp e S. Secchi, *Multiple solutions to a magnetic nonlinear Choquard equation*, Z. Angew. Math. Phys., **63** (2012), 233–248.
- [34] M. Clapp e Y.H. Ding, *Minimal nodal solutions of a Schrödinger equation with critical nonlinearity and symmetric potential*, Diff. Int. Equa. **16**(2003), 981-992.
- [35] V. Coti-Zelati e P.H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on  $\mathbb{R}^N$* , Comm. Pure Appl. Math. **45** (10) (1992) 1217-1269.
- [36] M. del Pino e P. Felmer, *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **4**(1996), 121–137.
- [37] Y.H. Ding e K.Tanaka , *Multiplicity of Positive Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation*, Manuscripta Math. **112** (2003), 109-135.
- [38] A. Ferrero e F. Gazzola, *A partially hinged rectangular plate as a model for suspension bridges*, Cont. Dynam. Syst. A. **35** (2015),5879 - 5908.
- [39] S. Fu, Y. Jiao e Z. Tang, *Multi-bump bound states for a nonlinear Schrödinger system with electromagnetic fields*,J. Math. Anal. Appl. **404**(2013), 239-259.
- [40] F. Gazzola, H. Grunau e G. Sweers, *Polyharmonic boundary value problems, Lectures notes in mathematics*,1991. Springer-Verlag , Berlin, (2010).
- [41] F. Gazzola e H. Grunau, *Critical dimensions and higher order Sobolev inequalities with remainder terms*. Nonlin. Diff. Eq. Appl. **8** (2001), 35-44.
- [42] M. Ghimenti e J. Van Schaftingen, *Nodal solutions for the Choquard equation*, J. Funct. Anal., **271** (2016), 107-135.
- [43] M. Ghimenti, V. Moroz e J. Van Schaftingen, *Least Action nodal solutions for the quadratic Choquard equation*, Proc. Amer. Math. Soc. Aceito para publicação.

- [44] C. P. Gupta e Y. C. Kwong, *Biharmonic eigenvalue problems and  $L^p$  estimates*. Int. J. Math. Sci. **13** (1990), 469-480.
- [45] T. Jung e Q-Heung Choi, *Nonlinear biharmonic boundary value problem*. Bound. Value Probl. (2014), 2014:30.
- [46] A. C Lazer e P. J. McKenna, *Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis*. Siam Rev. **32** (1990), 537-578.
- [47] E. H. Lieb, *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Studies in Appl. Math., **57**(1976/77), 93–105.
- [48] E. Lieb e M. Loss, *Analysis: Graduate Studies in Mathematics*, AMS, Providence, Rhode island, 2001.
- [49] P.L. Lions, *The Choquard equation and related questions*, Nonlinear Anal., **4**(1980) 1063–1072.
- [50] L. Ma e L. Zhao, *Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation*, Arch.Ration. Mech. Anal., **195**(2010), 455–467.
- [51] C. Miranda, *Un' osservazione su un teorema di Brouwer*, Bol. Un. Mat. Ital., **3** (1940) 5–7.
- [52] V. Moroz e J. Van Schaftingen, *Ground states of nonlinear Choquard equations: Existence, qualitative properties and decay asymptotics*, J. Funct. Anal., **265**(2013), 153–184.
- [53] V. Moroz e J. Van Schaftingen, *Existence of ground states for a class of nonlinear Choquard equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **367**(2015),6557-6579.
- [54] V. Moroz, J. Van Schaftingen, *Semi-classical states for the Choquard equation*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **52** (2015), 199–235.
- [55] V. Moroz e J. Van Schaftingen, *Ground states of nonlinear Choquard equations: Hardy-Littlewood-Sobolev critical exponent*, Commun. Contemp. Math. **17** (2015), 1550005.

- [56] A. Pankov, *Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals*. Milan J. Math. **73** (2005), 259-287.
- [57] T. Passalacqua e B. Ruf, *Hardy-Sobolev inequalities for the biharmonic operator with remainder terms*. Journal of Fixed Point Theory and Applications, **15**(2014), 405-431.
- [58] S. Pekar, *Untersuchung über die Elektronentheorie der Kristalle*, Akademie Verlag, Berlin, 1954.
- [59] R. Penrose, *On gravity's role in quantum state reduction*, Gen. Relativ. Gravitat., **28**(1996) , 581–600.
- [60] M.T.O. Pimenta, *Estudo de alguns problemas elípticos para o operador biarmônico*, Tese de Doutorado, orientador Sérgio Henrique Monari Soares, ICMC-USP, São Carlos, 2011.
- [61] M.T.O. Pimenta e S.H.M. Soares, *Existence and concentration of solutions for a class of biharmonic equations*. J. Math. Anal. Appl. **390** (2012), 274-289.
- [62] M.T.O. Pimenta e S.H.M. Soares, *Singularly perturbed biharmonic problems with superlinear nonlinearities*. Adv. Differential Equations **19** (2014), 31-50.
- [63] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*. Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), 270-291.
- [64] B.Ruf e F. Sani. *Sharp Adams-type inequalities in  $\mathbb{R}^N$* . Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 645-670.
- [65] S. Secchi, *A note on Schrödinger-Newton systems with decaying electric potential*, Nonlinear Anal., **72** (2010), 3842–3856.
- [66] M. Struwe, *Variational Methods: Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer, Berlin 1990.
- [67] X. Zhang, S. Ma, *Multi-bump solutions of Schrödinger-Poisson equations with step potential well*, Z. Angew. Math. Phys., **66**(2015), 1615-1631.

- [68] Z.P. Wang , H.S. Zhou, *Positive solutions for nonlinear Schrödinger equations with deepening potential well.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **11** (2009), 545-573.
- [69] J. Wei, M. Winter, *Strongly Interacting Bumps for the Schrödinger-Newton Equations,*J. Math. Phys., **50**(2009), 012905.
- [70] T. Weth, *Nodal solutions to superlinear biharmonic equations via decomposition in dual cones.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 28 (2006), 33-52.
- [71] M. Willem, *Minimax Theorems,* Birkhäuser Boston, MA, 1996.
- [72] M. Willem, *Subharmonic oscillations for a semilinear wave equation,* Nonlinear Anal. **09** (1985), 503-514.