

Universidade Federal da Paraíba  
Universidade Federal de Campina Grande  
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática  
Doutorado em Matemática

# Propriedades de Simetria para Soluções de Equações Elípticas Quase Lineares em Modelos Riemannianos

por

Ricardo Pinheiro da Costa

João Pessoa - PB  
Julho/2014

# Propriedades de Simetria para Soluções de Equações Elípticas Quase Lineares em Modelos Riemannianos

por

Ricardo Pinheiro da Costa <sup>†</sup>

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFPG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Julho/2014

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

C837p Costa, Ricardo Pinheiro da.  
Propriedades de simetria para soluções de equações  
elípticas quase lineares em modelos riemannianos / Ricardo  
Pinheiro da Costa.-- João Pessoa, 2014.  
81f.  
Orientador: João Marcos Bezerra do Ó  
Tese (Doutorado) – UFPB-UFCG  
1. Matemática. 2. Operador de p-Laplace-Beltrami.  
3. Hiperfícies geodésicas. 4. Planos móveis - métodos.  
5. Simetria de soluções.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

**Universidade Federal da Paraíba**  
**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática**  
**Doutorado em Matemática**

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

---

**Prof. Dr. Bernhard Heinrich Ruf - University of Milan/Itália**

---

**Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla Lopez - USACH/Chile**

---

**Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE**

---

**Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB**

---

**Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB**  
**Orientador**

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFPG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Julho/2014**

# Resumo

Neste trabalho investigamos propriedades de simetria e monotonicidade de soluções para equações envolvendo o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami no espaço hiperbólico e na esfera. As principais ferramentas empregadas para obtenção do resultado é uma variante do método dos planos móveis e um cuidadoso uso de princípios do máximo e de comparação.

**Palavras-chave:** Operador de  $p$ -Laplace-Beltrami; hiperfícies totalmente geodésicas; método dos planos móveis; simetria de soluções.

# Abstract

In this work we investigate monotonicity and symmetry properties of solutions to equations involving the  $p$ -Laplace-Beltrami operator in hyperbolic space and sphere. The main tools used to obtain the result is a variant of the method of moving planes and a careful use of the maximum and comparison principles.

**Keywords:**  $p$ -Laplace-Beltrami operator; totally geodesic hypersurface; method of moving planes, symmetry of solutions.

# Agradecimentos

- A Deus, por toda graça e iluminação que somente Ele pode dar.
- Ao meu orientador João Marcos Bezerra do Ó por todo o conhecimento compartilhado e lições tanto acadêmicas quanto de vida.
- Aos meus professores de Pós-Graduação. Em especial a Everaldo Souto de Medeiros, Uberlandio Batista Severo e Henrique Fernandes de Lima.
- Aos Professores Bernhard Ruf, Pedro Ubilla, Miguel Lozano, Manassés de Souza por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho e também pelas valiosas contribuições que deram ao texto final.
- A professora Flávia Jerônimo Barbosa que acreditou em meu trabalho.
- Aos colegas que sempre estiram presentes e deram forças e alegria nos momentos difíceis sejam eles do doutorado, mestrado, graduação ou do MILENIO. Especialmente, Esteban Pereira da Silva, Gilson Mamede de Carvalho, Diego Ferraz de Souza, Rainelly Cunha de Medeiros, José Carlos de Albuquerque Melo Júnior, Rayssa Helena Aires de Lima Cajú, Thiago José Machado, Victor José Araújo de Carvalho, Suelena de Souza Rocha e Elize de Castro Correa de Oliveira.
- A minha família pelo apoio, compreensão e paciência. Principalmente a minha mãe Vilma Pinheiro da Costa, ao meu pai Fernando Antonio da Costa pelo cuidado e ajuda a mim dado enquanto viaja de madrugada para assistir aulas na UFCG. E também, a minha irmã Fernanda Pinheiro Medeiros Almeida e meu cunhado Petronio Jorge de Medeiros Almeida pela ajuda que me deram durante minhas viagens.
- A minha namorada Maria Aparecida Silva de Andrade por todo amor e ajuda. Sem ela acredito que não teria concluído este trabalho.
- Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

*“Os matemáticos são seres humanos, embora costumem se perder em pensamentos abstratos.”*

*Ian Stewart*



# Dedicatória

Aos meus pais Vilma Pinheiro da Costa  
e Fernando Antonio da Costa por sua  
capacidade de acreditar e investir em  
mim.

# Sumário

Introdução . . . . .	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Operadores Diferenciais em Variedades . . . . .	7
1.2 Reflexão em Espaços de Curvatura Constante . . . . .	12
1.2.1 Reflexão no Espaço Hiperbólico . . . . .	12
1.2.2 Reflexão na Esfera . . . . .	14
1.3 Princípios do Máximo e de Comparação . . . . .	16
<b>2 Equações Envolvendo o Operador de <math>p</math>-Laplace-Beltrami com <math>1 &lt; p &lt; \infty</math> em <math>\mathbb{H}^n</math> e <math>\mathbb{S}^n</math> Não Uniformemente Elípticas em Apenas um Ponto</b>	<b>19</b>
2.1 Resultado Principal . . . . .	19
2.2 Prova dos Teoremas . . . . .	20
2.2.1 Prova do Teorema 2.1.1 . . . . .	20
2.2.2 Prova do Teorema 2.1.2 . . . . .	24
2.2.3 Prova do Teorema 2.1.3 . . . . .	26
<b>3 Equações Envolvendo o Operador de <math>p</math>-Laplace-Beltrami com <math>p &gt; 2</math> em <math>\mathbb{H}^n</math></b>	<b>28</b>
3.1 Introdução e Resultados Principais . . . . .	28
3.2 Prova dos Resultados Principais . . . . .	29
<b>4 Equações Envolvendo o Operador de <math>p</math>-Laplace-Beltrami com <math>1 &lt; p &lt; 2</math> em <math>\mathbb{H}^n</math></b>	<b>49</b>

4.1	Resultados Principais . . . . .	50
4.2	Resultados para Domínios Gerais . . . . .	52
4.3	Prova do Teorema 4.1.1 e seus Corolários . . . . .	59
	<b>Referências</b>	<b>68</b>

# Introdução

Neste trabalho estudamos propriedades de simetria e monotonicidade de soluções para o Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

em que  $\Omega$  é um subconjunto do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  ou da esfera  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Delta_p$  é o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami de  $\Omega$ ,  $p > 1$ ,  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Ao longo do trabalho teremos hipóteses adicionais em  $\Omega$ ,  $f$  e  $u$ .

A fim de motivar e ilustrar a importância de nossos resultados iniciamos dando uma breve história deste assunto. O estudo de propriedades de simetria e monotonicidade para soluções de equações diferenciais foi iniciada por J. Serrin [31] em 1971 usando o método dos planos móveis (MPM), também conhecido como método de reflexão de Alexandrov, criado pelo matemático Soviético A. D. Alexandrov no início da década de 50 pra estudar variedades com curvatura média constante [1, 2]. Depois, nos célebres artigos [22, 23], usando o MPM, B. Gidas, M. Ni e L. Nirenberg provaram que toda solução positiva  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  do Problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

é radialmente simétrica quando  $f \in C^1([0, +\infty))$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é uma bola ou  $\Omega = \mathbb{R}^n$  (supondo que  $u(x) = O(|x|^{2-n})$  no infinito,  $n \geq 3$ ). Depois disto, pelo uso do método dos planos móveis em combinação com o princípio do máximo para domínios estreitos,

H. Berestycki e L. Nirenberg [5] melhoraram o resultado em [22, 23]. Explicitamente, eles provaram monotonicidade e simetria na direção  $x_1$  para soluções positivas  $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  de equações não lineares em um domínios limitados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  que é convexo na direção  $x_1$  e supondo que  $f$  é um função Lipschitz contínua.

O método dos planos móveis e suas variantes juntamente com princípios do máximo tem sido aplicados para estender e melhorar o resultado citado acima em algumas direções. Primeiro, ele foi usado para obter propriedades de simetria e monotonicidade para soluções não negativas de equações elípticas semi lineares em domínios tanto limitados quanto não limitados do  $\mathbb{R}^n$  e com não linearidades contínuas, mas não necessariamente Lipschitzianas (ver por exemplo [8, 9, 10, 17, 18, 19] e suas referências). Em outra direção ele foi usado para estudar propriedades de simetria para soluções positivas de equações envolvendo o operadores quase lineares começando pelo operador  $p$ -Laplaciano. Deve ser mencionado que as ideias usadas para estudar o caso Laplaciano não podem ser aplicadas diretamente para obtenção de resultados de simetria e monotonicidade de soluções para equações envolvendo o operador  $p$ -Laplaciano porque este é um operador elíptico singular ou degenerado (se  $1 < p < 2$  ou  $p > 2$ , respectivamente) no conjunto crítico  $Z := Z(u) := \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}$ , e como foi provado em [16, 32], temos em geral apenas  $C^{1,\alpha}$ -regularidade para suas soluções e estas podem somente ser consideradas no sentido fraco. Também os princípios do máximo não são válidos em geral sendo substituídos por princípios de comparação

O primeiro trabalho envolvendo o operador  $p$ -Laplaciano é devido a M. Badiale e E. Nabana [4], assumindo que  $f$  é uma função de classe  $C^1$ , eles provaram que soluções positivas do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

são radialmente simétricas quando  $1 < p < \infty$ , quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é uma bola ou  $\Omega = \mathbb{R}^n$  (supondo que  $u(x) \rightarrow 0$  no infinito) e sobre a hipótese adicional que o conjunto crítico  $Z = \{0\}$ . Eles aplicaram o método dos planos móveis sem muitas dificuldades, pois sobre

estas hipóteses, soluções de (2) pertencem a classe  $C^2$  em  $\Omega \setminus \{0\}$  e satisfazem uma equação de segunda ordem uniformemente elíptica e assim podemos usar princípios do máximo usuais.

Para caso  $1 < p < 2$  diversos autores melhoram os resultados contidos em [4]. Sem a hipótese adicional sobre o conjunto crítico  $Z$  foi obtidos resultados de simetria e monotonicidade em [11, 12, 13, 14, 15]. Para isto foi crucial no argumento dos autores um princípio de comparação provado em [11].

Para  $p > 2$ , usando espaços de Sobolev com o peso  $\rho = |Du|^{p-2}$  e o método dos planos móveis em combinação com técnicas de comparação, L. Damascelli e B. Sciunzi [15] provaram propriedades de simetria e monotonicidade para soluções positivas  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  do Problema (2), quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio suave limitado simétrico e  $f$  é uma função contínua localmente Lipschitziana. Em [30] B. Sciunzi estendeu os resultados em [15] para o caso em que  $f$  muda de sinal, mas é não decrescente perto dos seus zeros. Enfatizamos que este caso é mais envolvente. Por exemplo, M. Grossi et al [25] e F. Brock [7] deram exemplos de soluções não simétricas de (2) para não linearidades de classe  $C^2$  que mudam de sinal. Usando uma nova técnica de rearrajamento, chamada simetrização Steiner contínua, F. Brock em [6, 7] provou resultados de simetria para soluções não negativas do Problema (2) no caso  $1 < p \leq 2$  e introduziu a noção de *simetria local* e provou que no caso  $p > 2$  toda solução para (2) é radialmente localmente simétrica se  $f$  é não decrescente. Uma variante do método dos planos móveis juntamente com um método de inversão local foi usado por J. Dolbeault, P. Felmer e R. Monneau [20] para obter que resultados de simetria local se  $f$  é somente contínua, tem um número finito de zeros e é não crescente quando muda de sinal. Além disso, eles obtiveram resultados de simetria global se  $f$  é somente contínua e positiva.

Resultados de simetria para problemas elípticos definidos sobre variedades Riemannianas com curvatura sectional constante foram considerados recentemente, por exemplo, por S. Kumaresan and J. Prajapat. Mais precisamente, nos artigos [26] e [27] eles obtiveram resultados análogos aos em [22] e [31] respectivamente quando  $\Omega$  é uma bola geodésica

e  $\Omega$  é um domínio suave no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  ou na esfera  $\mathbb{S}^n$ . Para este fim, eles introduziram uma noção de reflexão em  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  e então usaram esta noção, o princípio do máximo para domínios em  $\mathbb{R}^n$  e uma adaptação do método dos planos móveis para estes espaços.

Em nosso trabalho estendemos alguns resultados de monotonicidade e simetria de soluções para o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami em espaços Riemannianos modelos, como o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  e a esfera  $\mathbb{S}^n$ . Nossa tese foi dividida em quatro capítulos.

No Capítulo 1, a fim de tornar nosso texto mais independente para o leitor, encontram-se fatos básicos sobre variedades Riemannianas e princípios do máximo e comparação que usaremos no decorrer dos capítulos seguintes. Definimos o ente geométrico que substituirá os “planos” no Método dos Planos Móveis, a saber as hiperfícies totalmente geodésicas fechadas, e também definimos reflexão com respeito a estes entes no espaço hiperbólico e na esfera.

No Capítulo 2, estudamos a simetria de soluções para o Problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega, \end{array} \right. \quad (3)$$

quando  $1 < p < \infty$ ,  $\Omega = B = B(x_0, R)$  é uma bola geodésica no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  ou cujo fecho está contido em um hemisfério da esfera  $\mathbb{S}^n$ , e a não linearidade  $f$  é uma função contínua localmente Lipschitziana (ver Teorema 2.1.1) Para provar o resultado usamos o método dos planos móveis adaptado a hiperfícies totalmente geodésica fechadas e um princípio do máximo forte e Lema de Hopf para operadores uniformemente elípticos no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Para tanto se faz necessário introduzir um controle adicional sobre o conjunto crítico  $Z(u)$ , a saber

$$\nabla u(x) \neq 0 \text{ em } B \setminus \{x_0\}. \quad (4)$$

Neste capítulo provamos também um resultado de simetria e monotonicidade para o

espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  inteiro. Mais especificamente, fixado  $x_0 \in \mathbb{H}^n$  estudamos soluções positivas do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \mathbb{H}^n \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{quando } d(x, x_0) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5)$$

satisfazem (4), onde  $1 < p < \infty$ ,  $f$  é uma função contínua localmente Lipschitziana crescente em  $[0, \eta)$ , para algum  $\eta > 0$  (ver Teorema 2.1.3).

No Capítulo 3 focamos o caso  $p > 2$  (caso degenerado) do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } B \\ u \geq 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (6)$$

onde  $\Delta_p$  é o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami na bola geodésica  $B = B(x_0, R)$  em  $\mathbb{H}^n$ . Diferente do Capítulo 2 é requerido apenas a regularidade

$$u \in C^2(B \setminus (\nabla u)^{-1}(0)) \cap C^{1,\alpha}(u^{-1}([0, M])) \quad \text{com} \quad M = \max_{\bar{B}} u, \quad (7)$$

obtida naturalmente via resultados de regularidade como em [16] ou [32], não supondo um controle adicional no conjunto crítico  $Z(u)$ . No caso em que a não linearidade  $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  não muda de sinal obtemos um resultado de monotonicidade e simetria radial (ver Teorema 3.1.1). O caso em que  $f$  pode mudar de sinal é mais delicado e as soluções podem não ser radiais. Supondo que

- (i) o conjunto  $f^{-1}(0)$  é finito,
- (ii)  $f(0) \geq 0$
- (iii) e que se  $s_0 \in f^{-1}(0)$  então existe  $\eta > 0$  tal que  $f(s)$  é crescente sobre  $(s_0 - \eta, s_0 + \eta) \cap \mathbb{R}_+$  ou  $f(s) \geq 0$  sobre  $(s_0, s_0 + \eta)$

obtemos um que as soluções do Problema (6) são localmente radialmente simétricas (ver Teorema 3.1.2). A Demonstração deste resultado envolvem a utilização do método dos



planos móveis, os princípios do máximo forte e de comparação juntamente técnicas de inversão local. Aqui também se fez uso de hiperfícies totalmente geodésicas para substituir a noção de planos no espaço hiperbólico. Retirada da hipótese (4), presente nos resultados estudados no Capítulo 2, nos leva a um método mais local com a análise de pontos de obstrução (ver Definição 3.2.2) gerados pelo conjunto crítico  $Z(u)$ .

No Capítulo 4 estudamos resultados de simetria e monotonicidade para o caso singular, isto é,  $1 < p < 2$  do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \quad (8)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado em  $\mathbb{H}^n$ ,  $\Delta_p$  é o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami em  $\mathbb{H}^n$ ,  $1 < p < 2$ , e  $f$  é uma função localmente Lipschitz contínua.

Iniciamos com o Teorema 4.2.1 que diz que, quando começamos o procedimento dos planos móveis, devemos alcançar a possível posição maximal a menos que o conjunto  $Z$  de pontos críticos de  $u$  crie uma componente conexa  $C$  do conjunto onde  $\nabla u \neq 0$ , que é simétrico com respeito a uma hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0}$  (que é definida em (4.13)) e onde  $u$  coincide com a função  $u_{\lambda_0}$ . Portanto todos os esforços subsequentes serão para provar que o conjunto  $C$  não existe. O primeiro passo para isto, deduzido da Proposição 4.2.2, é que se  $u$  é constante sobre um subconjunto conjunto conexo de ponto críticos de  $\partial C$  cuja projeção na hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0}$  contém um subconjunto aberto de  $T_{\lambda_0}$  então um tal conjunto  $C$  não existe. Isto é provado por um cuidadoso uso do Lema de Hopf que dá uma propriedade do conjunto crítico de uma solução  $u$  de (8). Depois vamos mover ortogonalmente hiperfícies totalmente geodésica em direções próximas a  $e_1$ , a fim de provar que o “mau” conjunto  $C$  é também simétrico com respeito a hiperfícies totalmente geodésicas fechadas próximas, e logo na sua fronteira existe pelo menos uma parte conexa onde  $u$  é constante,  $\nabla u = 0$ , e cuja projeção na hiperfície  $T_{\lambda_0}$  contém um subconjunto aberto do hiperplano.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo pretendemos introduzir conceitos e resultados básicos que serão utilizados no decorrer do texto.

### 1.1 Operadores Diferenciais em Variedades

Neste capítulo  $(M, g)$  denota uma variedade de classe  $C^\infty$  paracompacta com uma métrica Riemanniana  $g$ . Seja  $(U, x_1, \dots, x_n)$  uma vizinhança coordenada denotemos por  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  os campos coordenados,  $g_{ij}(p) = g(p)(\partial_i(p), \partial_j(p))$  a expressão local da métrica Riemanniana.

**Definição 1.1.1** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ . O gradiente de  $f$  é o campo vetorial de classe  $C^\infty$ ,  $\nabla f : M \rightarrow TM$ , definido por*

$$\langle \nabla f, X \rangle_p = X_p(f),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

1. Se  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal em uma vizinhança  $U$  de  $M$  então

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n E_i(f)E_j \quad \text{em } U.$$

2. Dado  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ , seja  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  uma curva de classe  $C^\infty$  tal que

$\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ . Então

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

**Proposição 1.1.2** *Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  e  $U \subset M$  uma vizinhança coordenada com campos coordenados  $\partial_1, \dots, \partial_n$ . Seja  $g^{ij}$  tal que  $\sum_{k=1}^n g_{ik}g^{kj} = 1$  então*

$$\nabla f = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial_k.$$

Em particular,

$$|\nabla f|^2 = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l}.$$

**Demonstração.** Sejam  $a_k \in C^\infty(U)$  com  $k = 1, \dots, n$  tais que  $\nabla f = \sum_{k=1}^n a_k \partial_k$  então

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = \partial_l(f) = \langle \nabla f, \partial_l \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j \partial_j, \partial_l \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle \partial_j, \partial_l \rangle = \sum_{j=1}^n a_j g_{jl}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} &= \sum_{l=1}^n g^{kl} \left( \sum_{j=1}^n a_j g_{jl} \right) = \sum_{j,l=1}^n a_j g^{kl} g_{jl} \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \left( \sum_{l=1}^n g^{kl} g_{jl} \right) = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{kj} = a_k. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla f = \sum_{k=1}^n a_k \partial_k = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial_k.$$

E conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= \left\langle \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial_k, \sum_{m,j=1}^n g^{mj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \partial_m \right\rangle = \sum_{j,k,l,m=1}^n g^{kl} g^{mj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} \langle \partial_k, \partial_m \rangle \\ &= \sum_{j,k,l,m=1}^n g^{kl} g^{mj} g_{km} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j,k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \sum_{m=1}^n g^{mj} g_{km} \right) = \\ &= \sum_{j,k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta_{jk} = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

conforme desejado. ■

De agora em diante consideraremos apenas variedades Riemannianas  $(M^n, g, \nabla)$ , isto é,  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é uma conexão afim compatível com métrica  $g$ .

**Definição 1.1.3** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . A divergência de  $X$  é a função  $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , dada por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde  $v \in T_p M$ .

**Proposição 1.1.4** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal em uma vizinhança  $U \subset M$ . Se  $X = \sum_{i=1}^n f_i E_i$  em  $U$ , então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (E_i(f_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle) \quad \text{em } U.$$

Em particular, se o referencial for geodésico em  $p \in U$  (isto é,  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ ) então

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p).$$

**Demonstração.** Por definição temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n (E_i \langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( E_i \left\langle \sum_{j=1}^n f_j E_j, E_i \right\rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n E_i(f_j) \langle E_j, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(f_i) \langle E_i, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle. \end{aligned}$$

Se o referencial é geodésico no ponto  $p$  então  $\nabla_{E_i} E_i(p) = 0$ . Portanto,  $(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)$ . ■

**Lema 1.1.5** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $U \subset M$  uma vizinhança coordenada com campo coordenados  $\partial_1, \dots, \partial_n$ . Se  $X = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$  em  $U$ , então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n f_i \Gamma_{ij}^j,$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel da métrica de  $M$  em  $U$ .

**Demonstração.** Note que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i} X &= \nabla_{\partial_i} \left( \sum_{k=1}^n f_k \partial_k \right) = \sum_{k=1}^n \nabla_{\partial_i} (f_k \partial_k) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \partial_k + f_k \nabla_{\partial_i} \partial_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \partial_k + f_k \sum_{j=1}^n \Gamma_{ik}^j \partial_j \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \partial_k + \sum_{k,j=1}^n f_k \Gamma_{ik}^j \partial_j \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \partial_k + \sum_{k,j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k \partial_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.
\end{aligned}$$

Usando o fato da conexão ser Riemanniana, isto é,  $\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i$  obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n f_j \Gamma_{ji}^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^i \right),
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Proposição 1.1.6** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $U \subset M$  uma vizinhança coordenada com campos coordenados  $\partial_1, \dots, \partial_n$ . Se  $X = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$  em  $U$ , então*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \sqrt{\det G}) \quad \text{em } U,$$

onde  $G = (g_{ij})$  é uma matriz da métrica.

**Demonstração.** Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{kj} \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{kj} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{jk} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj}.
\end{aligned}$$

**Afirmção 1.1.7** Vale a seguinte identidade:

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} = \frac{1}{\det G} \frac{\partial}{\partial x_i} (\det G).$$

De fato, seja  $(G^k)_i$  a matriz obtida de  $G = (g_{ij})$  derivando as entradas da  $k$ -ésima coluna na direção de  $\partial_i$ :

$$(G^k)_i = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & \partial_i g_{1k} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \partial_i g_{2k} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & \partial_i g_{nk} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Desde que  $\det G$  é linear em cada coluna, temos

$$\frac{1}{\det G} \frac{\partial}{\partial x_i} (\det G) = \sum_{k=1}^n \det(G^{-1}) \det((G^k)_i) = \sum_{k=1}^n \det(G^{-1}(G^k)_i).$$

E usando que  $G^{-1}G = Id$  segue que

$$\begin{aligned} G^{-1}(G^k)_i &= \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1k} & \cdots & g^{1n} \\ g^{21} & \cdots & g^{2k} & \cdots & g^{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nk} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & \partial_i g_{1k} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \partial_i g_{2k} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & \partial_i g_{nk} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & A_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & A_{k-1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $A_{lk} = \sum_{j=1}^n g^{lj} (\partial g_{jk} / \partial x_i)$ . Daí

$$\frac{1}{\det G} \frac{\partial}{\partial x_i} (\det G) = \sum_{k=1}^n \det(G^{-1}(G^k)_i) = \sum_{k=1}^n A_{kk} = \sum_{j,k=1}^n g^{kj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i},$$

que prova a Afirmção.

Agora usando o Lema 1.1.5 juntamente com a Afirmação 1.1.7 obtemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f_i \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{f_i}{2\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\det G) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{f_i}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det G}) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \sqrt{\det G} + f_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det G}) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \sqrt{\det G}),
\end{aligned}$$

concluindo a prova. ■

**Definição 1.1.8** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. O Laplaciano em  $M$  é o operador  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , também chamado de operador de Laplace-Beltrami, definido por*

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u, \quad u \in C^\infty(M).$$

Analogamente, para  $1 \leq p < \infty$  definimos o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami de  $M$  por

$$\Delta_p u = \operatorname{div} \{ |\nabla u|^{p-2} \nabla u \}, \quad u \in C^\infty(M).$$

**Observação 1.1.9** *Usando a Proposição 1.1.6 é fácil ver que em uma vizinhança coordenada  $U \subset M$  os operadores Laplaciano e  $p$ -Laplaciano assumem respectivamente as formas:*

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{\det G} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j,k=1}^n g^{ij} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right); \quad (1.1)$$

$$\Delta_p u = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{\det G} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right). \quad (1.2)$$

## 1.2 Reflexão em Espaços de Curvatura Constante

### 1.2.1 Reflexão no Espaço Hiperbólico

O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  é o semi espaço superior

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

com a métrica Riemanniana  $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = x_n^{-2} \delta_{ij}$ . É bem conhecida que  $\mathbb{H}^n$  é uma variedade suave com dimensão  $n$  e curvatura seccional constante igual a  $-1$ . As linhas retas perpendiculares ao hiperplano  $\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ , e os círculos de  $\mathbb{H}^n$  cujos planos são perpendiculares ao hiperplano  $\partial\mathbb{H}^n$  e cujos centros estão neste hiperplano são as únicas geodésicas em  $\mathbb{H}^n$ .

Lembremos que uma subvariedade  $N$  de  $(M, g)$  é totalmente geodésica se a segunda forma fundamental  $H_\eta$  da imersão  $i : N \rightarrow M$  é identicamente nula para toda  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$ , ou equivalentemente, se toda geodésica  $\gamma$  de  $N$  iniciando em  $p$  é uma geodésica de  $M$  iniciando em  $p$ .

Motivado pelo caso Euclidiano, é natural aplicar o “método dos plano móveis” usando hiperfícies totalmente geodésicas fechadas de  $\mathbb{H}^n$  em vez de planos de  $\mathbb{R}^n$ . Observe que interseções em  $\mathbb{H}^n$  de hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$ , ortogonais a  $\partial\mathbb{H}^n$  e a interseção com  $\mathbb{H}^n$  de esferas de  $\mathbb{R}^n$ , com centro sobre  $\partial\mathbb{H}^n$ , são as únicas hiperfícies totalmente geodésicas fechadas de  $\mathbb{H}^n$ . Baseados nesta noção geométrica de hiperfícies totalmente geodésicas fechadas introduzimos a definição de reflexão em  $\mathbb{H}^n$ , que será usada ao longo desta tese.

**Lema 1.2.1** *Seja  $\Gamma$  uma hiperfície totalmente geodésica fechada de  $\mathbb{H}^n$ . Dado  $x \in \mathbb{H}^n$ , existe um único ponto  $p = P_\Gamma(x) \in \Gamma$  tal que  $d(x, \Gamma) = d(x, p)$ , onde denotamos por  $d$  a função distância em  $\mathbb{H}^n$ .*

**Demonstração.** Desde que  $\Gamma$  é um conjunto fechado, existe  $p \in \Gamma$  tal que  $d(x, \Gamma) = d(x, p)$ , além disso  $p$  é único. De fato, Suponha por contradição que existe  $\bar{p} \in \Gamma$  tal que  $d(x, \bar{p}) = d(x, \Gamma) = d(x, p)$  e  $\bar{p} \neq p$ . Denotemos por  $\gamma$  a geodésica minimizante ligando  $x$  e  $p$  e  $\bar{\gamma}$  a geodésica minimizante ligando  $x$  e  $\bar{p}$ . Pela fórmula da primeira variação de energia concluimos que  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  intercepta  $\Gamma$  ortogonalmente em  $p$  e  $\bar{p}$ , respectivamente. Além disso, seja  $\sigma$  a geodésica minimizante em  $\Gamma$  ligando  $p$  e  $\bar{p}$ , então  $\sigma$  é uma geodésica em  $\mathbb{H}^n$  porque  $\Gamma$  é totalmente geodésica. Assim,  $T = \gamma \cup \sigma \cup \bar{\gamma}$  é um triângulo geodésico em uma superfície isometria a  $\mathbb{H}^2$  com ângulos  $\angle p = \pi/2 = \angle \bar{p}$ , e conseqüentemente a soma dos ângulos interiores de  $T$  é maior que  $\pi$ , que é impossível pelo teorema de Gauss-Bonnet, já que a curvatura seccional de  $\mathbb{H}^2$  é igual a  $-1$ , e a prova está completa. ■



Agora, desde que  $\mathbb{H}^n$  é completo e usando o Lema 1.2.1 podemos definir reflexões com respeito a hiperfície totalmente geodésica fechada  $\Gamma$  como segue:

$$R_\Gamma : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n; \quad R_\Gamma(x) = \gamma(-t),$$

onde  $\gamma$  denota a geodésica minimizante tal que  $\gamma(0) = x$  and  $\gamma(t) = P_\Gamma(x) \in \Gamma$ .

**Observação 1.2.2** Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  o conjunto  $\Pi_\lambda = \{p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n : p_1 = \lambda\}$  é uma hiperfície totalmente geodésica fechada de  $\mathbb{H}^n$  e a reflexão de um ponto  $x \in \mathbb{H}^n$  com respeito a  $\Pi_\lambda$  é

$$R_\lambda(x) := R_{\Pi_\lambda}(x) = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Lema 1.2.3** A aplicação  $R_\Gamma$  definida acima é uma isometria de  $\mathbb{H}^n$ .

**Demonstração.** De fato, dados  $x_1, x_2$  em  $\mathbb{H}^n$  seja  $p_1 = P_\Gamma(x_1), p_2 = P_\Gamma(x_2) \in \Gamma$  e seja  $\gamma_1, \gamma_2$  geodésicas minimizante tais que  $\gamma_1(0) = p_1, \gamma_1(t_1) = x_1, \gamma_2(0) = p_2$  e  $\gamma_2(t_2) = x_2$ . Assim,

$$d(R_\Gamma(x_1), R_\Gamma(x_2)) = d(\gamma_1(-t_1), \gamma_2(-t_2)) = d(x_1, x_2),$$

que completa a prova. ■

Seja  $\varphi$  uma isometria de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Considere  $\tilde{u} = u \circ \varphi^{-1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$ . Temos o seguinte

**Lema 1.2.4** (1) O operador de  $p$ -Laplace-Beltrami é invariante sobre isometrias, i.e.,  $(\Delta_p)(u)\varphi^{-1} = \Delta_p(u \circ \varphi^{-1})$ .

(2) Se  $u$  satisfaz a equação diferencial  $\Delta_p u + f(u) = 0$  em  $\Omega$  então  $\tilde{u}$  satisfaz a equação  $\Delta_p \tilde{u} + f(\tilde{u}) = 0$  em  $\tilde{\Omega}$ .

**Demonstração.** Segue da expressão local do operador de  $p$ -Laplace-Beltrami. ■

## 1.2.2 Reflexão na Esfera

Seja

$$\mathbb{S}^n(r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\}$$

a esfera de raio  $r$  com a métrica Riemanniana  $\tilde{g}_{ij}(p) = \delta_{ij}$  induzida por  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $r = 1$ , ou seja, vamos considerar a esfera unitária

$\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(1)$ . Sabemos que  $\mathbb{S}^n$  é uma variedade suave compacta com dimensão  $n$  e curvatura seccional 1. Os grandes círculos são as únicas geodésicas em  $\mathbb{S}^n$ . As hiperfícies totalmente geodésicas de  $\mathbb{S}^n$  são as esferas equatoriais  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Lema 1.2.5** *Seja  $\Gamma$  uma hiperfície totalmente geodésica fechada de  $\mathbb{S}^n$ . Dado  $x \in \mathbb{S}^n$  com  $d(x, \Gamma) < \pi/2$  então existe um único ponto  $p = P_\Gamma(x) \in \Gamma$  tal que  $d(x, \Gamma) = d(x, p)$ .*

**Demonstração.** Como  $\Gamma$  é fechado, existe um ponto  $p \in \Gamma$  tal que  $d(x, \Gamma) = d(x, p)$ .

Suponha que existe  $\tilde{p} \in \Gamma$  tal que  $p \neq \tilde{p}$  e

$$d(p, \Gamma) = d(x, p) = d(\tilde{p}, \Gamma).$$

Sejam  $\gamma, \tilde{\gamma}$  geodésicas minimizantes tais que

$$\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = 0 \quad \gamma(t_0) = p, \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{p}.$$

Pela primeira fórmula da variação de energia

$$\begin{cases} \gamma \text{ intersepta } \Gamma \text{ ortogonalmente em } p \text{ e} \\ \tilde{\gamma} \text{ intersepta } \Gamma \text{ ortogonalmente em } \tilde{p}. \end{cases}$$

Seja  $\Gamma$  a geodésica minimizante em  $\Gamma$  ligando  $p$  a  $\tilde{p}$ , então  $\sigma$  é uma geodésica em  $\mathbb{S}^n$ . Assim  $T = \gamma \cup \sigma \cup \tilde{\gamma}$  é um triângulo geodésico em uma superfície isométrica a um hemisfério de  $S^2$  com  $\angle p = \pi/2 = \angle \tilde{p}$ . O que é uma contradição. ■

A reflexão com respeito a uma hiperfície totalmente geodésica fechada em  $\mathbb{S}^n$  é definida como sendo a aplicação  $R_\Gamma : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  dada por

$$\begin{cases} R_\Gamma(x) = \gamma(-t) & \text{se } d(x, \Gamma) < \pi/2, \\ R_\Gamma(x) = A_\Gamma(x) & \text{se } d(x, \Gamma) = \pi/2, \end{cases}$$

onde  $\gamma$  é a geodésica minimizante tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(t) = P_\Gamma(x) \in \Gamma$ , e  $A_\Gamma : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  é a aplicação antípoda com respeito a  $\Gamma$ .

Análogo ao caso  $\mathbb{H}^n$ , temos

**Lema 1.2.6** *Seja  $\Omega$  um subconjunto de  $\mathbb{S}^n$  tal que  $\overline{\Omega}$  está contido em um hemisfério. Se  $\Gamma$*

é uma hipersuperfície totalmente geodésica e  $\Omega$  é simétrico com respeito à  $\Gamma$ , isto é,  $R_\Gamma(\Omega) = \Omega$  então a aplicação  $R_\Gamma$  definida acima é uma isometria de  $\Omega$ .

E se  $\varphi$  uma isometria de  $\mathbb{S}^n$  e seja  $u : \Omega \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Considere  $\tilde{u} = u \circ \varphi^{-1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$ . Então

**Lema 1.2.7** (1) O operador de  $p$ -Laplace-Beltrami é invariante sobre isometrias, i.e.,  
 $(\Delta_p)(u)\varphi^{-1} = \Delta_p(u \circ \varphi^{-1})$ .

(2) Se  $u$  satisfaz a equação diferencial  $\Delta_p u + f(u) = 0$  em  $\Omega$  então,  $\tilde{u}$  satisfaz a equação  $\Delta_p \tilde{u} + f(\tilde{u}) = 0$  em  $\tilde{\Omega}$ .

### 1.3 Princípios do Máximo e de Comparação

Consideremos um operador uniformemente elíptico sobre um conjunto aberto limitado  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  tal que

$$Lu = \sum_{ij} a_{ij}(x)D_{ij}(x) + \sum_i b_i D_i u(x) + c(x)u(x) \leq 0 \quad \text{em } \Omega', \quad (1.3)$$

onde  $a_{ij}(x)$ ,  $b_i(x)$  e  $c(x)$  são funções coeficientes limitadas. Seja  $u$  uma solução clássica de (1.3). Então temos

**Teorema 1.3.1 (Princípio do Máximo Forte)** *Suponha que  $u \geq 0$  e que existe uma bola  $B \subset \Omega'$  e um ponto  $x_0 \in \partial B \cap \partial \Omega'$  tal que  $u(x_0) = 0$ . Então ou  $u > 0$  em todo  $B$  ou para toda direção interior  $\nu$  em  $x_0$  temos  $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ .*

**Teorema 1.3.2 (Princípio do Máximo para Domínios Estreitos)** *Existe uma constante  $\delta > 0$ , dependendo somente de  $d = \text{diam}(\Omega')$ , tal que se  $\Omega_1 \subset \Omega'$  é um subconjunto aberto e  $|\Omega_1| \leq \delta$ , então  $u \geq 0$  sobre  $\partial \Omega_1$  implica  $u \geq 0$  em  $\Omega_1$ .*

**Observação 1.3.3** *Para a prova do Teorema 1.3.1 nos citamos [22] ou [24]. Para uma prova do Teorema 1.3.2 ver [5] ou [21].*

Vamos enunciar uma versão do princípio do máximo forte e do princípio de comparação fraco em variedades Riemannianas para o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami. Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional de classe  $C^2$ . Sejam  $\Omega \subset M$  um domínio e  $u$  uma função pertencente a  $C^1(\Omega)$ .

**Teorema 1.3.4 (Princípio do Máximo Forte e Lema de Hopf)** *Suponha que  $f(0) = 0$  e  $f$  é não decrescente sobre algum intervalo  $(0, \delta)$ ,  $\delta > 0$  e  $1 < p < \infty$ . Então o princípio do máximo forte é válido para a inequação*

$$\Delta_p u = \operatorname{div}_g(|\nabla u|_g^{p-2} \nabla u) \leq f(u) \quad \text{em } \Omega \quad (1.4)$$

sempre que

$$\begin{cases} f \equiv 0 & \text{para } s \in [0, \mu), \text{ para algum } \mu > 0, \text{ ou} \\ f(s) > 0 & \text{para } s \in (0, \delta) \text{ e } \int_0^\delta (sf(s))^{1/p} ds = \infty. \end{cases}$$

Além disso, se  $\Omega$  satisfaz uma condição da esfera interior em  $x_0 \in \partial\Omega$ ,  $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$  e  $u(x_0) = 0$  então  $\partial u / \partial \nu < 0$  em  $x_0$ , onde  $\nu$  é o vetor normal exterior sobre  $\partial\Omega$  em  $x_0$ .

**Teorema 1.3.5 (Princípio de Comparação Fraco em Variedades)** *Sejam  $M$  uma variedade compacta. Suponha que ou*

$$1 < p < 2 \text{ e } u, v \in W^{1, \infty}(M), \text{ ou}$$

$$p \geq 2 \text{ e } u, v \in W^{1, p}(M) \cap L^\infty(M)$$

e que ou  $\rho \equiv |\nabla u|^{p-2}$  ou  $\rho \equiv |\nabla v|^{p-2}$  satisfaz a seguinte condição

$$\sup_{x \in M} \int_M \frac{1}{\rho(y) d(x, y)^{\gamma_0}} dy \leq C \quad (1.5)$$

para algum  $\gamma_0 \in (n-2, n)$ . Suponha que  $u, v$  satisfazem fracamente

$$-\Delta_p u + g(x, u) - \Lambda u \leq -\Delta_p v + g(x, v) - \Lambda u, \quad \text{em } M$$

onde  $\Lambda > 0$   $g \in C(\overline{M} \times \mathbb{R})$  é tal que para todo  $x \in M$  fixo,  $g(x, s)$  é não decrescente para todo  $|s| \leq \max\{\|u\|_{L^\infty(M)}, \|v\|_{L^\infty(M)}\}$ . Seja  $M' \subset M$  um aberto e suponha que  $u \leq v$  sobre  $\partial M'$ . Então, existe  $\delta > 0$  dependente de tal que, se  $|M'| \leq \delta$ , então  $u \leq v$  em  $M'$ .

**Observação 1.3.6** *Par a prova do Teorema 1.3.4 citamos [29, 33], enquanto para a prova do Teorema 1.3.5 citamos [3, 28].*

**Observação 1.3.7** *A condição (1.5) é válida no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , ver 1.3.5.*

Suponha que  $\Omega$  é um domínio limitado em uma variedade Riemanniana  $M$  de classe  $C^2$  e que  $u$  e  $v$  resolvem fracamente

$$\begin{cases} -\Delta_p u \leq f(u) & \text{em } \Omega \\ -\Delta_p v \leq f(v) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

com  $f$  contínua localmente Lipschitziana. Para todo conjunto  $A \subset \Omega$  definamos

$$M_A = M_A(u, v) = \sup_A (|\nabla u| + |\nabla v|)$$

e denotemos por  $|A|$  sua medida de Lebesgue Riemanniana.

**Teorema 1.3.8 (Princípio de Comparação Fraco)** *Suponhamos  $1 < p < 2$ , então existem  $\alpha, M > 0$  dependendo somente de  $p, |\Omega|, M_\Omega$  e das normas  $L^\infty$  de  $u$  e  $v$  tais que: se um conjunto aberto  $\Omega' \subseteq \Omega$  satisfaz  $\Omega' = A_1 \cap A_2$ ,  $|A_1 \cap A_2| = 0$ ,  $|A_1| < \alpha M_{A_2} < M$  então  $u \leq v$  sobre  $\partial\Omega'$  implica  $u \leq v$  em  $\Omega'$ .*

**Teorema 1.3.9 (Princípio de Comparação Forte)** *Suponhamos  $1 < p < \infty$ , e definamos  $Z_u^v = \{x \in \Omega : \nabla u = \nabla v = 0\}$ . Se  $u \leq v$  em  $\Omega$  e existe  $x_0 \in \Omega \setminus Z_u^v$  com  $u(x_0) = v(x_0)$ , então  $u \equiv v$  na componente conexa de  $\Omega \setminus Z_u^v$  que contém  $x_0$ .*

**Observação 1.3.10** *Para a prova dos Teoremas 1.3.8 e 1.3.9 ver [11].*

# Capítulo 2

## Equações Envolvendo o Operador de $p$ -Laplace-Beltrami com $1 < p < \infty$ em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$ Não Uniformemente Elípticas em Apenas um Ponto

### 2.1 Resultado Principal

Estamos interessados em estudar propriedades de monotonicidade e simetria das soluções do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\Omega$  é uma bola geodésica em uma variedade Riemanniana  $M$  com curvatura seccional  $K$  constante (por exemplo, o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  e a esfera  $\mathbb{S}^n$ ) ou o espaço inteiro  $M$  (no caso  $K < 0$ ),  $\Delta_p u = \operatorname{div}\{|\nabla u|^{p-2} \nabla u\}$  é o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami em  $M$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $n \geq 2$ ,  $f$  é uma função contínua localmente Lipschitziana.

Mais precisamente, provamos

**Teorema 2.1.1** *Sejam  $p > 1$ ,  $f \in C([0, +\infty))$  e seja  $\Omega = B = B(x_0, R)$  uma bola*

geodésica em  $\mathbb{H}^n$ . Suponha que

$$f \text{ é uma função localmente Lipschitziana em } [0, +\infty). \quad (2.2)$$

Considere  $u \in W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$  uma solução positiva do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (2.3)$$

tal que

$$\nabla u(x) \neq 0 \text{ em } B \setminus \{x_0\}. \quad (2.4)$$

Então  $u$  é uma função radialmente simétrica sobre  $x_0$ , isto é,  $u$  depende somente da distância geodésica ao ponto  $x_0$ :  $u(x) = u(r)$  onde  $r = d(x, x_0)$ . Além disso, temos a derivada radial  $\partial u / \partial r < 0$ .

**Teorema 2.1.2** *Sejam  $p > 1$  e  $f \in C([0, +\infty))$ . Considere uma bola geodésica  $B$  em  $S^n$  tal que  $\bar{B}$  esta contido em um hemisfério. Suponha que  $u \in W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$  é uma solução positiva do Problema (2.1) e que as hipóteses (2.2) e (2.4) são válidas, então  $u$  é uma função radialmente simétrica sobre  $x_0$  e  $\partial u / \partial r < 0$ .*

No espaço inteiro  $\mathbb{H}^n$ , temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.1.3** *Sejam  $p > 1$ ,  $\Omega = \mathbb{H}^n$  e  $f \in C([0, +\infty))$ . Suponha que (2.2) é válidas e que*

$$f \text{ é uma função não crescente sobre } [0, \eta), \quad \text{para algum } \eta > 0. \quad (2.5)$$

Fixado  $x_0 \in \mathbb{H}^n$ , seja  $u \in W^{1,p}(\mathbb{H}^n) \cap L^\infty(\mathbb{H}^n)$  é uma solução positiva do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \mathbb{H}^n \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{quando } d(x, x_0) \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.6)$$

tal que  $\nabla u(x) \neq 0$  se  $x \neq x_0$  então  $u$  é uma função radialmente simétrica sobre  $x_0$ . Além disso, temos  $\partial u / \partial r < 0$ .

## 2.2 Prova dos Teoremas

### 2.2.1 Prova do Teorema 2.1.1

Consideremos as superfícies totalmente geodésicas e fechadas de  $\mathbb{H}^n$  do tipo

$$\Pi_\lambda = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n : x_1 = \lambda\},$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $R_\lambda(x) = R_{\Pi_\lambda}$  a reflexão com respeito a  $\Pi_\lambda$  como definida Observação 1.2.2. Denotemos por  $\lambda_1$  o número real

$$\lambda_1 = \sup\{x_1 \in \mathbb{R} : x = (x_1, x') \in B, \text{ onde } x' = (x_2, \dots, x_n)\}$$

e  $\lambda_0$  o número real tal que  $B$  é simétrico com respeito a  $\Pi_{\lambda_0}$ . Note que  $x_0 = (\lambda_0, x'_0)$  com  $x'_0 \in \mathbb{H}^{n-1}$ . Para  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$  definimos

$$\begin{cases} T_\lambda = \Pi_\lambda \cap B, \\ \Sigma_\lambda = \{x \in B : x_1 > \lambda\} \setminus \{R_\lambda(x_0)\}, \\ x_\lambda = R_\lambda(x), \quad u_\lambda(x) = u(x_\lambda), \\ w_\lambda = u_\lambda - u. \end{cases}$$

**Afirmção 2.2.1** *A função  $w_\lambda$  satisfaz uma equação uniformemente elíptica de segunda ordem da forma*

$$a_{ij}D_{ij}w_\lambda + b_iD_iw_\lambda + c(x)w_\lambda = 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda \quad (2.7)$$

onde as funções coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  pertencem a  $L^\infty$ . De fato, primeiro por regularidade elíptica de equações quase lineares temos que toda solução do Problema (2.3) que satisfaz (2.4) pertence a classe  $C^2(B \setminus \{x_0\})$  e verifica, em coordenadas locais,

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + (p-2) \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{p-4}{2}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ + (p-n)x_n^{p-1} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_n} + f(u) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B \setminus \{x_0\}$ . Usando (2.8) podemos provar que  $u_\lambda$  satisfaz

$$-\Delta_p u_\lambda = f(u_\lambda) \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

Então em coordenadas locais as funções  $u$  e  $u_\lambda$  satisfazem

$$\begin{cases} a[u]\Delta u + h[u]D_i u D_j u D_{ij} u = \tilde{f}(u) \\ a[u_\lambda]\Delta u_\lambda + h[u_\lambda]D_i u_\lambda D_j u_\lambda D_{ij} u_\lambda = \tilde{f}(u_\lambda) \end{cases} \quad (2.9)$$



onde

$$\begin{cases} a[u] = a(u, z) = \left[ \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{(p-2)/2} \\ h[u] = h(u, z) = (p-2) \left[ \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{(p-4)/2} \\ \tilde{f}[u] = \tilde{f}(u, z) = (n-p)x_n^{p-1} \left[ \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{(p-2)/2} - f(u), \end{cases}$$

e  $z = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$ . Multiplicando as equações em (2.9) por 2 e subtraindo as equações resultantes obtemos

$$\begin{aligned} & \{a[u] + a[u_\lambda]\} \Delta w_\lambda + \{h[u] D_i u D_j u + h[u_\lambda] D_i u_\lambda D_j u_\lambda\} D_{ij} w_\lambda + \\ & + \{a[u] - a[u_\lambda]\} \Delta(u + u_\lambda) + \{h[u] D_i u D_j u - h[u_\lambda] D_i u_\lambda D_j u_\lambda\} D_{ij} u \\ & = 2\{\tilde{f}[u] - \tilde{f}[u_\lambda]\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, podemos escrever

$$a[u] - a[u_\lambda] = \left( \frac{\partial a}{\partial u} \right)_\theta w_\lambda + \sum_i \left( \frac{\partial a}{\partial z_i} \right)_\theta D_i w_\lambda, \quad (2.11)$$

para  $\theta$  entre  $u(x)$  e  $u_\lambda(x)$ . Usando que  $f$  é uma função contínua localmente Lipschitziana e o Teorema do Valor Médio obtemos equações análogas a (2.11) para  $\tilde{f}[u] - \tilde{f}[u_\lambda]$  e  $h[u] D_i u D_j u - h[u_\lambda] D_i u_\lambda D_j u_\lambda$  respectivamente. Então escrevendo

$$a_{ij}(x) = (a[u] + a[u_\lambda]) \delta_{ij} + h[u] D_i u D_j u + h[u_\lambda] D_i u_\lambda D_j u_\lambda$$

concluimos que

$$a_{ij}(x) D_{ij} w_\lambda + b_i(x) w_\lambda + c(x) w_\lambda = 0,$$

onde  $a_i(x)$ ,  $b_i(x)$  e  $c(x)$  são limitados e os  $a_{ij}(x)$ 's definem uma matrix uniformemente elíptica quando  $x$  está longe de  $R_\lambda(x_0)$ :

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq K(|\nabla u(x_\lambda)|^{p-2} + |\nabla u(x)|^{p-2}) |\xi|^2,$$

onde  $K > 0$  é uma constante.

Usaremos o “método dos planos móveis” em três etapas para provar que  $w_{\lambda_0} \equiv 0$ .

**Etapa 1.** Afirmamos que o método dos planos móveis pode ser iniciado, isto é, existe  $\lambda$  suficiente próximo de  $\lambda_1$  tal que  $w_\lambda > 0$  sobre  $\Sigma_\lambda$ . De fato, desde que a função  $w_\lambda$  satisfaz (2.7) e  $w_\lambda \geq 0$  sobre  $\partial \Sigma_\lambda$  podemos usar o princípio do máximo para domínios estreitos

(Teorema 1.3.2) para obter que

$$w_\lambda > 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda$$

quando  $\lambda_1 - \lambda > 0$  é pequeno, porque a medida de  $\mathbb{H}^n$  é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ .

**Etapa 2.** Da afirmação acima podemos definir

$$\bar{\lambda} = \inf\{\lambda > \lambda_0 : w_\mu > 0 \text{ em } \Sigma_\mu \ \forall \mu \in (\lambda, \lambda_1)\}. \quad (2.12)$$

É claro que  $\bar{\lambda} \geq \lambda_0$ . Afirmamos que  $\bar{\lambda} = \lambda_0$ . Suponha por contradição que  $\bar{\lambda} > \lambda_0$ . Por continuidade temos que

$$w_{\bar{\lambda}} \geq 0 \quad \text{em } \Sigma_{\bar{\lambda}}. \quad (2.13)$$

Se  $\bar{\lambda} \geq (\lambda_0 + \lambda_1)/2$  temos que  $R_{\bar{\lambda}}(x_0) \not\subset \{x \in B : x_1 \geq \bar{\lambda}\}$  e então  $w_{\bar{\lambda}}$  satisfaz a equação uniformemente elíptica (2.7) em  $\Sigma_{\bar{\lambda}} = \{x \in B : x_1 \geq \bar{\lambda}\}$  e uma contradição segue com argumentos análogos ao caso do operador de Laplace-Beltrami (ver S. Kumaresan e J. Prajapat [26]). Se  $\bar{\lambda} \leq (\lambda_0 + \lambda_1)/2$  então  $R_{\bar{\lambda}}(x_0) \subset \{x \in B : x_1 \geq \bar{\lambda}\}$ . Denote por  $B_\eta = B(x_0, \eta)$  a bola geodésica com raio  $\eta > 0$  e centro em  $x_0$ . Desde que  $x_0$  é o ponto de máximo de  $u$  podemos escolher  $\eta > 0$  pequeno de modo que

$$\eta < \bar{\lambda} \quad \text{e} \quad \inf\{u(x) : x \in B_\eta\} > \sup\{u(x) : x \in \Sigma_{\bar{\lambda}}\}. \quad (2.14)$$

Então definimos

$$\Sigma'_{\bar{\lambda}} = \Sigma_{\bar{\lambda}} \setminus R_{\bar{\lambda}}(B_\eta).$$

Segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{\bar{\lambda}}(x) \in C^0(\overline{\Sigma'_{\bar{\lambda}}}) \cap W_{loc}^{2,n}(\Sigma'_{\bar{\lambda}}), \\ w_{\bar{\lambda}} \text{ satisfaz (2.7) em } \Sigma'_{\bar{\lambda}}, \\ w_{\bar{\lambda}} \geq 0 \text{ sobre } \partial\Sigma'_{\bar{\lambda}} \\ w_{\bar{\lambda}} > 0 \text{ em } R_{\bar{\lambda}}(B_\eta), \end{array} \right. \quad (2.15)$$

onde a última desigualdade segue que (2.14). Por (2.15) e (2.13) podemos usar o princípio do máximo usual em  $\mathbb{R}^n$  para concluir que  $w_\lambda > 0$  em  $\Sigma'_\lambda$ . Seja  $\delta > 0$  tal que o princípio

do máximo para domínios estreitos seja válido e considere um conjunto compacto  $K$  tal que  $K \subset \Sigma'_\lambda$  e  $|\Sigma'_\lambda \setminus K| < \delta/2$ . Por compacidade temos  $w_{\bar{\lambda}} > \rho > 0$  em  $K$ . Para  $\varepsilon > 0$  pequeno definamos

$$\Sigma'_{\bar{\lambda}-\varepsilon} = \Sigma_{\bar{\lambda}-\varepsilon} \setminus R_{\bar{\lambda}}(B_\eta).$$

Como  $R_{\bar{\lambda}}(x_0) \in R_{\bar{\lambda}}(B_\eta)$  temos que  $w_{\bar{\lambda}-\varepsilon}$  satisfaz a equação uniformemente elíptica (2.7) em  $\Sigma'_{\bar{\lambda}-\varepsilon}$ . E usando continuidade escolhemos  $\varepsilon$  tal que

$$|\Sigma'_{\bar{\lambda}-\varepsilon} \setminus K| < \delta, \quad w_{\bar{\lambda}-\varepsilon} > 0 \text{ em } K.$$

Em  $\Sigma = \Sigma'_{\bar{\lambda}-\varepsilon} \setminus K$  a função  $w_{\bar{\lambda}-\varepsilon}$  satisfaz (2.7) com condição de fronteira  $w_{\bar{\lambda}-\varepsilon} \geq 0$ . Então pelo princípio do máximo temos

$$w_{\bar{\lambda}-\varepsilon}(x) > 0 \text{ em } \Sigma.$$

Como  $w_{\bar{\lambda}-\varepsilon} > 0$  em  $K$  e também em  $R_{\bar{\lambda}}(B_\eta)$  segue que  $w_{\bar{\lambda}-\varepsilon} > 0$  em  $\Sigma_{\bar{\lambda}-\varepsilon}$ , que é uma contradição com a definição de  $\bar{\lambda}$ . Isto prova que  $\bar{\lambda} = \lambda_0$  e segue que  $w_{\lambda_0} \geq 0$ . Repetindo o argumento na direção de  $-x_1$  obtemos que  $w_{\lambda_0} \leq 0$ , portanto  $w_{\lambda_0} = 0$ .

**Etapa 3.** Consideremos uma direção  $\vec{\gamma}$  (diferente de  $x_1$ ), uma hiperfície totalmente geodésica fechada ortogonal a  $\vec{\gamma}$  é um hemisfério  $C_{\vec{\gamma}}$  com centro no plano  $x_n = 0$ . Seja  $\varphi$  uma isometria que leva  $C_{\vec{\gamma}}$  em um hiperplano  $T_\lambda$ . Consideremos a função  $\tilde{u} = u \circ \varphi$  em  $B$ . E pelo argumento na Etapa 2 obtemos que  $\tilde{u}$  é simétrica com respeito a  $T_{\lambda_0}$  e, portanto,  $u$  é simétrica com respeito a alguma hiperfície totalmente geodésica ortogonal a  $\vec{\gamma}$ . Isto termina a prova.

### 2.2.2 Prova do Teorema 2.1.2

Em  $\mathbb{R}^n$  considere a métrica esférica

$$g_{ij}(p) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + |p|^2)^2}.$$

Então a projeção estereográfica é uma isometria entre  $(S^n \setminus N, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$  sobre  $(\mathbb{R}^n, g)$ . A prova do Teorema 2.1.2 é reduzida ao modelo  $(\mathbb{R}^n, g)$ .

Observe que o conjunto

$$\Pi_\lambda = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \lambda\},$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , é uma hiperfície totalmente geodésicas e fechadas de  $(\mathbb{R}^n, g)$  logo podemos considerar a reflexão com respeito a  $\Pi_\lambda$  como sendo  $R_\lambda(x) = R_{\Pi_\lambda}$  definida como no Lema 1.2.5. Denotemos por  $\lambda_1$  o número real

$$\lambda_1 = \sup\{x_1 \in \mathbb{R} : x = (x_1, x') \in B\}$$

e  $\lambda_0$  o número real tal que  $B$  é simétrico com respeito a  $\Pi_{\lambda_0}$ . Note que  $x_0 = (\lambda_0, x'_0)$  com  $x'_0 \in \mathbb{H}^{n-1}$ . Para  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$  definimos

$$\begin{cases} T_\lambda = \Pi_\lambda \cap B, \\ \Sigma_\lambda = \{x \in B : x_1 > \lambda\} \setminus \{R_\lambda(x_0)\}, \\ x_\lambda = R_\lambda(x), \quad u_\lambda(x) = u(x_\lambda), \\ w_\lambda = u_\lambda - u. \end{cases}$$

Como na prova do Teorema 2.1.1 podemos provar que  $u_\lambda$  satisfaz

$$-\Delta_p u_\lambda = f(u_\lambda) \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

e  $w_\lambda$  satisfaz uma equação uniformemente elíptica de segunda ordem da forma

$$a_{ij}D_{ij}w_\lambda + b_iD_iw_\lambda + c(x)w_\lambda = 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda \quad (2.16)$$

onde as funções coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  pertencem a  $L^\infty$ . Agora podemos executar os mesmos passos da prova do Teorema 2.1.1 para obter o resultado.

### 2.2.3 Prova do Teorema 2.1.3

Seja  $\lambda_0$  o número real tal que  $x_0 = (\lambda_0, x'_0)$  com  $x'_0 \in \mathbb{H}^{n-1}$ . Moveremos as hiperfícies totalmente geodésicas e fechadas de  $\mathbb{H}^n$  do tipo

$$\Pi_\lambda = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n : x_1 = \lambda\},$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Para  $\lambda \geq \lambda_0$  definimos

$$\begin{cases} T_\lambda = \Pi_\lambda \cap B, \\ \Sigma_\lambda = \{x \in B : x_1 > \lambda\} \setminus \{R_\lambda(x_0)\}, \\ x_\lambda = R_\lambda(x), \quad u_\lambda(x) = u(x_\lambda), \\ w_\lambda = u_\lambda - u, \end{cases}$$

onde  $R_\lambda(x) = R_{\Pi_\lambda}$  a reflexão com respeito a  $\Pi_\lambda$  como definida no na Observação 1.2.2.

Usando que  $u \rightarrow 0$  quando  $d(x, x_0) \rightarrow \infty$  podemos obter  $\lambda > 0$  tal que

$$w_\lambda(x) \geq 0 \text{ em } \Sigma_\mu \tag{2.17}$$

para todo  $\lambda > \mu$ . Definimos

$$\bar{\lambda} = \inf\{\mu > \lambda_0 : (2.17) \text{ é verdadeira para } \lambda > \mu\}.$$

Queremos provar que  $\bar{\lambda} = \lambda_0$ . Como antes na prova do Teorema 2.1.1, suponha que

$$\bar{\lambda} > \lambda_0 \tag{2.18}$$

para obter uma contradição. Por continuidade, é claro que

$$w_{\bar{\lambda}} \geq 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_{\bar{\lambda}}.$$

Por (2.18) existem seqüências  $\{\lambda_n\}$  e  $\{x_n\}$  com  $0 < \lambda_n \searrow \bar{\lambda}$  e  $x_n \in \Sigma_{\lambda_n}$  tais que

$$w_{\lambda_n} < 0, \quad \nabla w_{\lambda_n}(x_n) = 0, \quad \{D_{ij}w_{\lambda_n}(x_n)\} \geq 0$$

(escolha  $x_n$  como um ponto de mínimo para  $w_{\lambda_n}$  em  $\Sigma_{\lambda_n}$ ). A menos de subsequência temos ou  $d(x_n, x_0) \rightarrow \infty$  ou  $x_n \rightarrow \bar{x} \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}}$ .

Se  $d(x_n, x_0) \rightarrow +\infty$  então  $u(x_n) \rightarrow 0$  e  $u(R_{\lambda_n}(x_n)) \rightarrow 0$ . Por (2.5) temos  $c(x_n) < 0$  e então

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_i \left( \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x_i}(x_n) \right)^2 \right]^{(p-2)/2} \sum_i \frac{\partial^2 w_{\lambda}}{\partial x_i^2} + \\ & + (p-2) \left[ \sum_i \left( \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{(p-2)/2} \sum_{i,j} \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x_i}(x) \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x_j}(x) \frac{\partial^2 w_{\lambda}}{\partial x_j \partial x_i}(x) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

que é impossível porque  $\{D_{ij}w_{\lambda_n}(x_n)\}$  é positivo.

Se  $x_n \rightarrow \bar{x} \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}}$  temos  $w_{\lambda_n}(x) \rightarrow w_{\bar{\lambda}}(\bar{x})$ , então por continuidade  $w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) \leq 0$ . Por outro lado,  $w_{\bar{\lambda}}(x) \geq 0$  em  $\Sigma_{\bar{\lambda}}$ . Como  $x_0$  é um ponto de máximo de  $u$  existe uma vizinhança  $V$  de  $R_{\bar{\lambda}}(x_0)$  tal que  $w_{\bar{\lambda}}(x) > 0$ . Já em  $\Sigma \setminus \bar{V}$  temos  $w_{\bar{\lambda}}(x) \geq 0$ . Mas, a equação (2.8) é uniformemente elíptica em todo conjunto limitado contido em  $\Sigma_{\bar{\lambda}} \setminus \bar{V}$ . Pelo princípio do máximo usual obtemos que  $w_{\bar{\lambda}} > 0$  em  $\Sigma_{\bar{\lambda}} \setminus \bar{V}$ , então  $w_{\bar{\lambda}} > 0$  em  $\Sigma_{\bar{\lambda}} \cup \{R_{\bar{\lambda}}(x_0)\}$ . Portanto  $\bar{x} \in T_{\bar{\lambda}}$ , e por continuidade  $\nabla w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$ . Mas, pelo lema de Hopf temos  $(\partial w_{\bar{\lambda}}/\partial x_1)(\bar{x}) < 0$ , que é uma contradição. Portanto  $\bar{\lambda} = \lambda_0$ , e como na prova do Teorema 2.1.1 podemos concluir que  $u$  é radialmente simétrica em  $x_0$  e  $\partial u/\partial r < 0$ .

# Capítulo 3

## Equações Envolvendo o Operador de $p$ -Laplace-Beltrami com $p > 2$ em $\mathbb{H}^n$

### 3.1 Introdução e Resultados Principais

Neste capítulo estudaremos resultados de monotonicidade e de simetria local e global para soluções não negativas de equações envolvendo o operador  $p$ -Laplace-Beltrami definido no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ . Mais precisamente, provamos os seguintes resultados.

**Teorema 3.1.1** *Seja  $p > 2$ ,  $\alpha \in (1/(p-1), 1)$  e  $B$  uma bola geodésica em  $\mathbb{H}^n$ . Suponha que*

$$f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad e \quad f(s) > 0 \quad \text{para todo } s > 0, \quad (f_1)$$

onde  $\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$ . Seja  $\Delta_p u$  o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami em  $\mathbb{H}^n$  e considere  $u \in W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$  uma solução do Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } B \\ u \geq 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (3.1)$$

tal que

$$u \in C^2(B \setminus Z(u)) \cap C^{1,\alpha}(u^{-1}([0, M])) \quad \text{com} \quad M = \max_{\overline{B}} u. \quad (3.2)$$

Então  $u$  é positiva e radialmente simétrica sobre  $B$ , sempre que  $f(s)$  é não crescente em uma vizinhança de  $M$ .

Também tratamos o caso em que a não linearidade  $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  muda de sinal. Primeiro, para facilitar a referencia, introduzimos as notações:

$$Z_a = \{s_0 \in f^{-1}(0) : f(s) \text{ é não crescente sobre } (s_0 - \eta, s_0 + \eta) \cap \mathbb{R}_+, \\ \text{para algum } \eta > 0\},$$

$$Z_b = \{s_0 \in f^{-1}(0) : f(s) \geq 0 \text{ sobre } (s_0, s_0 + \eta), \text{ para algum } \eta > 0\}.$$

Note que se  $f^{-1}(0)$  é finito, então  $Z_a \cap Z_b = \emptyset$ .

Agora, introduzimos o conceito de funções localmente radialmente simétricas, seguindo [6] e [20]. Dizemos que  $u$  é localmente radialmente simétrica se existe uma família no máximo enumerável  $(u_i)_{i \in I}$  de funções radialmente simétricas com suporte em bolas geodésicas  $B_i$ ,  $i \in I$ , tais que

(i)  $u_i|_{B_i}$  é uma solução radial não negativa de

$$\Delta_p u_i + f(u_i + C_i) = 0 \text{ sobre } B_i,$$

onde  $u_i|_{B \setminus B_i} \equiv 0$  e  $C_i \geq 0$  é uma constante satisfazendo  $f(C_i) = 0$ , e

(ii)  $u = \sum_{i \in I} u_i$ .

**Teorema 3.1.2** *Suponha que  $p > 2$ ,  $\alpha \in (1/(p-1), 1)$  e  $B$  é uma bola geodésica em  $\mathbb{H}^n$ . Além disso, suponha que  $f(s)$  satisfaz*

$$\text{o conjunto } f^{-1}(0) \text{ é finito, } f(0) \geq 0 \text{ e } f^{-1}(0) = Z_a \cup Z_b. \quad (f_2)$$

*Seja  $u \in C^1(\overline{B})$  uma solução de (3.1) satisfazendo (3.2). Se  $f(s)$  é não crescente em uma vizinhança de  $M = \max_{\overline{B}} u$  e se o subconjunto  $J := u^{-1}(Z_b) \cap Z(u)$  é vazio, então*

(i) *a função  $u$  é localmente radialmente simétrica sobre  $B$  e*

(ii) *o subconjunto  $u^{-1}([0, M]) \cap Z(u)$  está contido em  $Z_a$ .*

## 3.2 Prova dos Resultados Principais

Nesta seção provamos os Teoremas 3.1.1 e 3.1.2. Para isto, usamos uma variante do método dos planos móveis combinado com técnicas de comparação e princípio do máximo.



Dividimos a prova do teorema em cinco etapas: na Etapa 1 provamos que o método dos planos móveis pode ser iniciado. Na Etapa 2 analisamos os pontos de obstrução para o Problema (3.1) (ver Definição 3.2.2) e na Etapa 3 provamos que existem pontos de obstrução regulares para o Problema (3.1). Na Etapa 4 provamos um resultado de simetria local e, finalmente, na Etapa 5 completamos a prova de nossos teoremas.

Antes de iniciarmos o método dos planos móveis, necessitamos introduzir algumas notações. Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , seja

$$\Pi_\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n : x_1 = \lambda\}$$

o hiperplano ortogonal a direção  $x_1$ . Desde que  $\Pi_\lambda$  é uma superfície totalmente geodésica fechada de  $\mathbb{H}^n$  podemos definir a reflexão com respeito a  $\Pi_\lambda$  e esta é dada por

$$R_\lambda(x) := R_{\Pi_\lambda}(x) = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x \in \mathbb{H}^n$$

(ver Observação 1.2.2).

Seja  $B$  uma bola geodésica em  $\mathbb{H}^n$  e denote por

$$\begin{cases} \mu_+ = \sup\{x_1 : x = (x_1, x') \in B\}, \\ \mu_- = \inf\{x_1 : x = (x_1, x') \in B\} \text{ e} \\ \mu_0 = (\mu_- + \mu_+)/2. \end{cases}$$

Note que  $\mu_0$  é tal que  $B$  é simétrica com respeito a  $\Pi_{\mu_0}$ . Para  $\lambda \in (\mu_0, \mu_+)$ , defina

$$\begin{cases} T_\lambda = \{(x_1, x') \in B : x = (x_1, x') \in \mathbb{H}^n, x_1 = \lambda\} = \Pi_\lambda \cap B, \\ \Sigma_\lambda = \{(x_1, x') \in B : x = (x_1, x') \in \mathbb{H}^n, x_1 > \lambda\}, \\ x_\lambda = R_\lambda(x) = (2\lambda - x_1, x') \quad \text{se } x = (x_1, x'), \\ u_\lambda(x) = u(x_\lambda) \quad \text{e } w_\lambda = u_\lambda - u. \end{cases}$$

**Etapa 1: Iniciando o Método dos Planos Móveis.**

Vamos iniciar do lado direito da região. Para isto consideramos

$$\lambda_0 = \sup\{x_1 \in (\mu_0, \mu_+] : \exists x' \in \mathbb{H}^{n-1} \text{ com } (x_1, x') \in \overline{B} \text{ e } u(x_1, x') > 0\},$$

que, a menos de uma translação, podemos supor que  $\lambda_0 > \mu_0$ .

**Lema 3.2.1** *Existe  $\lambda^* \in (\mu_0, \lambda_0)$  tal que  $w_\lambda \geq 0$  em  $\Sigma_\lambda$  se  $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_0)$ . Assim, o método dos planos móveis pode ser iniciado.*

**Demonstração.** Temos dois casos a considerar

**Caso 1:**  $0 \in Z_b$  ou  $f(0) > 0$ . Neste caso existe  $\eta > 0$  tal que  $f|_{(0,\eta)} \geq 0$ . Assim,

$$-\Delta_p u = f(u) \geq 0 \quad \text{em } \{x \in B : 0 < u(x) < \eta\}.$$

Definindo

$$\beta(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } s \in [0, \eta], \\ f(s) & \text{para } s \in [\eta, +\infty) \end{cases}$$

temos que  $\beta \in C([0, +\infty))$  e

$$\Delta_p u + \beta(u) \geq 0 \quad \text{em } B.$$

Pelo Teorema 1.3.4 podemos concluir que  $u > 0$  em  $B$  e  $\partial u / \partial \nu < 0$  sobre  $\partial B$ . Portanto,  $\lambda_0 = \mu_+$  e usando que  $u \in C^1(\overline{B})$  existe  $\delta > 0$  tal que  $(\partial u / \partial \nu)(x) < 0$  se  $x \in \overline{B}$  e  $d(x, \partial B) \leq \delta$ , assim o resultado do lema é verdadeiro se escolhermos  $\lambda^*$  suficientemente próximo de  $\mu_+$ .

**Case 2:**  $0 \in Z_a$ . Seja  $\eta > 0$  tal que  $f|_{(0,\eta)}$  é não crescente. Suponha por contradição que o lema é falso, assim podemos encontrar seqüências  $\mu_0 < \lambda_k \nearrow \mu_+$  e  $x_k \in \Sigma_{\lambda_k}$  tais que

$$w_{\lambda_k}(x_k) < 0. \tag{3.3}$$

Note que  $u_{\lambda_k} \geq u$  sobre  $\partial \Sigma_{\lambda_k}$ . Denotemos por  $p_+$  o único ponto que pertence a intersecção  $T_{\mu_+} \cap \partial B$ . Desde que  $u(p_+) = 0$  e  $u \in C^1(\overline{B})$ , então existe  $r > 0$  tal que  $0 \leq u(x) < \eta$  para  $x \in B \cap B(p_+, r)$ . É fácil ver que, para  $k$  suficientemente grande, os conjuntos

$\Sigma_{\lambda_k}$  e  $R_{\lambda_k}(\Sigma_{\lambda_k})$  estão contidos em  $B \cap B(p_+, r)$ , e conseqüentemente  $u(\Sigma_{\lambda_k})$  e  $u_{\lambda_k}(\Sigma_{\lambda_k})$  estão contidos em  $[0, \eta]$ . Pelo Teorema 1.3.5 segue que  $u_{\lambda_k} \geq u$  em  $\Sigma_{\lambda_k}$  para  $k$  grande, contradizendo (3.3). ■

## Etapa 2: Caracterizando as Obstruções.

O conjunto crítico  $Z(u)$  que torna o operador  $-\Delta_p$  degenerado gera soluções são simétricas em alguns casos. Para identificar mais precisamente como isso ocorre necessitamos da seguinte definição.

**Definição 3.2.2** Para  $\bar{\lambda} = \inf\{\lambda > \mu_0 : w_\lambda(x) \geq 0, \forall x \in \Sigma_\lambda\}$ , dizemos que  $\bar{x} \in \bar{B}$  é um ponto de obstrução do Problema (3.1) quando existem seqüências  $\mu_0 < \lambda_k \nearrow \bar{\lambda}$  e  $x_k \in \Sigma_{\lambda_k}$  tais que  $w_{\lambda_k}(x_k) < 0$ ,  $\nabla w_{\lambda_k}(x_k) = 0$  e  $x_k \rightarrow \bar{x}$ .

**Lema 3.2.3** Suponha que  $\bar{x} \in \bar{B}$  é um ponto de obstrução do Problema (3.1) então

- (i)  $\bar{x} \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}}$ ,
- (ii)  $w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$ ,
- (iii)  $\nabla w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$ .

**Demonstração.** Seja  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}')$  um ponto de obstrução do Problema (3.1), então existem seqüências  $\mu_0 < \lambda_k \nearrow \bar{\lambda}$  e  $x_k = (x_{1k}, x'_k) \in \Sigma_{\lambda_k}$  com  $x_k \rightarrow \bar{x}$ . Desde que  $x_{1k} \rightarrow \bar{x}_1$  e  $x_{1k} > \lambda_k$  temos  $\bar{x}_1 = \lim x_{1k} \geq \lim \lambda_k = \bar{\lambda}$ , e assim  $\bar{x} \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}}$ .

Para provar (ii), observamos que

$$\begin{aligned} 0 > w_{\lambda_k}(x_k) &= u_{\lambda_k}(x_k) - u(x_k) \\ &= u(2\lambda_k - x_{1k}, x'_k) - u(x_{1k}, x'_k). \end{aligned}$$

Assim, tomando o limite temos

$$0 \geq u(2\bar{\lambda} - \bar{x}_1, \bar{x}') - u(\bar{x}_1, \bar{x}') = w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}). \quad (3.4)$$

Como  $\bar{x} \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}}$ , existem seqüências  $\mu_k \rightarrow \bar{\lambda}$  e  $y_k \rightarrow \bar{x}$ , logo

$$\begin{aligned} 0 < w_{\mu_k}(y_k) &= u_{\mu_k}(y_{1k}, y'_k) - u(y_{1k}, y'_k) \\ &= u(2\mu_k - y_{1k}, y'_k) - u(y_{1k}, y'_k) \end{aligned}$$

e tomando o limite novamente obtemos

$$0 \leq u(2\bar{\lambda} - \bar{x}_1, \bar{x}') - u(y_{1k}, y'_k) = w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}). \quad (3.5)$$

Portanto, de (3.4) e (3.5) temos  $w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$ .

Para verificar (iii) observe que  $u \in C^1(\bar{B})$  e  $R_{\lambda_k} \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$  assim  $(u \circ R_{\lambda_k})(x) \rightarrow (u \circ R_{\bar{\lambda}})(x)$  e

$$0 = \nabla w_{\lambda_k}(x_k) = \nabla(u_{\lambda_k} - u)(x_k) = \nabla(u \circ R_{\lambda_k})(x_k) - \nabla u(x_k).$$

Logo, passando o limite,

$$0 = \nabla(u \circ R_{\bar{\lambda}})(\bar{x}) - \nabla u(\bar{x}),$$

que implica que  $\nabla w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$ . ■

Agora, nosso próximo objetivo é provar que  $\bar{\lambda} = \mu_0$ . Já sabemos que  $\bar{\lambda} \geq \mu_0$ . No seguinte resultado provamos a existência de pontos de obstrução para o Problema (3.1) sempre que  $\bar{\lambda} > \mu_0$ .

**Lema 3.2.4** *Se  $\bar{\lambda} > \mu_0$  então existem pontos de obstrução para o Problema (3.1).*

**Demonstração.** Considere sequências  $(\lambda_k)$  e  $(x_k) \subset \Sigma_{\lambda_k}$  tais que  $\mu_0 < \lambda_k \nearrow \bar{\lambda}$  e  $w_{\lambda_k}(x_k) < 0$ . Como  $w_{\lambda_k} \geq 0$  sobre  $\partial\Sigma_{\lambda_k}$ , podemos supor que  $x_k$  é um ponto de mínimo de  $w_{\lambda_k}$ , e assim  $\nabla w_{\lambda_k}(x_k) = 0$ . Logo, a menos de subsequência, podemos assumir que  $x_k \rightarrow \bar{x} \in \bar{B}$ . Portanto, existem pontos de obstrução para o Problema (3.1). ■

Suponha por contradição que  $\bar{\lambda} > \mu_0$ . Pelo lema acima, o Problema (3.1) tem pontos de obstrução.

A provas dos nossos resultados principais dependem de uma análise delicada dos pontos de obstrução do Problema (3.1). Vamos localiza-los em um subconjunto de  $\bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}}$ , mais precisamente, vamos provar que os pontos de obstrução ocorrem em

$$K := \{x \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} : \nabla u(x) = 0\} \cup \{x \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus \bar{T}_{\bar{\lambda}} : u(x) = u_{\bar{\lambda}}(x)\}.$$

Para este fim usaremos um método de inversão local em combinação com o resultado abaixo.

**Proposição 3.2.5 (Caracterização do Conjunto Crítico)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{H}^n$  um domínio limitado e suponha que  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.6)$$

com  $\alpha(p-1) > 1$ . Se  $x_0 \in \overline{\Omega}$  e  $\nabla u(x_0) = 0$ , então  $f(u(x_0)) = 0$ , onde se  $x_0 \in \partial\Omega$ , também assumimos que  $\partial\Omega$  satisfaz uma condição do cone interior em  $x_0$ .

**Demonstração.** Como a curvatura seccional de  $\mathbb{H}^n$  é  $K = -1$ , então pelo Teorema de Hadamard a aplicação exponencial  $\exp_{x_0} : T_{x_0}\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  é um difeomorfismo. Então fixada uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $T_{x_0}\mathbb{H}^n$  determinamos uma carta  $(\mathbb{H}^n; \varphi)$ , chamada de coordenadas normais, dada por

$$\varphi(x) = \exp_{x_0}^{-1}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)).$$

Assim, para  $x = \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n)$  temos

$$g_{ij}(x) = \frac{y_i y_j}{|y|^2} + \frac{\sinh^2(|y|)}{|y|^2} \left\{ \delta_{ij} - \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right\}. \quad (3.7)$$

Para  $\varepsilon > 0$ , a expressão local de  $M^\varepsilon : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ ;  $M^\varepsilon(x) = \exp_{x_0}(\varepsilon\varphi(x))$  é dada por

$$\varphi \circ M^\varepsilon \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \varepsilon(y_1, \dots, y_n)$$

e

$$(dM^\varepsilon)_x \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_x \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_j \circ M^\varepsilon)}{\partial y_i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{M^\varepsilon(x)} = \sum_{j=1}^n \varepsilon \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{M^\varepsilon(x)} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{M^\varepsilon(x)},$$

assim, para  $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_x$  temos

$$(dM^\varepsilon)_x(Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon Y^i(x) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{M^\varepsilon(x)}. \quad (3.8)$$

Seja  $\Omega_\varepsilon := (M^\varepsilon)^{-1}(\Omega) = M^{\varepsilon^{-1}}(\Omega)$  e considere  $u^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}u(M^\varepsilon(x)).$$

Podemos ver que

$$(\nabla u^\varepsilon)(x) = (\nabla u)(M^\varepsilon(x)).$$

Isto segue de cálculos padrões e de (3.8). De fato, para  $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_x$ , temos

$$\begin{aligned} (du^\varepsilon)_x(Y) &= \varepsilon^{-1}(du)_{M^\varepsilon(x)}(dM^\varepsilon)_x(Y) \\ &= \varepsilon^{-1}(du)_{M^\varepsilon(x)} \left( \sum_{i=1}^n \varepsilon Y^i(x) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{M^\varepsilon(x)} \right) \\ &= \langle (\nabla u)(M^\varepsilon(x)), Y(x) \rangle. \end{aligned}$$

Então  $u^\varepsilon$  satisfaz a equação

$$\Delta_p u^\varepsilon + \varepsilon f(\varepsilon u^\varepsilon) = 0 \quad \text{em } \Omega_\varepsilon. \quad (3.9)$$

Com efeito, usando (3.6) para  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^{p-2} \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla \phi \rangle &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u \circ M^\varepsilon|^{p-2} \langle \nabla u \circ M^\varepsilon, \nabla \phi \rangle \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \phi \circ (M^\varepsilon)^{-1} \rangle \det(dM^\varepsilon)^{-1} \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla(\phi \circ (M^\varepsilon)^{-1}) \rangle \det(dM^\varepsilon)^{-1} \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} f(u) [\phi \circ (M^\varepsilon)^{-1}] \det(dM^\varepsilon)^{-1} \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} f(u \circ M^\varepsilon) \phi. \end{aligned}$$

**Caso 1:**  $x_0 \in \Omega$ . Considere uma função teste radial e não trivial  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n, [0, +\infty))$

tal que  $\text{supp } \phi = \overline{B(x_0, r)} \subset\subset \Omega$ . Então, pelo teorema do valor médio,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) \phi = f(u(x_0)) \int_{\mathbb{H}^n} \phi. \quad (3.10)$$

Agora, usando (3.9), podemos escrever

$$\varepsilon^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^{p-2} \nabla u^\varepsilon \nabla \phi = \int_{\Omega_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \phi. \quad (3.11)$$

Como  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ , temos que

$$\begin{aligned} |\nabla u^\varepsilon(x)|^{p-1} &= |\nabla u(M^\varepsilon(x)) - \nabla u(M^\varepsilon(x_0))|^{p-1} \\ &\leq d(M^\varepsilon(x), M^\varepsilon(x_0))^\alpha (p-1) = \varepsilon^{\alpha(p-1)} d(x, x_0)^{\alpha(p-1)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

para  $x \in \overline{\Omega}$ . Assim, para (3.10) – (3.12) e usando que  $\alpha(p-1) > 1$ , vem que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(u(x_0)) \int_{\mathbb{H}^n} \phi &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^{p-1} |\nabla \phi| \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha(p-1)-1} \int_{\mathbb{H}^n} d(x, x_0)^{\alpha(p-1)} |\nabla \phi| = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(u(x_0)) = 0$ .

**Caso 2:**  $x_0 \in \partial\Omega$ . Lembremos que neste caso assumimos que  $\partial\Omega$  satisfaz uma condição do cone interior em  $x_0$ , isto é, existe  $\delta_0, r_0 > 0$  e  $v_0 \in T_{x_0}\mathbb{H}^n$ ,  $\|v_0\| = 1$  tais que

$$C_{\delta_0, r_0, v_0} = \exp_{x_0}(\tilde{C}_{\delta_0, r_0, v_0}) \subset \Omega$$

onde

$$\tilde{C}_{\delta_0, r_0, v_0} := \{x \in (T_{x_0}\mathbb{H}^n) \setminus \{0\} : \langle x, v_0 \rangle \leq \|x\|(1 - \delta_0) \text{ e } \|x\| \leq r_0\}.$$

**Lema 3.2.6** *Seja  $0 < r_1 < r_0$  e considere uma função teste radialmente simétrica e não trivial  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n, [0, +\infty))$  tal que  $\text{supp } \phi = \overline{B(x_0, r_1)}$ , então temos*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) \phi \geq \mathcal{L}_{n-1}(C_{\delta_0, r_1, v_0} \cap S(x_0, r_1)) \int_0^{+\infty} \tilde{\phi}(r) r^{n-1} dr, \quad (3.13)$$

onde  $\mathcal{L}_{n-1}(C_{\delta_0, r_1, v_0} \cap S(x_0, r_1)) > 0$  é a medida de superfície  $(n-1)$ -dimensional da porção da esfera  $S(x_0, r_1)$  in  $\mathbb{H}^n$  que jaz no cone  $C_{\delta_0, r_1, v_0}$  e  $\tilde{\phi} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é tal que  $\phi(x) = \tilde{\phi}(r)$  se  $r = d(x, x_0)$ .

**Demonstração.** Primeiro, observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) \phi &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(u \circ M^\varepsilon) \phi \\ &= \int_{\Omega} f(u) [\phi \circ (M^\varepsilon)^{-1}] \det(dM^\varepsilon)^{-1} \\ &= \int_{\Omega \cap B(x_0, \varepsilon r_1)} f(u) [\phi \circ (M^\varepsilon)^{-1}] \det(dM^\varepsilon)^{-1}, \end{aligned}$$

que implica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) \phi \geq \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon r_1 < r_0}} \int_{C_{\delta, \varepsilon r_1, v_0}} f(u) [\phi \circ (M^\varepsilon)^{-1}] \det(dM^\varepsilon)^{-1}. \quad (3.14)$$

Agora, pelo teorema do valor médio, podemos encontrar  $\xi_\varepsilon \in C_{\delta, \varepsilon r_1, v_0}$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{C_{\delta, \varepsilon r_1, v_0}} f(u) [\phi \circ (dM^\varepsilon)^{-1}] \det(M^\varepsilon)^{-1} \\ = f(u(\xi_\varepsilon)) \int_{C_{\delta, \varepsilon r_1, v_0}} [\phi \circ (M^\varepsilon)^{-1}] \det(dM^\varepsilon)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por (3.14) e (3.15), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) \phi &\geq \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon r_1 < r_0}} f(u(\xi_\varepsilon)) \int_{C_{\delta, \varepsilon r_1, v_0}} [\phi \circ (M^\varepsilon)^{-1}] \det(dM^\varepsilon)^{-1} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon r_1 < r_0}} f(u(\xi_\varepsilon)) \int_{C_{\delta, r_1, v_0}} \phi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Desde que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{\delta, \varepsilon r_1, v_0} = \{x_0\}$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos que  $\xi_\varepsilon \rightarrow x_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Então, por (3.16),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) \phi \geq f(u(x_0)) \int_{C_{\delta, r_1, v_0}} \phi. \quad (3.17)$$

Assim, usando coordenadas polares geodésicas, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{C_{\delta, r_1, v_0}} \phi &= \mathcal{L}_{n-1}(C_{\delta_0, r_1, v_0} \cap S(x_0, r_1)) \int_0^{r_1} \tilde{\phi}(r) r^{n-1} dr \\ &= \mathcal{L}_{n-1}(C_{\delta_0, r_1, v_0} \cap S(x_0, r_1)) \int_0^{+\infty} \tilde{\phi}(r) r^{n-1} dr. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Portanto, (3.17) e (3.18) implicam (3.13) e o Lema 3.2.6 está provado. ■

Para continuar a prova da Proposição 3.2.5, note que usando coordenadas polares



geodésicas obtemos

$$\int_{\mathbb{H}^n} \phi = \mathcal{L}_{n-1}(S(x_0, 1)) \int_0^\infty \phi(r) r^{n-1} dr,$$

e pelo Lema 3.2.6 concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) \phi \geq f(u(x_0)) \frac{\mathcal{L}_{n-1}(C_{\delta_0, r_1, v_0} \cap S(x_0, r_1))}{\mathcal{L}_{n-1}(S(x_0, 1))} \int_{\mathbb{H}^n} \phi. \quad (3.19)$$

Usando (3.9), temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon u^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^{p-2} \nabla u^\varepsilon \nabla \phi - \varepsilon^{-1} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^{p-2} \langle \nabla u^\varepsilon, \nu \rangle \phi. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19) e usando (3.12), vem que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(u(x_0)) \frac{\mathcal{L}_{n-1}(C_{\delta_0, r_1, v_0} \cap S(x_0, r_1))}{\mathcal{L}_{n-1}(S(x_0, 1))} \int_{\mathbb{H}^n} \phi \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^{p-1} |\nabla \phi| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^{p-1} \phi \right) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha(p-1)-1} \left( \int_{\mathbb{H}^n} d(x, x_0)^{\alpha(p-1)} |\nabla \phi| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} d(x, x_0)^{\alpha(p-1)} \phi \right) = 0 \end{aligned}$$

Portanto  $f(u(x_0)) = 0$ , que completa a prova. ■

A seguir voltaremos a analisar os pontos de obstrução do Problema 3.1. Note que se  $0 \in Z_b$  ou  $f(0) > 0$ , então  $u$  é decrescente na direção de  $x_1$  perto de  $\partial B \cap \Sigma_\lambda$  para  $\lambda$  perto de  $\bar{\lambda}$  (de fato,  $\partial u / \partial x_1 < 0$ ), assim  $\bar{x} \notin \partial B$ . Então um dos seguintes casos ocorre:

**Caso 1:**  $\bar{x} \in \Sigma_{\bar{\lambda}}$ . Neste caso se  $\nabla u(\bar{x}) = 0$  e  $u(\bar{x}) < M$ , usando o Lema 3.2.5 concluimos que  $f(u(\bar{x})) = 0$ . Caso contrário, temos  $w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$  sobre  $B(\bar{x}, \varepsilon)$  para algum  $\varepsilon > 0$  pelo lema abaixo.

**Lema 3.2.7** *Se  $\nabla u(\bar{x}) \neq 0$  temos que  $w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$  sobre  $B(\bar{x}, \varepsilon)$  para algum  $\varepsilon > 0$ .*

**Demonstração.** Vamos supor que  $\nabla u(\bar{x}) \neq 0$  assim, sem perda de generalidade, temos que  $(\partial u / \partial x_1)(\bar{x}) \neq 0$ . Como  $\nabla w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$  temos que

$$\frac{\partial w_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(\bar{x}) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0$$

Consideremos as funções auxiliares  $g, g_{\bar{\lambda}} : \mathbb{R} \times B \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $g(t, x) = u(x) - t$  e

$g_{\bar{\lambda}}(t, x) = u_{\bar{\lambda}}(x) - t$ . Note que

$$\begin{cases} g(u(\bar{x}), \bar{x}) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(u(\bar{x}), \bar{x}) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} g_{\bar{\lambda}}(u(\bar{x}), \bar{x}) = w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0 \\ \frac{\partial g_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(u(\bar{x}), \bar{x}) = \frac{\partial u_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0. \end{cases}$$

Então, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança  $V \subset \mathbb{H}^n$  de  $(u(\bar{x}), \bar{x}')$  e funções  $v, \bar{v} \in C^1$  tais que

$$\begin{cases} g(v(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_{\bar{\lambda}}(\bar{v}(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \forall (t, x_2, \dots, x_n) \in V, \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{cases} t = u(v(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \\ t = u_{\bar{\lambda}}(\bar{v}(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n), \quad \forall (t, x_2, \dots, x_n) \in V. \end{cases} \quad (3.21)$$

Usando que  $u$  é uma solução do Problema (3.1), podemos ver que  $v$  e  $\bar{v}$  satisfazem

$$\begin{cases} Lv = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{p+1} f(t) \\ \bar{L}\bar{v} = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right)^{p+1} f(t) \end{cases}$$

onde

$$Lv = A_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i x_j} + B_n \frac{\partial v}{\partial x_n}$$

e

$$\bar{L}\bar{v} = \bar{A}_{11} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i x_j} + \bar{B}_n \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n}$$

são operadores uniformemente elípticos com coeficientes dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} = |\nabla v|^p + (p-2)|\nabla v|^{p-4} \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \sum_{i \geq 2} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\ A_{i1} = A_{1i} = -2|\nabla v|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial t} - 2(p-2)|\nabla v|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x_i}, \\ A_{ij} = A_{ji} = |\nabla v|^{p-2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \delta_{ij} + (p-2) \left[ \sum_{k \geq 2} \left( \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} - 1 \right], \\ B_n = (p-n)x_n^{p-1} |\nabla v|^{p-2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^{p-1}, \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_{11} = |\nabla \bar{v}|^p + (p-2)|\nabla \bar{v}|^{p-4} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) \sum_{i \geq 2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\ \bar{A}_{i1} = \bar{A}_{1i} = -2|\nabla \bar{v}|^{p-2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - 2(p-2)|\nabla \bar{v}|^{p-2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}, \\ \bar{A}_{ij} = \bar{A}_{ji} = |\nabla \bar{v}|^{p-2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 \delta_{ij} + (p-2) \left[ \sum_{k \geq 2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} - 1 \right], \\ \bar{B}_n = (p-n)x_n^{p-1} |\nabla \bar{v}|^{p-2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^{p-1}, \end{array} \right.$$

para  $i, j \geq 2$ . Chamando  $z = v - \bar{v}$ , podemos ver que  $z$  satisfaz uma equação de segunda ordem da forma

$$\tilde{L}z = \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^{p+1} - \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^{p+1} \right] f(t), \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{L}z = A_{11} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \sum_{i,j \geq 2} A_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + (A_{11} - \bar{A}_{11}) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \\ + \sum_{i,j \geq 2} (A_{ij} + \bar{A}_{ij}) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial x_j} + (B_n - \bar{B}_n) \frac{\partial z}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Observemos que os coeficientes da equação (3.22) podem ser escritos como segue

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij} - \bar{A}_{ij} = M_{ij} \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{l \geq 2} N_{ijl} \frac{\partial z}{\partial x_l}, \\ \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^{p+1} - \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^{p+1} \right] f(t) = R \frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right.$$

em que  $M_{ij}$ ,  $N_{ijk}$  e  $R$  são funções limitadas em  $V$ . Portanto,  $z$  satisfaz a equação

$$A_{11} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \sum_{i,j \geq 2} A_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i \partial x_j} + b_1 \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i \geq 2} b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad (3.24)$$

com coeficientes limitados. Como  $z \leq 0$  em  $V$  e  $z(u(\bar{x}), \bar{x}) = 0$  podemos usar o princípio do máximo forte para concluir que  $z \equiv 0$  em  $V$ . Assim, em  $V$  temos

$$\begin{aligned} w_{\bar{\lambda}}(x) &= u_{\bar{\lambda}}(v(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) - u(v(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \\ &= u_{\bar{\lambda}}(\bar{v}(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) - u(v(t, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$  in  $B(\bar{x}, \varepsilon)$ . ■

**Caso 2:**  $\bar{x} \in T_{\bar{\lambda}} \cap B$ . Observemos que para  $x \in B$ , temos

$$w_{\bar{\lambda}}(x) = u_{\bar{\lambda}}(x) - u(x) = u(2\bar{\lambda} - x_1, x') - u(x).$$

Assim,

$$\frac{\partial w_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(2\bar{\lambda} - x_1, x')(-1) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x),$$

que implica que

$$0 = \frac{\partial w_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(\bar{x}) = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}),$$

onde usamos que  $\bar{x} \in T_{\bar{\lambda}}$  and  $\bar{x}_1 = \bar{\lambda}$ .

**Lema 3.2.8** *Se  $\bar{x} \in T_{\bar{\lambda}}$ , temos que  $\nabla u(\bar{x}) = 0$ .*

**Demonstração.** De fato, suponhamos por contradição que  $\nabla u(\bar{x}) \neq 0$ . Assim, sem perda de generalidade, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \neq 0. \quad (3.25)$$

Observemos que  $(\partial u_{\bar{\lambda}} / \partial x_2)(\bar{x}) = (\partial u_{\lambda} / \partial x_2)(\bar{x})$ , desde que  $u_{\bar{\lambda}}(x) = u(2\bar{\lambda} - x_1, x')$ . Repetindo argumentos como no Lema 3.2.7, usando o teorema da função implícita, existem

funções  $v$  e  $\bar{v}$  definidas em uma vizinhança  $V$  de  $\bar{x}$  tais que

$$\begin{cases} t = u(x_1 v(x_1, t, x_3, \dots, x_n), x_3, \dots, x_n) \\ t = u_{\bar{\lambda}}(x_1, \bar{v}(x_1, t, x_3, \dots, x_n), x_3, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3.26)$$

A função  $z = v - \bar{v}$  satisfaz uma equação de segunda ordem análoga a (3.24). Observe que  $z(\bar{x}_1, u(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = 0$ , desde que  $v(\bar{x}_1, u(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = \bar{v}(\bar{x}_1, u(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)$ . Temos  $z(x_1, t, x_3, \dots, x_n) > 0$  para  $x_1$  perto de  $\mu_+$ . Então podemos usar o Lema de Hopf e concluir que  $(\partial z / \partial x_1)(\bar{x}_1, u(\bar{x}), x_3, \dots, x_n) < 0$ . Tomando as derivadas em (3.26) com respeito a  $x_1$ , temos que

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \frac{\partial v}{\partial x_1}(\bar{x}_1, u(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \\ 0 = \frac{\partial u_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(\bar{x}) + \frac{\partial u_{\bar{\lambda}}}{\partial x_2}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1}(\bar{x}_1, u_{\bar{\lambda}}(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n). \end{cases} \quad (3.27)$$

Como

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) = \frac{\partial u_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(\bar{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial u_{\bar{\lambda}}}{\partial x_2}(\bar{x}), \quad \text{e} \quad u(\bar{x}) = u_{\bar{\lambda}}(\bar{x})$$

e usando (3.27), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}(\bar{x}_1, u(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1}(\bar{x}_1, u(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \right) \\ = \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \frac{\partial z}{\partial x_1}(\bar{x}_1, u(\bar{x}), \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = 0, \end{aligned}$$

e então,

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) = 0,$$

que é uma contradição com (3.25). ■

Usando os Lemas 3.2.8 e 3.2.5 concluímos que vale apenas uma das possibilidades: ou  $u(\bar{x}) = M$  ou  $f(u(\bar{x})) = 0$ .

**Caso 3:**  $\bar{x} \in \partial B \cap \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}}$ . Neste caso  $u(\bar{x}) = 0$  que juntamente com  $w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$  implica que  $u_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$ . Assim  $\bar{x}_{\bar{\lambda}}$  é um ponto de mínimo de  $u$  e concluímos que  $\nabla u_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \nabla u(\bar{x}_{\bar{\lambda}}) = 0$ .

Portanto

$$\nabla u(\bar{x}) = \nabla u(\bar{x}) - \nabla u_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \nabla w_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$$

(lembramos que este caso ocorre somente quando  $0 \in Z_a$ ).

### **Etapa 3: Existem Pontos Regulares no Conjunto de Obstruções.**

Seja  $\bar{\lambda}$  o primeiro valor de  $\lambda$  para o qual um ponto de obstrução  $\bar{x}$  aparece aplicando o método dos planos móveis. Pela Etapa 2 um eventual ponto de obstrução ocorre no conjunto

$$K := \{x \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} : \nabla u(x) = 0\} \cup \{x \in \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus \bar{T}_{\bar{\lambda}} : u(x) = u_{\bar{\lambda}}(x)\} \subset \bar{B}.$$

**Lema 3.2.9** *Existem pontos regulares em  $K$ , isto é,*

$$K_1 := \{x \in K : \nabla u(x) \neq 0\} \neq \emptyset.$$

**Demonstração.** Suponha por contradição que  $K_1 = \emptyset$ , então  $\nabla u(x) = 0$ , para todo  $x \in K$ . Denotemos por

$$O(x, \varepsilon) = \{y = (y_1, y') \in \mathbb{H}^n : |x_1 - y_1| < \varepsilon \text{ e } y' \in B(y', \varepsilon)\},$$

onde  $B(y', \varepsilon)$  é a bola geodésica em  $\mathbb{H}^{n-1}$  de raio  $\varepsilon$  centrada em  $y' \in \mathbb{H}^{n-1}$ . A prova será dividida em dois casos:

**Caso 1:**  $0 \in Z_b$  ou  $f(0) > 0$ . Neste caso, usando o Lema de Hopf temos que  $K \subset B$ .

Como  $K$  é um subconjunto compacto existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^L O(x_j, \varepsilon) =: W_\varepsilon \subset B,$$

com  $x_j \in K$ . Notemos que  $\partial W_\varepsilon = \Gamma \cup N$  onde  $\Gamma$  é a  $C^1$ -hiperfície em  $\mathbb{H}^n$ ,  $N$  tem medida nula e  $\partial W_\varepsilon \cap K = \emptyset$ . Além disso, como  $w_{\bar{\lambda}}$  é positivo em  $\Sigma_{\bar{\lambda}}$ , podemos escolher  $\delta_1, \delta > 0$  tal que

$$u_{\bar{\lambda}} > u + \delta \quad \text{sobre} \quad \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda} + \delta_1} \cap \Gamma. \quad (3.28)$$

**Afirmação 3.2.10** Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} < -\delta \quad \text{sobre } T_{\bar{\lambda}} \cap \Gamma.$$

**Prova da Afirmação 3.2.10.** Se a afirmação é falsa então existe uma sequência  $x_k \in T_{\bar{\lambda}} \cap \Gamma$  tal que  $(\partial u / \partial x_1)(x_k) \geq -1/k$ . Podemos supor, a menos de subsequência, que  $x_k \rightarrow x_0$  e assim  $(\partial u / \partial x_1)(x_0) \geq 0$ . Por outro lado, temos que  $\partial u / \partial x_1 \leq 0$  sobre  $T_{\bar{\lambda}}$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{w_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda} + \varepsilon, x')}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{w_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda} + \varepsilon, x') - w_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda}, x')}{\varepsilon} \\ &= \frac{\partial w_{\bar{\lambda}}}{\partial x_1}(\bar{\lambda}, x') = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{\lambda}, x'). \end{aligned}$$

Então  $(\partial u / \partial x_1)(x_0) = 0$  e  $\nabla w_{\bar{\lambda}}(x_0) = 0$  pois  $w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$  sobre  $T_{\bar{\lambda}}$ . Como  $x_0 \in \Gamma$  temos  $\nabla u(x_0) \neq 0$ . Então usando o método da inversão local e o princípio do máximo (como no Lema 3.2.7) temos que  $u_{\bar{\lambda}} \equiv u$  em uma vizinhança  $x_0$  em  $\Sigma_{\bar{\lambda}}$ , e assim  $x_0 \in K_1$ , que é uma contradição. ■

Usando a Afirmação 3.2.10 podemos escolher  $\delta_1, \delta > 0$  tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} < -\delta \quad \text{sobre } (\bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus \Sigma_{\bar{\lambda} + \delta_1}) \cap \Gamma. \quad (3.29)$$

Assim, de (3.28)–(3.29), existe  $\eta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} u_{\lambda} &\geq u + \delta/2 \quad \text{sobre } \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda} + \delta_1} \cap \Gamma, & \text{para } \lambda &\in (\bar{\lambda} - \eta, \bar{\lambda}), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &\leq -\delta/2 \quad \text{sobre } (\bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus \Sigma_{\bar{\lambda} + \delta_1}) \cap \Gamma, & \text{para } \lambda &\in (\bar{\lambda} - \eta, \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

que implica

$$u_{\lambda} > u \quad \text{sobre } (\bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus \Sigma_{\bar{\lambda} + \delta_1}) \cup \Gamma,$$

e

$$u_{\lambda} \geq u \quad \text{sobre } \Gamma \cap \Sigma_{\lambda}.$$

Como  $u_{\lambda} = u$  sobre  $T_{\lambda} \cap W_{\varepsilon}$ , obtemos que

$$u_{\lambda} \geq u \quad \text{sobre } \partial W_{\varepsilon}^{\lambda}, \quad \forall \lambda \in (\bar{\lambda} - \eta, \bar{\lambda})$$

onde  $W_\varepsilon^\lambda := W_\varepsilon \cap \Sigma_\lambda$ . Então, pelo Teorema 1.3.5,

$$u_\lambda \geq u \quad \text{sobre} \quad W_\varepsilon^\lambda, \quad \forall \lambda \in (\bar{\lambda} - \eta, \bar{\lambda}).$$

Isto prova que não existem pontos de obstrução em  $W_\varepsilon^\lambda$ , que é uma contradição. Portanto,  $K_1 \neq \emptyset$ .

**Case 2:**  $0 \in Z_a$ . Primeiro observemos que fixado  $\varepsilon > 0$ , considere a cobertura do conjunto  $K \cup (\bar{K} \cap \bar{T} \cap \partial B)$  dada pelos conjuntos abertos  $O(x, \varepsilon)$  para  $x \in K$ . Assim, por compacidade, podemos extrair uma subcobertura finita

$$K \subset \bigcup_{j=1}^L O(x_j, \varepsilon),$$

com  $x_j \in K$ . Tome  $\delta_1 < \text{dist}(\bar{T}_{\bar{\lambda}} \cap \partial B, \partial W_\varepsilon)$ , onde  $W_\varepsilon = \left( \bigcup_{j=1}^L O(x_j, \varepsilon) \right) \cap B$ . Escolhamos  $\eta > 0$  suficientemente pequeno. Agora, analisaremos o comportamento de  $u$  e  $u_{\bar{\lambda}}$  no conjunto  $A_1 = (\bar{B} \setminus B(\mu_0, 1 - \eta)) \cap \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda} + \delta_1}$ . Para todo  $x_0 \in \Gamma \cap \partial B \cap \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda} + \delta_1}$ , por definição de  $K$ ,

$$u_{\bar{\lambda}}(x_0) = u_{\bar{\lambda}}(x_0) - u(x_0) \geq \delta_0 > 0,$$

onde  $\Gamma = \partial W_\varepsilon \cap \bar{B}$ . Por continuidade, para  $x$  em uma vizinhança de  $x_0$  e para  $\bar{\lambda} - \lambda > 0$  suficientemente pequeno temos que  $u_\lambda(x_0) - u(x_0) \geq \delta_0/2 > 0$ . Podemos escolher  $\eta > 0$  de modo que

$$u_\lambda > u \quad \text{em} \quad \Gamma \cap A_1. \quad (3.30)$$

Consideremos  $A_2 = \bar{B}(\mu_0, 1 - \eta) \cap \Sigma_{\bar{\lambda} + \delta_1}$ . Então, por continuidade, como

$$u_{\bar{\lambda}} \geq u + \delta \quad \text{sobre} \quad \Gamma \cap A_2,$$

podemos ver que

$$u_\lambda \geq u + \delta/2 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \cap A_2, \quad (3.31)$$

onde  $\delta > 0$  foi dado em (3.28). Usando um argumento similar ao da prova da Afirmação



3.2.10, podemos mostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} < -\delta \quad \text{sobre } T_{\bar{\lambda}} \cap \Gamma.$$

E novamente, podemos escolher  $\delta_1, \delta > 0$  tais que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} < -\delta \quad \text{sobre } (\bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus \Sigma_{\bar{\lambda}+\delta_1}) \cap \Gamma. \quad (3.32)$$

Assim, de (3.30)–(3.32), temos que

$$\begin{aligned} u_{\lambda} &\geq u + \delta/2 \quad \text{sobre } \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}+\delta_1} \cap \Gamma, \quad \text{se } \lambda \in (\bar{\lambda} - \eta, \bar{\lambda}), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &\leq -\delta/2 \quad \text{sobre } (\bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus \Sigma_{\bar{\lambda}+\delta_1}) \cap \Gamma, \quad \text{se } \lambda \in (\bar{\lambda} - \eta, \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Agora, a partir deste ponto completamos a prova seguindo os mesmos argumentos do **Caso 1**. ■

#### Etapa 4: Simetria Local.

Usando a Etapa 2, **Caso 2** e **Caso 3**, obtemos que  $K_1 \subset \Sigma_{\bar{\lambda}}$  e pelo Lema 3.2.7 mostramos que  $K_1$  é um conjunto aberto em  $B \subset \mathbb{H}^n$ . Denotemos por  $C^+$  uma componente conexa de  $K_1$ . Desde que  $\partial C^+ \subset B \setminus K_1$ , então é claro que

$$\nabla u \equiv 0 \quad \text{sobre } \Gamma^+ = \partial C^+ \cap (\bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus T_{\bar{\lambda}}).$$

Graças a hipótese

$$\{x \in B : \nabla u(x) = 0\} \cap u^{-1}(Z_b) \neq \emptyset$$

e o Lema 3.2.5, concluímos que

$$u(\Gamma^+) \subset Z_a \cup \{M\}, \quad \text{onde } M = \max_B u,$$

e então  $u$  é constante em toda componente conexa de  $\partial C^+ \cap \Sigma_{\bar{\lambda}}$ . Assim,  $\overline{C^+} \cap T_{\bar{\lambda}} \neq \emptyset$ , caso contrário teríamos  $C^+ \subset \bar{\Sigma}_{\bar{\lambda}} \setminus T_{\bar{\lambda}}$ : a função  $u$  seria constante em cada componente conexa de  $\partial C^+$  que é uma contradição com o fato de  $u$  ser não crescente e  $\nabla u \neq 0$  em  $C^+$ .

Definamos  $C^- = R_{\tilde{\lambda}}(C^+)$  e

$$C = \overline{C^+ \cup C^-},$$

então o conjunto  $C$  é simétrico com respeito à  $T_{\tilde{\lambda}}$  e conexo, mais ainda por construção a função  $u$  é simétrica sobre  $C$  com respeito a  $T_{\tilde{\lambda}}$ .

### Step 5: Simetria Global.

Defina  $u_1 = \inf_C u$  e  $u_2 = \sup_C u$ . Como  $u$  é monótona na direção  $x_1$ , ou  $u$  assume o valor  $u_1 > 0$  sobre  $\partial C$ , onde  $\nabla u = 0$ , ou  $u_1 = 0$  sobre  $\partial C \cap \partial B$ . Portanto, pela Proposição 3.2.5, temos que  $f(u_1) = 0$  se  $u_1 \neq 0$ . Analogamente, ou  $u$  assume o valor  $u_2$  sobre outra componente conexa de  $\partial C$  e então  $f(u_2) = 0$ , ou assume o seu máximo em um ponto interior  $\bar{x} \in C$  que pode ser tomado em  $T_{\tilde{\lambda}} \cap C$ .

Desde que  $u_1$  e  $u_2$  estão no conjunto finito  $\{0\} \cup Z_a \cup \{M\}$  e  $|\nabla u|$  é uniformemente limitado em  $B$ , existe uma bola geodésica de raio  $r_0 > 0$  contida em  $C$ , onde  $r_0$  depende somente de  $f$  e  $u$ . Assim, existe somente um número finito de tais componentes conexas  $C$ . Além disso, se considerarmos todos os possíveis conjuntos  $C$ , simétricos com respeito a uma certa hiperfície totalmente geodésica fechada, ao longo do qual  $u$  é decrescente e  $\nabla u = 0$  sobre  $\partial C$  (exceto possivelmente para  $u_1 = 0$ ), teremos uma quantidade finita, digamos  $d_0$ .

Agora considere direções  $\gamma_i \in S^{n-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d = nd_0 + 1$  tais que o ângulo  $(\gamma_i, \gamma_j)$  é  $2\pi$ -irracional para todo  $(i, j)$  com  $i \neq j$ , e toda família de  $n$  vetores unitários geram o  $\mathbb{R}^n$ . Um conjunto que é simétrico com respeito a todas estas direções é radialmente simétrico, com respeito a algum ponto. Assim, se aplicarmos o método dos planos móveis a todas as direções dadas acima, encontramos uma componente conexa radialmente simétrica  $C = B(x_0, r_1) \setminus B(x_0, r_2)$  com  $r_1 > r_2 \geq 0$ , e tal que  $u = u_1$  sobre  $\partial B(x_0, r_1)$  e  $u = u_2$  sobre  $\partial B(x_0, r_2)$ . Então podemos considerar as seguintes modificações da função  $u$ . Primeiro, considere  $v_1$  definida em  $B$  com  $v_1 \equiv u_1$  em  $B(x_0, r_1)$  e  $v_1 = u$  em  $B \setminus B(x_0, r_1)$ . Agora, no caso  $r_2 > 0$ , definimos  $v_2 = u$  em  $B(x_0, r_2)$ .

Sobre as hipóteses do Teorema 3.1.1, temos que a função  $u$  é radialmente simétrica.

Considerando as hipóteses do Teorema 3.1.2, reaplicamos as Etapas 1-5 para a função  $x \mapsto v_1(x)$  em  $B$ , e para a função  $x \mapsto v_2(x) - u_2$  em  $B(x_0, r_2)$ . Observemos que  $u \geq u_2$  sobre  $B(x_0, r_2)$  por monotonicidade das soluções na direção  $x_1$ . Assim, todas as hipóteses do Teorema 3.1.2 é verdadeira com  $B(x_0, r_2)$  no lugar de  $B$ . Repetindo o processo uma quantidade finita de vezes obtemos o Teorema 3.1.2.

# Capítulo 4

## Equações Envolvendo o Operador de $p$ -Laplace-Beltrami com $1 < p < 2$ em $\mathbb{H}^n$

Vamos provar resultados de monotonicidade e simetria em domínios limitados  $\Omega$  de  $\mathbb{H}^n$ . Considere o Problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado em  $\mathbb{H}^n$ ,  $\Delta_p$  é o operador de  $p$ -Laplace-Beltrami em  $\mathbb{H}^n$ ,  $1 < p < 2$ , e  $f$  é uma função localmente Lipschitz contínua.

Vamos introduzir algumas notações que serão utilizadas no capítulo. Seja  $\nu$  uma direção em  $\mathbb{R}^n$ , isto é,  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\nu| = 1$  e  $\xi = \lambda\nu$  se  $\lambda \in \mathbb{H}^n$  ou  $\xi = -\lambda\nu$  caso contrário. Definamos

$$T_\lambda^\nu = \exp_\xi(\{w \in T_\xi \mathbb{H}^n : \langle w, \nu \rangle = 0\}) \quad (4.2)$$

$$\Sigma_\lambda = \exp_\xi(\{w \in T_\xi \mathbb{H}^n : \langle w, \nu \rangle > 0\}) \quad (4.3)$$

$$x_\lambda^\nu = R_{T_\lambda^\nu}(x), \quad x \in \mathbb{H}^n \quad (4.4)$$

(observe que  $T_\lambda^\nu$  é uma hiperfície totalmente geodésica e que  $R_{T_\lambda^\nu}$  é a reflexão definida no Capítulo 1). Denotemos

$$a(\nu) = \sup\{\lambda : T_\lambda^\nu \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

Se  $\lambda < a(\nu)$ , então  $\Sigma_\lambda^\nu$  é não vazio e denote

$$(\Sigma_\lambda^\nu)' = R_\lambda(\Sigma_\lambda^\nu). \quad (4.5)$$

**Observação 4.0.11** *Suponha que  $\Omega \subset \mathbb{H}^n$  é suave e  $\lambda < a(\nu)$ , com  $a(\nu) - \lambda$  pequeno então a calota refletida  $(\Sigma_\lambda^\nu)'$  está contida em  $\Omega$  e permanecerá nela, até que uma das seguintes condições ocorra:*

- (i)  $(\Sigma_\lambda^\nu)'$  tornar-se internamente tangente a  $\partial\Omega$  em algum ponto não pertencente a  $T_\lambda^\nu$
- (ii)  $T_\lambda^\nu$  é ortogonal a  $\partial\Omega$  em algum ponto.

Seja  $\Lambda_1(\nu)$  o conjunto dos  $\lambda < a(\nu)$  tais que para cada  $\mu \in (\lambda, a(\nu))$  nenhuma das condições (i) e (ii) é verdadeira e defina

$$\lambda_1(\nu) = \inf \Lambda_1(\nu). \quad (4.6)$$

## 4.1 Resultados Principais

O resultado principal deste capítulo é o Teorema 4.1.1 abaixo.

**Teorema 4.1.1** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{H}^n$ ,  $n \geq 2$ , e  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  uma solução fraca de (4.1) com  $1 < p < 2$ . Para toda direção  $\nu$  e todo  $\lambda \in (\lambda_1(\nu), a(\nu))$  temos*

$$u(x) \leq u(x_\lambda^\nu) \quad \forall x \in \Sigma_\lambda^\nu. \quad (4.7)$$

Além disso,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) > 0 \quad \forall x \in \Sigma_{\lambda_1(\nu)}^\nu \setminus Z \quad (4.8)$$

em que  $Z = \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}$ .

Temos a seguinte consequência do Teorema 4.1.1.

**Corolário 4.1.2** *Suponha que  $\Omega$  é uma bola geodésica  $B(x_0, R)$  em  $\mathbb{H}^n$  com centro em  $x_0 \in \mathbb{H}^n$  e raio  $R$ . Então  $u$  é radialmente simétrica e  $\partial u / \partial r < 0$  para  $0 < r < R$ .*

O Corolário acima também implica um resultado de regularidade desde que para  $\nabla u \neq 0$  em  $B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$ , por resultados de regularidade elíptica, concluimos que  $u \in C^2(B(x_0, R) \setminus \{x_0\})$ .

A prova do Teorema 4.1.1 é longa e tecnicamente complicada, assim vamos inicialmente ilustrar suas ideias principais.

Iniciamos com o Teorema 4.2.1 que diz que, quando começamos o procedimento dos planos móveis, devemos alcançar a possível posição maximal a menos que o conjunto  $Z$  de pontos críticos de  $u$  crie uma componente conexa  $C$  do conjunto onde  $\nabla u \neq 0$ , que é simétrico com respeito a uma hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0}$  (que é definida em (4.13)) e onde  $u$  coincide com a função  $u_{\lambda_0}$ . Portanto todos os esforços subsequentes serão para provar que o conjunto  $C$  não existe.

O primeiro resultado, deduzido da Proposição 4.2.2, é que se  $u$  é constante sobre um subconjunto conexo de pontos críticos de  $\partial C$  cuja projeção na hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0}$  contém um subconjunto aberto de  $T_{\lambda_0}$  então um tal conjunto  $C$  não existe. Isto é provado por um cuidadoso uso do Lema de Hopf que dá uma propriedade do conjunto crítico de uma solução  $u$  de (4.1).

Veremos que a hipótese de  $u$  ser constante em uma componente do conjunto de pontos críticos de (que poderia ser obviamente satisfeita por alguma função de classe  $C^1$ ) não é desnecessária, uma vez não é possível verificar se o conjunto de pontos críticos de  $u$  é muito singular. Portanto, se o conjunto crítico  $Z$  de  $u$  não é muito ruim as afirmações do Teorema 4.1.1 são consequência do Teorema 4.1.1 e da Proposição 4.2.2, sem explorar qualquer hipótese de suavidade sobre  $\partial\Omega$  (ver Observação 4.2.3).

Mas, de fato, não é possível ter de modo geral informações “a priori” do conjunto crítico  $Z$ . Assim, para provar que  $u$  é constante no subconjunto conexo de pontos críticos de  $\partial C$  cuja projeção na hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0}$  contém um subconjunto aberto da hiperfície.

Para isto vamos mover ortogonalmente hiperfície totalmente geodésicas em direções próximas a  $e_1$ , a fim de provar que o “mau” conjunto  $C$  é também simétrico com respeito

a hiperfícies totalmente geodésicas fechadas próximas, e logo na sua fronteira existe pelo menos uma parte conexa onde  $u$  é constante,  $\nabla u = 0$ , e cuja projeção na hiperfície  $T_{\lambda_0}$  contém um subconjunto aberto do hiperplano.

## 4.2 Resultados para Domínios Gerais

Aqui provamos alguns resultados de simetria e monotonicidade para um domínio limitado que não é necessariamente suave. Nesta seção  $p \in (1, 2)$  será um número fixo,  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{H}^n$ ,  $n \geq 2$  e  $f$  uma função Lipschitz contínua. Para toda direção  $\nu$  defina  $a(\nu)$ ,  $\Sigma_\lambda^\nu$  e  $(\Sigma_\lambda^\nu)'$  como anteriormente. Defina também

$$\Lambda_2(\nu) = \{\lambda < a(\nu); (\Sigma_\mu^\nu)' \subset \Omega, \forall \mu \in (\lambda, a(\nu))\}$$

e se  $\Lambda_2(\nu) \neq \emptyset$

$$\lambda_2(\nu) = \inf \Lambda_2(\nu). \quad (4.9)$$

Observe que se  $\Omega$  é suave então

$$\emptyset \neq \Lambda_1(\nu) \subset \Lambda_2(\nu).$$

Se  $a(\nu) > \lambda > \lambda_2(\nu)$ ,  $x \in \Sigma_\lambda^\nu$  e  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  consideremos

$$u_\lambda^\nu = u(x_\lambda^\nu), \quad (4.10)$$

onde  $x_\lambda^\nu$  é definido em (4.4),

$$Z_\lambda^\nu = Z_\lambda^\nu(u) = \{x \in \Sigma_\lambda^\nu : \nabla u(x) = \nabla u_\lambda^\nu(x) = 0\}, \quad (4.11)$$

$$Z = Z(u) = \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}. \quad (4.12)$$

Finalmente, definimos

$$\Lambda_0(\nu) = \{\lambda \in (\lambda_2(\nu), a(\nu)) : u \leq u_\lambda^\mu \text{ em } \Sigma_\mu^\nu, \forall \mu \in (\lambda, a(\nu))\}.$$

Se  $\Lambda_0 \neq \emptyset$  considere

$$\lambda_0(\nu) = \inf \Lambda_0. \quad (4.13)$$

Obviamente temos  $\lambda_0(\nu) \geq \lambda_2(\nu)$ .

**Teorema 4.2.1** *Seja  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  uma solução fraca de (4.1), com  $1 < p < 2$ . Para toda direção  $\nu$  tal que  $\Lambda_2(\nu) \neq \emptyset$  temos que  $\Lambda_0(\nu) \neq \emptyset$  e, se  $\lambda_0 > \lambda_2$  então existe uma componente conexa  $C^\nu$  de  $\Omega_{\lambda_0(\nu)}^\nu \setminus Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  tal que  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $C^\nu$ .*

*Para toda tal componente conexa  $C^\nu$  também obtemos que*

$$\nabla u(x) \neq 0 \quad \forall x \in C^\nu \quad (4.14)$$

$$\nabla u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial C^\nu \setminus (T_{\lambda_0(\nu)} \cup \partial\Omega). \quad (4.15)$$

Além disso, para todo  $a(\nu) > \lambda > \lambda_0(\nu)$  temos

$$u < u_\lambda^\nu \quad \text{em } \Omega_\lambda^\nu \setminus Z_\lambda^\nu \quad (4.16)$$

e finalmente

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega_{\lambda_0(\nu)}^\nu \setminus Z. \quad (4.17)$$

**Demonstração.** A prova é muito longa, dividiremos em três etapas.

**Etapa 1.** Seja  $\nu$  uma direção tal que  $\Lambda_0(\nu) \neq \emptyset$ . Para  $a(\nu) > \lambda > \lambda_0(\nu)$  vamos comparar as funções  $u$  e  $u_\lambda^\nu$  no conjunto aberto  $\Omega_\lambda^\nu$  usando o Teorema 1.3.8 e o Teorema 1.3.9.

Usando a expressão local do operador de  $p$ -Laplace Beltrami (ver equação (1.2)) temos que a função  $u_\lambda^\nu$  satisfaz a equação  $-\Delta_p u_\lambda^\nu = f(u_\lambda^\nu)$  em  $\Omega_\lambda^\nu$ . E como consequência

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_\lambda^\nu)}, \|u_\lambda^\nu\|_{L^\infty(\Omega_\lambda^\nu)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad |Du| + |Du_\lambda^\nu| \leq \sup_\Omega |Du|, \quad |\Omega_\lambda^\nu| \leq |\Omega|$$

e podemos fixar  $\alpha, M > 0$ , independente de  $\lambda$ , de modo que o Teorema 1.3.8 possa ser aplicado em  $\Omega_\lambda^\nu$  para  $u$  e para  $v = u_\lambda^\nu$ .

Se  $\lambda < a(\nu)$  e  $a(\nu) - \lambda$  é pequeno então  $|\Sigma_\lambda^\nu|$  é pequena. Além disso, temos sobre  $\partial\Sigma_\lambda^\nu$ , desde que  $0 = u \leq u_\lambda^\nu$  sobre  $\partial\Omega \cap \Sigma_\lambda^\nu$ , enquanto  $u = u_\lambda^\nu$  sobre  $\partial\Sigma_\lambda^\nu \cap T_\lambda^\nu$  por definição. Portanto, pelo Teorema 1.3.8 temos que  $u \leq u_\lambda^\nu$  em  $\Sigma_\lambda^\nu$  para  $\lambda < a(\nu)$ ,  $a(\nu) - \lambda$  pequeno, assim  $\Lambda_0 \neq \emptyset$ .

**Etapa 2.** Na calota  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ , por continuidade, a desigualdade  $u \leq u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  é verdadeira. Além disso, pelo Teorema 1.3.9 temos que se  $C^\nu$  é uma componente conexa de  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu \setminus Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$



então ou  $u < u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $C^\nu$  ou  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $C^\nu$ .

Suponha agora que  $\lambda_0 > \lambda_2$  e suponha, por contradição, que  $u < u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $C^\nu$ . Escolhamos um conjunto aberto  $A$ , com  $Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu \subset A \subset \Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ , tal que  $M_{A,\lambda_0} = \sup_A (|\nabla u| + |\nabla u_{\lambda_0(\nu)}^\nu|) < M/2$  (isto é possível desde que  $\nabla u = \nabla u_{\lambda_0(\nu)}^\nu = 0$  em  $Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ ). Também fixemos um conjunto compacto  $K \subset \Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  tal que  $|\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu \setminus K| < \alpha/2$  ( $\alpha$  e  $M$  são os números fixados a Etapa 1). Se  $K \setminus A \neq \emptyset$ , por nossas hipóteses a função  $u_{\lambda_0(\nu)}^\nu - u$  é positiva em  $K \setminus A$ , e como  $K \setminus A$  é compacto temos que  $\min_{K \setminus A} (u_{\lambda_0(\nu)}^\nu - u) = m > 0$ . Por continuidade existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\lambda_0(\nu) - \varepsilon > \lambda_2(\nu)$  e tal que para  $\lambda_0(\nu) > \lambda > \lambda_0(\nu) - \varepsilon$  temos

$$|\Sigma_\lambda^\nu \setminus K| < \alpha, \quad M_{A,\lambda} = \sup_A (|Du| + |Du_\lambda^\nu|) < M$$

e, se  $K \setminus A \neq \emptyset$ ,

$$u_\lambda^\nu - u > \frac{m}{2} > 0 \quad \text{em } K \setminus A$$

(em particular  $u_\lambda^\nu > 0$  sobre  $\partial(K \setminus A)$ ). Além disso, para tais valores de  $\lambda$  temos que  $u \leq u_\lambda^\nu$  sobre  $\partial(\Sigma_\lambda^\nu \setminus (K \setminus A))$  porque se  $x_0$  é um ponto sobre esta fronteira ou  $x_0 \in \Sigma_\lambda^\nu$  onde  $u \leq u_\lambda^\nu$  como já observado na Etapa 1, ou  $x_0 \in \partial(K \setminus A)$  onde  $u_\lambda^\nu$  é positiva.

Desde que  $\Sigma_\lambda^\nu \setminus (K \setminus A)$  é a união disjunta de  $\Sigma_\lambda^\nu \setminus A = A_1$  (com medida pequena) e  $K \cap A = A_2$  (onde os gradientes são pequenos), do Teorema 1.3.8 obtemos que  $u \leq u_\lambda^\nu$  em  $\Omega_\lambda^\nu \setminus (K \setminus A)$ . Desde que, se  $K \setminus A \neq \emptyset$ , temos que  $u_\lambda^\nu - u > 0$  em  $K \setminus A$ , obtemos que  $u \leq u_\lambda^\nu$  em  $\Sigma_\lambda^\nu$  para  $\lambda_0(\nu) < \lambda < \lambda_0(\nu) - \varepsilon$ . Isto contradiz a definição de  $\lambda_0(\nu)$  e mostra que se  $\lambda_0(\nu) > \lambda_2(\nu)$  então não é possível que  $u < u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $\Omega_{\lambda_0(\nu)}^\nu \setminus Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ , assim existe pelo menos uma componente conexa  $C^\nu$  de  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  tal que  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $C^\nu$ .

Se  $C^\nu$  é tal componente conexa, por definição  $|\nabla u| + |\nabla u_{\lambda_0(\nu)}^\nu| > 0$  em  $C^\nu$ , mas desde que  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  também temos que  $\nabla u \neq 0$  em  $C^\nu$ , isto é, (4.14).

Finalmente, pela definição de  $C^\nu$ , temos (4.15) desde que  $\partial C^\nu \subset T_{\lambda_0(\nu)}^\nu \cup \partial\Omega \cup Z$  (onde  $Z$  é definido por (4.12)).

**Etapa 3.** Para provar (4.16) é suficiente mostrar que

$$u < u_\lambda \quad \text{em } \Sigma_\lambda^\nu \setminus Z, \quad \text{se } a(\nu) > \lambda > \lambda_0(\nu). \quad (4.18)$$

De fato, se (4.16) é falsa e  $u(x_0) = u'_\lambda(x_0)$  para um ponto  $x_0 \in \Sigma'_\lambda$ , então  $u \equiv u'_\lambda$  na componente conexa de  $\Sigma'_\lambda$  na qual  $x_0$  pertence, e isto implica que ambos  $|\nabla u|$  e  $|\nabla u'_{\lambda_0(\nu)}|$  não são zero, isto é,  $x_0 \in \Sigma'_\lambda \setminus Z'_\lambda$  assim (4.18) não é válida.

Agora vamos provar (4.18) e suponha por simplicidade de notações, que  $\nu = e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Escrevemos as coordenadas em  $\mathbb{H}^n$  como  $x = (y, z)$  com  $y \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{H}^{n-1}$  e omitiremos o índice  $\nu = e_1$  em  $\Sigma'_\lambda$ ,  $u'_\lambda$ , etc.

Suponha, por contradição, que existe  $\mu$ , com  $a(e_1) > \mu > \lambda_0(e_1)$  e  $x_0 = (y_0, z_0) \in \Sigma_\mu \setminus Z_\mu$  tal que  $u(x_0) = u_\mu(x_0)$ . Pelo Teorema 1.3.9 temos que  $u \equiv u_\mu$  em uma componente conexa  $C$  de  $\Sigma_\mu \setminus Z_\mu$  na qual  $x_0$  pertence. Se  $\lambda < \mu$  e  $\mu - \lambda$  é pequeno temos que  $R_\lambda(x_0) = R_\mu(x)$ , onde  $x = (y, z_0)$  é um ponto de  $C$  com  $y > y_0$ , assim  $u(x) = u(R_\mu(x)) = u(R_\lambda(x_0)) \geq u(x_0)$ , desde que para  $\lambda > \mu$ ,  $\mu - \lambda$  pequeno (mais precisamente para  $\lambda \leq \lambda_0$ ) a desigualdade  $u \leq u_\lambda$  é válido em  $\Sigma_\lambda$ . Assim se  $y > y_0$ , com  $y - y_0$  pequeno produz a desigualdade  $u(y, z_0) \geq u(y_0, z_0)$ , que implica que  $u(y, z_0) = u(y_0, z_0)$  porque  $u$  é não decrescente na direção  $e_1$  em  $\Omega_{\lambda_0}$ . Portanto o conjunto

$$U = \{y > y_0 : (y, z_0) \in \Omega \quad \text{e} \quad u(y, z_0) = u(y_0, z_0)\}$$

é não vazio. Agora definamos

$$y_1 = \sup U. \tag{4.19}$$

Afirmamos que  $x_1 = (y_1, z_0) \in \partial\Omega$ . De fato suponha que  $x_1 \in \Omega$  e chame  $\lambda_1 = (y_1 + y_0)/2$ . Por continuidade  $u(x_1) = u(x_0)$  e  $x_1 \in \Omega_{\lambda_1} \setminus Z_{\lambda_1}$ , desde  $R_{\lambda_1}(x_1) = x_0$  e  $\nabla u(x_0) \neq 0$ . Além disso, do Teorema 1.3.9 obtemos que  $u \equiv u_{\lambda_1}$  na componente conexa de  $\Omega_{\lambda_1} \setminus Z_{\lambda_1}$  na qual  $x_1$  pertence, que por sua vez implica que  $\nabla u(x_1) \neq 0$ . Repetindo os argumentos anteriores, com  $\mu$  e  $x_0$  substituídos por  $\lambda_1$  e  $x_1$ , obtemos que  $u((y, z_0)) = u((y_0, z_0))$  para  $y > y_1$ ,  $y - y_1$  pequeno, e isto contradiz a definição de  $y_1$ . Assim  $x_1 \in \partial\Omega$  e  $0 = u(x_1) = u(x_0) > 0$ . Esta contradição prova (4.18) e conseqüentemente (4.16).

Finalmente (4.17) é uma consequência de (4.16) e o Lema de Hopf. De fato, seja  $x = (\lambda, z) \in \Omega_{\lambda_0} \setminus Z$ , isto é,  $\lambda > \lambda_0$  e  $\nabla u(x) \neq 0$ . Na bola geodésica  $B = B_r(x)$  temos que  $|\nabla u| \geq \varepsilon > 0$ , assim  $|\nabla u|, |\nabla u_\lambda| \geq \varepsilon > 0$  em  $B \cap \Omega_\lambda$ . Isto implica por resultados

padrões que  $u \in C^2(B)$  e a diferença  $u_\lambda - u$  satisfaz uma equação estritamente elíptica linear  $L(u_\lambda - u) = 0$  (ver [?], [?] ou o Capítulo 2). Por outro lado temos, por (4.16), que  $u_\lambda - u > 0$  em  $B \cap \Sigma_\lambda$  enquanto  $u(x) = u_\lambda(x)$  porque  $x$  pertence a  $T_\lambda$ . Consequentemente, pelo Lema de Hopf temos que

$$0 > \frac{\partial(u_\lambda - u)}{\partial x_1}(x_1) = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1),$$

isto é, (4.17) é válido. ■

Agora vamos provar uma proposição que dá uma importante informação sobre como o conjunto de pontos críticos  $Z$  da função  $u$  pode intersectar a calota  $\Omega_{\lambda_0}^\nu$ .

**Proposição 4.2.2** *Suponha que  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  é uma solução fraca de (4.1), com  $1 < p < 2$ . Para toda direção  $\nu$  a calota  $\Sigma_{\lambda_0}^\nu$  não contém subconjunto  $\Gamma$  de  $Z$  no qual  $u$  é constante e cuja projeção sobre o hiperplano  $T_{\lambda_0}^\nu$  contém um subconjunto aberto de  $T_{\lambda_0}^\nu$  (com respeito a topologia induzida).*

**Demonstração.** Por simplicidade tome  $\nu$  como a direção  $x_1$  e denote um ponto  $x$  em  $\mathbb{H}^n$  como  $x = (y, z)$  com  $y \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{H}^{n-1}$ . Como usual omitiremos o índice  $\nu = e_1$  em  $\Sigma_\lambda^\nu$ ,  $u_\lambda^\nu$ , etc. Argumentando por contradição assumimos que  $\Sigma_{\lambda_0}$  contém um conjunto  $\Gamma$  com as propriedades:

- (i) existe  $\gamma > 0$  e  $z_0 \in \mathbb{H}^{n-1}$  tal que, para cada  $(\lambda_0, z) \in T_{\lambda_0}$  com  $z$  pertencente a bola geodésica  $B(z_0, \gamma)$  de raio  $\gamma$  centrada em  $z_0$  em  $\mathbb{H}^{n-1}$  existe  $y > \lambda_0$  com  $(y, z) \in \Gamma$
- (ii)  $\nabla u(x) = 0$  para todo  $x \in \Gamma$
- (iii)  $u(x) = m > 0$  para todo  $x \in \Gamma$ .

Note que  $\bar{\Gamma}$  satisfaz as mesmas propriedades de  $\Gamma$  e que por (iii)

$$(iv) \quad \bar{\Gamma} \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Seja  $\omega = \omega_\gamma$  a bola geodésica em  $\mathbb{H}^{n-1}$  centrada em  $z_0$  com raio  $\gamma$ . Consideremos o cilindro  $\mathbb{R} \times \omega$  e denote por  $S$  a interseção deste cilindro com a calota  $\Sigma_{\lambda_0}$ . Agora distinguiamos dois casos:

**Caso 1:**  $f(m) < 0$ . Neste caso considere a parte “esquerda”  $S_l$  de  $S$  com respeito ao conjunto  $\Gamma$ , isto é,

$$S_l = \{(y, z) : z \in \omega, y \in (\sigma_1(z), \sigma_2(z))\}$$

onde

$$\sigma_1(z) = \inf\{y \text{ tal que } (y, z) \in \Sigma_{\lambda_0}\}$$

$$\sigma_1(z) = \inf\{y \text{ tal que } (y', z) \notin \bar{\Gamma} \text{ para algum } y' < y\}.$$

Note que por (i) e (iv) a definição de  $\Sigma_l$  faz sentido e  $\sigma_1(z) < \sigma_2(z) < \lambda_0$ . Mais ainda, temos

$$u(x) \leq m \quad \forall x \in \Sigma_l \quad \text{e} \quad u \neq m \text{ em } \Sigma_l. \quad (4.20)$$

De fato, se  $(y, z) \in \Sigma_l$  então  $u(y, z) \leq u(\sigma_2(z), z) = m$  desde que  $u$  é não decrescente na direção  $x_1$  em  $\omega_{\lambda_0}$  e o ponto  $(\sigma_2(z), z)$  pertence a  $\bar{\Gamma}$  (caso contrário teríamos uma distância positiva a  $\bar{\Gamma}$  e não teríamos que  $(y, z) \notin \bar{\Gamma}$  para  $y > \sigma_2(z)$ ).

Mais ainda,  $u \neq m$  em  $\Sigma_l$  desde que  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  e  $\partial\Omega \cap \bar{\Sigma}_l \neq \emptyset$ .

Como  $f(m) \leq 0$  temos

$$\begin{aligned} -\Delta_p(u - m) + \Lambda(u - m) &= f(u) + \Lambda u - \Lambda m \\ &\leq f(u) + \Lambda u - (f(m) + \Lambda m) \end{aligned} \quad (4.21)$$

para qualquer  $\Gamma \geq 0$ . Por outro lado, desde que  $f$  é localmente Lipschitz contínua existe  $\Gamma \geq 0$  dependente somente de  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$  tal que  $f(s) + \Gamma s$  é não decrescente para  $s \in [0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}]$ . Para tal valor de  $\Lambda$  da equação (4.21) resulta que

$$-\Delta_p(u - m) + \Lambda(u - m) \leq 0 \quad \text{em } \Sigma_l. \quad (4.22)$$

Agora observemos que para algum ponto  $x'$  sobre  $\partial\Sigma_l \cap \bar{\Gamma}$  a condição da esfera interior é satisfeita. De fato, tomemos  $y_0 \in \mathbb{R}$  com  $\sigma_1(z_0) < y_0 < \sigma_2(z_0)$ . Desde que  $\text{dist}((y_0, z_0), \bar{\Gamma}) > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 < \varepsilon < \gamma$ ,  $B_\varepsilon((y_0, z_0)) \subset \Sigma_l$ . Para  $y \in \mathbb{R}$

seja  $B(y)$  a bola geodésica centrada em  $(y, z_0)$  com raio  $\varepsilon$  e definamos

$$y_1 = \sup\{y > y_0 : \forall y' \in (y_0, y) \quad \overline{B(y')} \cap \overline{\Gamma} \neq \emptyset\}.$$

Como se  $\overline{B(y_1)} \cap \overline{\Gamma} = \emptyset$  então  $\text{dist}(\overline{B(y_1)}, \overline{\Gamma}) > 0$ , é claro que  $\overline{B(y_1)} \cap \overline{\Gamma} \neq \emptyset$ . Além disso,  $\overline{B(y_1)} \cap \overline{\Gamma} \subset \partial B(y_1)$  como é fácil checar da definição de  $y_1$ .

Assim  $B(y_1) \subset \Sigma_l$  e existe  $x' \in \partial B(y_1) \cap \overline{\Gamma}$  com  $u(x') = m$  por (iii). Por (4.20),(4.22) e o Lema de Hopf obtemos que  $\frac{\partial u}{\partial s}(x') < 0$  para toda derivada direcional interior, que contradiz (ii)

**Caso 2:**  $f(m) > 0$ . Neste caso considere a parte “direita”  $\Sigma_r = \Sigma \setminus \overline{\Sigma}_l$  e  $\Sigma$  com respeito a  $\Gamma$ , isto é,

$$\Sigma_r = \{(y, z) : z \in \omega, \sigma_2(z) < y < \lambda_0\}.$$

Novamente  $\Sigma_r$  está bem definido e por monotonicidade de  $u$  em  $\Omega_{\lambda_0}$  temos

$$u(x) \geq m \quad \forall x \in \Sigma_r \quad \text{e} \quad u \not\equiv m \text{ em } \Sigma_r \quad (4.23)$$

porque se  $u$  fosse constante em  $\Sigma_r$  então  $f(m)$  seria zero contrariando nossas hipóteses. Como antes, explorando que  $f$  é Lipschitziana e o fato de que  $f(m)$  ser positivo obtemos

$$-\Delta_p(u - m) + \Lambda(u - m) > f(u) + \Lambda u - (f(m) + \Lambda m) \geq 0 \quad (4.24)$$

para algum  $\Gamma \geq 0$ . De (4.23) e (4.24) aplicando o Lema de Hopf em um ponto  $x' \in \partial \Sigma_r \cap \overline{\Gamma}$  obtemos (sendo  $u(x') = \min_{\overline{\Sigma}_r} u$ ) que  $\frac{\partial u}{\partial s} > 0$  para toda derivada direcional interior, que contradiz (ii). ■

**Observação 4.2.3** *Uma primeira consequência do Teorema 4.2.1 e da Proposição 4.2.2 é a seguinte. Suponha que  $u$  é uma solução de (4.1) cujo conjunto crítico é bem regular e tal que  $u$  é constante sobre toda componente conexa do conjunto  $Z$  de seus pontos críticos. Então, para toda direção  $\nu$ , temos que  $\lambda_0(\nu) = \lambda_2(\nu)$ .*

De fato, se para alguma direção  $\nu$  acontece que  $\lambda_0(\nu) < \lambda_2(\nu)$  então, pelo Teorema 4.2.1 existe uma componente conexa  $C^\nu$  de  $\Omega_{\lambda_0(\nu)}^\nu \setminus Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  tal que  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $C^\nu$ . Assim  $\partial C^\nu$  conteria um conjunto  $\Gamma$  sobre o qual  $\nabla u = 0$  (por definição, ver (4.15)),  $u$  é constante (por hipótese) e cuja projeção sobre o hiperplano  $T_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  contém um subconjunto aberto de  $T_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ : isto é impossível pela Proposição 4.2.2.

Note que nós apenas começamos usamos a hipótese de que  $u$  é constante em qualquer componente conexa do conjunto  $Z$  dos seus pontos críticos.

### 4.3 Prova do Teorema 4.1.1 e seus Corolários

Iniciemos com um lema topológico simples que será usado posteriormente.

**Lema 4.3.1** *Seja  $A, B$  subconjuntos abertos não vazios em um espaço topológico tal que  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $B \not\subseteq A$ . Se  $B$  é conexo então  $\partial A \cap B \neq \emptyset$ .*

**Demonstração.** Por hipótese  $A \cap B$  é um subconjunto aberto não vazio próprio de  $B$ . Argumentaremos por contradição, suponha que  $\partial A \cap B = \emptyset$ . Como  $B$  é aberto também temos que  $\partial B \cap B = \emptyset$ , e sendo  $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$  obtemos que  $\partial(A \cap B) \cap B = \emptyset$ .

Isto implica que  $B \setminus (A \cap B) = B \setminus \overline{(A \cap B)}$  é aberto não vazio e disjunto de  $A \cap B$ , contradizendo a hipótese de que  $B$  é conexo. ■

**Corolário 4.3.2** *Seja  $A, B$  conjuntos abertos conexos em um espaço topológico e suponha que  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \neq B$ . Então  $(\partial A \cap B) \cup (\partial B \cap A) \neq \emptyset$ .*

Agora provaremos o Teorema 4.1.1 e seu corolário. Assim, nesta seção,  $\Omega$  será um aberto limitado suave em  $\mathbb{H}^n$ ,  $n \geq 2$ . Seja  $\nu$  uma direção e  $\lambda_1(\nu)$ ,  $\lambda_2(\nu)$ ,  $\lambda_0(\nu)$  definidos como acima. Desde que  $\Omega$  é suave temos que  $\emptyset \neq \Lambda_1(\nu) \subseteq \Lambda_2(\nu)$ , assim  $\Lambda_0(\nu) \neq \emptyset$  pelo Teorema 4.2.1, e  $a(\nu) > \lambda_1(\nu)$ ,  $\lambda_0(\nu) \geq \lambda_2(\nu)$ . Vemos da definição de  $\lambda_0(\nu)$  e do Teorema 4.2.1, que o Teorema 4.1.1 será provado se mostrarmos que  $\lambda_0(\nu) \leq \lambda_1(\nu)$ .

Como a prova é tecnicamente muito complicada gostaríamos de ajudar o leitor, falando em poucas palavras sobre elas. A ideia da prova é mostrar que se  $\lambda_0(\nu) < \lambda_1(\nu)$  então existe um conjunto pequeno  $\Gamma$  de pontos críticos de  $u$  na calota  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  no qual  $u$  é constante e cuja a projeção sobre o hiperplano  $T_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  contém um subconjunto aberto de  $T_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ . Uma vez mostrado isto obtemos uma contradição com a Proposição 4.2.2. Como vimos na Observação 4.2.3, se o conjunto crítico  $Z$  não é muito ruim então  $\lambda_0(\nu) = \lambda_2(\nu)$ . Disto seguiria que  $\lambda_0(\nu) \geq \lambda_1(\nu)$  e o Teorema 4.1.1 estaria provado. Mas, desde que a priori o conjunto crítico  $Z$  de  $u$  pode ser tão ruim que  $u$  não é constante em suas componentes conexas (ver Observação 4.2.3), para provar a existência do conjunto  $\Gamma$  usamos o Teorema

4.2.1 e um método que consiste em mover o hiperplanos ortogonalmente em direções próximas de  $\nu$  e que requerem a suavidade de  $\partial\Omega$  como observado na introdução.

Como usual seja  $\nu$  uma direção e defina  $\mathcal{F}_\nu$  como a coleção de todas as componentes conexas  $C^\nu$  de  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu \setminus Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  tais que  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $\overline{C^\nu}$ , assim  $(\overline{C^\nu} \cap \partial\Omega) \setminus T_{\lambda_0(\nu)}^\nu = \emptyset$  desde que  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  enquanto  $u_{\lambda_0(\nu)}^\nu > 0$  em  $\overline{C^\nu} \setminus T_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ , porque da definição de  $\lambda_1$  temos que  $(\overline{\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu}) \setminus T_{\lambda_0(\nu)}^\nu \subset \Omega$ .

Logo existem duas alternativas: ou  $\nabla u(x) = 0$  para todo  $x \in \partial C^\nu$ , neste caso definimos  $\tilde{C}^\nu = C$ , ou existem pontos  $x \in \partial C^\nu \cap T_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  tais que  $\nabla u(x) \neq 0$ . Neste caso definimos  $\tilde{C}^\nu = C^\nu \cup C_1^\nu \cup C_2^\nu$  onde  $C_1^\nu = R_{\lambda_0(\nu)}^\nu(C^\nu)$ ,  $C_2^\nu = \{x \in \partial C^\nu \cap T_{\lambda_0(\nu)}^\nu : \nabla u(x) \neq 0\}$ . É fácil checar que  $\tilde{C}^\nu$  é um aberto conexo, com  $\nabla u \neq 0$  em  $\tilde{C}^\nu$ ,  $\nabla u = 0$  sobre  $\partial\tilde{C}^\nu$ ,

Finalmente definamos a coleção  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{C}^\nu : C^\nu \in \mathcal{F}\}$ .

**Observação 4.3.3** *Neste ponto é crucial observar para a sequência o seguinte: se  $\nu_1, \nu_2$  são direções e  $C^{\nu_1} \in \mathcal{F}_{\nu_1}$ ,  $C^{\nu_2} \in \mathcal{F}_{\nu_2}$ , então ou  $\tilde{C}^{\nu_1} \cap \tilde{C}^{\nu_2} = \emptyset$  ou  $\tilde{C}^{\nu_1} \equiv \tilde{C}^{\nu_2}$ . De fato, se  $\tilde{C}^{\nu_1} \cap \tilde{C}^{\nu_2} \neq \emptyset$  e  $\tilde{C}^{\nu_1} \not\equiv \tilde{C}^{\nu_2}$ , então pelo Corolário 4.3.2 ou  $\partial\tilde{C}^{\nu_1} \cap \tilde{C}^{\nu_2}$  ou  $\tilde{C}^{\nu_1} \cap \partial\tilde{C}^{\nu_2}$  é não vazio, e isto não é possível desde que  $\nabla u \neq 0$  em  $\tilde{C}^{\nu_i}$ ,  $\nabla u = 0$  sobre  $\partial\tilde{C}^{\nu_i}$ ,  $i = 1, 2$ .*

**Demonstração do Teorema 4.1.1.** Se  $\nu$  é uma direção e  $\delta > 0$  denotemos por  $I_\delta(\nu)$  o conjunto

$$I_\delta(\nu) = \{\mu \in \mathbb{R}^n : |\mu| = 1, |\mu - \nu| < \delta\}.$$

Como já observado o teorema será provado se mostrarmos que  $\lambda_0(\nu) \leq \lambda_1(\nu)$  para toda direção  $\nu$ .

Como na prova do Teorema 4.2.1 podemos fixar  $\alpha, M > 0$  de modo que o Teorema 1.3.8 possa ser aplicado, isto é, para toda direção  $\nu$ , todo  $\lambda \in [\lambda_1(\nu), a(\nu))$  e todo subconjunto aberto  $\Omega'$  de  $\Omega'_\lambda$ , a desigualdade  $u \leq u'_\lambda$  sobre  $\partial\Omega'$  implica a desigualdade  $u \leq u'_\lambda$  em  $\Omega'$  sempre que  $\Omega' = A_1 \cup A_2$  com  $|A_1| < \alpha$ .  $M_{A_2} = \sup_{A_2} (|\nabla u| + |\nabla u'_\lambda|) < M$ .

Agora suponha que  $\nu_0$  é uma direção tal que  $\lambda_0(\nu_0) > \lambda_1(\nu_0)$ . Desde que  $\lambda_1(\nu_0) \geq \lambda_2(\nu_0)$ , segue que  $\lambda_0(\nu_0) > \lambda_2(\nu_0)$ , Assim do Teorema 4.2.1 obtemos que  $\mathcal{F}_{\nu_0} \neq \emptyset$ . Desde que  $\mathbb{H}^n$  satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade e toda componente é aberta,  $\mathcal{F}_{\nu_0}$  contém no máximo uma quantidade enumerável de componentes de  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)} \setminus Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ , assim

$\mathcal{F} = \{C_i^{\nu_0}, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ . No caso em que  $I$  é infinito, desde que as componentes são disjuntas, temos que  $\sum_{i=1}^{\infty} |C_1^{\nu_0}| \leq |\Omega| < \infty$ , e assim podemos escolher  $n_0 \geq 1$  para o qual

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} |C_i^{\nu_0}| < \frac{\alpha}{6}.$$

Se  $I$  é finito seja  $n_0$  a sua cardinalidade.

Então escolhamos um compacto  $K_0 \subset \Sigma_{\lambda_0(\nu)}^{\nu} \setminus \cup_{i \in I} C_1^{\nu_0}$  de modo que

$$|(\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^{\nu} \setminus \cup_{i \in I} C_1^{\nu_0}) \setminus K_0| < \frac{\alpha}{6}.$$

Finalmente tome  $n_0$  conjuntos compactos  $K_i, i = 1 \dots, n_0$  tal que

$$|C_i^{\nu_0} \setminus K_i| < \frac{\alpha}{6n_0}, \quad i = 1, \dots, n_0.$$

Assim temos decomposto  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^{\nu}$  em conjuntos  $K_0, K_1, \dots, K_{n_0}$  e na parte restante com medida

$$|\Omega_{\lambda_0(\nu)}^{\nu} \setminus \cup_{i=0}^{n_0} K_i| < 3 \frac{\alpha}{6} = \frac{\alpha}{2}.$$

Se  $A = \left\{x \in \Sigma_{\lambda_0(\nu)}^{\nu} : |Du(x)| + |Du_{\lambda_0(\nu)}^{\nu}| < \frac{M}{2}\right\}$ , desde que  $K_0 \setminus A$  é compacto e  $u < u_{\lambda_0(\nu)}^{\nu}$  em  $K_0 \setminus A$  pelo Teorema 1.3.9, existe  $m > 0$  tal que

$$u_{\lambda_0(\nu)}^{\nu} - u \geq m > 0 \quad \text{em} \quad K_0 \setminus A.$$

Desde que  $\Omega$  é suave as funções  $a(\nu)$  e  $\lambda_1(\nu)$  são suaves com respeito a  $\nu$ . Por continuidade existem  $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$  tais que se  $|\lambda - \lambda_0(\mu_0)| \leq \varepsilon_0$  e  $|\nu - \nu_0| \leq \delta_0$  então

$$\lambda_1(\nu) < \lambda_0(\nu_0) - \varepsilon_0 \tag{4.25}$$

$$|Du| + |Du_{\lambda}^{\nu}| < M \quad \text{em} \quad A \tag{4.26}$$

$$\begin{cases} K_i \subset \Sigma_{\lambda}^{\nu}, & i = 0, \dots, n_0 \\ K'_i \subset (C_i^{\nu_0})', & i = 0, \dots, n_0 \end{cases} \tag{4.27}$$



onde  $K'_i$  é a reflexão  $R_\lambda^\nu(K_i)$

$$\left| \Omega_\lambda^\nu \setminus \bigcup_{i=0}^{n_0} K_i \right| < \alpha \quad (4.28)$$

$$u_\lambda^\nu - u \geq \frac{m}{2} > 0 \quad \text{em } K_0 \setminus A. \quad (4.29)$$

Agora procederemos em várias etapas em sequência para mostrar que existe  $i_1 \in \{1, \dots, n_0\}$  e uma direção  $\nu_1 \in I_{\delta_0}(\nu_0)$  tal que  $\tilde{C}_{i_1}^{\nu_0} \in \tilde{\mathcal{F}}_\nu$  para toda direção em uma vizinhança adequada  $I_\delta(\nu_1)$  de  $\nu_1$ , e  $\partial C_{i_1}^{\nu_0}$  contendo um conjunto  $\Gamma$  como na Proposição 4.2.2 (com respeito a direção  $\nu_1$ ).

No que segue nos implicamos que  $\varepsilon > 0$  significa  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  e  $\delta > 0$  significa  $0 < \delta < \delta_0$ .

**Etapa 1.** Aqui mostraremos que a função  $\lambda_0(\nu)$  é contínua, isto é, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\nu \in I_\delta(\nu_0)$  então

$$\lambda_0(\nu_0) - \varepsilon < \lambda_0(\nu) < \lambda_0(\nu_0) + \varepsilon. \quad (i)$$

Mais ainda, para cada  $\nu \in I_{\delta_0(\varepsilon_0)}(\nu_0)$  temos

$$\exists i \in \{1, \dots, n_0\} \text{ tal que } \tilde{C}_i^{\nu_0} \in \tilde{\mathcal{F}}_\nu. \quad (ii)$$

*Prova da Etapa 1.* Seja  $\varepsilon > 0$  fixo. Por definição de  $\lambda_0(\nu_0)$  existe  $\bar{\lambda} \in (\lambda_0(\nu_0) - \varepsilon, \lambda_0(\nu_0))$  e  $x \in \Sigma_\lambda^{\nu_0}$  tal que  $u(x) > u_\lambda^{\nu_0}$ . Por continuidade existe  $\delta_1 > 0$  tal que para todo  $\nu \in I_{\delta_1}(\nu_0)$ ,  $x$  pertence a  $\Sigma_\lambda^\nu$  e  $u(x) > u_\lambda^\nu$ . Isto implica que para todo  $\nu \in I_{\delta_1}(\nu_0)$  temos

$$\lambda_0(\nu) - \varepsilon < \bar{\lambda} < \lambda_0(\nu_0).$$

Em seguida mostramos que existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $\lambda_0(\nu) < \lambda_0(\nu_0) + \varepsilon$  para todo  $\nu \in I_{\delta_2}(\nu_0)$ . Suponha o contrário, então existe uma sequência  $\{\nu_n\}$  de direções tais que  $\nu_n \rightarrow \nu_0$  e  $\lambda_0(\nu_n) \geq \lambda_0(\nu_0) + \varepsilon$ . Além disso, como  $\lambda_0(\nu_0) < a(\nu_n)$  e  $a(\nu_n) \rightarrow a(\nu_0)$ , também temos que  $\bar{\lambda} \leq a(\nu_0)$ .

De fato esta desigualdade é estrita porque a calota  $\Sigma_{\lambda_0(\nu_n)}^{\nu_n}$  tem medida maior ou igual ao número  $\alpha$  do Teorema 1.3.8 (caso contrário  $\lambda_0(\nu_n)$  não seria maximal com respeito a desigualdade  $u \leq u_{\lambda}^{\nu_n}$ , ver a prova da Etapa 1 no Teorema 4.2.1).

Agora, desde que  $\bar{\lambda} < \lambda_0(\nu_0)$ , por (4.16) do Teorema 4.2.1, temos

$$u < u_{\bar{\lambda}}^{\nu_0} \quad \text{em } \Sigma_{\bar{\lambda}}^{\nu_0} \setminus Z_{\bar{\lambda}}^{\nu_0}. \quad (4.30)$$

Argumentando como na Etapa 2 do Teorema 4.2.1 podemos construir um conjunto aberto  $A \subset \Sigma_{\bar{\lambda}}^{\nu_0}$  e um conjunto compacto  $K \subset \Sigma_{\bar{\lambda}}^{\nu_0}$  tais que

$$Z_{\bar{\lambda}}^{\nu_0} \subset A, \quad \sup_A (|\nabla u| + |\nabla u_{\bar{\lambda}}^{\nu_0}|) < \frac{M}{2}, \quad |\Sigma_{\bar{\lambda}}^{\nu_0} \setminus K| < \frac{\alpha}{2}$$

( $\alpha$  e  $M$  sendo os números usuais que vieram do no Teorema 1.3.8).

Por continuidade existem  $r, \delta > 0$  tais que

$$\sup_A (|\nabla u| + |\nabla u_{\lambda}^{\nu}|) < M, \quad |\Sigma_{\lambda}^{\nu}| < \alpha, \quad u_{\lambda}^{\nu} - u > 0 \quad \text{em } K \setminus A$$

se  $\nu \in I_r(\nu_0)$  e  $\lambda \in (\bar{\lambda} - \delta, \bar{\lambda} + \delta)$ .

Para tais valores de  $\nu$  e  $\lambda$ , aplicando o Teorema 1.3.8 exatamente como na Etapa 2 do Teorema 4.2.1, obtemos que  $u \leq u_{\lambda}^{\nu}$  em  $\Sigma_{\lambda}^{\nu}$ . Isto em particular é verdadeiro para  $\nu = \nu_n$ ,  $\lambda = \lambda_0(\nu_n) - \eta$  para todo  $n$  suficientemente grande e  $\eta$  suficientemente pequeno, contradizendo a definição de  $\lambda_0(\nu_n)$ . Logo (i) esta provada.

Observe que, desde que implicitamente supomos que  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  e  $\delta \leq \delta_0$ , por (i) e (4.25) temos que

$$\lambda_1(\nu) < \lambda_0(\nu) \quad \forall \nu \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0) \quad (4.31)$$

e (4.26)-(4.29) são verdadeiras para todo  $\nu \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$ ,  $\lambda = \lambda_0(\nu)$ .

Vamos agora provar (ii). Fixemos uma direção  $\nu \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$ . Suponha que existe  $i \in \{1, \dots, n_0\}$  e um ponto  $x_i \in K_i$  tal que  $u(x_i) = u_{\lambda_0(\nu)}^{\nu}(x_i)$ . Desde que  $\nabla u(x_i) \neq 0$ , pelo Teorema 1.3.9 obtemos que  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^{\nu}$  na componente  $C^{\nu} \in \mathcal{F}_{\nu}$  para o qual  $x_i$  pertence também temos que  $x_i \in \tilde{C}^{\nu} \cap \tilde{C}^{\nu_0}$  porque  $K_1 \subset C_i^{\nu_0} \subseteq \tilde{C}_i^{\nu_0}$  e assim, pela Observação 4.3.3,  $\tilde{C}^{\nu} \equiv \tilde{C}^{\nu_0}$  e (ii) está provada.

A outra possibilidade é que para cada  $i \in \{1, \dots, n_0\}$  e todo  $x \in K_i$  temos  $u(x) < u_{\lambda_0(\nu)}^\nu(x)$ . Se este é o caso, por (4.26)-(4.29) a desigualdade  $u < u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  é verdadeira em  $\Sigma_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ , exceto para um conjunto com medida menor do que  $\alpha$  e para o conjunto  $Z_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ . Então argumentando como na prova de (i) (isto é, repetindo o argumento da prova da Etapa 2 do Teorema 4.2.1) obtemos a desigualdade  $u \leq u_\lambda^\nu$  em  $\Sigma_\lambda^\nu$  para  $\lambda > \lambda_0(\nu)$ ,  $\lambda_0(\nu) - \lambda$  pequeno, contradizendo a definição de  $\lambda_0(\nu)$ . Assim (ii) está completamente provada.

**Etapa 2.** Aqui vamos mostrar que existe uma direção  $\nu_1 \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$ , uma vizinhança  $I_{\delta_1(\nu_1)}$  e um índice  $i_1 \in \{1, \dots, n_0\}$  tal que para todo  $\nu \in I_{\delta_1}(\nu_1)$  o conjunto  $\tilde{C}_{i_1}^{\nu_0}$  pertence a coleção  $\tilde{\mathcal{F}}_\nu$ .

*Prova da Etapa 2.* Antes de iniciar a prova lembremos que (ii) da Etapa 1 assegura que para toda direção  $\nu$  em uma vizinhança  $I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$  da direção  $\nu_0$  então existe um conjunto  $\tilde{C}_i^{\nu_0}$  na coleção  $\tilde{\mathcal{F}}_{\nu_0}$  que também pertence a  $\tilde{\mathcal{F}}_\nu$ .

Aqui queremos provar que existe um conjunto  $\tilde{C}_{i_1}^{\nu_0}$  que pertence a  $\tilde{\mathcal{F}}_\nu$  em uma vizinhança adequada  $I_{\delta_1}(\nu)$  de uma certa direção  $\nu_1 \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$ .

Agora observemos que na prova de (ii) da Etapa 1 vimos que se  $\nu \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$  e se existe  $x_i \in K_i$ , para algum  $i \in \{1, \dots, n_0\}$ , tal que  $u(x_i) = u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$ , então  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^{\nu_0} \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $K_i$  e  $\tilde{C}_i^{\nu_0} \in \tilde{\mathcal{F}}_\nu$ .

Assim para todo  $\nu \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$  e cada  $i \in \{1, \dots, n_0\}$  temos duas alternativas: ou  $u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  em  $K_i$  (e logo em  $\tilde{C}_i^{\nu_0}$  deste modo  $\tilde{C}_i^{\nu_0} \in \tilde{\mathcal{F}}_\nu$ ) ou  $u < u_{\lambda_0(\nu)}^\nu$  é válida em  $K_i$ . Neste caso, desde que  $u_{\lambda_0(\nu)}^\nu - u \geq m > 0$  em  $K_i$ , e a função  $\lambda_0(\nu)$  é contínua com respeito a  $\nu$ , obtendo que a desigualdade  $u < u_{\lambda_0(\mu)}^\mu$  é válida em  $K_i$  para todo  $\mu$  em uma vizinhança adequada  $I(\nu)$  de  $\nu$ ; isto implica que  $\tilde{C}_i^{\nu_0} \notin \tilde{\mathcal{F}}_\nu$  para todo  $\mu \in I(\nu)$ .

Para provar as afirmações da Etapa 2 notemos que se  $n_0 = 1$  a afirmação está provada em (ii) da Etapa 1, caso contrário iniciamos tomando um conjunto em  $\tilde{\mathcal{F}}_{\nu_0}$ , digamos  $\tilde{C}_1^{\nu_0}$  e argumentamos como segue. Se  $\tilde{C}_1^{\nu_0}$  pertencem a  $\tilde{\mathcal{F}}_\nu$  para todo  $\nu$  em  $I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$  então a afirmação está provada. Caso contrário, pelo que explicado acima, existe uma direção  $\mu_1 \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$  tal que  $\tilde{C}_1^{\nu_0} \in \tilde{\mathcal{F}}_\mu$  para todo  $\mu$  em uma vizinhança adequada

$I_{\delta_1}(\mu_1) \subset I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$ . Agora, por (ii) da Etapa 1 existe um conjunto em  $\tilde{\mathcal{F}}_{\nu_0}$ , digamos  $\tilde{C}_2^{\nu_0}$ , tal que  $\tilde{C}_2^{\nu_0} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mu_1}$ . Assim ou  $\tilde{C}_2^{\nu_0}$  pertence a  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu}$  para todo  $\mu \in I_{\delta_1}(\mu_1)$  e afirmação está provada, ou existe uma direção  $\mu_2 \in I_{\delta_1}(\mu_1)$  tal que  $\tilde{C}_2^{\nu_0} \notin \tilde{\mathcal{F}}_{\mu}$  para todo  $\mu$  em uma vizinhança adequada  $I_{\delta_2}(\mu_2) \subset I_{\delta_1}(\mu_1)$ . Logo para toda direção  $\mu$  em  $I_{\delta_2(\mu_2)}(\mu_2)$  (em particular  $\mu_2$ ) temos que nem  $\tilde{C}_1^{\nu_0}$  nem  $\tilde{C}_2^{\nu_0}$  pertencem a  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu}$ . Assim se  $n_0 = 2$  temos uma contradição com (ii) da Etapa 1 e afirmação está provada, enquanto se  $n_0 > 2$  procedemos como antes tomando um conjunto  $\tilde{C}_3^{\nu_0}$  em  $\tilde{\mathcal{F}}_{\nu_0}$  tal que  $\tilde{C}_3^{\nu_0} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\nu_2}$ . Argumentado como feito para  $\tilde{C}_2^{\nu_0}$  e  $C_1^{\nu_0}$  ou depois de  $k < n_0$  etapas encontramos um conjunto  $C_k^{\nu_0}$  que pertence a  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu}$  para todo  $\mu \in I_{\delta_{k-1}}(\mu_{k-1})$ , provando a afirmação, ou após  $n_0$  etapas obtemos uma direção  $\mu_{n_0} \in I_{\delta(\varepsilon_0)}(\nu_0)$  tal que  $\tilde{C}_i^{\nu_0} \notin \tilde{\mathcal{F}}_{\mu_{n_0}}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n_0\}$ . Isto contradiz (i) da Etapa 1 e prova novamente a afirmação.  $\square$

**Etapa 3.** Seja  $\nu_1, i_1, \delta_1$  como na Etapa 2 denote  $C = C_{i_1}^{\nu_0}$ . Aqui mostraremos que  $\partial C \cap \Omega_{\lambda_0(\nu_1)}^{\nu_1}$  contém um conjunto  $\Gamma$  no qual  $u$  é constante e cuja projeção sobre a hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0(\nu_1)}^{\nu_1}$  contém um subconjunto aberto da hiperfície.

Desde que  $\nabla u = 0$  sobre  $\partial C \cap \Omega_{\lambda_0(\nu_1)}^{\nu_1}$  isto dá uma contradição com a Proposição 4.2.2 e termina a prova do Teorema 4.1.1.

*Prova da Etapa 3.* Por simplicidade vamos supor que  $v_1 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  e seja  $\lambda_0 = \lambda_0(e_1)$ ,  $\Sigma_{\lambda_0} = \Sigma_{\lambda_0(\nu_1)}^{\nu_1}$ , etc.

Temos pela Etapa 2 que para cada  $\nu \in I_{\delta_1}(e_1)$

$$u \equiv u_{\lambda_0(\nu)}^{\nu} \quad \text{em } \tilde{C} \quad \text{e} \quad \tilde{C} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\nu}. \quad (4.32)$$

Agora observamos que, desde que  $\tilde{C}$  é aberto, os conjunto  $\tilde{C}^{\nu} = R_{\lambda_0(\nu)}^{\nu}(\tilde{C})$  não pode ser disjunto de  $\tilde{C}^{e_1}$  para  $\nu$  suficientemente próximo de  $e_1$ . Além disso, desde que  $\nabla u = 0$  sobre  $\partial \tilde{C}$ , por (4.32) também temos que  $\nabla u = 0$  sobre  $\partial \tilde{C}^{\nu}$  e então, argumentado como na Observação 4.3.3, obtemos que  $\tilde{C}^{e_1} \equiv \tilde{C}^{\nu}$  para  $\nu$  suficientemente próximo de  $e_1$ . Então tomamos um ponto  $\bar{x} = (\bar{y}, \bar{z})$  em  $\partial C \cap \Sigma_{\lambda_0}$  e consideramos o ponto  $\bar{x}' = (2\lambda_0 - \bar{y}, \bar{z})$  simétrico com respeito ao hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0}$ . Refletindo  $\bar{x}'$  através dos hiperfície totalmente geodésica fechada  $T_{\lambda_0(\nu)}^{\nu}$  para  $\nu \in I_{\delta_1}(e_1)$  obtemos os

pontos

$$A(\nu) = (y(\nu), z(\nu)) = R_{\lambda_0(\nu)}^\nu(\bar{x}')$$

que pertence a  $\partial C$  pelo que observamos antes. Desde que  $\bar{x}' \notin T_{\lambda_0}$  podemos supor, tomando  $\delta_1$  menor se necessário, que para cada  $\nu \in I_{\delta_1}(e_1)$  o ponto  $A(\nu)$  pertence a  $\Sigma_{\lambda_0} = \Sigma_{\lambda_0}^{e_1}$ . Observe que, como a função  $\nu \mapsto \lambda_0(\nu)$  é contínua, a função  $\nu \mapsto A(\nu)$  é contínua (e ela é injetiva).

Por (4.32) a função  $u$  é constante sobre o conjunto  $\Gamma = \{A(\nu) : \nu \in I_{\delta_1}(e_1)\}$ , e o gradiente de  $u$  é nulo sobre  $\Gamma$ . Iremos provar que a projeção de  $\Gamma$  sobre  $T_{\lambda_0}$  contém um subconjunto aberto de  $T_{\lambda_0}$ . Desta maneira iremos obter uma contradição com a Proposição 4.2.2 e a prova do Teorema 4.1.1 estará concluída.

Agora escreveremos uma direção genérica  $\nu \in S^{n-1}$  com  $\nu = (\nu_y, \nu_z)$  com  $\nu_y \in \mathbb{R}$  e  $\nu_z \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Se  $\nu$  está suficientemente próximo de  $e_1$  então  $\nu_y = \sqrt{1 - |\nu_z|^2}$ . Tomamos agora  $\beta > 0$  pequeno e consideremos o conjunto

$$K = \left\{ \nu = (\nu_y, \nu_z) : \nu_z \in \bar{B}_\beta, \nu_y = \sqrt{1 - |\nu_z|^2} \right\}$$

onde  $\bar{B} = \{z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z| \leq \beta\}$  é a bola fechada em  $\mathbb{R}^{n-1}$  centrada na origem e com raio  $\beta$ .

O conjunto  $K$  é uma vizinhança compacta de  $e_1$  no espaço métrico  $S^{n-1}$ , e se  $\beta$  é pequeno então  $K$  está contido em  $I_{\delta_1}(e_1)$ . Iremos mostrar que se  $A(\nu) = (y(\nu), z(\nu))$  então o conjunto  $\{z(\nu) : \nu \in K\}$  contém um conjunto aberto de  $\mathbb{H}^{n-1}$ .

Observe que  $z(\nu) = F(\nu_z)$ , onde  $\nu = (\sqrt{1 - |\nu_z|^2}, \nu_z) \in \bar{B}_\beta$ . Assim temos que provar que a imagem da função  $F(\nu_z)$  contém uma bola geodésica  $(n-1)$ -dimensional centrada na origem.

Consideremos agora um ponto  $l \in S^{n-2} = \{z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z| = 1\}$  e o segmento  $S_l = \{tl : |t| \leq \beta\}$  contido em  $\bar{B}_\beta$ . A imagem  $F(S_l)$  é um segmento geodésico contido numa geodésica passando  $F(0)$  na direção  $l$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$ , porque  $F$  é isometria local. Além disso,  $S_l$  contém pontos  $\nu_z = tl$  com  $t$  ambos positivo e negativos, temos que a  $F(0)$  é um

ponto interior de  $F(S_l)$ . Logo podemos escrever

$$F(S_l) = \{\gamma(s) : s \in [d_1(l), d_2(l)]\}, \quad d_1(l) < 0 < d_2(l) \text{ e } \gamma \text{ geodésica passando por } F(0).$$

Desde que  $d_1$  e  $d_2$  são contínuos em  $S^{n-2}$ , que é compacto, então temos respectivamente um máximo negativo  $\underline{d}$  e um mínimo positivo  $\bar{d}$ . Se  $d = \min\{-\underline{d}, \bar{d}\}$  obtemos que

$$\exp_{F(0)}(\{z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z| \leq d\}) = \bar{B}_d \subset F(\bar{B}_\beta)$$

que termina a prova. ■

Agora provamos o Corolário 4.1.2.

**Prova do Corolário 4.1.2.** Se  $\Omega = B_R(0)$  pelo Teorema 4.1.1 nos imediatamente deduzimos que  $u$  é radialmente simétrica,  $u(x) = U(|x|)$ , com  $U'(r) \leq 0$  para todo  $r \in [0, R]$ . Se  $0 < r < R$  e  $G = B_r \setminus \bar{B}_r$ , então  $m = U(r)$  é o máximo de  $u$  em  $\bar{G}$  e o mínimo de  $u$  em  $\bar{B}_r$ .

No caso  $f(m) \leq 0$ , como na prova da Proposição 4.2.2 observamos que como  $f$  é Lipschitziana existe  $\Lambda \geq 0$  tal que

$$-\Delta_p(u - m) + \Lambda(u - m) \leq 0 \quad \text{em } G.$$

Além disso, como  $m > 0$  e  $u = 0$  sobre  $\partial B_b$  temos que  $u$  não é constante em  $G$ . Pelo Lema de Hopf obtemos que  $U'(r) < 0$ .

Já se  $f(m) > 0$  então  $u$  não é constante em  $B_r$  (caso contrário  $f(m)$  seria zero) e

$$-\Delta_p(u - m) + \Lambda(u - m) \leq 0 \quad \text{em } B_r.$$

para algum  $\Lambda \geq 0$ . Novamente pelo Lema de Hopf obtemos que  $U'(r) < 0$ . ■

**Observação 4.3.4** Se  $f(0) \geq 0$  então obtemos também que  $U'(R) < 0$

# Referências Bibliográficas

- [1] A. D. Aleksandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I. *Vestnik Leningrad. Univ.*, 11(19):5–17, 1956.
- [2] A. D. Alexandrov. A characteristic property of spheres. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 58:303–315, 1962.
- [3] L. Almeida, L. Damascelli, and Y. Ge. Regularity of positive solutions of  $p$ -laplace equations on manifolds and its applications. In *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*, 2004.
- [4] M. Badiale and E. Nabana. A note on radially of solutions of  $p$ -Laplacian equation. *Appl. Anal.*, 52(1-4):35–43, 1994.
- [5] H. Berestycki and L. Nirenberg. On the method of moving planes and the sliding method. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 22(1):1–37, 1991.
- [6] F. Brock. Radial symmetry for nonnegative solutions of semilinear elliptic equations involving the  $p$ -Laplacian. In *Progress in partial differential equations, Vol. 1 (Pont-à-Mousson, 1997)*, volume 383 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 46–57. Longman, Harlow, 1998.
- [7] F. Brock. Continuous rearrangement and symmetry of solutions of elliptic problems. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 110(2):157–204, 2000.

- [8] L. A. Caffarelli, B. Gidas, and J. Spruck. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(3):271–297, 1989.
- [9] W. X. Chen and C. Li. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J.*, 63(3):615–622, 1991.
- [10] C. Cortázar, M. Elgueta, and P. Felmer. On a semilinear elliptic problem in  $\mathbf{R}^N$  with a non-Lipschitzian nonlinearity. *Adv. Differential Equations*, 1(2):199–218, 1996.
- [11] L. Damascelli. Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(4):493–516, 1998.
- [12] L. Damascelli and F. Pacella. Monotonicity and symmetry of solutions of  $p$ -Laplace equations,  $1 < p < 2$ , via the moving plane method. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 26(4):689–707, 1998.
- [13] L. Damascelli, F. Pacella, and M. Ramaswamy. Symmetry of ground states of  $p$ -Laplace equations via the moving plane method. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 148(4):291–308, 1999.
- [14] L. Damascelli and M. Ramaswamy. Symmetry of  $C^1$  solutions of  $p$ -Laplace equations in  $\mathbb{R}^N$ . *Adv. Nonlinear Stud.*, 1(1):40–64, 2001.
- [15] L. Damascelli and B. Sciunzi. Monotonicity of the solutions of some quasilinear elliptic equations in the half-plane, and applications. *Differential Integral Equations*, 23(5-6):419–434, 2010.
- [16] E. DiBenedetto.  $C^{1+\alpha}$  local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 7(8):827–850, 1983.
- [17] J. Dolbeault and P. Felmer. Symétrie des solutions d'équations semi-linéaires elliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(8):677–682, 1999.



- [18] J. Dolbeault and P. Felmer. Symmetry and monotonicity properties for positive solutions of semi-linear elliptic PDE's. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(5-6):1153–1169, 2000.
- [19] J. Dolbeault and P. Felmer. Monotonicity up to radially symmetric cores of positive solutions to nonlinear elliptic equations: local moving planes and unique continuation in a non-Lipschitz case. *Nonlinear Anal.*, 58(3-4):299–317, 2004.
- [20] J. Dolbeault, P. Felmer, and R. Monneau. Symmetry and nonuniformly elliptic operators. *Differential Integral Equations*, 18(2):141–154, 2005.
- [21] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [22] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.*, 68(3):209–243, 1979.
- [23] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in  $\mathbf{R}^n$ . In *Mathematical analysis and applications, Part A*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 369–402. Academic Press, New York, 1981.
- [24] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.
- [25] M. Grossi, S. Kesavan, F. Pacella, and M. Ramaswamy. Symmetry of positive solutions of some nonlinear equations. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 12(1):47–59, 1998.
- [26] S. Kumaresan and J. Prajapat. Analogue of Gidas-Ni-Nirenberg result in hyperbolic space and sphere. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 30(1-2):107–112 (1999), 1998.
- [27] S. Kumaresan and J. Prajapat. Serrin's result for hyperbolic space and sphere. *Duke Math. J.*, 91(1):17–28, 1998.

- [28] M. Montenegro. Strong maximum principles for supersolutions of quasilinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 37(4, Ser. A: Theory Methods):431–448, 1999.
- [29] P. Pucci and J. Serrin. The strong maximum principle revisited. *J. Differential Equations*, 196(1):1–66, 2004.
- [30] B. Sciunzi. Some results on the qualitative properties of positive solutions of quasilinear elliptic equations. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 14(3-4):315–334, 2007.
- [31] J. Serrin. A symmetry problem in potential theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43:304–318, 1971.
- [32] P. Tolksdorf. Everywhere-regularity for some quasilinear systems with a lack of ellipticity. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 134:241–266, 1983.
- [33] J. L. Vázquez. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 12(3):191–202, 1984.