Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Existência de soluções para equações de Schrödinger quasilineares com potencial se anulando no infinito

por

José Fernando Leite Aires

Campina Grande - PB

Setembro/2014

Existência de soluções para equações de Schrödinger quasilineares com potencial se anulando no infinito

por

José Fernando Leite Aires

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Setembro/2014

A298e Aires, José Fernando Leite.
Existência de soluções para equações de Schrödinger quasilineares com potencial com potencial se anulando no infinito / José Fernando Leite Aires.-- Campina Grande, 2014.
107f.
Orientador: Marco Aurélio Soares Souto
Tese (Doutorado) - UFPB/UFCG
1. Matemática. 2. Equações de Schrödinger quasilineares. 3.Crescimento quasicrítico. 4. Potenciais se anulando.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA

Prof. ~~Dr.~~ Sérgio Henrique Monari Soares - USP

Prof. Dr. Olivaine Santana de Queiroz - UNICAMP

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Setembro/2014

"Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo propósito debaixo do céu: ... tempo para plantar, e tempo para colher o que foi plantado"

EClesiates 3: 01-02

Dedicatória

Aos meus pais Antônio Fernando Aires (Im Memoriam) e Maria José Leite Aires, e a meus amores Isolda, Ana Flávia e Isabel.

Agradecimentos

A Deus, pela presença constante na minha vida e por me conceder disposição e sabedoria na execução deste trabalho. Sem Ele esta conquista não teria se concretizado. A Ele toda Honra e toda a Glória.

A minha mãe Maria José Leite Aires pelo seus ensinamentos e o seu infinito amor essenciais à minha vida. A meu pai Antonio Fernando Aires (In Memorian), que sempre me apoiou nos estudos, tendo um papel fundamental na formação do meu caráter como ser humano.

As minhas irmãs Patrícia, Magna, Coely, Karla e Nyara pelo amor, apoio e torcida.

A minha amada esposa Isolda pela dedicação, apoio e paciência sem limites. Tudo é possível quando podemos contar com alguém, alguém capaz de acalmar decepções; decompor objeções e obstáculos. Em você Isolda, encontrei forças para abraçar o mundo, auxílio para enfrentar dificuldades e principalmente, razões para acreditar que vale a pena sonhar.

As minhas filhas Ana Flávia e Isabel por serem fontes de inspiração constantes em minha vida.

A minha tia Vilani Aires que me acolheu em sua residência durante os últimos três anos, minha gratidão. Já mais esquecerei os momentos alegres vivenciados com os meus tios Palito, João, Miguel, Zé Aires e Pedro quase todas as manhãs durante o café.

Ao meu sogro Rafael e a minha sogra Célia pelo apoio durante esta caminhada. Agradeço ao meu cunhado Rangel pela torcida e pelo apoio sempre constantes acompanhando Isolda com Ana Flávia e Isabel nas consultas médicas, devido a minha ausência. Meu muito obrigado.

Aos amigos do doutorado Ailton, Denilson, Alânnio, Bruno Sérgio, Alciônio, Marcelo, Lindomberg e Sibério, pela ajuda em momentos oportunos. Em especial ao amigo Ailton pela amizade e pela constante e valiosa troca de informações sobre as Equações

Diferenciais Parciais, mas principalmente, por partilharmos juntos alegrias e dificuldades nesta caminhada. Obrigado meu amigo, ou melhor, meu irmão.

A todos que também fazem parte da minha família, como, sobrinhos (as), tios (as), primos (as), cunhados, como também aos estimados amigos Damião, França, Josemberg, Fernando Soares, Mano, Edmar, Antonio Macedo e Padre João Paulo que, intercedendo a DEUS, acompanharam toda essa caminhada, sempre acreditando em mim. A todos estes, minha gratidão pelo apoio.

Ao amigo Aldo pelo apoio e incentivo, pelas discursões matemáticas e principalmente pela amizade.

A todos os meus professores, desde o pré-escolar pelos grandes ensinamentos durante toda minha carreira estudantil. Em especial, agradeço aos professores Francisco Leite e Cassio Kleber, os primeiros incentivadores que despertaram em mim a vontade de estudar matemática. Registro aqui a minha gratidão também aos professores da graduação em Matemática da UEPB, em especial aos professores Osmundo, Samuel Duarte e Urânio Neves.

A todos os professores da Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística por todo apoio recebido e por concederem meu afastamento das atividades letivas durante 36 meses. Em especial, agradeço aos professores Jesualdo, Zé Luiz, Diogo Germano e Amauri pelo apoio e amizade.

Aos professores Marco Aurélio, Claudianor, Antônio Brandão, Henrique e Napoleon, com os quais cursei disciplinas durante o doutorado. Em especial agradeço ao professor Claudianor pelos seus valiosos ensinamentos sobre as EDP's e sobre a vida.

Ao colega professor Daniel Cordeiro, que foi meu orientador no mestrado, pelo incentivo e pelas constantes ajuda no Inglês.

Ao professor Marco Aurélio Soares Souto, pela excelente orientação, disponibilidade e sobretudo pelo exemplo de profissionalismo. Muito obrigado!

Aos professores Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Uberlândio Batista Severo, Olivaine Santana de Queiroz e Sérgio Henrique Monari Soares pela disposição em participar da banca de minha defesa de tese e pelas sugestões dadas no sentido de melhorar o presente texto.

Notação e terminologia

- Nesta tese, $C, C_0, C_1, C_2, ...$ denotam constantes positivas genéricas, as quais podem variar de linha para linha;

- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional;

- ω_N denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$;

- $B_R(y)$ denota a bola aberta de centro y e raio $R > 0$;

- O símbolo $\to$ significa convergência em norma;

- O símbolo $\rightharpoonup$ significa convergência fraca;

- Se $A \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue, então $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A;

- A expressão *q.t.p.* é uma abreviação para quase todo ponto;

- $supp(u)$ denota o suporte da função u;

- Se $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é mensurável, então u^+ e u^- denotam as partes positiva e negativa de u respectivamente. Ou seja,

$$u^+(x) = max\{u(x), 0\} \ \text{ e } \ u^-(x) = min\{u(x), 0\}.$$

- $[|x| \leq a] := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$;

Espaços da Funções

- $C(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções contínuas;
- $C^k(\mathbb{R}^N) = \{u \in C(\mathbb{R}^N); u \text{ é } k - \text{vezes continuamente diferenciável}\}$;
- $C^\infty(\mathbb{R}^N) = \cap_{k\geq 1} C^k(\mathbb{R}^N)$;
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^N); supp(u) \subset \mathbb{R}^N\}$
- Para $1 \leq s \leq \infty$, $L^s(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço usual de Lebesgue munido da norma

$$||u||_{L^s(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx\right)^{1/s};$$

- $L^\infty(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ mensurável; existe uma constante } C \text{ tal que } u(x) \leq C \text{ q.t.p. sobre } \mathbb{R}^N\}$ munido da norma

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \inf\{C;\ u(x) \leq C \text{ q.t.p. sobre } \mathbb{R}^N\};$$

- Para $p > 1$, $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N); |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$ munido da norma $||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ e S denota a melhor constante que verifica

$$\|u\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \forall u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência de soluções positivas para algumas classes de equações de Schrödinger quasilineares, com hipóteses sobre o potencial que o possibilita se anular no infinito. Afim de usarmos métodos variacionais na obtenção de nossos resultados, aplicamos mudança de variáveis para reduzirmos as equações quasilineares a equações semilineares. Os funcionais associados a essas novas equações estão bem definidos em espaços de Sobolev clássicos e em espaços "tipo" Orlicz e satisfazem as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Ainda utilizamos a técnica de penalização de Del Pino e Felmer e o método de iteração de Moser para obtenção de estimativas, fundamentais para o nosso estudo, na norma L^∞.

Palavras-chave: Equações de Schrödinger quasilineares; Crescimento quasicrítico; Potenciais se anulando.

Abstract

In this work we study questions related to the existence of positive solutions for some classes of quasilinear Schrödinger equations, with hypotheses on the potential that permit this potential to vanish at infinity. In order to use variational methods to obtain our results, we make some changes of variables to obtain some semilinear equations, whose associated functionals are well defined in a classical Sobolev spaces. We also work with these equations on an Orlicz "type" space whose energy functional satisfy the geometric properties of the Mountain Pass Theorem. We still use the penalty technique due to Del Pino and Felmer and the Moser iteration method to obtain estimates in L^∞ norm, which are fundamental to our study.

Keywords: Quasilinear Schrödinger equation; Quasicritical growth; Vanishing potentials.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência de soluções para a equação de Schrödinger quasilinear

$$-\Delta u + V(x)u + \frac{\kappa}{2}\Delta(u^2)u = q(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $N \geq 3$, as funções $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas, com o potencial V podendo se anular no infinito e κ é um parâmetro real. Ao longo do trabalho, apresentaremos hipóteses adicionais sobre as funções q e V, e sobre o parâmetro κ.

As soluções de (1) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quasilineares da forma

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - l(|z|^2)z + \frac{\kappa}{2}[\Delta\rho(|z|^2)]\rho'(|z|^2)z, \tag{2}$$

onde $z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial dado, κ é uma constante real e l, ρ são funções reais. Equações quasilineares da forma (2) aparecem, naturalmente, como modelo de vários fenômenos físicos relacionados a vários tipos de ρ. O caso em que $\rho(s) = s$ foi usado por Kurihura em [32] na obtenção da equação da membrana de superfluido em Física dos Plasmas. No caso $\rho(s) = (1+s)^{1/2}$, podemos encontrar em [18, 23] e nas referências apresentadas em [25], que a equação (2) modela a canalização de um *laser* ultracurto de alta potência na matéria. Neste trabalho, estaremos sempre considerando o caso em que $\rho(s) = s$. Claramente, observamos que $z(t,x) = e^{-i\xi t}u(x)$ resolve (2) se, e somente se, $u(x)$ resolve (1) com $V(x) = W(x) - \xi$ e $q(u) = l(u^2)u$.

Levando em consideração os possíveis valores de κ, as hipóteses sobre o potencial V e os tipos de não-linearidades, encontramos na literatura vários trabalhos que abordam a existência de solução para o problema (1).

No caso em que $\kappa < 0$ e com não-linearidades subcríticas citamos os artigos de Liu, Wang e Wang [36, 37], Ruiz e Siciliano [41], Silva e Vieira [45], Yang [50], Colin e Jeanjean [24], Poppenberg, Schmitt e Wang [40] e Fang e Szulkin [30]. Para não-linearidade concâva e convexa, citamos o artigo de do Ó e Severo [29] e para não-linearidade crítica citamos os trabalhos de Liu, Liu e Wang [35], Wang e Zou [49], Silva e Vieira [46], Yang, Wang e Abdelgadir [52] e do Ó, Miyagaki e Soares [28]. Todos estes trabalhos, dentre outras condições sobre o potencial $V(x)$, assumiram que

(V_1) $\liminf_{|x|\to+\infty} V(x) > 0.$

Colin e Jeanjean em [24] também estudaram o problema (1) com o potencial $V \equiv 0$, conhecido na literatura como potencial de massa zero.

Moameni em [38] estudou o problema (1) considerando o caso expoente crítico e o potencial V radial, isto é, $V(x) = V(|x|)$ e satisfazendo as seguintes condições: existem $0 < R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ e $\alpha > 0$ tais que

(V_2) $V(x) = 0,$ para todo $x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : r_1 < |x| < r_2\},$

(V_3) $V(x) \geq \alpha,$ para todo $x \in \Lambda^c$, onde $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : R_1 < |x| < R_2\}.$

Em [51] Yang e Ding assumiram as condições:

(V_4) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ e existe $b > 0$ tal que o conjunto $\nu^b = \{x \in \mathbb{R}^N; V(x) \leq b\}$ tem medida de Lebesgue finita;

e

(V_5) $0 = V(0) = \min V \leq V(x) < M.$

Eles consideraram a não-linearidade q da forma $q(x,s) = K(x)|s|^{2(2^*)-2}s + \ell(x,s)$ onde $N \geq 3$, $K(x)$ é uma função positiva limitada e $\ell(x,s)$ é superlinear porém uma função subcrítica.

Para $\kappa > 0$ e $N \geq 3$, em um trabalho pioneiro Alves, Wang e Shen em [4], usaram a mudança de variáveis introduzidas em [42, 52] e a estimativa L^∞ para mostrar a existência de solução não-trivial para o modelo (1), onde $q(u) = |u|^{r-2}u,\ 2 < r < 2^*$ ou $q(u) = \left[1 - \frac{1}{(1+|u|^2)^3}\right] u$. Para isto, eles assumiram, entre outras hipóteses que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínuo e satisfaz a condição (V_1).

Em [22], Brüll, Lange e Köln estudaram as equações de Schrödinger quasilineares unidimensional

$$i\partial_t z = -\partial_x^2 z - |z|^{2p} z + \kappa\partial_x^2(|z|^2)z, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

e

$$i\partial_t z = -\partial_x^2 z - \left[\mu + \frac{A}{(a+|z|^2)^3}\right] z + \kappa\partial_x^2(|z|^2)z, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

onde $z = z(x,t)$ é a função de onda a ser determinada, κ é uma constante real, $p > 0, \mu > 0$ e $A < 0$. Sob algumas condições sobre p, μ e A, eles demonstraram que se $0 < \kappa < \kappa_2$ (ou $0 < \kappa < \kappa_3$) com $\kappa_2, \kappa_3 > 0$, então (3) (ou (4)) tem uma solução tipo onda estacionária $v(x)$, com $v(x) > 0$, $v(-x) = v(x), v'(x) < 0$ para $x > 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$. Além disso, esta solução é única, a menos de translação.

Ainda para $\kappa > 0$, Lange, Poppenberg e Teisniann [33] estudaram o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger quasilinear (2), com $W = 0$ e $\rho = 0$. Quando $N = 1$ e $z(0,x) = \phi(x)$, eles obtiveram soluções L^2 para (2) com $\kappa|\phi(x)| \leq \delta < 1$. Além disso, para $2\kappa||\phi||_{W^{1,\infty}} < 1$, eles também demonstraram a existência de soluções H^2 para espaço de dimensão arbitrária. Indicamos [33], para mais detalhes.

Note que as condições (V_1), $(V_2) - (V_3)$ e $(V_4) - (V_5)$ implicam que

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) \neq 0.$$

Em todo este trabalho, entendemos que o potencial V se anula no infinito quando

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = 0.$$

No contexto do potencial V se anular ou poder se anular no infinito, encontramos uma extensa bibliografia para o caso semilinear correspondente a $\kappa = 0$, isto é,

$$-\Delta u + V(x)u = q(u), \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{5}$$

Citamos, por exemplo [5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 19, 31] e suas referências. Entre estes, destacamos o artigo devido a Berestycki e Lions [17] que mostraram a existência de solução quando $V \equiv 0$, onde a não linearidade tem crescimento supercrítico próximo da origem e subcrítico no infinito. Em [31] Ghimenti e Micheletti estabeleceram a existência de solução que muda de sinal. Em [15] Benci, Grisanti e Micheletti, com condições adicionais sobre V, estabeleceram um resultado de existência ou não existência de "ground state solution". Nos artigos de Ambrosetti, Felli e Malchiodi [10], Ambrosetti e Wang [9], a não linearidade $q(u)$ é substituída pela função $q(x,u)$ do tipo $k(x)|u|^s$ onde $k(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ e $1 < s < \frac{N+2}{N-2}, N \geq 3$. Em [5], Alves e Souto introduziram um novo conjunto de hipóteses sobre o potencial V e mostraram a existência de solução positiva para a equação (5), com q tendo crescimento subcrítico.

Na literatura, também podemos citar o trabalho devido a Bastos, Miyagaki e Vieira [13] que estabeleceram a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares degenerados:

$$-\mathcal{L}u_{ap} + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = q(u), \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde $\mathcal{L}u_{ap} = -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < N, -\infty < a < \frac{N-p}{p}, a \leq e \leq a+1, d = 1+a-e$, e $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$ denota o expoente crítico de Hardy-Sobolev, V é um potencial não-negativo, limitado e se anulando no infinito, e a não linearidade q tem crescimento subcrítico no infinito.

Neste trabalho de tese, motivados pelos artigos acima, e especialmente por Alves e Souto em [5] e Alves, Wang e Shen em [4], mostramos que é possível obter resultados de existência para o problema (1) quando o parâmetro κ é não-nulo e o potencial V pode se anular no infinito.

Este trabalho divide-se em três capítulos e um apêndice e estão distribuídos como descritos a seguir.

No Capítulo 1, tratamos o caso em que $\kappa = -2$, mais especificamente, iremos estudar o problema

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = q(u), \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{6}$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, com V sendo uma função não-negativa e q tendo crescimento quasecrítico no infinito. Mais precisamente, admitiremos que o potencial V verifica as condições:

(V_0) $V(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(V_∞) $V(x) \leq V_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(V_Λ) Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda.$$

Observação 0.0.1 *Enfatizamos que estas hipóteses, diferentemente das mencionadas nos artigos acima que consideraram o parâmetro $\kappa < 0$, possibilita que o potencial V se anule no infinito.*

A seguir, apresentamos um exemplo de um potencial que verifica as hipóteses acima:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha_2, & \text{se} \quad |x| \leq R - \alpha_1, \\ (|x| - R + \alpha_1) + \alpha_2, & \text{se} \quad R - \alpha_1 \leq |x| \leq R, \\ \frac{(\alpha_1+\alpha_2)R^\sigma}{|x|^\sigma}, & \text{se} \quad |x| \geq R, \end{cases}$$

com $0 < \alpha_1 < R$, $, \alpha_2 \geq 0$ e $0 < \sigma \leq 4$.

Em relação a não-linearidade q, assumimos que:

(q_1) $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{2^*}} < +\infty$; onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $N \geq 3$.

(q_2) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{sq(s)}{s^{22^*}} = 0$.

(q_3) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < 2\theta Q(s) \leq sq(s), \qquad \text{para todo} \quad s > 0,$$

onde $Q(s) = \int_0^s q(t)dt$.

Observação 0.0.2 *A condição (q_2) é conhecida na literatura como crescimento* ***quasecrítico****, ou seja,* ***crítico no infinito****.*

O principal resultado desse capítulo é o seguinte:

Teorema 0.0.3 *Suponha que V satisfaz $(V_0), (V_\infty), (V_\Lambda)$, e q verifica $(q_1)-(q_3)$. Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, V_\infty, q) > 0$ tal que o problema (6) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.*

Como um corolário imediato da prova do Teorema 0.0.3, temos.

Teorema 0.0.4 *Suponha que V satisfaz $(V_0), (V_\infty)$ e*

$(\tilde{V}_\Lambda)$ *Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que*

$$\frac{1}{R^{N+2}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{N+2} V(x) \geq \Lambda;$$

e q verifica (q_2), (q_3) *e*

$(\tilde{q}_1)$ $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{22^*}} < +\infty.$

Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, V_\infty, q) > 0$ *tal que o problema (6) possui uma solução positiva para todo* $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Observação 0.0.5 *A condição* (q_1) *é mais fraca do que* $(\tilde{q}_1)$, *mas* $(\tilde{V}_\Lambda)$ *é mais fraca* (V_Λ). *De fato, é suficiente verificar que* $(\tilde{V}_\Lambda)$ *é equivalente à*

$$\liminf_{|x|\to\infty} |x|^4 V(x) > 0.$$

Para provarmos o Teorema 0.0.3, usamos uma mudança de variável introduzida por Colin e Jeanjean em [24] e por Liu, Wang e Wang em [36] para reformular o problema, obtendo uma equação semilinear que tem um funcional associado bem definido e Gateaux-diferenciável em um espaço de Sobolev. Desta reformulação, segue que se w é uma solução do problema reformulado, então $u = f(w)$, onde f é a função da mudança de variável, é uma solução do problema originalmente proposto. Em seguida, adaptamos um método introduzido por Del Pino e Felmer em [26](veja também [5]) para modificar o problema reformulado. O funcional associado ao problema modificado também está bem definido e é Gateaux-diferenciável em um espaço de Sobolev. Mostramos que este funcional satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha e provamos a limitação das sequências de Cerami associada ao nível minimax. Alcançamos o nosso resultado de existência após obter uma limitação na norma L^∞ da solução do problema modificado que possibilita mostrar que toda solução do problema modificado é uma solução do problema reformulado.

Destacamos que os resultados do Capítulo 1 desta tese originaram um artigo de pesquisa, o qual foi aceito para publicação na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* no ano de 2014 (veja [1]).

No capítulo 2, estudamos o caso em que o parâmetro $\kappa > 0$, ou seja, estudamos a seguinte equação de Schrödinger quasilinear

$$-\Delta u + V(x)u + \frac{\kappa}{2}\Delta(u^2)u = q(u),\ x \in \mathbb{R}^N \tag{7}$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, com V satisfazendo as hipóteses (V_0) e (V_Λ) e a não-linearidade q verifica as condições:

($\widehat{q}_1$) $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{2^*}} < +\infty$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $N \geq 3$.

($\widehat{q}_2$) $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \frac{sq(s)}{s^{2^*}} = 0$.

($\widehat{q}_3$) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta Q(s) \leq sq(s), \quad \text{para todo} \quad s > 0,$$

onde $Q(s) = \int_0^s q(t)dt$.

O principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 0.0.6 *Suponha que q satisfaz $(\widehat{q}_1) - (\widehat{q}_3)$ e V é uma função contínua que verifica as condições (V_0) e (V_Λ). Então, existem constantes $\kappa_0 > 0$ e $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, q) > 0$ tais que a equação (7) possui solução não-trivial para todo $\kappa \in [0, \kappa_0)$ e para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.*

Para provarmos o Teorema 0.0.6, inicialmente estabelecemos uma solução não-trivial para uma equação de Schrödinger quasilinear auxiliar. Precisamente, mostraremos a existência de solução não-trivial para a seguinte equação de Schrödinger quasilinear:

$$-div(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = q(u), \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{8}$$

com $g(t) = \sqrt{1 - \kappa t^2}$ para $|t| < \sqrt{\dfrac{1}{3\kappa}}$ e $\kappa > 0$.
Nestas condições, a equação (8) transforma-se em (7). Em seguida, usamos uma nova mudança de variável introduzida por Shen e Wang em [42] e por Yang, Wang e Abdelgadir em [52] (veja Seção 2.1 mais adiante) e reformulamos o problema (7) obtendo desse modo uma equação semilinear. Analogamente ao Capítulo anterior, usamos os argumentos de Del Pino e Felmer em [26] para modificar o problema reformulado, de modo que o funcional associado ao problema modificado esteja bem definido, seja Gateaux-diferenciável em um espaço de Sobolev e satisfaça as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, provamos a limitação das sequências de Palais-Smale associada ao nível minimax. O resultado de existência é alcançado após obtermos uma limitação na norma L^∞ da solução do problema modificado independente da solução e do parâmetro κ. Esta limitação possibilita mostrar que existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, q) > 0$ tal que para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$ qualquer solução do problema

modificado é também uma solução do problema reformulado. Esta mesma limitação garante a existência de uma constante $\kappa_0 > 0$ de modo que o problema original (7) tem solução não-trivial para todo $\kappa \in [0, \kappa_0)$.

Ainda ressaltamos que devido ao comportamento da mudança de variável, diferentemente do Capítulo 1, não precisamos supor a limitação por cima do potencial V. Por outro lado, devido também ao comportamento da mudança de variável, conseguimos o resultado de existência do Teorema 0.0.6 apenas com a não-linearidade q tendo um tipo de crescimento subcrítico no infinito.

Destacamos que os resultados do Capítulo 2 desta tese originaram um artigo de pesquisa, o qual foi aceito para publicação na revista *Topological Methods in Nonlinear Analysis* (veja [2]).

No Capítulo 3, considerando o operador p-Laplaciano, generalizamos os resultados obtidos para a equação (6). Mais precisamente, estudamos a seguinte equação quasilinear:

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u - \Delta_p(u^2)u = q(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{9}$$

onde $2 \leq p < N$ e $\Delta_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o $p-$Laplaciano. Aqui, vamos supor que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua verificando a hipótese (V_0) e também cumpra a condição:

(V_{Λ_p}) Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{\frac{p^2}{p-1}}} \inf_{|x| \geq R} |x|^{\frac{p^2}{p-1}} V(x) \geq \Lambda.$$

Note que a condição (V_{Λ_p}) é uma generalização da hipótese (V_Λ). Aqui, não foi preciso supor a condição de limitação por cima do potencial V.

As hipóteses abaixo sobre a não-linearidade q são generalizações naturais das hipóteses do Capítulo 1 e serão assumidas:

(q_1) $\displaystyle\limsup_{s \to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{p^*}} < +\infty$; where $p^* = \frac{pN}{N-p}$.

(q_2) $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{sq(s)}{s^{2p^*}} = 0$.

(q_3) Existe $\theta > p$ tal que

$$0 < 2\theta Q(s) \leq sq(s), \quad \text{para todo} \quad s > 0,$$

onde $Q(s) = \int_0^s q(t)dt$.

O seguinte teorema contém o resultado principal deste capítulo:

Teorema 0.0.7 *Suponha que V satisfaz (V_0) e (V_{Λ_p}) e q verifica $(q_1) - (q_3)$. Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, p, q) > 0$ tal que a equação (9) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.*

Igualmente ao Capítulo 1, segue um corolário imediato da prova do Teorema 0.0.7:

Teorema 0.0.8 *Suponha que V satisfaz (V_0) e*

$(\tilde{V}_{\Lambda_p})$ *Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que*

$$\frac{1}{R^{\frac{p(N+p)}{2(p-1)}}} \inf_{|x| \geq R} |x|^{\frac{p(N+p)}{2(p-1)}} V(x) \geq \Lambda;$$

e a função q verifica (q_2), (q_3) e

$(\tilde{q}_1)$ $\limsup_{s \to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{2p^*}} < +\infty.$

Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, p, q) > 0$ tal que a equação (9) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Estes resultados generalizam os resultados obtidos nos Teoremas 0.0.3 e 0.0.4 devido ao fato de estarmos considerando uma equação mais geral. Enfatizamos mais uma vez que, considerando uma estrutura de espaços de Orlicz, conseguimos obter estes resultados sem a necessidade de supor a limitação por cima do potencial V. Para provarmos os Teoremas 0.0.7 e 0.0.8, seguimos as mesmas ideias usadas na demonstração dos Teoremas 0.0.3 e 0.0.4. Antes, porém, foi necessário apresentarmos algumas propriedades (veja Seção 3.1) essenciais do Espaço de Orlicz que estamos considerando neste capítulo, a saber:

$$E = \{w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx < +\infty\},$$

o qual é um espaço de Banach (veja Proposição 3.1.8) quando munido da norma

$$||w|| = ||\nabla w||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + ||w||_*,$$

onde

$$||w||_* = \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda w)|^p dx\right].$$

Neste capítulo, a função f é definida por

$$f'(t) = \frac{1}{[1 + 2^{p-1}|f(t)|^p]^{1/p}} \quad \text{em} \quad [0, +\infty) \quad \text{e} \quad f(t) = -f(-t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0].$$

Note que f assim definida é uma generalização para o caso $p = 2$ usada no Capítulo 1.

Em relação a equação (9) e algumas variantes, encontramos na literatura artigos que estabeleceram tanto existência como multiplicidade de soluções. Por exemplo, citamos o artigo de Severo [44], no qual, usando métodos minimax, mostrou a existência de solução fraca não-trivial para a equação (9). Em [7] Alves, Figueiredo e Severo estabeleceram, usando métodos variacionas juntamente com a Teoria de categoria de Lusternick-Schnirelman, a existência e multiplicidade de solução fraca não-trivial para a equação

$$-\epsilon^p \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u - \epsilon^p \Delta_p(u^2)u = q(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10}$$

Estes mesmos autores em [8] estabeleceram, via Teoria de categoria de Lusternick-Schnirelman, a multiplicidade de solução fraca positiva para o seguinte problema de Dirichlet quasilinear

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u - \Delta_p(u^2)u = q(u), \text{ em } \Omega_\lambda, \ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_\lambda, \tag{11}$$

onde $\Omega_\lambda = \lambda\Omega$, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e λ é um parâmetro positivo. Ressaltamos que todos esses resultados acontecem sob a condição (V_1) e crescimento subcrítico para a não-linearidade q. Já Alves e Figueiredo em [3] estabeleceram a multiplicidade de soluções fracas positivas para a equação de Schrödinger quasilinear

$$-\epsilon^p \Delta_p u + (\lambda A(x) + 1)|u|^{p-2}u - \epsilon^p \Delta_p(u^2)u = q(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{12}$$

onde A é uma função contínua não-negativa e o termo não linear q tem crescimento subcrítico.

Para finalizar a tese, no Apêndice A, baseados em Brezis e Kato [20] (veja também [5, 13]), apresentamos uma importante estimativa na norma L^∞, que foi essencial para a obtenção dos resultados de existência dos Capítulos 1, 2 e 3.

Com o objetivo de facilitar a leitura deste trabalho, repetiremos, em seus respectivos capítulos, os enunciados dos principais resultados, bem como elencaremos, novamente, as hipóteses sobre as funções q e V.

Capítulo 1

Equação de Schrödinger com coeficiente negativo no termo quasilinear

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para o problema elíptico quasilinear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = q(u), & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad u > 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Nosso objetivo principal é estabeler a existência de uma solução para o problema (P) sob uma condição sobre o potencial V que o possibilite se anular no infinito, isto é,

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = 0$$

e com a função q tendo crescimento quasicrítico. Motivados pelo trabalho de Alves e Souto em [5], admitimos que o potencial V satisfaz

(V_0) $V(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(V_∞) $V(x) \leq V_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(V_Λ) Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda.$$

Considerando $Q(s) = \int_0^s q(t)dt$, supomos que a não-linearidade q verifica as seguintes hipóteses:

(q_1) $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{2^*}} < +\infty$; onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $N \geq 3$.

(q_2) $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \frac{sq(s)}{s^{22^*}} = 0$.

(q_3) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < 2\theta Q(s) \leq sq(s), \qquad \text{para todo} \quad s > 0.$$

Observação 1.0.9 *A condição (q_2) é conhecida como crescimento* ***quasecrítico****.*

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 1.0.10 *Suponha que V satisfaz $(V_0), (V_\infty), (V_\Lambda)$, e q verifica $(q_1) - (q_3)$. Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, V_\infty, q) > 0$ tal que o problema (P) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.*

Como um corolário imediato da demonstração do Teorema 1.0.10, temos:

Teorema 1.0.11 *Suponha que V satisfaz $(V_0), (V_\infty)$ e*

$(\tilde{V}_\Lambda)$ *Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que*

$$\frac{1}{R^{N+2}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{N+2} V(x) \geq \Lambda;$$

e q verifica (q_2), (q_3) e

$(\tilde{q}_1)$ $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{22^*}} < +\infty$.

Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, V_\infty, q) > 0$ tal que o problema (P) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Observação 1.0.12 *A condição (q_1) é mais fraca do que $(\tilde{q}_1)$, mas $(\tilde{V}_\Lambda)$ é mais fraca do que (V_Λ). De fato, é suficiente verificar que $(\tilde{V}_\Lambda)$ é equivalente à*

$$\liminf_{|x|\to\infty} |x|^4 V(x) > 0.$$

Observação 1.0.13 *Neste capítulo, a condição* (V_∞) *é essencial para obtermos a limitação da sequência de Cerami (veja Lema 1.3.4 e Obsevação 1.1.2), uma vez que estamos trabalhando num espaço de Sobolev com sua norma usual. No Capítulo 3, mais adiante, trabalhando numa estrutura de Espaço tipo "Orlicz", conseguimos obter os mesmos resultados sem a necessidade de supormos a condição* (V_∞).

Para demonstrar o Teorema 1.0.10, usamos a mudança de variável $u = f(w)$ introduzida por Colin e Jeanjean em [24] e por Liu, Wang e Wang em [36] (veja Seção 1.1 a seguir), para reformular o problema, obtendo uma equação semilinear que tem um funcional associado bem definido e Gateaux-diferenciável em um espaço de Sobolev. Desta reformulação, segue que se w é uma solução do problema reformulado, então $u = f(w)$ é uma solução do problema originalmente proposto. Em seguida, adaptamos um método introduzido por Del Pino e Felmer em [26](veja também [5]) para modificar o problema reformulado. O funcional associado ao problema modificado também está bem definido e é Gateaux-diferenciável em um espaço de Sobolev. Mostramos que este funcional satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha e provamos a limitação das sequências de Cerami associada ao nível minimax. Alcançamos o nosso resultado de existência após obter uma limitação na norma L^∞ da solução do problema modificado que possibilita mostrar que toda solução do problema modificado é uma solução do problema reformulado.

As soluções de (P) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quasilineares da forma

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - l(|z|^2)z - \nu[\Delta\rho(|z|^2)]\rho'(|z|^2)z, \tag{1.1}$$

onde $z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial dado, ν é uma constante real e l, ρ são funções reais. Neste capítulo, consideramos o caso $\rho(s) = s$ e $\nu = 1$, e nosso interesse especial é obter soluções do tipo onda estacionária, isto é, soluções do tipo $z(t, x) = e^{-i\xi t}u(x)$, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $u > 0$. Note que z satisfaz (1.1) se, e somente se, a função $u(x)$ é uma solução para (P) com $V(x) = W(x) - \xi$.

Devido aos aspectos físicos, o problema (P) tem atraído recentemente muita atenção e vários resultados de existência tem sido obtidos quando o potencial V é **estritamente positivo**, conforme podemos constatar nas referências já citadas na Introdução deste trabalho.

Não conhecemos, até o momento, nenhum resultado de existência de solução para o problema (P) que possibilite o potencial V se anular no infinito e com a não-linearidade tendo crescimento quasicrítico.

1.1 Reformulação do Problema

Inicialmente, observamos que não podemos aplicar diretamente métodos variacionais para estudar (P), visto que o funcional energia natural associado

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+2u^2)|\nabla u|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}Q(u(x))dx, \tag{1.2}$$

não está bem-definido em geral, pois $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2dx$ não é finito para todo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para contornar esta dificuldade, usamos a seguinte mudança de variável (veja [24, 36, 29]): $w = f^{-1}(u)$, onde f é definida por $f(0) = 0$,

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2f^2(t)}} \text{ sobre } [0,+\infty) \text{ e } f(t) = -f(-t) \text{ sobre } (-\infty, 0]. \tag{1.3}$$

No lema a seguir, elencamos as seguintes propriedades da função f, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências [24] e [29].

Lema 1.1.1 *A função f satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) f é unicamente definida, é C^∞ e inversível;

(2) $|f'(t)| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(3) $|f(t)| \leq |t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(4) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 1$;

(5) $\displaystyle\lim_{t\to +\infty}\frac{f(t)}{\sqrt{t}} = 2^{\frac{1}{4}}$;

(6) $\dfrac{f(t)}{2} \leq tf'(t) \leq f(t)$, para todo $t \geq 0$;

(7) $|f(t)| \leq 2^{\frac{1}{4}}|t|^{\frac{1}{2}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(8) $\dfrac{f^2(t)}{2} \leq tf(t)f'(t) \leq f^2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(9) existe uma constante positiva C tal que

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & se \quad |t| \leq 1 \\ C|t|^{\frac{1}{2}}, & se \quad |t| \geq 1; \end{cases}$$

(10) $|f(t)f'(t)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(11) Para cada $\lambda > 1$, $f^2(\lambda t) \leq \lambda^2 f^2(t)$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Neste momento, destacamos que as propriedades $(4)-(5)$ do Lema 1.1.1, (q_1) e (q_2) implicam que existe $c_0 > 0$ tal que

$$|f(s)q(f(s))| \leq c_0 |s|^{2^*}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

De fato, a partir da hipótese (q_1) e Lema 1.1.1-(4), obtemos

$$\limsup_{s \to 0^+} \frac{f(s)q(f(s))}{s^{2^*}} < +\infty$$

e usando (q_2) e o Lema 1.1.1-(5), resulta que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)q(f(s))}{s^{2^*}} = 0.$$

Estes limites implicam na desigualdade (1.4).

Da condição (V_0), podemos introduzir o seguinte subespaço

$$E = \{w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w^2 dx < +\infty\}$$

de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido com o produto interno definido por

$$(u, w) = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla w + V(x) u w] \, dx$$

e norma associada

$$||w||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + V(x) w^2\right] dx.$$

Observação 1.1.2 *Note que o funcional* $\Psi : E \to \mathbb{R}$*, dado por*

$$\Psi(w) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + V(x) f^2(w)\right] dx,$$

é de classe C^1 *e*

$$\Psi(w) \leq ||w||^2, \text{ para todo } w \in E.$$

Além disso, existe uma constante $\beta > 0$ *tal que*

$$\beta ||w||^2 \leq \Psi(w) + (\Psi(w))^{2^*/2}, \text{ para todo } w \in E.$$

De fato, da condição (V_0) e Lema 1.1.1 - (3), segue que

$$\Psi(w) \leq ||w||^2, \text{ para todo } w \in E.$$

Por outro lado, da condição (V_∞), Lema 1.1.1 - (9) e das imersões de Sobolev, encontramos uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{[|w(x)|\leq 1]} V(x)w^2 dx \leq \frac{1}{C^2}\int_{[|w(x)|\leq 1]} V(x)f^2(w)dx \leq \frac{1}{C^2}\Psi(w)$$

e

$$\int_{[|w(x)|\geq 1]} V(x)w^2 dx \leq V_\infty \int_{[|w(x)|\geq 1]} |w|^{2^*} dx \leq V_\infty C_1 (\Psi(w))^{2^*/2}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)w^2 dx \leq \frac{1}{C^2}\Psi(w) + V_\infty C_1 (\Psi(w))^{2^*/2},$$

isto é,

$$\beta||w||^2 \leq \Psi(w) + (\Psi(w))^{2^*/2},$$

onde $\beta = \dfrac{1}{\delta}$ e $\delta = max\{1 + \dfrac{1}{C^2}, V_\infty C_1\}$. ■

Após a mudança de variáveis $(u = f(w))$, a partir de $J(u)$ obtemos o funcional

$$I(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w)dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(f(w))dx, \tag{1.5}$$

o qual está bem definido em E e é de classe C^1 devido as hipóteses $(V_0), (q_1)$ e (q_2), e as propriedades $(1), (2)$ e (3) do Lema 1.1.1 com derivada dada por

$$I'(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(w)f'(w)\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} q(f(w))f'(w)\varphi dx, \tag{1.6}$$

para quaisquer $w, \varphi \in E$. Note que os pontos críticos de I são soluções fracas para o problema

$$(AP1) \qquad \begin{cases} -\Delta w + V(x)f(w)f'(w) = q(f(w))f'(w), & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad w > 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

A proposição a seguir relaciona os pontos críticos do funcional I com as soluções clássicas do problema (P).

Proposição 1.1.3 *Se $w \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I, então $u = f(w)$ é uma solução clássica de (P).*

Demonstração. Segue as mesmas ideias da demonstração da Proposição 3.1.3 presente no Capítulo 3 mais adiante, fazendo $p = 2$. ∎

Observação 1.1.4 *Uma vez que objetivamos provar a existência de soluções positivas para o problema* (P)*, podemos considerar*

$$q(t) = 0, \ \textit{para todo } t \leq 0.$$

1.2 O problema auxiliar

A fim de obter solução positiva iremos adaptar para o nosso caso um método explorado por Del Pino e Felmer em [26](veja também [5]), que consiste em uma modificação do problema $(AP1)$. Para isto, vamos estabelecer algumas considerações. Para $k > \frac{2\theta}{\theta-2}(k > 1)$ e $R > 1$, definimos a função contínua $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x,t) = \begin{cases} q(t), & \text{se } |x| \leq R \\ q(t), & \text{se } |x| > R \quad \text{e} \quad q(t) \leq \frac{V(x)}{k}t \\ \dfrac{V(x)}{k}t, & \text{se } |x| > R \quad \text{e} \quad q(t) > \frac{V(x)}{k}t. \end{cases}$$

O problema auxiliar que vamos considerar é o seguinte

$$(AP2) \qquad \begin{cases} -\Delta w + V(x)f(w)f'(w) = h(x, f(w))f'(w), & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad w > 0, \quad \text{em} \ \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Um cálculo direto mostra que, para todo $t \in \mathbb{R}$, as desigualdes abaixo valem:

$$h(x,t) \leq q(t), \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.7}$$

$$h(x,t) \leq \frac{V(x)}{k}t, \ \text{para todo } |x| \geq R, \tag{1.8}$$

$$H(x,t) = Q(t), \ \text{se } \ |x| \leq R, \tag{1.9}$$

$$H(x,t) \leq \frac{V(x)}{2k}t^2, \ \text{se } |x| > R \tag{1.10}$$

e

$$\frac{1}{2\theta}th(x,t) - H(x,t) \geq \left(\frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2}\right)\frac{V(x)}{k}t^2, \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.11}$$

Associado ao problema $(AP2)$ definimos, sobre E, o funcional de Euler-Lagrange

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w)dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w))dx. \tag{1.12}$$

Das condições sobre as funções q e V, segue que Φ é de classe C^1 com derivada de Gateaux dada por

$$\Phi'(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(w) f'(w) \varphi dx \\ - \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w)) f'(w) \varphi dx, \quad (1.13)$$

para quaisquer $w, \varphi \in E$, e seus pontos críticos correspondem a soluções fracas de $(AP2)$.

1.3 A geometria do passo da montanha e a limitação das sequências de Cerami

Nesta seção, enunciaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz [12], que é uma ferramenta essencial para este capítulo. Em seguida, mostramos que o funcional (modificado) associado ao Problema $(AP2)$ satisfaz as propriedades geométricas deste teorema. Na sequência, provamos a limitação das sequências de Cerami. Concluimos esta seção, mostrando que o limite fraco de uma sequência de Cerami é uma solução não trivial para o problema $(AP2)$.

Seja X um espaço de Banach real e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Recordamos que $(w_n) \subset X$ é uma sequência de Cerami para I no nível c (denotamos por $(Ce)_c$) se (w_n) satisfaz:

$$(i) I(w_n) \to c \quad \text{e} \quad (ii)(1 + ||w_n||)||I'(w_n)||_{X'} \to 0 \;\; \text{quando} \;\; n \to +\infty.$$

O funcional I verifica a condição de Cerami em c, se qualquer sequência de Cerami possui uma subsequência convergente.

Teorema 1.3.1 *Sejam X um espaço de Banach real e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Considere Σ um subconjunto fechado de X que o desconecta (por caminhos) em componentes conexas distintas X_1 e X_2. Suponha, ainda que, $I(0) = 0$ e*

(I_1) $0 \in X_1$ *e existe* $\alpha > 0$ *tal que* $I|_\Sigma \geq \alpha > 0$,

(I_2) *existe* $e \in X_2$ *tal que* $I(e) < 0$.

Então, I possui uma sequência $(Ce)_c$ com $c \geq \alpha > 0$ dado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \tag{1.14}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \ \ e \ \ I(\gamma(1)) < 0\}. \tag{1.15}$$

O seguinte lema implica que Φ verifica a geometria do passo da montanha.

Lema 1.3.2 *Suponha que $(V_0), (q_1), (q_2)$ e (q_3) são satisfeitas. Então, o funcional Φ definido por (1.12) verifica as condições (I_1) e (I_2) do Teorema 1.3.1.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\Phi(0) = 0$. Agora, para cada $\rho > 0$, defina

$$\Sigma_\rho = \{w \in E; \Psi(w) = \rho^2\},$$

onde Ψ foi definido na Observação 1.1.2. Desde que o funcional Ψ é contínuo, segue da mesma observação que Σ_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço E em $X_1 = \{w \in E; \Psi(w) > \rho^2\}$ e $X_2 = \{w \in E; \Psi(w) < \rho^2\}$. Usando (1.7) e (q_3), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w))dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} Q(f(w))dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} f(w)Q(f(w))dx.$$

Usando a desigualdade (1.4), teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w))dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*} dx.$$

Devido a desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e a condição (V_0), resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w))dx \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + V(x)f^2(w))dx \right)^{2^*/2},$$

de onde segue que

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + V(x)f^2(w)\right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w))dx \geq \frac{1}{2}\rho^2 - C_3 \rho^{2^*},$$

para todo $w \in \Sigma_\rho$.

Uma vez que $2^* > 2$, segue que para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\Phi(w) \geq \alpha > 0, \ \ \text{para todo} \ \ w \in \Sigma_\rho,$$

e assim a condição (I_1) é satisfeita.

Agora, fixado $\rho > 0$ pequeno, vamos mostrar que existe $\varphi \in E$ tal que

$$\Phi(t\varphi) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{1.16}$$

De fato, considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ verificando $supp(\varphi) = \overline{B_1}$ e $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, para todo $x \in B_1$. Note que, pela propriedade (3) do Lema 1.1.1, resulta que

$$\Phi(t\varphi) \leq \frac{1}{2}t^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\varphi^2 dx \right) - \int_{B_1} H(x, f(t\varphi))dx. \tag{1.17}$$

Por (1.9), segue que $H(x,t) = Q(t)$ em B_1. Da hipótese (q_3), existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$Q(t) \geq C_1|t|^{2\theta} - C_2, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\Phi(t\varphi) \leq \frac{1}{2}t^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\varphi^2 dx \right) - C_1 \int_{B_1} |f(t\varphi)|^{2\theta} dx + C_3. \tag{1.18}$$

Desde que a função $\dfrac{f(t)}{t}$ é decrescente para $t > 0$ e

$$0 \leq t\varphi(x) \leq t, \quad \text{para todo} \quad x \in B_1 \text{ e } t > 0,$$

temos

$$f(t)\varphi(x) \leq f(t\varphi(x)), \quad \text{para todo} \quad x \in B_1 \text{ e } t > 0,$$

que juntamente com (1.18) implica

$$\Phi(t\varphi) \leq t^2 \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2) dx - C_1 \frac{f^{2\theta}(t)}{t^2} \int_{B_1} |\varphi|^{2\theta} dx + \frac{C_3}{t^2} \right]. \tag{1.19}$$

Pela propriedade (9) do Lema 1.1.1 e desde que $\theta > 2$, concluímos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f^{2\theta}(t)}{t^2} = +\infty,$$

e portanto (1.16) está provado, e consequentemente (I_2) é satisfeita. ■

Como consequência do Teorema 1.3.1 e Lema 1.3.2, temos:

Corolário 1.3.3 *Suponha que $(V_0), (q_1), (q_2)$ e (q_3) são satisfeitas. Então, o funcional Φ possui uma sequência $(Ce)_c$, com c dado por (1.14).*

Agora, mostraremos a limitação das sequências de Cerami.

Lema 1.3.4 *Suponha que* $(V_0), (V_\infty), (q_1), (q_2)$ *e* (q_3) *valem. Se* $(w_n) \subset E$ *é uma sequência de Cerami para* Φ, *então* (w_n) *é limitada em* E.

Demonstração. Seja (w_n) uma sequência $(Ce)_c$ para Φ. Então,

$$\Phi(w_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + ||w_n||)||\Phi'(w_n)||_{E'} \to 0 \;\text{ quando }\; n \to +\infty,$$

isto é,

$$\Phi(w_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + V(x)f^2(w_n))dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w_n)dx = c + o_n(1) \tag{1.20}$$

e

$$(1 + ||w_n||)||\Phi'(w_n)||_{E'} = o_n(1). \tag{1.21}$$

Para $\varphi \in E$, temos

$$\Phi'(w_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(w_n)f'(w_n)\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)\varphi dx. \tag{1.22}$$

Tomando $\varphi = \varphi_n = \dfrac{f(w_n)}{f'(w_n)}$, pela propriedade (6) do Lema 1.1.1, temos

$$|\varphi_n| \leq 2|w_n| \;\text{ e }\; |\nabla \varphi_n| \leq 2|\nabla w_n|.$$

Logo, $\varphi_n \in E$ e

$$||\varphi_n|| \leq 2||w_n||.$$

De (1.21), obtemos

$$\Phi'(w_n)\varphi_n = o_n(1), \tag{1.23}$$

ou seja,

$$\Psi(w_n) + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{2f^2(w_n)}{1 + 2f^2(w_n)}\right) |\nabla w_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f(w_n)dx = o_n(1). \tag{1.24}$$

De (1.20) e (1.24) segue que

$$\Phi(w_n) - \frac{1}{2\theta}\Phi'(w_n)\varphi_n = c + o_n(1),$$

e assim,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \Psi(w_n) + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2\theta} h(x, f(w_n))f(w_n) - H(x, f(w_n))\right] dx \leq c + o_n(1). \tag{1.25}$$

De (1.11), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2\theta}h(x,f(w_n))f(w_n)-H(x,f(w_n))\right]dx\geq\left(\frac{1}{2\theta}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(w_n)dx. \qquad (1.26)$$

Observando que $k>\dfrac{2\theta}{\theta-2}$, e usando (1.25) e (1.26), deduzimos que

$$\left(\frac{k-1}{k^2}\right)\Psi(w_n)\leq\Phi(w_n)-\frac{1}{2\theta}\Phi'(w_n)\varphi_n=c+o_n(1). \qquad (1.27)$$

Portanto, $\Psi(w_n)$ é limitada e pela Observação 1.1.2 concluímos que a sequência (w_n) é limitada em E. ■

Desde que a sequência (w_n), dada pelo Corolário 1.3.3, é uma sequência limitada em E, existe $w\in E$ e uma subsequência, ainda denotada por (w_n), tais que

$w_n \rightharpoonup w$ em E, $w_n\to w$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $s\in[1,2^*)$ e $w_n(x)\to w(x)$ q.t.p. sobre $\mathbb{R}^N$.

Os próximos lemas são importantes para mostrarmos que o limite fraco w é um ponto crítico não-trivial para Φ com $\Phi(w)=c$ e que o funcional Φ satisfaz a condição de Cerami.

Lema 1.3.5 *Assumindo as hipóteses do Lema 1.3.4, então as seguintes afirmações valem:*

(i) Para cada $\epsilon>0$, existe $r>R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{|x|\geq 2r}\left[|\nabla w_n|^2+V(x)f^2(w_n)\right]dx<\epsilon.$$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(w_n)dx=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(w)dx.$$

(iii)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}h(x,f(w_n))f(w_n)dx=\int_{\mathbb{R}^N}h(x,f(w))f(w)dx.$$

(iv) O limite fraco w é um ponto crítico para o funcional Φ.

Demonstração. (i) Considere $r>R$ e uma função $\eta=\eta_r\in C^\infty(B_r^c)$ tais que

$$\eta\equiv 1 \text{ em } B_{2r}^c,\ \ \eta\equiv 0 \text{ em } B_r,\ 0\leq\eta\leq 1$$

e

$$| \nabla \eta | \leq \frac{2}{r}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Como (w_n) é limitada em E, a sequência $(\eta\varphi_n)$, onde $\varphi_n = \left(\frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\right)$, é também limitada em E. Logo, por (1.23), temos

$$\Phi'(w_n)\,(\eta\varphi_n) = o_n(1),$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+\frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2\eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n)\eta dx = \\ -\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n\nabla\eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x,f(w_n))f(w_n)\eta dx + o_n(1).$$

Uma vez que $\eta \equiv 0$ em B_r, esta última desigualdade juntamente com (1.8) resulta em

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{[|x|\geq r]}\left[|\nabla w_n|^2 + V(x)f^2(w_n)\right]\eta dx \leq 2\int_{[|x|\geq r]}|w_n||\nabla w_n||\nabla\eta|dx + o_n(1),$$

ou seja,

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{[|x|\geq r]}\left[|\nabla w_n|^2 + V(x)f^2(w_n)\right]\eta dx \leq \frac{4}{r}\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w_n||\nabla w_n|dx + o_n(1). \tag{1.28}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w_n||\nabla w_n|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}w_n^2dx\right)^{1/2}.$$

Visto que $w_n \to w$ in $L^2(B_{2r}\backslash B_r)$ e (w_n) é limitada em E, segue que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w_n||\nabla w_n|dx \leq C\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}w^2dx\right)^{1/2}, \tag{1.29}$$

para alguma constante $C > 0$. Por outro lado, usando novamente a desigualdade de Hölder, temos

$$\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}w^2dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}|B_{2r}\backslash B_r|^{1/N}. \tag{1.30}$$

Notando que $|B_{2r}\backslash B_r| \leq |B_{2r}| = \omega_N(2r)^N$, e usando (1.29) e (1.30), teremos

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w_n||\nabla w_n|dx \leq 2rC\omega_N^{1/N}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}w^{2^*}dx\right)^{1/2^*}, \tag{1.31}$$

e devido a (1.28) e (1.31), deduzimos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]}\left[|\nabla w_n|^2+V(x)f^2(w_n)\right]dx \leq$$
$$8C\omega_N^{1/N}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]} w^{2^*}dx\right)^{1/2^*}. \quad (1.32)$$

Portanto, para cada $\epsilon > 0$, escolhemos $r > R$ tal que

$$8C\omega_N^{1/N}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]} w^{2^*}dx\right)^{1/2^*} < \epsilon,$$

e com isto concluímos a parte (i) do lema.

(ii) Note, inicialmente, que pela parte (i), para cada $\epsilon > 0$, existe $r > R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]} V(x)f^2(w_n)dx < \frac{\epsilon}{4}$$

e, consequetemente,

$$\int_{[|x|\geq 2r]} V(x)f^2(w)dx \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Portanto,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(w_n)-f^2(w)]dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2}+\left|\int_{[|x|\leq 2r]} V(x)[f^2(w_n)-f^2(w)]dx\right|. \quad (1.33)$$

Desde que $w_n \to w$ em $L^2(B_{2r})$, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[|x|\leq 2r]} V(x)f^2(w_n)dx = \int_{[|x|\leq 2r]} V(x)f^2(w)dx. \quad (1.34)$$

Por (1.33) e (1.34), temos

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(w_n)-f^2(w)]dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para cada $\epsilon > 0$. Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w)dx,$$

mostrando assim o item (ii) do lema.

(iii) Segue por (1.8) e do item (i) que, para cada $\epsilon > 0$, existe $r > R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]} h(x,f(w_n))f(w_n)dx < \frac{\epsilon}{4}$$

e

$$\int_{[|x|\geq 2r]} h(x,f(w))f(w)dx \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Portanto,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}[h(x,f(w_n))f(w_n)-h(x,f(w))f(w)]dx\right| \leq$$
$$\frac{\epsilon}{2}+\left|\int_{[|x|<2r]}[h(x,f(w_n))f(w_n)-h(x,f(w))f(w)]dx\right|. \quad (1.35)$$

Uma vez que

$$w_n(x)\to w(x) \text{ q.t.p. sobre } \mathbb{R}^N, \quad \frac{h(\cdot,f(s))f(s)}{|f(s)|^{22^*}}\to 0 \text{ quando } s\to+\infty$$

e

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N}|f(w_n)|^{22^*}<+\infty,$$

resulta, do Lema de Compacidade de Strauss [17], que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[|x|<2r]} h(x,f(w_n))f(w_n)dx=\int_{[|x|<2r]} h(x,f(w))f(w)]dx. \quad (1.36)$$

De (1.35) e (1.36), o resultado segue. Isto completa a prova do item (iii).

(iv) Como na prova de (iii), igualmente deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f(w_n)f'(w_n)-f(w)f'(w)]\phi dx\to 0 \;\text{ quando }\; n\to+\infty, \quad (1.37)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}[h(x,f(w))f'(w)-h(x,f(w_n))f'(w_n)]\phi dx\to 0 \;\text{ quando }\; n\to+\infty, \quad (1.38)$$

para qualquer $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso, desde que $w_n\rightharpoonup w$ em E, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(w_n-w)\nabla\phi dx\to 0 \;\text{ quando }\; n\to+\infty. \quad (1.39)$$

Combinando (1.37), (1.38) e (1.39) está provado que

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi'(w_n)\phi=\Phi'(w)\phi, \text{ para todo } \phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Isto completa a prova do item (iv). ∎

Na demonstração do resultado a seguir, usamos os mesmos argumentos encontrados na prova do item (3)- Proposição 2.1 em [36], em que os autores provaram o limite sob a condição (V_1). No entanto, observamos que esta condição pode ser substituída pela limitação $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ de (w_n). De fato, eles usaram a condição sobre V para provar que a medida do conjunto $A_{n,2}=\{x\in A; |w_n-w|>a\}$ tende a zero quando $a\to\infty$.

Lema 1.3.6 *Se* $w_n(x) \to w(x)$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w)dx,$$

então

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n - w)dx = 0.$$

Demonstração. Uma vez que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, usando o Lema de Fatou e a continuidade da função f^2, para todo $A \subset \mathbb{R}^N$, temos

$$\int_A V(x)f^2(w)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_A V(x)f^2(w_n)dx \tag{1.40}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(w)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(w_n)dx. \tag{1.41}$$

Afirmamos que a desigualdade estrita em (1.40) e (1.41) não pode ocorrer. De fato, se uma das desigualdades ocorre, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w)dx &= \int_A V(x)f^2(w)dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(w)dx \\
&< \liminf_{n\to+\infty} \int_A V(x)f^2(w_n)dx + \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(w_n)dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[\int_A V(x)f^2(w_n)dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(w_n)dx\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n)dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w)dx < \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n)dx,$$

o que é um absurdo, pois, por hipótese,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w)dx.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A V(x)f^2(w_n)dx = \int_A V(x)f^2(w)dx.$$

Afirmação 1: Para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que, se $A \subset \mathbb{R}^N$ com $|A| < \delta$ e $n \geq N$, então

$$\int_A V(x)f^2(w_n)dx \leq \epsilon.$$

Suponhamos que a **Afirmação 1** é falsa para algum $\epsilon_0 > 0$, temos para $\delta_j = \dfrac{\delta}{2^j}, j = 1, 2, ...$, existem $A_j \subset \mathbb{R}^N$ e $n_j \geq j$, com $|A_j| \leq \delta_j$, tais que

$$\int_{A_j} V(x) f^2(w_j) dx \geq \epsilon_0.$$

Sabemos, da Teoria de Medida e Integração, que existe $\delta > 0$ tal que, se $A \subset \mathbb{R}^N$, com $|A| < \delta$, então

$$\int_A V(x) f^2(w) dx < \frac{\epsilon_0}{2}. \tag{1.42}$$

Considerando $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, resulta que

$$|A| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |A_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta.$$

Além disso,

$$\int_A V(x) f^2(w_{n_j}) dx \geq \int_{A_j} V(x) f^2(w_{n_j}) dx \geq \epsilon_0,$$

o que implica

$$\int_A V(x) f^2(w_{n_j}) dx \geq \epsilon_0.$$

Passando o limite de $n_j \to \infty$, teremos

$$\int_A V(x) f^2(w) dx \geq \epsilon_0,$$

contrariando (1.42). Portanto, está justificada a **Afirmação 1**. Agora, tomemos um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^N$ verificando

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x) f^2(w) dx \leq \epsilon.$$

Para n suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x) f^2(w_n) dx \leq \epsilon. \tag{1.43}$$

Desde que a função $f^2(t)$ é convexa, usando a propriedade (11) do Lema 1.1.1 e (1.43), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(|w_n-w|)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(|w_n|+|w|)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(\frac{1}{2}2|w_n|+\frac{1}{2}2|w|)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(2|w_n|)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(2|w|)dx \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(|w_n|)dx+2\int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(|w|)dx \\
&\leq 2\epsilon+2\epsilon \\
&= 4\epsilon,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash A} V(x)f^2(|w_n-w|)dx \leq 4\epsilon. \tag{1.44}$$

Para a integral $\int_A V(x)f^2(w_n-w)dx$, dividimos o conjunto A em dois subconjuntos, a saber:

$$A_n^1=\{x\in A;|w_n-w|\leq a\} \;\text{ e }\; A_n^2=\{x\in A;|w_n-w|>a\},$$

onde $a>0$ será escolhido convenientemente.

Note que

$$\int_{A_n^1} V(x)f^2(|w_n-w|)dx=\int_A V(x)f^2(|w_n-w|)\chi_{A_n^1}(x)dx.$$

Visto que $w_n(x)-w(x)\to 0$ q.t.p. em A e $f^2(t)$ é contínua, teremos

$$V(x)f^2(|w_n(x)-w(x)|)\chi_{A_n^1}(x)\to 0 \quad \text{q.t.p. em } A.$$

Além disso,

$$V(x)f^2(|w_n(x)-w(x)|)\chi_{A_n^1}(x)\leq V(x)f^2(a),$$

e

$$\int_A V(x)f^2(a)dx\leq f^2(a)V_\infty|A|<+\infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{A_n^1} V(x)f^2(|w_n-w|)dx\to 0. \tag{1.45}$$

Afirmação 2: Existem $\delta>0$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tais que $|A_n^2|<\delta$ para todo $n\geq n_0$.

De fato, uma vez que (w_n) é limitada em E, temos que a integral $\int_{\mathbb{R}^N}|w_n|^{2^*}dx$ também é limitada. Então, existe $C>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[|w_n|^{2^*}+|w|^{2^*}\right]dx \leq C.$$

Por outro lado,

$$a^{2^*}|A_n^2| = \int_{A_n^2} a^{2^*}dx < \int_{A_n^2}|w_n-w|^{2^*}dx \leq C_1\int_{\mathbb{R}^N}\left[|w_n|^{2^*}+|w|^{2^*}\right]dx \leq C_2,$$

ou seja,

$$|A_n^2| \leq \frac{C_2}{a^{2^*}}.$$

Para $a\approx+\infty$, temos $|A_n^2|\approx 0$. Escolhendo $a>0$ tal que

$$|A_{n_0}^2|<\delta,$$

para algum $n_0\in\mathbb{N}$. Então,

$$|A_n^2|<\delta, \quad \text{para todo} \quad n\geq n_0.$$

Isto prova a **Afirmação 2**. Como $|A_n^2|<\delta$, para todo $n\geq n_0$, então pela **Afirmação 1**, deduzimos que

$$\int_{A_n^2}V(x)f^2(|w_n-w|)dx \leq C\int_{A_n^2}V(x)\left[f^2(w_n)+f^2(w)\right]dx \leq C\epsilon. \tag{1.46}$$

De (1.44), (1.45) e (1.46), concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(w_n-w)dx=0.$$

■

Como consequência dos Lemas 1.3.5 e 1.3.6, temos:

Corolário 1.3.7 *Sob as hipóteses do Lema 1.3.4, temos que w é um ponto crítico não-trivial de Φ e $\Phi(w)=c$. Além disso, o funcional Φ verifica a condição $(Ce)_c$.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que procedendo como na prova do Lema 1.3.5 (ii)-(iii), deduzimos os seguintes limites

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f(w_n)f'(w_n)w_ndx=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f(w)f'(w)wdx, \tag{1.47}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}h(x,f(w_n))f'(w_n)w_ndx=\int_{\mathbb{R}^N}h(x,f(w))f'(w)wdx, \tag{1.48}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} H(x,f(w_n))dx = \int_{\mathbb{R}^N} H(x,f(w))dx. \tag{1.49}$$

Sabemos que $\Phi'(w)=0$. Provaremos que $w\neq 0$. Suponha que $w\equiv 0$, então pelo Lema 1.3.5 $-(ii)$, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(w_n)dx = 0.$$

Agora, pelos limites (1.47) e (1.48), resulta que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(w_n)f'(w_n)w_n dx = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h(x,f(w_n))f'(w_n)w_n dx = 0.$$

Em particular, pela definição de h, também obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} H(x,f(w_n))dx = 0$$

e desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(w_n)f'(w_n)w_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x,f(w_n))f'(w_n)w_n dx \to 0,$$

concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx \to 0.$$

Consequentemente,

$$\Phi(w_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + V(x)f^2(w_n))dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x,f(w_n))dx \to 0,$$

que é uma contradição, visto que $\Phi(w_n)\to c>0$. Portanto, $w\neq 0$.

Agora, mostraremos que $\Phi(w)=c$. Passando o limite em n na expressão

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(w_n)f'(w_n)w_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x,f(w_n))f'(w_n)w_n dx + o(1),$$

e usando os limites (1.47) e (1.48) juntamente com $\Phi'(w)w=0$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx. \tag{1.50}$$

Pelo Lema 1.3.5-(ii), (1.49) e (1.50), deduzimos que

$$\Phi(w_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + V(x)f^2(w_n))dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x,f(w_n))dx \to \Phi(w),$$

e, portanto, concluímos que $\Phi(w) = c$.

Para mostrar que o funcional Φ verifica a condição $(Ce)_c$, é suficiente provarmos que $||w_n - w|| \to 0$. Ora, pela Observação 1.1.2, temos

$$||w_n - w||^2 \leq C\left[\Psi(w_n - w) + (\Psi(w_n - w))^{2^*/2}\right],$$

onde $\Psi(w_n - w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n - \nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n - w) dx$. Para concluirmos que $w_n \to w$ em E, resta-nos mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n - w) dx = 0.$$

Este último limite segue do Lema 1.3.6. Portanto, Φ verifica a condição de Cerami. ■

1.4 Estimativa L^∞ da solução de $(AP2)$

Neta seção, seguindo as ideias de Alves e Souto [5], iremos estabelecer uma estimativa L^∞ para a solução w obtida no Corolário 1.3.7. Para isto, denotaremos por B a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, isto é, $B = B_1(0)$ e por $I_0 : H_0^1(B) \to \mathbb{R}$ o funcional

$$I_0(w) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2}\int_B V(x) f^2(w) dx - \int_B Q(f(w)) dx. \tag{1.51}$$

Além disso, denotamos por d o nível do passo da montanha associado com I_0, ou seja,

$$d = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)), \tag{1.52}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(B)); \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = e\}, \tag{1.53}$$

com $e \in H_0^1(B)\backslash\{0\}$ verificando $I_0(e) < 0$.

Observação 1.4.1 *Desde que $\Phi(w) \leq I_0(w)$ para todo $w \in H_0^1(B)$, e pelas definições dos números c em (1.14) e d em (1.52), deduzimos que*

$$c \leq d. \tag{1.54}$$

Inicialmente, obtemos a seguir uma estimativa na norma $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.4.2 *Para $R > 1$, qualquer solução positiva w do problema $(AP2)$ tal que $\Phi(w) = c$ satisfaz a estimativa*

$$\|w\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{dSk^2}{k-1},$$

onde S é a melhor constante que verifica

$$\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \text{ para todo } u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Repetindo (1.27) para w, temos

$$\left(\frac{k-1}{k^2}\right) \Psi(w) \leq \Phi(w) - \frac{1}{2\theta}\Phi'(w)w = c.$$

Portanto, a estimativa segue diretamente de (1.54) e da imersão de Sobolev. ■

Observação 1.4.3 *No lema anterior $\|w\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}$ é limitada por uma constante que não depende de $R > 1$.*

A fim de obter a limitação na norma L^∞, consideramos para uma solução w do problema $(AP2)$, as seguintes funções:

$$L(x,t) = \begin{cases} q(f(t))f'(t), & \text{se } |x| < R \text{ ou } q(f(t)) \leq \frac{V(x)}{k} f(t) \\ 0, & \text{se } |x| \geq R \text{ e } q(f(t)) > \frac{V(x)}{k} f(t) \end{cases} \tag{1.55}$$

e

$$b(x) = \begin{cases} \frac{1}{w} V(x) f(w) f'(w), & \text{se } |x| < R \text{ ou } q(f(w)) \leq \frac{V(x)}{k} f(w) \\ \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{w} V(x) f(w) f'(w), & \text{se } |x| \geq R \text{ e } q(f(w)) > \frac{V(x)}{k} f(w). \end{cases}$$

Observe que w satisfaz um problema análogo à (A.1) do Apêndice A, com $p = 2$. Pela propriedade (6) do Lema 1.1.1 e da relação (1.4), deduzimos que

$$|L(x,t)| \leq C_1 |t|^{2^*-1}, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^N,$$

para alguma constante $C_1 > 0$.

Para aplicarmos o Corolário A.3 do Apêndice A, com $p = 2$, é suficiente mostrarmos a limitação na norma $L^r(\mathbb{R}^N)$, para algum $r > 2^*$. Então, vejamos:

Lema 1.4.4 *Sejam $N > 2$ e $\beta = N/(N-2)$. Então, existe uma constante $C = C(N) > 0$, tal que*

$$\|w\|_{L^{2^*\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|w\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Fazendo $p = 2$ e procedendo como na prova da Proposição A.1 (Veja Apêndice A); consideremos w uma solução positiva de (A.1), e para cada $m \in \mathbb{N}$ os conjuntos $A_m = \{x \in \mathbb{R}^N; |w|^{\beta-1} \leq m\}$ e $B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m$. Defina

$$w_m = \begin{cases} v|v|^{2(\beta-1)}, & \text{em } A_m, \\ m^2 v, & \text{em } B_m, \end{cases}$$

e

$$z_m = \begin{cases} v|v|^{\beta-1}, & \text{em } A_m, \\ mv, & \text{em } B_m. \end{cases}$$

Usando w_m como função teste e desde que, $0 \leq b(x)z_m^2 = b(x)ww_m$ em $\mathbb{R}^N$ e $\beta > 1$, deduzimos, como no apêndice A, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla z_m|^2 + b(x)z_m^2\right) dx \leq \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} L(x,w)w_m dx. \tag{1.56}$$

Note que a função L definida em (1.55), verifica as seguintes condições:

$(1.L_1)$ $|L(x,t)| \leq C_0|t|^{2^*-1}$, para t suficientemente pequeno,

$(1.L_2)$ $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{L(x,t)}{|t|^{2^*-1}} = 0.$

Das condições $(1.L_1)$ e $(1.L_2)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C = C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|L(x,t)| \leq \varepsilon|t|^{2^*-1} + C_\varepsilon|t|, \text{ para quaisquer } x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}.$$

Usando esta desigualdade em (1.56), teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla z_m|^2 + b(x)z_m^2\right) dx \leq \beta^2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-1}|w_m|dx + C\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} z_m^2 dx. \tag{1.57}$$

Uma vez que $z_m^2 = ww_m$ em $\mathbb{R}^N$ e aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-1}|w_m|dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-2}z_n^2 dx \leq ||z_m||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*} dx\right)^{2^*-2}.$$

Pela imersão de Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-1}|w_n|dx \leq S||w||^{2^*-2}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^2 dx,$$

que substituída em (1.57), resulta em

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla z_m|^2 + b(x)z_m^2\right) dx \leq \beta^2\varepsilon S||w||^{2^*-2}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla z_m|^2 dx + C\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} z_m^2 dx. \tag{1.58}$$

Pelo Lema 1.4.2, podemos escolher $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$ tal que

$$\varepsilon\beta^2||w||^{2^*-2}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} S < \frac{1}{2},$$

de onde segue que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla z_m|^2 + b(x)z_m^2\right) dx \leq 2C\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} z_m^2 dx. \tag{1.59}$$

Novamente, pela imersão de Sobolev e da desigualdade (1.59), temos

$$\left(\int_{A_m} |z_m|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^2 dx \leq 2SC\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} z_m^2 dx.$$

Desde que $|z_m| = |w|^\beta$ em A_m e $|z_m| \leq |w|^\beta$ em $\mathbb{R}^N$, segue que

$$\left[\int_{A_m} |w|^{2^*\beta} dx\right]^{1/2^*\beta} \leq \left(2SC\beta^2\right)^{1/2\beta} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2\beta} dx\right]^{1/2\beta}.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona, fazendo $m \to +\infty$, concluímos

$$||w||_{L^{2^*\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq \left(2SC\beta^2\right)^{1/2\beta} ||w||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

■

Dando prosseguimento ao nosso argumento, segue deste resultado que

$$w \in L^r(\mathbb{R}^N),$$

com $r = 2^*\beta > 2^*$. Aplicando o Corolário A.3, com $p = 2$, resulta que existe uma constante $M = M(N, ||w||_{L^r(\mathbb{R}^N)}) > 0$ tal que

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M\|w\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)},$$

para qualquer $w \in E \cap L^r(\mathbb{R}^N)$ solução fraca do problema (A.1), com $p = 2$. Portanto, qualquer solução fraca w do problema $(AP2)$ tal que $\Phi(w) = c$ satisfaz a estimativa

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M \left(\frac{dSk^2}{k-1}\right)^{1/2}. \tag{1.60}$$

■

Lema 1.4.5 *Para $R > 1$, toda solução positiva w do problema $(AP2)$ tal que $\Phi(w) = c$ satisfaz*

$$w(x) \leq \frac{R^{N-2}\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{N-2}} \leq \frac{R^{N-2}M[Sdk^2(k-1)^{-1}]^{1/2}}{|x|^{N-2}}, \quad \textit{para todo} \quad |x| \geq R.$$

Demonstração. Considere u a função $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ harmônica dada por

$$u(x) = \frac{R^{N-2}M[Sdk^2(k-1)^{-1}]^{1/2}}{|x|^{N-2}}.$$

Pela estimativa (1.60), temos

$$w(x) \leq u(x), \quad \text{para} \quad |x| = R.$$

Daí,

$$(w-u)^+ = 0 \;\; \text{para} \;\; |x| = R,$$

e a função dada por

$$\phi = \begin{cases} (w-u)^+, & \text{se} \;\; |x| \geq R \\ 0, & \text{se} \;\; |x| < R, \end{cases}$$

pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $\phi \in E$. Consideremos ϕ como função teste e usando o fato que w é uma solução positiva de $(AP2)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(w) f'(w) \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w)) f'(w) \phi dx. \tag{1.61}$$

Por outro lado, pela definição de ϕ, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx = \int_A \nabla w \nabla \phi dx - \int_A \nabla u \nabla \phi dx, \tag{1.62}$$

onde $A = \big\{x \in \mathbb{R}^N; |x| \geq R \text{ e } w(x) > u(x)\big\}$.

Desde que

$$\Delta u = 0 \text{ em } (\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)), \quad \phi = 0 \text{ para } |x| = R \;\; \text{e} \;\; \phi \geq 0,$$

temos,

$$\int_A \nabla u \nabla \phi dx = 0.$$

Logo, usando (1.61) e (1.62) resulta que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx = \int_A h(x, f(w)) f'(w) \phi dx - \int_A V(x) f(w) f'(w) \phi dx,$$

e por (1.8), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx \leq \left(\frac{1}{k} - 1\right) \int_A V(x) f(w) f'(w) \phi dx \leq 0.$$

Portanto, temos $\phi = 0$, em $\mathbb{R}^N$, o que implica que, $(w-u)^+ = 0$, em $|x| \geq R$. Assim, concluímos que, $w \leq u$ em $|x| \geq R$ e o lema está provado. ∎

1.5 Resultados de Existência

Nesta seção, provaremos os Teoremas 1.0.10 e 1.0.11.

1.5.1 Prova do Teorema 1.0.10

Devemos mostrar que

$$q(f(w)) \leq \frac{V(x)}{k} f(w) \ \text{ em } \ |x| \geq R,$$

para toda solução w do problema $(AP2)$. Pela desigualdade (1.4), temos

$$\frac{q(f(w))}{f(w)} = \frac{q(f(w))f(w)}{f^2(w)} \leq c_0 \frac{|w|^{2^*}}{f^2(w)}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Uma vez que $||w||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ é uniformemente limitada e pelo Lema 1.1.1-(9), deduzimos que

$$\frac{q(f(w))}{f(w)} \leq C_1 |w|^{2^*-2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema 1.4.5, segue que

$$\frac{q(f(w))}{f(w)} \leq C_1 \frac{R^4 \left(M[Sdk^2(k-1)^{-1}]^{1/2}\right)^{4/(N-2)}}{|x|^4}, \ \text{ em } \ |x| \geq R.$$

Fixando $\Lambda^* = kM_1$, onde $M_1 = C_1 \left(M[Sdk^2(k-1)^{-1}]^{1/2}\right)^{4/(N-2)}$ e $\Lambda \geq \Lambda^*$, implica que

$$\frac{q(f(w))}{f(w)} \leq \frac{1}{k} \Lambda^* \frac{R^4}{|x|^4} \leq \frac{1}{k} \Lambda \frac{R^4}{|x|^4}.$$

Segue, da hipótese (V_Λ), que

$$\frac{q(f(w))}{f(w)} \leq \frac{V(x)}{k} \ \text{ em } \ |x| \geq R.$$

Portanto, toda solução w de $(AP2)$ também é solução de $(AP1)$. Consequentemente, $u = f(w)$ é uma solução do problema (P). ∎

Observação 1.5.1 *Note que a constante* $\Lambda^* = kM_1 = C_1 \left(M[Sdk^2(k-1)^{-1}]^{1/2}\right)^{4/(N-2)}$ *depende de* θ *(pois na Seção 1.2,* $k > \frac{2\theta}{\theta-2}$*), de* V_∞ *(que foi essencial para limitação das sequências de Cerami), e da não-linearidade* q *(visto que* Λ^* *depende de* c_0 *presente em (1.4)).*

1.5.2 Prova do Teorema 1.0.11

Desde que a condição (q_1) é mais fraca do que $(\tilde{q}_1)$, a prova é a mesma até Lema 1.4.5. Para concluirmos a prova, podemos usar a propriedade (7)-Lema 1.1.1 e a condição $(\tilde{q}_1)$, para obtermos

$$\frac{q(f(w))}{f(w)} \leq C_1 |w|^{2^*-1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Procedendo como antes e devido a condição $(\tilde{V}_\Lambda)$, concluímos a demonstração. ■

Observação 1.5.2 *A resolução do problema (P) quando o potencial pode se anular no infinito e a não-linearidade tem crescimento crítico é uma questão em aberto. A grande dificuldade reside na obtenção de estimativas uniforme em $R > 1$ na norma L^∞.*

Capítulo 2

Equação de Schrödinger com coeficiente positivo no termo quasilinear

Neste capítulo, consideramos a seguinte equação de Schrödinger quasilinear

$$-\Delta u + V(x)u + \frac{\kappa}{2}\Delta(u^2)u = q(u),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, com V sendo uma função não-negativa que pode se anular no infinito, q tendo um tipo de crescimento subcrítico no infinito e $\kappa > 0$ é um parâmetro.

Recentemente, Shen e Wang em [42] e Yang, Wang e Abdelgadir em [52] introduziram a mudança de variáveis $s = G^{-1}(t)$ para $t \in [0, +\infty)$ e $G^{-1}(t) = -G^{-1}(-t)$ para $t \in (-\infty, 0)$, onde

$$G(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \kappa t^2}\,dt. \tag{2.2}$$

Considerando $\kappa < 0$ e, usando métodos variacionais, eles estabeleceram a existência de soluções não-triviais para a equação (2.1), com crescimento subcrítico ou crítico, e entre outras condições sobre o potencial $V(x)$, assumiram que $\inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x) > 0$.

Em um trabalho pioneiro, para $\kappa > 0$ e $N \geq 3$, Alves, Wang e Shen em [4], usaram a mudança de variáveis introduzida em [42, 52] e a estimativa L^∞ para mostrar a existência de solução não-trivial para o modelo (2.1), onde $q(u) = |u|^{r-2}u,\ 2 < r < 2^*$ ou $q(u) = \left[1 - \frac{1}{(1+|u|^2)^3}\right] u$. Para isto, eles assumiram que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínuo e satisfaz

$$0 < V_0 \leq V(x) \leq V_\infty, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \lim_{|x| \to \infty} V(x) = V_\infty.$$

O objetivo principal deste capítulo é mostrarmos, usando algumas idéias presente no Capítulo 1 (veja também [1]), juntamente com alguns argumentos de Alves, Wang e Shen em [4], que é possível obtermos um resultado de existência de solução para a equação (2.1) considerando o caso em que o parâmetro $\kappa > 0$ e o potencial V pode se anular no infinito.

Para isto, assumiremos que o potencial V é uma função contínua satisfazendo as condições (V_0) e (V_Λ), isto é,

(V_0) $V(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(V_Λ) Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda.$$

Neste capítulo, considerando $Q(s) = \int_0^s q(t)dt$, a não-linearidade q cumpre as condições abaixo:

$(\widehat{q_1})$ $\displaystyle\limsup_{s \to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{2^*}} < +\infty$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ and $N \geq 3$.

$(\widehat{q_2})$ $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{sq(s)}{s^{2^*}} = 0.$

$(\widehat{q_3})$ Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta Q(s) \leq sq(s), \quad \text{para todo} \quad s \geq 0.$$

Observação 2.0.3 *Aqui é um caso em que a não-linearidade tem crescimento subcrítico, pois para problemas do tipo (2.1) o crítico é 22^* (veja [36]).*

O seguinte teorema é o principal resultado deste capítulo:

Teorema 2.0.4 *Suponha que q satisfaz $(\widehat{q_1}) - (\widehat{q_3})$ e V é uma função contínua verificando as condições (V_0) e (V_Λ). Então, existem constantes $\kappa_0 > 0$ e $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, q) > 0$ tais que a equação (2.1) possui solução não-trivial para todo $\kappa \in [0, \kappa_0)$ e para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.*

Note que (2.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia natural

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\kappa u^2)|\nabla u|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}Q(u(x))dx. \tag{2.3}$$

Salientamos, mais uma vez, que não podemos aplicar diretamente métodos variacionais para estudar (2.1), uma vez que o funcional I não está bem definido em geral, pois $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2dx$ não é finita, para todo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além desta dificuldade a ser superada, existe uma outra: garantir a positividade do termo $1-\kappa t^2$.

A fim de provarmos o resultado principal deste capítulo, primeiro estabelecemos uma solução não-trivial para uma equação de Schrödinger quasilinear auxiliar, ou seja, mostraremos a existência de solução não-trivial para a seguinte equação de Schrödinger quasilinear:

$$-div(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = q(u),\ x \in \mathbb{R}^N \tag{2.4}$$

com $g(t) = \sqrt{1-\kappa t^2}$ para $|t| < \sqrt{\dfrac{1}{3\kappa}}$ e $\kappa > 0$. Nestas condições, a equação (2.4) transforma-se em (2.1). Em seguida, usamos a mudança de variável desenvolvidas por Shen e Wang em [42] e por Yang, Wang e Abdelgadir em [52] e reformulamos o problema (2.4) obtendo desse modo a equação semilinear (2.10), conforme veremos na Seção 2.1 a seguir. Na sequência, usamos o método de penalização de Del Pino e Felmer [26] e modificamos o problema reformulado (2.10), de modo que o funcional associado ao problema modificado (2.16) está bem definido, é Gateaux-diferenciável em um espaço de Sobolev e satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Ainda, mostramos a limitação das sequências de Palais-Smale associada ao nivel minimax e estabelecemos a existência de solução não-trivial para o problema modificado (2.16). A seguir, obtemos uma limitação uniforme na norma L^∞ da solução deste problema, a qual independe da solução e do parâmetro κ. Esta limitação possibilita mostrar que existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(\theta, q) > 0$ tal que para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$ qualquer solução do problema modificado (2.16) é também uma solução do problema reformulado (2.10). Esta limitação também garante a existência de uma constante $\kappa_0 > 0$ de modo que o problema original (2.1) tem solução não-trivial para todo $\kappa \in [0, \kappa_0)$.

2.1 Preliminares

Sendo o potencial V não-negativo, podemos introduzir o subespaço

$$E = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx < +\infty\}$$

de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido da norma,

$$||u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx.$$

Observação 2.1.1 *Uma vez que o potencial $V(x)$ não é limitado inferiomente por uma constante positiva, não podemos ter a imersão contínua de E em $L^r(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq r < 2^*$. De fato, $r = 2^*$ é único espaço $L^r(\mathbb{R}^N)$ onde é possível garantir que $E \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, continuamente.*

Vamos considerar a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{1-\kappa t^2}, & \text{se} \quad 0 \leq t < \sqrt{\dfrac{1}{3\kappa}}, \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2\kappa} t} + \sqrt{\dfrac{1}{6}}, & \text{se} \quad \sqrt{\dfrac{1}{3\kappa}} \leq t, \end{cases}$$

Fazendo $g(t) = g(-t)$ para todo $t \leq 0$, segue que $g \in C^1\left(\mathbb{R}, (\sqrt{\frac{1}{6}}, 1]\right)$, g é uma função par, crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $[0, +\infty)$.

Observe que (2.4) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia natural

$$I_\kappa(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} g^2(u)|\nabla u|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(u)dx. \tag{2.5}$$

No que segue, definimos

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

e notamos que a função inversa $G^{-1}(t)$ existe e é uma função ímpar. Além disso, $G, G^{-1} \in C^2(\mathbb{R})$.

No lema a seguir, apresentamos e demonstramos algumas propriedades das funções g e G^{-1}, cuja prova pode também ser encontrada em [4].

Lema 2.1.2 *As funções g e G^{-1} satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{G^{-1}(t)}{t} = 1;$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to \infty} \frac{G^{-1}(t)}{t} = \sqrt{6};$

(3) $t \leq G^{-1}(t) \leq \sqrt{6}t$, *para todo* $t \geq 0$;

(4) $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{t}{g(t)} g'(t) \leq 0$, *para todo* $t \geq 0$.

Demonstração. Pela definição de g e usando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{t \to 0} \frac{G^{-1}(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{g(G^{-1}(t))} = 1,$$

e

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G^{-1}(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{g(G^{-1}(t))} = \sqrt{6}.$$

Assim, os itens (1) e (2) estão provados. Desde que $g(t) > 0$ é decrescente em $[0, +\infty)$, segue, para todo $t \geq 0$, que

$$\frac{1}{\sqrt{6}} t \leq g(t)t \quad \text{e} \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds \leq t.$$

Por outro lado, analisando a função $m(t) = G(t) - g(t)t$, para $t \geq 0$, temos que $m'(t) = -g'(t)t \geq 0$. Como $m(0) = 0$, então $m(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Consequentemente, $g(t)t \leq G(t)$, para todo $t \geq 0$. Portanto,

$$\frac{1}{\sqrt{6}} t \leq g(t)t \leq G(t) \leq t, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0,$$

de onde segue o item (3). Por um cálculo direto obtemos (4). ■

Das propriedades (1) e (2) do Lema 2.1.2, juntamente com as condições $(\widehat{q}_1)$ e $(\widehat{q}_2)$, resulta que existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|G^{-1}(s) q(G^{-1}(s))| \leq c_0 |s|^{2^*}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

e pela condição $(\widehat{q}_3)$, decorre que

$$|Q(G^{-1}(s))| \leq \frac{c_0}{\theta} |s|^{2^*}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Agora, considerando a mudança de variavéis

$$v = G(u) = \int_0^u g(s)ds,$$

e a partir de $I_\kappa(u)$, obtemos o seguinte funcional

$$J_\kappa(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G^{-1}(v)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(G^{-1}(v)) dx, \tag{2.8}$$

o qual, devido ao Lema 2.1.2 e as hipóteses sobre o potencial $V(x)$ e sobre a não linearidade $Q(s)$, está bem definido em E e $J_\kappa \in C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$J'_\kappa(v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla v \nabla \varphi + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\varphi - \frac{q(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\varphi \right] dx, \tag{2.9}$$

para quaisquer $v, \varphi \in E$.

O lema a seguir relaciona os pontos críticos do funcional J_κ com as soluções clássicas da equação (2.4). A demonstração pode ser encontrada em Alves, Wang e Shen [4], porém apresentamos aqui com o intuito de facilitar a leitura do nosso trabalho.

Lema 2.1.3 *Se $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional J_κ, então $u = G^{-1}(v) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução clássica de (2.4).*

Demonstração. Desde que $G^{-1} \in C^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $u = G^{-1}(v) \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, visto que $g(t) \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $|\nabla v| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla u = \frac{1}{g(G^{-1}(v))}\nabla v$, decorre que $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Da propriedade (3) do Lema 2.1.2, implica que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Se v é um ponto crítico de J_κ, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla v \nabla \varphi + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\varphi - \frac{q(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\varphi \right] dx = 0,$$

para todo $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para cada $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, considerando $\varphi = g(G^{-1}(v))\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ na última igualdade acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[g^2(u)\nabla u \nabla \psi + g(u)g'(u)|\nabla u|^2\psi + V(x)u\psi - q(u)\psi \right] dx = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[-div(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u - q(u) \right] \psi dx = 0,$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, mostrando desse modo que u é uma solução clássica de (2.4).

■

Portanto, para encontrarmos uma solução não-trivial para (2.4), é suficiente estudarmos a existência de solução não-trivial para a seguinte equação:

$$-\Delta v + V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{q(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))},\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.10}$$

Observação 2.1.4 *Uma vez assegurada a existência de uma solução não-trivial v para a equação (2.10), então $u = G^{-1}(v)$ será uma solução não-trivial para (2.1) se verificar a estimativa $\sup_{\mathbb{R}^N} |u| \leq \sqrt{\frac{1}{3\kappa}}$.*

2.2 Solução da equação modificada via Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, analogamente à Seção 1.2 do Capítulo 1, adaptamos para o nosso problema os argumentos de Del Pino e Felmer em [26](veja também [5]) para modificar o problema reformulado (2.10). Em seguida, mostramos a existência de solução não-trivial para a equação de Schrödinger semilinear modificada (2.16) mais adiante, via Teorema do Passo da Montanha.

Para isto, consideramos constantes μ e R satisfazendo

$$\mu > \frac{\theta}{\theta-2}(\mu > 1) \ \text{ e } \ R > 1,$$

e a função contínua $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,s) = \begin{cases} q(s), & \text{se } |x| \leq R \\ q(s), & \text{se } |x| > R \ \text{ e } \ q(s) \leq \frac{V(x)}{\mu}s \\ \dfrac{V(x)}{\mu}s, & \text{se } |x| > R \ \text{ e } \ q(s) > \frac{V(x)}{\mu}s. \end{cases}$$

Seja $H(x,s) = \int_0^s h(x,t)dt$. De modo análogo, não é difícil verificar que $h(x,s)$ satisfaz, para $s \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

$$h(x,s) \leq q(s), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.11}$$

$$h(x,s) \leq \frac{V(x)}{\mu}s, \text{ para todo } |x| \geq R, \tag{2.12}$$

$$H(x,s) = Q(s), \text{ se } |x| \leq R, \tag{2.13}$$

$$H(x,s) \leq \frac{V(x)}{2\mu}s^2, \text{ se } |x| > R \tag{2.14}$$

e

$$sh(x,s) - \theta H(x,s) \geq \left(\frac{2-\theta}{2}\right)\frac{V(x)}{\mu}s^2, \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.15}$$

Agora, estudaremos a existência de solução não-trivial para o problema modificado, isto é,

$$-\Delta v + V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{h(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}, \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.16}$$

que corresponde a pontos críticos do funcional $\Phi_\kappa : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_\kappa(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G^{-1}(v)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, G^{-1}(v))dx. \tag{2.17}$$

Note que

$$\Phi'_\kappa(v_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla v\nabla\varphi + V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\varphi - \frac{h(x,G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\varphi\right]dx, \qquad (2.18)$$

para quaisquer $v, \varphi \in E$.

Observação 2.2.1 *Se uma solução não-trivial v de (2.16) satisfaz*

$$q(G^{-1}(v)) \leq \frac{V(x)}{k}G^{-1}(v) \quad em \quad |x| \geq R,$$

então, v também é uma solução não-trivial para (2.10).

Agora, provaremos que o funcional Φ_κ tem a geometria do passo da montanha.

Lema 2.2.2 *Suponha que $(\widehat{q_1}), (\widehat{q_2})$ e $(\widehat{q_3})$ são satisfeitas e que V é uma função contínua não negativa. Então, existem $\rho, \alpha > 0$, tais que $\Phi_\kappa(v) \geq \alpha$ para $||v|| = \rho$. Além disso, existe $e \in E$ tal que $\Phi_\kappa(e) < 0$.*

Demonstração. De (2.11), (2.7), desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e da condição (V_0), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(x, G^{-1}(v))dx \leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2 + V(x)|v|^2)dx\right)^{2^*/2},$$

de onde segue, usando a propriedade (3) do Lema 2.1.2, que

$$\Phi_\kappa(v) \geq \frac{1}{2}||v||^2 - C_1||v||^{2^*}, \quad \forall w \in E.$$

Portanto, escolhendo ρ pequeno, obtemos $\Phi_\kappa(v) \geq \alpha > 0$ quando $||v|| = \rho$.

Vamos provar que existe $e \in E$ tal que $\Phi_\kappa(e) < 0$. Para isto, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ verificando $supp(\varphi) = \overline{B_1}$. Mostraremos que $\Phi_\kappa(s\varphi) \to -\infty$ quando $s \to +\infty$, o que é prova nossa tese se tomarmos $e = s\varphi$ com s suficientemente grande. Note que, pela propriedade (3) do Lema 2.1.2, obtemos

$$\Phi_\kappa(s\varphi) \leq 3s^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)\varphi^2dx\right) - \int_{B_1}H(x, G^{-1}(s\varphi))dx.$$

Devido a (2.13), segue que $H(x,s) = Q(s)$ em B_1. Pela condição $(\widehat{q_3})$, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$Q(s) \geq C_1|s|^\theta - C_2, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\Phi_\kappa(s\varphi) \leq \frac{1}{2}s^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)\varphi^2dx\right) - C_1\int_{B_1}|G^{-1}(s\varphi)|^\theta dx + C_3.$$

Usando novamente a propriedade (3) do Lema 2.1.2, teremos

$$\Phi_\kappa(s\varphi) \leq \frac{1}{2}s^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)\varphi^2dx\right) - C_1 s^\theta\int_{B_1}|\varphi|^\theta dx + C_3.$$

Desde que $\theta > 2$, decorre que $\Phi_\kappa(s\varphi) \to -\infty$ quando $s \to +\infty$ ■

Consequentemente, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha encontrada em Willem [53], existe uma sequência Palais-Smale $(v_n) \subset E$ (sequência $(PS)_{c_\kappa}$) tal que

$$\Phi_\kappa(v_n) \to c_\kappa \quad \text{e} \quad \Phi'_\kappa(v_n) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

onde

$$c_\kappa = \inf_{\gamma\in\Gamma_\kappa}\sup_{t\in[0,1]}\Phi_\kappa(\gamma(t)) \geq \alpha > 0, \tag{2.19}$$

com

$$\Gamma_\kappa = \{\gamma \in C([0,1],E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) \neq 0 \ \text{ e } \ \Phi_\kappa(\gamma(1)) < 0\}. \tag{2.20}$$

Lema 2.2.3 *A sequência Palais-Smale (v_n) para Φ_κ é limitada em E.*

Demonstração. A sequência (v_n) satisfaz

$$\Phi_\kappa(v_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_n|^2 + V(x)|G^{-1}(v_n)|^2\right)dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N}H(x,G^{-1}(v_n))dx = c_\kappa + o_n(1), \tag{2.21}$$

e

$$\Phi'_\kappa(v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla v\nabla\varphi + V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\varphi - \frac{h(x,G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\varphi\right]dx = o_n(1)||\varphi||, \tag{2.22}$$

para todo $\varphi \in E$. Escolhendo $\varphi = \varphi_n = G^{-1}(v_n)g(G^{-1}v_n)$, resulta das propriedades $(3)-(4)$ do Lema 2.1.2, que

$$|\varphi| \leq \sqrt{6}|v_n| \quad \text{and} \quad |\nabla\varphi| \leq |\nabla v_n|.$$

Então, $\varphi \in E$ e $||\varphi|| \leq \sqrt{6}||v_n||$. Usando $\varphi_n = G^{-1}(v_n)g(G^{-1}v_n)$ como função teste em (2.22), deduzimos que

$$o(1)||v_n|| = \Phi'_\kappa(v_n)\varphi_n = \int_{\mathbb{R}^N}\left(1+\frac{G^{-1}(v_n)g'(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))}\right)|\nabla v_n|^2dx+ \\ + \int_{\mathbb{R}^N}\left[V(x)|G^{-1}(v_n)|^2 - h(x,G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)\right]dx. \quad (2.23)$$

Da propriedade (4) do Lema 2.1.2, segue que

$$o(1)||v_n|| \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla v_n|^2 + V(x)|G^{-1}(v_n)|^2 - h(x,G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)\right]dx. \quad (2.24)$$

Combinando (2.21) e (2.24), obtemos

$$\theta c_\kappa + o(1) + o(1)||v_n|| = \theta\Phi_\kappa(v_n) - \Phi'_\kappa(v_n)\varphi_n \geq \\ \left(\frac{\theta-2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla v_n|^2+V(x)|G^{-1}(v_n)|^2\right]dx+ \\ + \int_{\mathbb{R}^N}\left[h(x,G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n) - \theta H(x,G^{-1}(v_n))\right]dx. \quad (2.25)$$

Usando (2.15) e novamente a propriedade (3) do Lema 2.1.2, concluímos que

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu^2}\right)||v_n||^2 \leq \theta c_\kappa + o(1) + o(1)||v_n||, \quad (2.26)$$

mostrando que (v_n) é limitada em E. ■

Visto que (v_n) é uma sequência limitada em E, existe $v_\kappa \in E$ e uma subsequência de v_n, denotada da mesma forma, tais que

$v_n \rightharpoonup v_\kappa$ em E, $v_n \to v_\kappa$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [1, 2^*)$ e $v_n(x) \to v_\kappa(x)$ q.t.p. sobre $\mathbb{R}^N$.

O lema a seguir é fundamental para mostrarmos que o funcional Φ_κ verifica a condição Palais-Smale.

Lema 2.2.4 *Suponha que (v_n) é uma sequência $(PS)_{c_\kappa}$ para Φ_κ. Então,*

(i) Para cada $\epsilon > 0$ existe $r > R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{|x|\geq 2r}\left[|\nabla v_n|^2 + V(x)|G^{-1}(v_n)|^2\right]dx < \epsilon.$$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G^{-1}(v_n)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2dx.$$

(iii)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h(x,G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x,G^{-1}(v_\kappa))G^{-1}(v_\kappa)dx.$$

(iv)
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))}v_n dx=\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\frac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))}v_\kappa dx.$$
(v)
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x,G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))}v_n dx=\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x,G^{-1}(v_\kappa))}{g(G^{-1}(v_\kappa))}v_\kappa dx.$$
(vi)
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} H(x,G^{-1}(v_n))dx=\int_{\mathbb{R}^N} H(x,G^{-1}(v_\kappa))dx.$$

Demonstração. (i) Consideramos $r>R$ e uma função $\eta=\eta_r\in C^\infty(B_r^c)$ tais que
$$\eta\equiv 1 \text{ em } B_{2r}^c,\quad \eta\equiv 0 \text{ em } B_r,\ 0\le\eta\le 1$$
e
$$\mid\nabla\eta\mid\le\frac{2}{r},\ \text{para todo } x\in\mathbb{R}^N.$$
Como (v_n) é limitada em E, então o mesmo ocorre com a sequência $(\eta\varphi_n)$, onde $\varphi_n=G^{-1}(v_n)g(G^{-1}v_n)$. Logo,
$$\Phi'(v_n)\eta\varphi_n=o_n(1),$$
isto é,
$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+\frac{G^{-1}(v_n)g'(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))}\right)|\nabla v_n|^2\eta dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G^{-1}(v_n)|^2\eta dx=$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n\nabla\eta(G^{-1}(v_n)g(G^{-1}(v_n)))dx+\int_{\mathbb{R}^N}h(x,G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)\eta dx+o_n(1).$$
Das propriedades (3) e (4) do Lema 2.1.2, teremos
$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\eta dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G^{-1}(v_n)|^2\eta dx\le$$
$$\sqrt{6}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n||\nabla\eta||v_n|dx+\int_{\mathbb{R}^N}h(x,G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)\eta dx+o_n(1).$$
Uma vez que $\eta\equiv 0$ em B_r, esta última igualdade combinada com (2.12) resulta em
$$\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\int_{[|x|\ge r]}\left[|\nabla v_n|^2+V(x)G^{-1}(v_n)\right]\eta dx\le\sqrt{6}\int_{[|x|\ge r]}|w_n||\nabla w_n||\nabla\eta|dx+o_n(1),$$
ou seja,
$$\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\int_{[|x|\ge r]}\left[|\nabla v_n|^2+V(x)G^{-1}(v_n)\right]\eta dx\le\frac{2\sqrt{6}}{r}\int_{[r\le|x|\le 2r]}|v_n||\nabla v_n|dx+o_n(1).\quad(2.27)$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|v_n||\nabla v_n|dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}v_n^2dx\right)^{1/2}.$$

Desde que $v_n\to v_\kappa$ em $L^2(B_{2r}\backslash B_r)$ e (v_n) é limitada em E, segue que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|v_n||\nabla v_n|dx\leq C\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}v_\kappa^2dx\right)^{1/2}, \tag{2.28}$$

para alguma constante $C>0$. Por outro lado, usando novamente a desigualdade de Hölder, temos

$$\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}v_\kappa^2dx\right)^{1/2}\leq\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|v_\kappa|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}|B_{2r}\backslash B_r|^{1/N}. \tag{2.29}$$

Notando que $|B_{2r}\backslash B_r|\leq|B_{2r}|=\omega_N(2r)^N$, de (2.28) e (2.29), deduzimos

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|v_n||\nabla v_n|dx\leq 2rC\omega_N^{1/N}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|v_\kappa|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}, \tag{2.30}$$

e por (2.27) e (2.30), concluímos

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]}\left[|\nabla v_n|^2+V(x)|G^{-1}(v_n)|^2\right]dx\leq$$
$$4\sqrt{6}C\omega_N^{1/N}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-1}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|v_\kappa|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}. \tag{2.31}$$

Assim, para cada $\epsilon>0$, escolhemos $r>R$ de modo que

$$4\sqrt{6}C\omega_N^{1/N}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-1}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|v_\kappa|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}<\epsilon,$$

e isto prova (i).

(ii) Note, primeiramente, que do item (i), para cada $\epsilon>0$, existe $r>R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]}V(x)|G^{-1}(v_n)|^2dx<\frac{\epsilon}{4}$$

e, consequentemente,

$$\int_{[|x|\geq 2r]}V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2dx\leq\frac{\epsilon}{4}.$$

Logo,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}V(x)[|G^{-1}(v_n)|^2-|G^{-1}(v_\kappa)|^2]dx\right|\leq\frac{\epsilon}{2}$$
$$+\left|\int_{[|x|\leq 2r]}V(x)[|G^{-1}(v_n)|^2-|G^{-1}(v_\kappa)|^2]dx\right|. \tag{2.32}$$

Desde que $v_n \to v_\kappa$ em $L^2(B_{2r})$, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[|x|\leq 2r]} V(x)|G^{-1}(v_n)|^2dx = \int_{[|x|\leq 2r]} V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2dx. \tag{2.33}$$

De (2.32) e (2.33), temos

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[|G^{-1}(v_n)|^2 - |G^{-1}(v_\kappa)|^2]dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $\epsilon > 0$. Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G^{-1}(v_n)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2dx.$$

(iii) Segue da relação (2.12) e do item (i), que, para cada $\epsilon > 0$, existe $r > R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]} h(x, G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)dx < \frac{\epsilon}{4}$$

e

$$\int_{[|x|\geq 2r]} h(x, G^{-1}(v_\kappa))G^{-1}(v_\kappa)dx \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Assim,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}[h(x, G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n) - h(x, G^{-1}(v_\kappa))G^{-1}(v_\kappa)]dx\right| \leq$$
$$\frac{\epsilon}{2} + \left|\int_{[|x|<2r]}[h(x, G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n) - h(x, G^{-1}(v_\kappa))G^{-1}(v_\kappa)]dx\right|. \tag{2.34}$$

Visto que

$$v_n(x) \to v_\kappa(x) \text{ q.t.p. sobre } \mathbb{R}^N, \quad \frac{h(\cdot, G^{-1}(s))G^{-1}(s)}{|G^{-1}(s)|^{2^*}} \to 0 \text{ quando } s \to +\infty$$

e

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |G^{-1}(v_n)|^{2^*} < +\infty,$$

resulta do Lema de Compacidade de Strauss [17], que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[|x|<2r]} h(x, G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)dx = \int_{[|x|<2r]} h(x, G^{-1}(v_\kappa))G^{-1}(v_\kappa)dx. \tag{2.35}$$

De (2.34) e (2.35), o resultado segue. Isto completa a prova do item (iii).

Usando argumentos similares, provamos $(iv), (v)$ e (vi). ■

Como consequência do Lema 2.2.4, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.5 *O limite fraco v_κ é um ponto crítico não-trivial de Φ_κ e $\Phi_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$. Além disso, o funcional Φ_κ verifica a condição $(PS)c_\kappa$.*

Demonstração. Nosso primeiro objetivo é provar que v_κ é um ponto crítico de Φ_κ. Para este fim, é suficiente mostrarmos que

$$\Phi'_\kappa(v_\kappa)\phi = 0, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Procedendo como na prova no lema anterior, facilmente deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left[\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))}\right]\phi dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty, \tag{2.36}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{h(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{h(x, G^{-1}(v_\kappa))}{g(G^{-1}(v_\kappa))}\right]\phi dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty, \tag{2.37}$$

para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, uma vez que $v_n \rightharpoonup v_\kappa$ em E, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n - v_\kappa)\nabla\phi dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \tag{2.38}$$

Combinando os limites (2.36), (2.37) e (2.38) provamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi'_\kappa(v_n)\phi = \Phi'_\kappa(v_\kappa)\phi, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $\Phi'_\kappa(v_n)\phi = o_n(1)$, o último limite implica que $\Phi'_\kappa(v_\kappa)\phi = 0,$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Vamos mostrar que $v_\kappa \neq 0$. Para provarmos isso, argumentamos por contradição supondo que $v_\kappa = 0$. Do Lema 2.2.4 $-(ii)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G^{-1}(v_n)|^2 dx = 0, \tag{2.39}$$

o que implica em,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2 dx = 0, \tag{2.40}$$

e assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\frac{G^{-1}(v_n)v_n}{g(G^{-1}(v_n))} dx = 0. \tag{2.41}$$

Desde que $g(0) \neq 0$ e $H(x, 0) = 0$, usando os itens (v) e (vi) do Lema 2.2.4, teremos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x, G^{-1}(v_n))v_n}{g(G^{-1}(v_n))} dx = 0. \tag{2.42}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} H(x, G^{-1}(v_n))dx = 0. \tag{2.43}$$

Como $\Phi'_\kappa(v_n).v_n = 0$, usando os limites (2.41) e (2.42), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \to 0, \tag{2.44}$$

Logo, usando os limites (2.39), (2.43) e (2.44), obtemos

$$\Phi_\kappa(v_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x)|G^{-1}(v_n)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, G^{-1}(v_n))dx \to 0,$$

o que é uma contradição com $\Phi_\kappa(v_n) \to c_\kappa > 0$. Portanto, $v_\kappa \neq 0$.

Agora, mostraremos que $\Phi_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$. Como $\Phi'_\kappa(v_n)v_n = o(1)$ e usando os limites $(iv) - (v)$ do Lema 2.2.4, juntamente com $\Phi'(v_\kappa)v_\kappa = 0$, deduzimos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\kappa|^2 dx. \tag{2.45}$$

Esse limite combinado com os limites em (ii) e (vi) do Lema 2.2.4, implica que

$$\Phi_\kappa(v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}\left(|\nabla v_n|^2 + V(x)|G^{-1}(v_n)|^2\right) - H(x, G^{-1}(v_n))\right] dx \to \Phi_\kappa(v_\kappa).$$

Portanto, $\Phi_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$. Para mostrarmos que o funcional Φ_κ satisfaz a condição $(PS)_{c_\kappa}$, devemos provar que $||v_n - v_\kappa|| \to 0$. Procedendo como na prova do Lema 2.2.4 - (ii), teremos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_\kappa^2 dx.$$

Usando este limite e (2.45), concluímos

$$||v_n - v_\kappa||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla v_n - \nabla v_\kappa|^2 + V(x)\left(v_n^2 - v_\kappa^2\right)\right] dx \to 0.$$

Consequentemente, Φ_κ satisfaz a condição Palais-Smale. ■

2.3 Estimativa L^∞ da solução da equação modificada

Nesta seção, estabeleceremos uma estimativa L^∞ para a solução v_κ da equação (2.16) obtida no Corolário 2.2.5.

Lema 2.3.1 *Para qualquer $R > 1$, toda solução v_κ da equação* (2.16) *tal que $\Phi_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$ verifica a estimativa*

$$\|v_\kappa\|^2 \leq \frac{\theta\mu^2 c_\kappa}{\mu - 1}. \tag{2.46}$$

Demonstração. Sabemos que $\Phi_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$. Então,

$$\begin{aligned}
\theta c_\kappa &= \theta\Phi_\kappa(v_\kappa) - \Phi'_\kappa(v_\kappa)G^{-1}(v_\kappa)g(G^{-1}(v_\kappa)) \\
&= \frac{\theta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_\kappa|^2 + V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2 dx - \theta\int_{\mathbb{R}^N} H(x, G^{-1}(v_\kappa))dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N}\left(1 + \frac{G^{-1}(v_\kappa)g'(G^{-1}(v_\kappa))}{g(G^{-1}(v_\kappa))}\right)|\nabla v_\kappa|^2 dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}\left[V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2 - h(x, G^{-1}(v_\kappa))G^{-1}(v_\kappa)\right]dx
\end{aligned}$$

Pela propriedade (4) do Lema 2.1.2, temos

$$\begin{aligned}
\theta c_\kappa \geq\ & \left(\frac{\theta-2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_\kappa|^2 + V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2\right)dx + \\
& \int_{\mathbb{R}^N}\left[h(x, G^{-1}(v_\kappa))G^{-1}(v_\kappa) - \theta H(x, G^{-1}(v_\kappa))dx\right]dx.
\end{aligned}$$

Devido à (2.15), teremos

$$\begin{aligned}
\theta c_\kappa \geq \left(\frac{\theta-2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_\kappa|^2 + V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2\right)dx + \\
\left(\frac{2-\theta}{2}\right)\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Desde que $\mu > \dfrac{\theta}{\theta-2}$, obtemos

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu^2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_\kappa|^2 + V(x)|G^{-1}(v_\kappa)|^2\right)dx \leq \theta c_\kappa, \tag{2.48}$$

isto é,

$$\|v_\kappa\|^2 \leq \frac{\theta\mu^2 c_\kappa}{\mu-1}.$$

■

Observação 2.3.2 *No lema anterior, $\|v_\kappa\|$ é limitada por uma constante que não depende de $R > 1$. Porém, esta constante depende de $\kappa > 0$.*

A fim de obtermos, para v_κ, uma limitação uniforme da norma de Sobolev independente de $\kappa > 0$, denotamos por B a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, isto é, $B = B_1(0)$ e consideramos o funcional $\Phi_0 : H_0^1(B) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_0(v) = 3\int_B\left(|\nabla v|^2 + V(x)v^2\right)dx - \int_B Q(v)dx. \tag{2.49}$$

e o conjunto

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(B)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) \neq 0 \text{ e } \Phi_0(\gamma(1)) < 0\}. \tag{2.50}$$

Desde que a função Q é não-decrescente e pelo Lema 2.1.2 $-(3)$, temos $\Phi_\kappa(v) \leq \Phi_0(v)$, para todo $v \in H_0^1(B)$ e, assim $\Gamma_0 \subset \Gamma_\kappa$. Portanto,

$$c_\kappa = \inf_{\gamma\in\Gamma_\kappa} \sup_{t\in[0,1]} \Phi_\kappa(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma_0} \sup_{t\in[0,1]} \Phi_\kappa(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma_0} \sup_{t\in[0,1]} \Phi_0(\gamma(t)) := d,$$

onde d é uma constante independente sobre κ. Consequentemente, pela estimativa obtida no Lema 2.3.1, a solução v_κ necessariamente satisfaz a estimativa

$$\|v_\kappa\|^2 \leq \frac{\theta\mu^2 d}{\mu - 1}. \tag{2.51}$$

Com o objetivo de obtermos a limitação na norma L^∞, vamos considerar para uma solução v_κ da equação modificada (2.16), a função $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$L(x,t) = \begin{cases} \dfrac{q(G^{-1}(t))}{g(G^{-1}(t))}, & \text{se } |x| < R \quad \text{ou} \quad q(G^{-1}(t)) \leq \dfrac{V(x)}{\mu}G^{-1}(t) \\ 0, & \text{se } |x| \geq R \quad \text{e} \quad q(G^{-1}(t)) > \dfrac{V(x)}{\mu}G^{-1}(t) \end{cases} \tag{2.52}$$

e a seguinte função mensurável não-negativa

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{v_\kappa}V(x)\dfrac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))}, & \text{se } |x| < R \quad \text{ou} \quad q(G^{-1}(v_\kappa)) \leq \dfrac{V(x)}{\mu}G^{-1}(v_\kappa) \\ \left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right)\dfrac{1}{v_\kappa}\dfrac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))}, & \text{se } |x| \geq R \quad \text{e} \quad q(G^{-1}(v_\kappa)) > \dfrac{V(x)}{\mu}G^{-1}(v_\kappa). \end{cases}$$

Note que v_κ satisfaz a uma equação tal como (A.1) quando $p = 2$. Pelo Lema 2.1.2 e da relação (2.6), deduzimos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|L(x,t)| \leq C_1|t|^{2^*-1}.$$

Ademais, a função L definida em (2.52) também verifica as condições

(2.L_1) $|L(x,t)| \leq c_0|t|^{2^*-1}$, para t suficientemente pequeno,

(2.L_2) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{L(x,t)}{|t|^{2^*-1}} = 0.$

Das condições (2.L_1) e (2.L_2), para cada $\varepsilon > 0$, existe $C = C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|L(x,t)| \leq \varepsilon|t|^{2^*-1} + C_\varepsilon|t|, \text{ para quaisquer } x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}.$$

De maneira análoga ao Lema 1.4.4, obtemos o resultado a seguir.

Lema 2.3.3 *Sejam $N > 2$ e $\beta = N/(N-2)$. Então, existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que*

$$\|v_\kappa\|_{L^{2^*\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|v_\kappa\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Resulta deste lema que v_κ é limitada em $L^r(\mathbb{R}^N)$, com $r = 2^*\beta > 2^*$. Aplicando o Corolário A.3, para $p = 2$, concluímos que existe uma constante $C = C(N, ||v_\kappa||_{L^r(\mathbb{R}^N)}) > 0$ tal que

$$\|v_\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C\|v_\kappa\|,$$

para qualquer $v_\kappa \in E \cap L^r(\mathbb{R}^N)$ solução fraca da equação (A.1) para $p = 2$. Portanto, toda solução fraca v_κ da equação (2.16) tal que $\Phi_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$ satisfaz a estimativa

$$\|v_\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M, \tag{2.53}$$

onde $M = C\left(\dfrac{\theta\mu^2 d}{\mu - 1}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$ é independente de $\kappa > 0$. ■

Lema 2.3.4 *Para $R > 1$, toda solução v_κ da equação (2.16) tal que $\Phi_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$ verifica*

$$v_\kappa(x) \leq \frac{R^{N-2}\|v_\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{N-2}} \leq \frac{R^{N-2}M}{|x|^{N-2}}, \quad \textit{para todo} \quad |x| \geq R.$$

Demonstração. Seja u a função harmônica $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ dada por

$$u(x) = \frac{R^{N-2}M}{|x|^{N-2}}.$$

Pela estimativa (2.53), segue que

$$v_\kappa(x) \leq u(x) \ \text{ para } \ |x| = R.$$

Então,

$$(v_\kappa - u)^+ = 0 \ \text{ para } \ |x| = R,$$

e a função definida por

$$\phi = \begin{cases} (v_\kappa - u)^+, & \text{se } \ |x| \geq R \\ 0, & \text{se } \ |x| < R \end{cases}$$

pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $\phi \in E$. Tomando ϕ como uma função teste e desde que v_κ é uma solução da equação (2.16), teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_\kappa \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\frac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))}\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x, G^{-1}(v_\kappa))}{g(G^{-1}(v_\kappa))}\phi dx. \tag{2.54}$$

Por outro lado, pela definição de ϕ, resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx = \int_A \nabla v_\kappa \nabla \phi dx - \int_A \nabla u \nabla \phi dx, \tag{2.55}$$

onde $A = \big\{x \in \mathbb{R}^N; |x| \geq R \text{ e } v_\kappa(x) > u(x)\big\}$.
Visto que

$$\Delta u = 0 \text{ em } (\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)), \quad \phi = 0 \text{ para } |x| = R \ \text{ e } \ \phi \geq 0,$$

temos

$$\int_A \nabla u \nabla \phi dx = 0.$$

Assim, usando (2.54) e (2.55), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx = \int_A \frac{h(x, G^{-1}(v_\kappa))}{g(G^{-1}(v_\kappa))} \phi dx - \int_A V(x) \frac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))} \phi dx,$$

e pela relação (2.12), concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx \leq \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \int_A V(x) \frac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))} \phi dx \leq 0.$$

Daí, $\phi = 0$, em $\mathbb{R}^N$, donde segue que $(v_\kappa - u)^+ = 0$, em $|x| \geq R$. Portanto, concluimos que $v_\kappa \leq u$ em $|x| \geq R$ e o lema está provado. ■

2.4 Prova do resultado principal

Nesta seção, provaremos o Teorema 2.0.4, o qual garante a existência de solução para a equação (2.1).

2.4.1 Prova do Teorema 2.0.4

Seja v_κ a solução da equação (2.16). Pela Observação 2.2.1, para mostrarmos que v_κ é também uma solução da equação (2.10), é suficiente provarmos que

$$q(G^{-1}(v_\kappa)) \leq \frac{V(x)}{\mu} G^{-1}(v_\kappa) \text{ em } |x| \geq R.$$

Ora, por (2.6) e Lema 2.1.2-(3), decorre que

$$\frac{q(G^{-1}(v_\kappa))}{G^{-1}(v_\kappa)} \leq c_0 |v_\kappa|^{\frac{4}{N-2}}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Usando o Lema 2.3.4, teremos

$$\frac{q(G^{-1}(v_\kappa))}{G^{-1}(v_\kappa)} \leq c_0 \frac{R^4 M^{\frac{4}{N-2}}}{|x|^4}, \quad \text{em } |x| \geq R.$$

Fixando $\Lambda^* = \mu c_0 M^{\frac{4}{N-2}}$ e $\Lambda \geq \Lambda^*$, implica que

$$\frac{q(G^{-1}(v_\kappa))}{G^{-1}(v_\kappa)} \leq \frac{1}{\mu} \Lambda^* \frac{R^4}{|x|^4} \leq \frac{1}{\mu} \Lambda \frac{R^4}{|x|^4}.$$

Segue da condição (V_Λ), que

$$\frac{q(G^{-1}(v_\kappa))}{G^{-1}(v_\kappa)} \leq \frac{V(x)}{\mu} \text{ em } |x| \geq R,$$

de onde concluímos que v_κ é uma solução para a equação (2.10), isto é,

$$-\Delta v_\kappa + V(x) \frac{G^{-1}(v_\kappa)}{g(G^{-1}(v_\kappa))} = \frac{q(G^{-1}(v_\kappa))}{g(G^{-1}(v_\kappa))}, \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado, desde que v_κ satisfaz a estimativa (2.53), ou seja,

$$\|v_\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\frac{\theta \mu^2 d}{\mu - 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

e usando novamente o Lema 2.1.2-(3), deduzimos que

$$\|G^{-1}(v_\kappa)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{6}\|v_\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{6}C\left(\frac{\theta\mu^2 d}{\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Escolhendo $\kappa_0 \leq \dfrac{\mu-1}{18C^2\theta\mu^2 d}$, segue que

$$\|G^{-1}(v_\kappa)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \sqrt{\frac{1}{3\kappa}}, \quad \text{para todo} \quad \kappa \in [0, \kappa_0).$$

Pela Observação 2.1.4 implica que $u = G^{-1}(v_\kappa)$ é uma solução clássica da equação original (2.1), visto que $v_\kappa \in C^2(\mathbb{R}^N)$. ■

Observação 2.4.1 *A resolução da equação (2.1) quando o potencial pode se anular no infinito e a não-linearidade, por exemplo, é uma potência da forma* $|u|^{r-2}u$ *com* $2^* \leq r \leq 22^*$ *é um problema aberto.*

Capítulo 3

Equação de Schrödinger envolvendo o operador p-laplaciano em $\mathbb{R}^N$

Como dito na Introdução, neste capítulo, considerando o operador p-laplaciano, estudamos a seguinte equação de Schrödinger quasilinear:

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u - \Delta_p(u^2)u = q(u), \quad u \in \quad D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \tag{3.1}$$

com $2 \leq p < N$, que é uma generalização da equação estudada no Capítulo 1.

Neste capítulo, pedimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua não-negativa satisfazendo a condição:

(V_{Λ_p}) Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{\frac{p^2}{p-1}}} \inf_{|x| \geq R} |x|^{\frac{p^2}{p-1}} V(x) \geq \Lambda.$$

Sobre a não-linearidade q, assumimos que é uma função contínua e satisfaz as seguintes hipóteses:

(q_1) $\limsup_{s \to 0^+} \frac{sq(s)}{s^{p^*}} < +\infty$; onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$.

(q_2) $\lim_{s \to +\infty} \frac{sq(s)}{s^{2p^*}} = 0$.

(q_3) Existe $\theta > p$ tal que

$$0 < 2\theta Q(s) \leq sq(s), \quad \text{para todo} \quad s > 0,$$

onde $Q(s) = \int_0^s q(t)dt$.

Observação 3.0.2 *Note que fazendo $p = 2$ nas hipóteses acima, elas coincidem com as hipóteses sobre a não-linearidade consideradas no Capítulo 1.*

O seguinte teorema contém o resultado principal deste capítulo:

Teorema 3.0.3 *Suponha que* V *satisfaz* (V_{Λ_p}) *e* q *verifica* $(q_1)-(q_3)$. *Então, existe uma constante* $\Lambda^*=\Lambda^*(\theta,p,q)>0$ *tal que a equação (3.1) possui uma solução positiva para todo* $\Lambda\geq\Lambda^*$.

Como um corolário imediato da prova do Teorema 3.0.3, temos:

Teorema 3.0.4 *Suponha que* V *satisfaz*

$(\tilde{V}_{\Lambda_p})$ *Existem* $\Lambda>0$ *e* $R>1$ *tais que*

$$\frac{1}{R^{\frac{p(N+p)}{2(p-1)}}}\inf_{|x|\geq R}|x|^{\frac{p(N+p)}{2(p-1)}}V(x)\geq\Lambda;$$

e a função q *verifica* (q_2), (q_3) *e*

$(\tilde{q}_1)$ $\limsup_{s\to 0^+}\dfrac{sg(s)}{s^{2p^*}}<+\infty.$

Então, existe uma constante $\Lambda^*=\Lambda^*(\theta,p,q)>0$ *tal que a equação (3.1) possui uma solução positiva para todo* $\Lambda\geq\Lambda^*$.

Estes resultados generalizam os resultados obtidos nos Teoremas 1.0.10 e 1.0.11 devido ao fato de estarmos considerando um operador mais geral. Aqui, também, considerando uma estrutura de espaços de Orlicz, conseguimos obter estes resultados sem a necessidade de supor a condição (V_∞), isto é, a limitação por cima do potencial V.

Para provarmos o Teorema 3.0.3, não podemos aplicar diretamente métodos variacionais, pois o funcional energia associado à (3.1), a saber,

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(1+2^{p-1}|u|^p)|\nabla u|^p dx+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^p dx-\int_{\mathbb{R}^N}Q(u)dx, \tag{3.2}$$

não está bem definido em geral, por exemplo, em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Para contornarmos esta dificuldade, usamos a seguinte mudança de variáveis desenvolvida por Severo em [43, 44] que generalizam a mudança de variáveis introduzida por Colin e Jeanjean em [24] e Liu, Wang e Wang em [36] usada no Capítulo 1, para o caso $p=2$.
Seja $w=f^{-1}(u)$, onde f é definida por $f(0)=0$,

$$f'(t)=\frac{1}{[1+2^{p-1}|f(t)|^p]^{1/p}}\quad\text{em}\quad[0,+\infty)\quad\text{e}\quad f(t)=-f(-t)\quad\text{em}\quad(-\infty,0]. \tag{3.3}$$

A seguir, apresentamos algumas propriedades importantes da função f. Após a mudança de variáveis, obtemos um novo funcional a partir de $J(u)$, mais precisamente,

$$I(w)=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^p dx+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(w)|^p dx-\int_{\mathbb{R}^N}Q(f(w))dx, \tag{3.4}$$

o qual, agora, está bem definido, devido as hipóteses assumidas sobre o potencial $V(x)$ e a não-linearidade $q(s)$, no espaço "tipo" Orlicz

$$E=\{w\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N);\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(w)|^p dx<+\infty\}.$$

O espaço E é de Banach (veja Proposição 3.1.8) quando munido da norma

$$||w|| = ||\nabla w||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + ||w||_*, \tag{3.5}$$

onde

$$||w||_* = \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda w)|^p dx\right].$$

Note que a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional I é dada por

$$-\Delta_p w + V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w) = q(f(w))f'(w) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{3.6}$$

Na Proposição 3.1.3 mais adiante, relacionamos as soluções de (3.6) com as soluções de (3.1).

3.1 A Estrutura Variacional

3.1.1 Reformulação do Problema e preliminares

Nesta subseção, apresentamos algumas propriedades da mudança de variável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida em (3.3), bem como um resultado que relaciona as soluções de (3.6) com as soluções de (3.1).

Lema 3.1.1 *A função f e sua derivada verificam as seguintes propriedades:*

(1) *f é unicamente definida, é de classe C^2 e inversível;*

(2) $|f'(t)| \leq 1$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(3) $|f(t)| \leq |t|$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(4) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 1$;

(5) $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} = a > 0$;

(6) $\frac{f(t)}{2} \leq tf'(t) \leq f(t)$, *para todo* $t \geq 0$;

(7) $|f(t)| \leq 2^{\frac{1}{2p}}|t|^{\frac{1}{2}}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(8) *Existe uma constante positiva C tal que*

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & se \quad |t| \leq 1 \\ C|t|^{\frac{1}{2}}, & se \quad |t| \geq 1; \end{cases}$$

(9) $|f(t)f'(t)| \leq \frac{1}{2^{(p-1)/p}}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(10) *Para cada* $\lambda > 1$, $\lambda^{p/2}|f(t)|^p \leq |f(\lambda t)|^p \leq \lambda^p|f(t)|^p$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(11) *Para cada* $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda^p|f(t)|^p \leq |f(\lambda t)|^p \leq \lambda^{p/2}|f(t)|^p$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. A demonstração destas propriedades podem ser encontradas em [43, 44]. ■

Observe que as propriedades $(4)-(5)$ do Lema 3.1.1 combinadas com as hipóteses (q_1) e (q_2) implicam que existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|f(s)q(f(s))| \leq c_0|s|^{p^*}\ , \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

No próximo resultado, mostraremos que a função $|f(t)|^p$ é convexa para $p \geq 2$. Esta propriedade é crucial, por exemplo, para mostrarmos que E é um espaço vetorial e que $||\cdot||_*$ define uma semi-norma em E. Além disso, mostramos a desigualdade (3.8) abaixo que nos possibilita obtermos mais adiante (veja Lema 3.1.9) uma versão, para o nosso caso, do Lema de Brezis-Lieb.

Lema 3.1.2 *Para $p \geq 2$, a função $|f(t)|^p$ é convexa. Além disso, para cada $0 < \varepsilon < 1/2$ vale:*

$$||f(a+b)|^p - |f(a)|^p| \leq \varepsilon 2^{p+1}|f(a)|^p + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}|f(b)|^p, \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Através de um cálculo direto mostramos que a segunda derivada da função

$$W(t) = |f(t)|^p, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R},$$

verifica a igualdade

$$W''(t) = \frac{p|f(t)|^{p-2}|f'(t)|^2\left[(p-1) + (p-2)2^{p-1}|f(t)|^{p-2}\right]}{1 + 2^{p-1}|f(t)|^p} > 0,$$

implicando que $|f(t)|^p$ é uma função convexa. Agora, mostraremos a desigualdade (3.8). Para isto, primeiramente vamos supor que $|f(a+b)| \geq |f(a)|$. Neste caso, escrevendo

$$a + b = (1-2\varepsilon)a + \varepsilon(2a) + \varepsilon(\frac{b}{\varepsilon})$$

e usando a convexidade da função $|f(t)|^p$, teremos

$$|f(a+b)|^p = \left|f\left((1-2\varepsilon)a + \varepsilon(2a) + \varepsilon(\frac{b}{\varepsilon})\right)\right|^p \leq (1-2\varepsilon)|f(a)|^p + \varepsilon|f(2a)|^p + \varepsilon|f(\frac{b}{\varepsilon})|^p,$$

ou seja,

$$|f(a+b)|^p - |f(a)|^p \leq \varepsilon[|f(2a)|^p - 2|f(a)|^p] + \varepsilon|f(\frac{b}{\varepsilon})|^p.$$

Usando a propriedade (10) do Lema 3.1.1, temos que $|f(2a)|^p \leq 2^p|f(a)|^p$ e $|f(\frac{b}{\varepsilon})|^p \leq \frac{1}{\varepsilon^p}|f(b)|^p$, donde segue a desigualdade

$$|f(a+b)|^p - |f(a)|^p \leq \varepsilon 2^{p+1}|f(a)|^p + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}|f(b)|^p.$$

No caso em que $|f(a+b)| < |f(a)|$, escrevemos

$$a = \frac{1}{1+2\varepsilon}(a+b) + \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}(2a) + \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}(-\frac{b}{\varepsilon}).$$

Usando mais uma vez a convexidade da função $|f(t)|^p$, deduzimos

$$\begin{aligned}|f(a)|^p &= \left|f\left(\frac{1}{1+2\varepsilon}(a+b)+\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}(2a)+\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}(-\frac{b}{\varepsilon})\right)\right|^p \\ &\leq \frac{1}{1+2\varepsilon}|f(a+b)|^p+\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}|f(2a)|^p+\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}|f(-\frac{b}{\varepsilon})|^p \\ &\leq |f(a+b)|^p+\varepsilon|f(2a)|^p+\varepsilon|f(-\frac{b}{\varepsilon})|^p\end{aligned}$$

Daí, usando outra vez a propriedade (10) do Lema 3.1.1 e o fato que $f(-t)=-f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$, obtemos

$$|f(a)|^p-|f(a+b)|^p\leq \varepsilon 2^p|f(a)|^p+\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}|f(b)|^p,$$

e assim, a desigualdade (3.8) está verificada. ■

Não é difícil mostrar, sob as hipóteses $(V_0),(q_1)$ e (q_2) e as propriedades $(1),(2)$ e (3) do Lema 3.1.1, que o funcional $I:E\to\mathbb{R}$ está bem definido e é de classe C^1 em E. Além disso, sua derivada de Gateaux é dada por

$$I'(w)\varphi=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\varphi dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w)\varphi dx \\ -\int_{\mathbb{R}^N}q(f(w))f'(w)\varphi dx, \quad (3.9)$$

para quaisquer $w,\varphi\in E$. Note que os pontos críticos de I correspondem exatamente as soluções fracas de (3.6). O próximo resultado relaciona as soluções fracas de (3.6) com as soluções fracas de (3.1).

Proposição 3.1.3 *Se $w\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I, então $u=f(w)\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (3.1). Além disso, se w é uma solução clássica de (3.6), então $u=f(w)$ é uma solução clássica de (3.1).*

Demonstração. Note, inicialmente, que $|u|^{p^*}=|f(w)|^{p^*}\leq|w|^{p^*}$ e $|\nabla u|^p=|f'(w)|^p|\nabla w|^p$. Daí, segue que $u\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Agora, uma vez que w é um ponto crítico do funcional I, temos para todo $\varphi\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\varphi dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w)\varphi dx-\int_{\mathbb{R}^N}q(f(w))f'(w)\varphi dx. \quad (3.10)$$

Visto que $(f^{-1})'(t)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}$, teremos que

$$(f^{-1})'(t)=\left[1+2^{p-1}|t|^p\right]^{1/p}, \quad (3.11)$$

de onde segue que

$$\nabla w=(f^{-1})'(u)\nabla u=\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{1/p}\nabla u. \quad (3.12)$$

Para todo $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, resulta que

$$\frac{\psi}{f'(w)}=\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{1/p}\psi\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\nabla(\frac{\psi}{f'(w)}) = 2^{p-1}(1+2^{p-1}|u|^p)^{(1-p)/p}|u|^{p-2}u\psi\nabla u + \left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{1/p}\nabla\psi. \tag{3.13}$$

Considerando $\varphi = \frac{\psi}{f'(w)}$ em (3.10) e usando (3.12) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left[1+2^{p-1}|u|^p\right]|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi dx \\ + 2^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p|u|^{p-2}u\psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}u\psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} q(u)\psi dx,\end{aligned} \tag{3.14}$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, mostrando que $u = f(w)$ é uma solução fraca de (3.1).
Agora mostraremos a segunda parte da proposição. Sabemos que

$$\Delta_p w = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla w|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right).$$

Como $w = f^{-1}(u)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f^{-1}(u)) = (f^{-1})'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, temos que

$$\Delta_p w = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|(f^{-1})'(u)\nabla u|^{p-2}(f^{-1})'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Derivando, temos

$$\begin{aligned}\Delta_p w = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)|(f^{-1})'(u)|^{p-2}(f^{-1})'(u) \\ + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|(f^{-1})'(u)|^{p-2}(f^{-1})'(u)\right)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Pela igualdade (3.11), resulta que

$$\begin{aligned}\Delta_p w = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{(p-1)/p} \\ + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{(p-1)/p}\right)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_p w = \left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{(p-1)/p}\Delta_p u + 2^{p-1}(p-1)|u|^{p-2}u\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{-1/p}|\nabla u|^p,$$

Substituindo esta última igualdade em

$$-\Delta_p w + V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w) = q(f(w))f'(w),$$

teremos

$$\begin{aligned}-\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{(p-1)/p}\Delta_p u - 2^{p-1}(p-1)|u|^{p-2}u\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]^{-1/p}|\nabla u|^p \\ + \frac{V(x)|u|^{p-2}u}{[1+2^{p-1}|u|^p]^{1/p}} = \frac{q(u)}{[1+2^{p-1}|u|^p]^{1/p}},\end{aligned}$$

ou ainda,

$$-\left[1+2^{p-1}|u|^p\right]\Delta_p u - 2^{p-1}(p-1)|u|^{p-2}u|\nabla u|^p + V(x)|u|^{p-2}u = q(u).$$

Desde que

$$2^{p-1}|u|^p\Delta_p u + 2^{p-1}(p-1)|u|^{p-2}u|\nabla u|^p = \Delta_p(u^2)u,$$

obtemos

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u - \Delta_p(u^2)u = q(u).$$

■

3.1.2 Propriedades do Espaço

Nesta subseção, colecionamos algumas propriedades importantes do espaço E que usaremos ao longo deste capítulo. Propriedades análogas para o caso em que $p = 2$ podem ser encontradas nas referências [29, 36, 43].

Lema 3.1.4 *O espaço $(E, ||\cdot||)$ é um espaço normado.*

Demonstração. Usando a propriedade (10) do Lema 3.1.1 e o fato que a função $|f(t)|^p$ é convexa, concluímos que E é um espaço vetorial. Para mostrarmos que (3.5) é uma norma em E, é suficiente provarmos que $||\cdot||_*$ define uma semi-norma em E. Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$ e $w \in E$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\left[1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda(\sigma w))|^p dx\right] &= |\sigma|\frac{1}{\lambda|\sigma|}\left[1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f((\lambda|\sigma|)w))|^p dx\right] \\ &\geq |\sigma|||w||_*, \quad \text{para todo} \quad \lambda > 0, \end{aligned}$$

o que implica que,

$$||\sigma w||_* \geq |\sigma|||w||_*. \tag{3.15}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{|\sigma|}||\sigma w||_* \leq \frac{1}{\lambda|\sigma|}\left[1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f((\lambda\sigma)w))|^p dx\right],$$

para todo $\lambda > 0$. Assim,

$$\frac{1}{|\sigma|}||\sigma w||_* \leq ||w||_*. \tag{3.16}$$

De (3.15) e (3.16), obtemos

$$||\sigma w||_* = |\sigma|||w||_*, \quad \text{para todo} \quad \sigma \in \mathbb{R},\ w \in E.$$

Agora mostraremos a desigualdade triangular. Para isto, fixamos $u, w \in E$, $\lambda, \sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$||u||_* + \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{\lambda}\left[1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda u)|^p dx\right]$$

e

$$||w||_* + \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{\sigma}\left[1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\sigma w)|^p dx\right].$$

Multiplicando as desigualdades acima por $\frac{\sigma\lambda}{\sigma+\lambda}$, teremos

$$\frac{\sigma\lambda}{\sigma+\lambda}\left(||u||_* + \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \frac{\sigma}{\sigma+\lambda} + \frac{\sigma}{\sigma+\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda u)|^p dx$$

e

$$\frac{\sigma\lambda}{\sigma+\lambda}\left(||w||_* + \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \frac{\lambda}{\sigma+\lambda} + \frac{\lambda}{\sigma+\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\sigma w)|^p dx.$$

Logo,

$$\frac{\sigma\lambda}{\sigma+\lambda}\left(||u||_* + ||w||_* + \varepsilon\right) \geq 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left[\frac{\sigma}{\sigma+\lambda}|f(\lambda u)|^p + \frac{\lambda}{\sigma+\lambda}|f(\sigma w)|^p\right] dx.$$

Desde que $|f(t)|^p$ é uma função convexa e $\frac{\sigma}{\sigma+\lambda} + \frac{\lambda}{\sigma+\lambda} = 1$, resulta que

$$\frac{\sigma\lambda}{\sigma+\lambda}\left(||u||_* + ||w||_* + \varepsilon\right) \geq 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left|f\left(\frac{\sigma\lambda}{\sigma+\lambda}(u+w)\right)\right|^p dx \geq ||\frac{\sigma\lambda}{\sigma+\lambda}(u+w)||_*,$$

ou seja,

$$||u+w||_* \leq ||u||_* + ||w||_* + \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0.$$

Como ε foi escolhido arbitrariamente, deduzimos que

$$||u+w||_* \leq ||u||_* + ||w||_*, \quad \text{para quaisquer} \quad u, w \in E.$$

Portanto, $(E, ||\cdot||)$ é um espaço vetorial normado com norma definida em (3.5). ∎

A seguir, apresentamos um lema técnico que será essencial para obtenção de outros resultados.

Lema 3.1.5 *Sejam $a > 0$, $r > 1$ então*

(i)

$$\inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left[1 + a\lambda^r\right] = \frac{r a^{\frac{1}{r}}}{(r-1)^{\frac{r-1}{r}}}.$$

(ii) Para cada $a > 0$ o elemento $\lambda = \lambda_a$, onde o ínfimo é atingido, é dado por $1 = (r-1)a\lambda^r$.

Demonstração. Basta minimizar a função

$$m(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(1 + a\lambda^r).$$

Note que sua derivada é

$$m'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} + a(r-1)\lambda^{r-2}$$

e $m'(\lambda) = 0$ se, e somente se, $1 = a(r-1)\lambda^r$. Substituindo este valor em m obtemos o valor mínimo desejado. ∎

Considere para cada $w \in E$ o número

$$\Upsilon(w) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx. \tag{3.17}$$

Lema 3.1.6 *(1) Existe uma constante $c_p > 0$ dependendo apenas de p tal que*

$$c_p \Upsilon(w)^{\frac{1}{p}} \min\{1, \Upsilon(w)^{\frac{1}{p}}\} \leq ||w||_*, \quad \textit{para todo} \;\; w \in E.$$

(2) Suponha que $\Upsilon(w) \leq \dfrac{1}{(p-1)}$. Então,

$$||w||_* \leq \left(\frac{p}{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}} \right) \Upsilon(w)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Para $w \in E$ e $\varepsilon > 0$, fixamos $\lambda > 0$ tal que

$$||w||_* + \varepsilon \geq \frac{1}{\lambda} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda w)|^p dx \right].$$

Analisaremos as duas possibilidades: $\lambda > 1$ e $\lambda \leq 1$.
Para o caso $\lambda > 1$, pela propriedade (10) do Lema 3.1.1, teremos

$$\frac{1}{\lambda} \left[1 + \lambda^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx \right] \leq \frac{1}{\lambda} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda w)|^p dx \right] \leq ||w||_* + \varepsilon.$$

Agora usando o Lema 3.1.5 com $a = \Upsilon(w)$ e $r = \frac{p}{2}$, obtemos

$$\left(\frac{p}{2(\frac{p-2}{2})^{\frac{p-2}{p}}} \right) [\Upsilon(w)]^{\frac{2}{p}} \leq ||w||_* + \varepsilon. \tag{3.18}$$

Para o caso $\lambda \leq 1$, usando a propriedade (11) do Lema 3.1.1, deduzimos que

$$\frac{1}{\lambda} \left[1 + \lambda^{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx \right] \leq \frac{1}{\lambda} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda w)|^p dx \right] \leq ||w||_* + \varepsilon.$$

Usando novamente o Lema 3.1.5 com $a = \Upsilon(w)$ e $r = p$, segue que

$$\left(\frac{p}{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}} \right) [\Upsilon(w)]^{\frac{1}{p}} \leq ||w||_* + \varepsilon. \tag{3.19}$$

Considerando

$$c_p = \min \left\{ \frac{p}{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}, \frac{p}{2(\frac{p-2}{2})^{\frac{p-2}{p}}} \right\},$$

e usando as relações (3.18) e (3.19), concluímos que

$$c_p \min \left\{ [\Upsilon(w)]^{\frac{1}{p}}, [\Upsilon(w)]^{\frac{2}{p}} \right\} \leq ||w||_* + \varepsilon,$$

ou seja,

$$c_p [\Upsilon(w)]^{\frac{1}{p}} \min \left\{ 1, [\Upsilon(w)]^{\frac{1}{p}} \right\} \leq ||w||_* + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, o item (1) está provado.

Agora mostraremos o item (2). Iniciamos, observando que fazendo $a = \Upsilon(w)$ e $r = p$ no Lema 3.1.5- (ii), segue que o valor de $\lambda = \lambda_a$, onde o mínimo é atingido, satisfaz

$$\lambda^p = \frac{1}{\Upsilon(w)(p-1)} \geq 1.$$

Como $\lambda \geq 1$, pela propriedade (10) do Lema 3.1.1 e usando o Lema 3.1.5, obtemos

$$||w||_* \leq \frac{1}{\lambda}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(\lambda w)|^p dx\right] \leq \frac{1}{\lambda}\left[1 + \lambda^p \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx\right] = \left(\frac{p}{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}\right)\Upsilon(w)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Corolário 3.1.7 *Segue do Lema anterior que*

$$\Upsilon(w_n - w) \to 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad ||w_n - w||_* \to 0.$$

A próxima proposição está relacionada a uma afirmação feita em [7], o que não foi provado nesse artigo. Aqui, decidimos mostrar a sua prova. Reiteramos, mais uma vez, que para o caso $p = 2$, este resultado pode ser encontrado, por exemplo, nas referências [29, 36, 43].

Proposição 3.1.8 *O espaço E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (w_n) uma sequência de Cauchy em E. Usando as imersões contínuas

$$E \hookrightarrow D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

e a completude de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, existe $w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$w_n \to w \text{ in } D^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

e

$$w_n(x) \to w(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema 3.1.6 - (1), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(w_n)|^p\,dx \leq C,$$

que juntamente com o Lema de Fatou, implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(w)|^p\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(w_n)|^p\,dx \leq C.$$

Daí, resulta que $w \in E$. Usando novamente o Lema 3.1.6 - (1), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n, m \geq n_0$, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(w_m - w_n)|^p\,dx < \varepsilon.$$

Fixando $m > n_0$ e aplicando novamente o Lema de Fatou, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(w_m - w)|^p\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(w_m - w_n)|^p\,dx < \varepsilon,$$

de onde concluímos que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(w_m - w)|^p\,dx = 0. \tag{3.20}$$

Pelo Corolário 3.1.7, segue que $||w_n - w||_* \to 0$. Portanto $w_n \to w$ em E. ■

A seguir apresentamos uma versão do Lema de Brezis-Lieb [21] para o nosso caso.

Lema 3.1.9 *(Brezis-Lieb) Considere uma sequência (w_n) de funções mensuráveis em $\mathbb{R}^N$ tais que:*

(i) $w_n \to w$, *quase sempre em* $\mathbb{R}^N$*;*

(ii) Existe $c > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n - w)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx + o_n(1).$$

Antes da demonstração, vejamos a seguinte observação pertinente.

Observação 3.1.10 *Usando a notação dada pela definição em (3.17), esta versão do Lema de Brezis-Lieb diz, sob as hipóteses do Lema 3.1.9, que*

$$\Upsilon(w_n) - \Upsilon(w_n - w) = \Upsilon(w) + o_n(1).$$

Assim, combinando isto com o Corolário 3.1.7, concluímos que

$$\Upsilon(w_n) \to \Upsilon(w) \Leftrightarrow \Upsilon(w_n - w) \to 0 \Leftrightarrow ||w_n - w||_* \to 0.$$

A demonstração a seguir pode ser encontrada em Brezis-Lieb [21]:

Demonstração. Fixemos $M > 0$ tal que $\Upsilon(w_n - w) \leq M$, para todo n. Da propriedade (3.8) obtida no Lema 3.1.2, segue que

$$||f(a+b)|^p - |f(a)|^p - |f(b)|^p| \leq \varepsilon 2^{p+1}|f(a)|^p + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right)|f(b)|^p, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $a = w_n - w$ e $b = w$ acima, temos

$$||f(w_n)|^p - |f(w_n - w)|^p - |f(w)|^p| \leq \varepsilon 2^{p+1}|f(w_n - w)|^p + \frac{1 + \varepsilon^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}}|f(w)|^p, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerando o conjunto

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^N : ||f(w_n)|^p - |f(w_n - w)|^p - |f(w)|^p| - \varepsilon 2^{p+1}|f(w_n - w)|^p \geq 0\},$$

definimos

$$u_n = ||f(w_n)|^p - |f(w_n - w)|^p - |f(w)|^p| - \varepsilon 2^{p+1}|f(w_n - w)|^p \chi_{A_n}.$$

Note que $u_n \to 0$, quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e

$$0 \leq V(x)u_n \leq \frac{1 + \varepsilon^{p-1}}{\varepsilon^{p-1}} V(x)|f(w)|^p \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n dx = 0.$$

Por outro lado,

$$V(x)\,||f(w_n)|^p - |f(w_n - w)|^p - |f(w)|^p| \le V(x)u_n + \varepsilon 2^{p+1}V(x)|f(w_n - w)|^p,$$

e portanto,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,||f(w_n)|^p - |f(w_n - w)|^p - |f(w)|^p|\,dx \le \varepsilon 2^{p+1}M.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,||f(w_n)|^p - |f(w_n - w)|^p - |f(w)|^p|\,dx = 0.$$

■

3.2 O problema modificado

Nesta seção, de modo análogo as Seções 1.2 e 2.2 dos capítulos anteriores, seguindo as ideias de Del Pino e Felmer em [26], fazemos uma modificação conveniente no termo não-linear $q(s)$ de tal maneira que o novo funcional energia associado satisfaça a condição de Palais-Smale. Para isto, faremos algumas considerações. Para $k > \dfrac{2\theta - p}{2(\theta - p)}$ e $R > 1$, definimos a função contínua

$$h(x,t) = \begin{cases} q(t), & \text{se } |x| \le R \\ q(t), & \text{se } |x| > R \quad \text{e} \quad q(t) \le \frac{V(x)}{k}|t|^{p-2}t \\ \dfrac{V(x)}{k}|t|^{p-2}t, & \text{se } |x| > R \quad \text{e} \quad q(t) > \frac{V(x)}{k}|t|^{p-2}t. \end{cases}$$

Não é difícil verificar que a função $h(x,t)$ satisfaz, para todo $t \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

(h_1) $h(x,t) \le q(t),$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(h_2) $h(x,t) \le \frac{V(x)}{k}|t|^{p-2}t,$ para todo $|x| \ge R$;

(h_3) $H(x,t) = Q(t),$ se $|x| \le R$;

(h_4) $H(x,t) \le \frac{V(x)}{pk}|t|^p,$ se $|x| > R$;

(h_5) $\dfrac{1}{2\theta}th(x,t) - H(x,t) \ge \left(\dfrac{1}{2\theta} - \dfrac{1}{p}\right)\frac{V(x)}{k}|t|^p,$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

O problema modificado que iremos considerar é o seguinte

$$-\Delta_p w + V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w) = h(x, f(w))f'(w), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{3.21}$$

O funcional energia $\Phi : E \to \mathbb{R}$ associado a (3.21) é dado por

$$\Phi(w) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w))dx. \tag{3.22}$$

Usando argumentos padrão, não é difícil mostrar que, sob as hipóteses das funções q e V, e usando as propriedades da função f, o funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ está bem definido e é de classe C^1 em E. Além disso, sua derivada de Gateaux é dada por

$$\Phi'(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^{p-2} f(w) f'(w)\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w)) f'(w)\varphi dx, \tag{3.23}$$

para quaisquer $w, \varphi \in E$.

3.2.1 Geometria do Passo da Montanha

Nesta subseção, provaremos que o funcional Φ possui a geometria do Passo da Montanha. Com este objetivo, para $\rho > 0$, definamos o conjunto

$$\Sigma_\rho = \{w \in E; \Psi(w) = \rho^p\},$$

onde $\Psi : E \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\Psi(w) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^p + V(x)|f(w)|^p\right] dx.$$

Visto que o funcional Ψ é contínuo, é fácil verificar que Σ_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço E.

Lema 3.2.1 *Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi(w) \geq \alpha$, para todo $w \in \Sigma_\rho$.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\Phi(0) = 0$. Agora, para $w \in \Sigma_\rho$ usando a propriedade (h_1), a hipótese (q_3), a relação (3.7), a desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e a não negatividade do potencial V, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w))dx \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^p + V(x)|f(w)|^p dx\right)^{p^*/p}.$$

Daí, segue que

$$\Phi(w) \geq \frac{1}{p}\rho^p - C_3\rho^{p^*}, \quad \text{para todo} \ \ w \in \Sigma_\rho.$$

Desde que $p^* > p$, implica para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\Phi(w) \geq \alpha > 0, \quad \text{para todo} \quad \in \Sigma_\rho.$$

■

Lema 3.2.2 *Existe $w \in E$ tal que $\Psi(w) > \rho^p$ e $\Phi(w) < 0$.*

Demonstração. É suficiente mostrarmos que existe $\varphi \in E$, $\varphi \geq 0$ tal que

$$\Phi(t\varphi) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{3.24}$$

De fato, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $supp(\varphi) = \overline{B_1}$ e $0 \leq \varphi(x) \leq 1, \forall x \in B_1$. Pela propriedade (3) do Lema 3.1.1, obtemos

$$\Phi(t\varphi) \leq \frac{1}{p}t^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\varphi|^p dx \right) - \int_{B_1} H(x, f(t\varphi))dx.$$

Usando (h_3), temos que $H(x,t) = Q(t)$ em B_1. Pela condição (q_3), existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$Q(t) \geq C_1|t|^{2\theta} - C_2, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\Phi(t\varphi) \leq \frac{1}{p}t^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\varphi|^p dx \right) - C_1 \int_{B_1} |f(t\varphi)|^{2\theta} dx + C_3. \tag{3.25}$$

Desde que a função $\dfrac{f(t)}{t}$ é decrescente para $t > 0$ e $0 \leq t\varphi(x) \leq t$, para quaisquer $x \in B_1, t > 0$, teremos

$$f(t)\varphi(x) \leq f(t\varphi(x)), \quad \text{para todo} \quad x \in B_1 \text{ e } t > 0,$$

que juntamente (3.25), implica em

$$\Phi(t\varphi) \leq t^p \left[\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \varphi|^p + V(x)|\varphi|^p)dx - C_1 \frac{|f(t)|^{2\theta}}{t^p} \int_{B_1} |\varphi|^{2\theta} dx + \frac{C_3}{t^p} \right]. \tag{3.26}$$

Pela propriedade (8) do Lemma 3.1.1 e uma vez que $\theta > p$, concluímos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|^{2\theta}}{t^p} = +\infty,$$

e portanto (3.24) está provado e, consequentemente a demonstração do lema está completa. ■

Em virtude dos Lemas 3.2.1 e 3.2.2, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição $(PS)_c$ devido à Ambrosetti-Rabinowitz [12], segue que existe $\{w_n\} \subset E$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional Φ, isto é,

$$\Phi(w_n) \to c \quad \text{e} \quad \Phi'(w_n) \to 0,$$

onde $c > 0$ é o nível do passo da montanha para Φ caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \tag{3.27}$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ I(\gamma(1)) < 0\}. \tag{3.28}$$

3.2.2 Limitação das sequências (PS)

Nesta subseção, mostraremos que toda sequência $(PS)_c$ para Φ é limitada em E.

Lema 3.2.3 *Suponha que as condições $(q_1), (q_2)$ e (q_3) são satisfeitas. Se $(w_n) \subset E$ é uma sequência Palais-Smale para Φ, então (w_n) é limitada em E.*

Demonstração. Seja (w_n) uma sequência $(PS)_c$ para Φ. Assim, dado $\delta > 0$, para n grande, teremos

$$\Phi(w_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'(w_n)\varphi_n \le \delta||w_n|| + c + 1.$$

Pela propriedade (6) do Lema 3.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(w_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'(w_n)\varphi_n \ge \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx + V(x)|f(w_n)|^p dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2\theta} h(x, f(w_n)) f(w_n) - H(x, f(w_n))\right] dx. \quad (3.29)\end{aligned}$$

Ora, por (h_5), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2\theta} h(x, f(w_n)) f(w_n) - H(x, f(w_n))\right] dx \ge \left(\frac{1}{2\theta} - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(w_n) dx. \quad (3.30)$$

Logo, combinando (3.29) e (3.30), decorre que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx + \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2\theta}\right)\frac{1}{k}\right] &\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx \\ &\le \delta||w_n|| + c + 1. \quad (3.31)\end{aligned}$$

Agora, pela escolha de $k > \dfrac{2\theta - p}{2(\theta - p)}$, resulta que

$$C_* = C_*(p, \theta, k) = \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2\theta}\right)\frac{1}{k}\right] > 0,$$

e consequentemente,

$$C_* \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w_n|^p + V(x)|f(w_n)|^p]\, dx \le \Phi(w_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'(w_n)\varphi_n \le \delta||w_n|| + c + 1. \quad (3.32)$$

Sabemos que

$$||w_n|| \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx\right)^{1/p} + 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx.$$

Como $(s)^{1/p} \le 1 + s$, para todo $s \ge 0$, teremos

$$||w_n|| \le 2 + \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w_n|^p + V(x)|f(w_n)|^p]\, dx.$$

Substituindo esta última desigualdade em (3.32), obtemos

$$||w_n|| \le 2 + \frac{\delta}{C_*}||w_n|| + \frac{(1 + c)}{C_*}.$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que $1 - \frac{\delta}{C_*} > 0$, implica que (w_n) é limitada em E. ■

Desde que a sequência (w_n) é limitada em E, segue que a mesma é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, existe $w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência, ainda denotada por w_n, tal que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

$$w_n \to w \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para } s \in [1, p^*) \text{ se } 1 < p < N,\ s \geq 1 \text{ se } p \geq N,$$

e

$$w_n(x) \to w(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Observação 3.2.4 *Uma vez que a sequência (w_n) é limitada em E segue, do Lema 3.1.6-(1), que*

$$\Upsilon(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx$$

também é limitada. Logo, pelo Lema de Fatou, segue que

$$\Upsilon(w) \leq \liminf_n \Upsilon(w_n),$$

resultando que $w \in E$.

O lema, a seguir, será essencial para mostrar que o funcional Φ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 3.2.5 *Se (w_n) é uma sequência de Palais-Smale para Φ, então:*

(i) Para cada $\epsilon > 0$ existe $r > R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{|x|\geq 2r} [|\nabla w_n|^p + V(x)|f(w_n)|^p]\, dx < \epsilon.$$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx.$$

(iii)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f(w_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w))f(w) dx.$$

(iv)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2} f'(w_n)f(w_n)w_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^{p-2} f'(w)f(w)w dx.$$

(v)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w))f'(w)w dx.$$

(vi)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w_n)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w)) dx.$$

Observação 3.2.6 *O item* (ii) *diz que*

$$\Upsilon(w_n) \to \Upsilon(w).$$

Demonstração. (i) Para $r > R$ considere a função $\eta = \eta_r \in C^\infty(B_r^c)$ onde

$$\eta \equiv 1 \text{ in } B_{2r}^c, \quad \eta \equiv 0 \text{ in } B_r, \ 0 \leq \eta \leq 1$$

e

$$| \nabla \eta | \leq \frac{2}{r}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Pelo lema anterior, $(\eta\varphi_n)$, onde $\varphi_n = \left(\dfrac{f(w_n)}{f'(w_n)}\right)$, é limitada em E. Logo,

$$\Phi'(w_n)(\eta\varphi_n) = o_n(1),$$

de onde obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{2^{p-1}|f(w_n)|^p}{1 + 2^{p-1}|f(w_n)|^p}\right) |\nabla w_n|^p \eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p \eta dx =$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla \eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n)) f(w_n) \eta dx + o_n(1),$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p \eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p \eta dx \leq$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla \eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n)) f(w_n) \eta dx + o_n(1),$$

Visto que $\eta \equiv 0$ em B_r, esta última desigualdade combinada com (h_2), temos

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \int_{[|x| \geq r]} [|\nabla w_n|^p + V(x)|f(w_n)|^p] \, \eta dx \leq 2 \int_{[|x| \geq r]} |w_n| |\nabla w_n|^{p-1} |\nabla \eta| dx + o_n(1),$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \int_{[|x| \geq r]} [|\nabla w_n|^p + V(x)|f(w_n)|^p] \, \eta dx \leq \frac{4}{r} \int_{[r \leq |x| \leq 2r]} |w_n| |\nabla w_n|^{p-1} dx + o_n(1). \tag{3.33}$$

Ora, usando desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_{[r \leq |x| \leq 2r]} |w_n| |\nabla w_n|^{p-1} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{[r \leq |x| \leq 2r]} |w_n|^p dx\right)^{1/p}.$$

Desde que $w_n \to w$ em $L^p(B_{2r} \backslash B_r)$ e (w_n) é limitada em E, decorre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{[r \leq |x| \leq 2r]} |w_n| |\nabla w_n|^{p-1} dx \leq C \left(\int_{[r \leq |x| \leq 2r]} |w|^p dx\right)^{1/p}, \tag{3.34}$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder, teremos

$$\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w|^p dx\right)^{1/p}\leq\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}|B_{2r}\backslash B_r|^{1/N}. \tag{3.35}$$

Uma vez que $|B_{2r}\backslash B_r|\leq|B_{2r}|=\omega_N(2r)^N$, resulta das desigualdades (3.34) e (3.35), que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w_n||\nabla w_n|^{p-1}dx\leq 2rC\omega_N^{1/N}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}. \tag{3.36}$$

De (3.33) e (3.36), deduzimos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]}\left[|\nabla w_n|^p+V(x)|f(w_n)|^p\right]dx\leq$$
$$8C\omega_N^{1/N}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}. \tag{3.37}$$

Assim, para cada $\epsilon>0$, escolhemos $r>R$ tal que

$$8C\omega_N^{1/N}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\left(\int_{[r\leq|x|\leq 2r]}|w|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}<\epsilon,$$

o que prova a parte (i) do lema.
(ii) Segue da parte (i) que, para cada $\epsilon>0$, existe $r>R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[|x|\geq 2r]}V(x)|f(w_n)|^p dx<\frac{\epsilon}{4}$$

e consequentemente,

$$\int_{[|x|\geq 2r]}V(x)|f(w)|^p dx\leq\frac{\epsilon}{4}.$$

Logo,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}V(x)[|f(w_n)|^p-|f(w)|^p]dx\right|\leq\frac{\epsilon}{2}+\left|\int_{[|x|\leq 2r]}V(x)[|f(w_n)|^p-|f(w)|^p]dx\right|. \tag{3.38}$$

Desde que $w_n\to w$ em $L^p(B_{2r})$, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[|x|\leq 2r]}V(x)|f(w_n)|^p dx=\int_{[|x|\leq 2r]}V(x)|f(w)|^p dx. \tag{3.39}$$

De (3.38) e (3.39), resulta que

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}V(x)[|f(w_n)|^p-|f(w)|^p]dx\right|\leq\frac{\epsilon}{2},$$

para cada $\epsilon>0$. Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(w_n)|^p dx=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(w)|^p dx,$$

o que mostra a parte (ii) do lema.
(iii) Segue de (h_2) e pela parte (i) que, para cada $\epsilon > 0$, existe $r > R$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{[|x|\geq 2r]} h(x, f(w_n))f(w_n)dx < \frac{\epsilon}{4}$$

e

$$\int_{[|x|\geq 2r]} h(x, f(w))f(w)dx \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Daí,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} [h(x, f(w_n))f(w_n) - h(x, f(w))f(w)]dx\right| \leq$$
$$\frac{\epsilon}{2} + \left|\int_{[|x|<2r]} [h(x, f(w_n))f(w_n) - h(x, f(w))f(w)]dx\right|. \quad (3.40)$$

Uma vez que

$$w_n(x) \to w(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \quad \frac{h(\cdot, f(s))f(s)}{|f(s)|^{2p^*}} \to 0 \text{ quando } s \to +\infty$$

e

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_n)|^{2p^*} < +\infty,$$

decorre, do Lema de Compacidade de Strauss [17], que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[|x|<2r]} h(x, f(w_n))f(w_n)dx = \int_{[|x|<2r]} h(x, f(w))f(w)dx. \quad (3.41)$$

Por (3.40) e (3.41), o resultado da parte (iii) segue. Para provarmos as partes $(iv), (v)$ e (vi) procedemos de maneira análoga à (ii) e (iii). ■

No resultado a seguir mostraremos que o limite fraco de (w_n) é um ponto crítico não-trivial de Φ e que o funcional Φ satisfaz a condição Palais-Smale.

Lema 3.2.7 *Temos que $w \neq 0$ e é um ponto crítico de Φ tal que $\Phi(w) = c$. Além disso, o funcional Φ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração. Agora procedendo como na prova do Lema 3.2.5 - (iii), facílmente deduzimos que os seguintes limites ocorrem

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[|f(w_n)|^{p-2}f(w_n)f'(w_n) - |f(w)|^{p-2}f(w)f'(w)]\phi dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty, \quad (3.42)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} [h(x, f(w))f'(w) - h(x, f(w_n))f'(w_n)]\phi dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty, \quad (3.43)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Agora, mostraremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\nabla w\right] \nabla\phi dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \quad (3.44)$$

Para isto é suficiente, a menos de subsequência, mostrarmos que

$$\nabla w_n(x) \to \nabla w(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x \in B_1(0) \\ 0, & \text{se } \ x \notin B_2(0). \end{cases}$$

Considere $\epsilon > 0$ e $\varphi_\epsilon(x) = \varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Agora, definimos

$$P_n(x) = \left[|\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\nabla w\right](\nabla w_n - \nabla w)(x),$$

ou seja,

$$P_n(x) = |\nabla w_n|^p - |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n \nabla w - |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla w_n + |\nabla w|^p.$$

Note que

$$\int_{B_\epsilon(0)} P_n(x)dx = \int_{B_\epsilon(0)} P_n(x)\varphi_\epsilon(x)dx.$$

Recordemos que em $\mathbb{R}^N$ vale a seguinte desigualdade de Tartar (Veja Lema A.0.5 em [39]):

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \begin{cases} C_p|x-y|^p, & \text{se } \ p \geq 2 \\ C_p\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & \text{se } \ 1 < p < 2. \end{cases} \tag{3.45}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} P_n(x)dx \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p\varphi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^{p-2}\varphi_\epsilon \nabla w_n \nabla w dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\varphi_\epsilon \nabla w \nabla w_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \varphi_\epsilon dx \\ &= \quad I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p\varphi_\epsilon dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2}f(w_n)f'(w_n)w_n\varphi_\epsilon dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w_n\varphi_\epsilon dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n\varphi_\epsilon\nabla w dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2}f(w_n)f'(w_n)w\varphi_\epsilon dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w\varphi_\epsilon dx, \end{aligned}$$

$$I_3 = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\varphi_\epsilon\nabla w_n\nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p\varphi_\epsilon dx,$$

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2}f(w_n)f'(w_n)w\varphi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2}f(w_n)f'(w_n)w_n\varphi_\epsilon dx$$

e

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w_n\varphi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w\varphi_\epsilon dx.$$

Estimaremos cada uma das integrais I_j, com $j = 1, 2, 3, 4, 5$.
Segue da definição de I_1 que

$$I_1 = \Phi'(w_n)(w_n\varphi_\epsilon) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^{p-2} w_n \nabla w_n \nabla \varphi_\epsilon dx.$$

Desde que $(w_n\varphi_\epsilon)$ é limitada em E, $\Phi'(w_n) \to 0$ e usando o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^{p-2} w_n \nabla w_n \nabla \varphi_\epsilon dx\right] = 0,$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = o_\epsilon(1).$$

Note que da definição de I_2, temos

$$I_2 = \Phi'(w_n)(w\varphi_\epsilon) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla \varphi_\epsilon w dx.$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = o_\epsilon(1).$$

Para estimar I_3, considere $B(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla v \nabla w \varphi_\epsilon dx$, com $v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Note que B é um funcional linear contínuo e uma vez que $w_n \rightharpoonup w$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w_n \nabla w \varphi_\epsilon dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \varphi_\epsilon dx,$$

donde segue que

$$\lim_{n\to\infty} I_3 = 0.$$

Procedendo de maneira análoga aos limites (iv) e (v) do Lema 3.2.5, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} I_4 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} I_5 = 0.$$

Destes fatos, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{2\epsilon}(0)} P_n(x) dx = 0.$$

Da desigualdade (3.45), resulta que

$$0 \le \int_{B_{2\epsilon}(0)} C_p |\nabla w_n - \nabla w|^p dx \le \int_{B_{2\epsilon}(0)} P_n(x) dx,$$

de onde segue que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{2\epsilon}(0)} |\nabla w_n - \nabla w|^p dx = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial w_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad L^p(B_\epsilon(0)),$$

consequentemente, a menos de subsequência,

$$\frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \quad \text{q.t.p.} \quad B_\epsilon(0),$$

e pela arbitrariedade de ϵ, usando argumento diagonal, concluímos que

$$\frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \quad \text{q.t.p.} \quad \mathbb{R}^N.$$

Daí, segue o limite em (3.44).

Combinando os limites (3.42), (3.43) e (3.44), resulta que

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi'(w_n)\phi = \Phi'(w)\phi, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $\Phi'(w_n) \to 0$, concluímos que $\Phi'(w) = 0$. Agora, mostraremos que $w \neq 0$. Suponhamos, por contradição, que $w = 0$. Pelos itens $(ii), (iv)$ e (v) do Lema 3.2.5, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx = 0. \tag{3.46}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2} f(w_n)f'(w_n)w_n dx = 0 \tag{3.47}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w_n dx = 0. \tag{3.48}$$

Já pelo item (vi) do Lema 3.2.5 e pela definição da função h, também obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w_n))dx = 0. \tag{3.49}$$

Desde que $\Phi'(w_n)w_n \to 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2} f(w_n)f'(w_n)w_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w_n dx \to 0,$$

e pelos limites em (3.47) e (3.48), resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx \to 0.$$

Combinando este último limite com os limites em (3.46) e (3.49), concluímos que

$$\Phi(w_n) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^p + V(x)|f(w_n)|^p)dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w_n))dx \to 0,$$

o que contradiz o fato que $\Phi(w_n) \to c > 0$. Portanto, $w \neq 0$.

Agora, mostremos que $\Phi(w) = c$. Passando o limite na expressão

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx = -\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^{p-2} f(w_n)f'(w_n)w_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)w_n dx + o(1),$$

e usando os itens (iv) e (v) do Lema 3.2.5 juntamente com o fato que $\Phi'(w)w = 0$, deduzimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p dx. \tag{3.50}$$

Dos limites presentes nos itens (ii) e (vi) do Lema 3.2.5 e por (3.50), concluímos que

$$\Phi(w_n) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_n|^p + V(x)|f(w_n)|^p\right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(w_n))dx \to \Phi(w),$$

de onde segue que $\Phi(w) = c$.
Devido ao limite (3.50) juntamente com a desigualdade de Tartan (3.45) e a convergência fraca $w_n \rightharpoonup w$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n - \nabla w|^p dx \to 0.$$

Assim, para mostrarmos que o funcional Φ satifaz a condição $(PS)_c$ é suficiente provarmos que

$$||w_n - w||_* \to 0.$$

Pela Observação 3.1.10, este limite ocorre, visto que as condições do Lema 3.1.9 são satisfeitas e o limite a seguir ocorre

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w_n)|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^p dx.$$

Portanto, $w_n \to w$ em E, o que prova que Φ satifaz a condição $(PS)_c$. ■

3.3 Estimativa L^∞ da solução do problema modificado

Nesta seção, estabeleceremos uma estimativa L^∞ para a solução w do problema modificado (3.21) obtida no Lema 3.2.7. Salientamos que os resultados presentes nesta seção são generalizações dos obtidos na Seção 1.4 do Capítulo 1 deste trabalho.

Denotemos por B a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, isto é, $B = B_1(0)$ e por $I_0 : W_0^{1,p}(B) \to \mathbb{R}$ o funcional

$$I_0(w) = \frac{1}{p}\int_B |\nabla w|^p dx + \frac{1}{p}\int_B V(x)|f(w)|^p dx - \int_B Q(f(w))dx. \tag{3.51}$$

Além disso, denotamos por d o nível do passo da montanha associado ao funcional I_0, ou seja,

$$d = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)), \tag{3.52}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,p}(B)); \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = e\}, \tag{3.53}$$

com $e \in W_0^{1,p}(B)\backslash\{0\}$ verificando $I_0(e) < 0$.

Observação 3.3.1 *Desde que $\Phi(w) \leq I_0(w)$ para todo $w \in W_0^{1,p}(B)$, das definições dos números c em (3.27) e d em (3.52), deduzimos que*

$$c \leq d. \tag{3.54}$$

Lema 3.3.2 *Para $R > 1$, toda solução positiva w do problema modificado (3.21) tal que $\Phi(w) = c$ satisfaz a estimativa*

$$\|w\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{dS}{C_*},$$

onde
$$C_* = C_*(p,\theta,k) = \left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right) - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2\theta}\right)\frac{1}{k}\right] > 0$$
e S é a melhor constante que verifica
$$\|u\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le S\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \ \textit{para todo } u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Considerando a primeira desigualdade em (3.32) para o ponto crítico w, temos
$$C_* \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^p + V(x)|f(w)|^p]\, dx \le \Phi(w) - \frac{1}{\theta}\Phi'(w)w = c,$$
Assim, a estimativa segue diretamente de (3.54) e pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. ■

Observação 3.3.3 *No lema precedente $\|w\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$ é limitada por uma constante que não depende de $R > 1$.*

Com o objetivo de obtermos a limitação na norma L^∞, vamos considerar para uma solução w do problema modificado (3.21), a função $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$L(x,t) = \begin{cases} q(f(t))f'(t), & \text{se } |x| < R \text{ ou } q(f(t)) \le \frac{V(x)}{k}|f(t)|^{p-2}f(t) \\ 0, & \text{se } |x| \ge R \text{ e } q(f(t)) > \frac{V(x)}{k}|f(t)|^{p-2}f(t) \end{cases} \tag{3.55}$$
e a seguinte função mensurável não-negativa
$$b(x) = \begin{cases} \frac{1}{|w|^{p-2}w}V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w), & \text{em } T \\ \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{|w|^{p-2}w}V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w), & \text{em } T^C, \end{cases}$$
onde $T = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R \text{ ou } q(f(w)) \le \frac{V(x)}{k}|f(w)|^{p-2}f(w)\}$ e $T^C = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \ge R \text{ e } q(f(w)) > \frac{V(x)}{k}|f(w)|^{p-2}f(w)\}$.
Note que w satisfaz a uma equação tal como (A.1) do apêndice A. Pelo Lema 3.1.1 e da relação (3.7), deduzimos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que
$$|L(x,t)| \le C_1|t|^{p^*-1}.$$

Além disso, a função L definida em (3.55) também verifica as condições

(3.L_1) $|L(x,t)| \le c_0|t|^{p^*-1}$, para t suficientemente pequeno,

(3.L_2) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{L(x,t)}{|t|^{p^*-1}} = 0.$

De maneira análoga ao Lema 1.4.4, essas condições resulta que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C = C_\varepsilon > 0$ tal que
$$|L(x,t)| \le \varepsilon|t|^{p^*-1} + C_\varepsilon|t|^{p-1}, \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R},$$
o que nos possibilita obtermos o resultado a seguir.

Lema 3.3.4 *Sejam $N > p$ e $\beta = N/(N-p)$. Então, existe uma constante $C = C(N,p) > 0$, tal que*

$$\|w\|_{L^{p^*\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|w\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Este lema implica que

$$w \in L^r(\mathbb{R}^N),$$

com $r = p^*\beta > p^*$. Aplicando o Corolário A.3, existe uma constante $M = M(N, p, ||w||_{L^r(\mathbb{R}^N)}) > 0$ tal que

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M\|w\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)},$$

para qualquer $w \in E \cap L^r(\mathbb{R}^N)$ solução fraca do problema

$$-\Delta_p w + b(x)|w|^{p-2}w = L(x,w) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde as funções L e b foram definidas acima. Portanto, toda solução fraca w do problema modificado (3.21) tal que $\Phi(w) = c$ verifica a estimativa

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M_0, \tag{3.56}$$

onde $M_0 = M\left(\dfrac{dS}{C_*}\right)^{1/p}$. ■

Observação 3.3.5 *Note que a constante M_0 obtida na estimativa (3.56) é independente de $R > 1$ e da solução w.*

Em vista do que foi obtido para o funcional Φ, podemos resumir os resultados anteriores na seguinte proposição:

Proposição 3.3.6 *O problema modificado (3.21) possui uma solução positiva w com $\Phi(w) = c$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2.7, temos que o funcional Φ possui um ponto crítico $w \in E \setminus \{0\}$ no nível c. Logo, para todo $\varphi \in E$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w))f'(w)\varphi dx.$$

Tomando $\varphi = w^-$, onde $w^- = \min\{w, 0\}$, e desde que $h(x,t) = 0$ para todo $t \leq 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w^-|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^{p-2}f(w)f'(w)w^- dx = 0.$$

Como $f(w)w^- \geq 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w^-|^p = 0.$$

Logo, podemos concluir que $w^- = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e, portanto $w = w^+ \geq 0$. Por outro lado, sabemos que $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como consequência de um resultado de regularidade devido a Tolksdorf [47] (Veja também DiBenedetto [27]), temos que $w \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N), 0 < \alpha < 1$. O resultado segue, por uma desigualdade do tipo Harnack (veja [48]). ■

Lema 3.3.7 *Para $R > 1$, qualquer solução positiva w do problema modificado (3.21) tal que $\Phi(w) = c$ satisfaz*

$$w(x) \le \frac{R^{\frac{N-p}{p-1}} \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}} \le \frac{R^{\frac{N-p}{p-1}} M_0}{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}}, \quad \textit{para todo} \quad |x| \ge R.$$

Demonstração. Considere u a função $p-$harmônica definida por

$$u(x) = \frac{R^{\frac{N-p}{p-1}} M_0}{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}}.$$

Devido a estimativa (3.56), temos

$$w(x) \le u(x) \;\; \text{para} \;\; |x| = R.$$

Daí, segue que

$$(w-u)^+ = 0 \;\; \text{para} \;\; |x| = R,$$

e, consequentemente a função dada por

$$\phi = \begin{cases} (w-u)^+, & \text{if } \; |x| \ge R \\ 0, & \text{if } \; |x| < R \end{cases}$$

pertence a $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, temos que $\phi \in E$. Considerando ϕ como a função teste e usando o fato que w é solução do problema modificado (3.21), teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(w)|^{p-2} f(w) f'(w) \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w)) f'(w) \phi dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \phi dx = \int_{B_R^C(0)} h(x, f(w)) f'(w) \phi dx - \int_{B_R^C(0)} V(x)|f(w)|^{p-2} f(w) f'(w) \phi dx,$$

e pela propriedade (h_2) da função h definida na Seção 3.2, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \phi dx \le \left(\frac{1}{k} - 1\right) \int_{B_R^C(0)} V(x) f(w) f'(w) \phi dx \le 0. \tag{3.57}$$

Visto que

$$\Delta_p u = 0 \text{ em } (\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)), \quad \phi = 0 \text{ para } |x| = R \;\text{ e }\; \phi \ge 0,$$

segue que

$$\int_{B_R^C(0)} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx = 0.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx = \int_{B_R^C(0)} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx = 0. \tag{3.58}$$

Considerando os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}^N ; |x| \ge R \text{ and } w(x) > u(x)\}$ e $B = \mathbb{R}^N \setminus A$, resulta que

$$\phi = \begin{cases} w - u, & \text{em } \; A \\ 0, & \text{em } \; B. \end{cases}$$

Por (3.57) e (3.58), obtemos, para todo $2 \leq p < N$, que

$$\int_A \left[|\nabla w|^{p-2}\nabla w - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right][\nabla w - \nabla u]\, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx \leq 0. \quad (3.59)$$

Uma vez que estamos considerando $2 \leq p < N$, usando a desigualdade de Tartaan (3.45), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx = \int_A |\nabla w - \nabla u|^p dx \leq$$

$$C \int_A \left[|\nabla w|^{p-2}\nabla w - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right][\nabla w - \nabla u]\, dx \leq 0. \quad (3.60)$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx \leq 0 \ \text{ para todo } \ 2 \leq p < N.$$

Consequentemente, $\phi = 0$, em $\mathbb{R}^N$, o que implica que $(w - u)^+ = 0$, em $|x| \geq R$. Disto concluímos que $w \leq u$ em $|x| \geq R$ e o lema está provado. ■

3.4 Resultados de Existência

Nesta seção provaremos os Teoremas 3.0.3 e 3.0.4, os quais garantem a existência de solução para a equação (3.1).

3.4.1 Prova do Teorema 3.0.3

Na Proposição 3.3.6 mostramos que o problema modificado (3.21) possui uma solução positiva $w \in E$. Além disso, pelo Lema 3.3.4, resultou que a mesma é limitada na norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Note que, pela definição da função h, para mostrarmos que w também é solução do problema (3.6) é suficiente provarmos a desigualdade

$$q(f(w)) \leq \frac{V(x)}{k}|f(w)|^{p-2}f(w) \ \text{ em } \ |x| \geq R,$$

para toda $w \in E$ solução do problema modificado (3.21). Pela desigualdade (3.7), temos

$$\frac{q(f(w))}{|f(w)|^{p-2}f(w)} = \frac{q(f(w))f(w)}{|f(w)|^p} \leq c_0 \frac{|w|^{p^*}}{|f(w)|^p}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $||w||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ é uniformemente limitada e pela propriedade (9) do Lema 3.1.1, deduzimos que

$$\frac{q(f(w))}{|f(w)|^{p-2}f(w)} \leq C_1 |w|^{p^*-p}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Usando a relação obtida no Lema 3.3.7, segue que

$$\frac{q(f(w))}{|f(w)|^{p-2}f(w)} \leq C_1 \frac{R^{\frac{p^2}{p-1}}(M_0)^{p^2/(N-p)}}{|x|^{\frac{p^2}{p-1}}}, \ \text{ em } \ |x| \geq R.$$

Fixando $\Lambda^* = kC_1\,(M_0)^{p^2/(N-p)}$ e $\Lambda \geq \Lambda^*$ implica que

$$\frac{q(f(w))}{|f(w)|^{p-2}f(w)} \leq \frac{1}{k}\Lambda^* \frac{R^{\frac{p^2}{p-1}}}{|x|^{\frac{p^2}{p-1}}} \leq \frac{1}{k}\Lambda \frac{R^{\frac{p^2}{p-1}}}{|x|^{\frac{p^2}{p-1}}}.$$

Segue-se a partir da hipótese (V_{Λ_p}) que

$$\frac{q(f(w))}{|f(w)|^{p-2}f(w)} \leq \frac{1}{k}V(x) \quad \text{em} \quad |x| \geq R.$$

Assim, w é uma solução clássica do problema (3.6). Segue da Proposição 3.1.3, que $u = f(w)$ é uma solução clássica para o problema original (3.1). ■

3.4.2 Prova do Teorema 3.0.4

Visto que a condição (q_1) é mais fraca do que $(\tilde{q}_1)$, a prova é a mesma até o Lema 3.3.7. Para concluirmos a prova podemos usar a propriedade (7)-Lema 3.1.1 e a hipótese $(\tilde{q}_1)$ para obtermos

$$\frac{q(f(w))}{|f(w)|^{p-2}f(w)} \leq C_1|w|^{p^*-p/2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Procedendo como antes e usando a condição $(\tilde{V}_{\Lambda_p})$ concluímos o resultado. ■

Apêndices

Apêndice A

Estimativa na norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Neste apêndice, apresentamos resultados baseados em Brezis e Kato [20], que foram cruciais nos argumentos usados nos capítulos da tese para obtenção dos resultados de existência de solução dos problemas propostos. Estes resultados estabelecem uma importante estimativa envolvendo a norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ de uma solução de um problema semilinear. A prova é análoga à da Proposição 5.3 em [5] para o caso em que $p = 2$ e também à do Lema 4.3 em [13] para um operador que inclui o p-Laplaciano como um caso particular. Apresentamos aqui a prova para deixar o trabalho mais completo.

Proposição A.1 *Sejam $\ell \in L^q(\mathbb{R}^N), p \geq 2, pq > N$, e $w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema*

$$-\Delta_p w + b(x)|w|^{p-2}w = L(x, w) \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{A.1}$$

onde $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando

$$|L(x, s)| \leq \ell(x)|s|^{p-1}, \ \textit{para todo } s > 0 \textit{ e para todo } x \in \mathbb{R}^N$$

e b é uma função não-negativa em $\mathbb{R}^N$. Então, $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ existe uma constante $M = M(q, ||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^N)}) > 0$ tal que

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M\|w\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $\beta > 1$ considere os conjuntos $A_m = \{x \in \mathbb{R}^N; |w(x)|^{\beta-1} \leq m\}$ e $B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m$. Defina

$$w_m = \begin{cases} w|w|^{p(\beta-1)}, & \text{em } \ A_m, \\ m^p w, & \text{em } \ B_m. \end{cases}$$

Note que $w_m \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N), w_m \leq |w|^{p\beta-p+1}$ e

$$\nabla w_m = \begin{cases} (p\beta - p + 1)|w|^{p(\beta-1)}\nabla w, & \text{em } \ A_m, \\ m^p \nabla w, & \text{em } \ B_m. \end{cases} \tag{A.2}$$

Usando w_m como função teste, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla w_m + b(x)|w|^{p-2}ww_m\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} L(x,w)w_m dx. \tag{A.3}$$

Por (A.2), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla w_m dx = (p\beta - p + 1)\int_{A_m} |w|^{p(\beta-1)}|\nabla w|^p dx + m^p \int_{B_m} |\nabla w|^p dx. \tag{A.4}$$

Agora, considere

$$z_m = \begin{cases} w|w|^{\beta-1}, & \text{em } A_m, \\ mw, & \text{em } B_m. \end{cases}$$

Observe que

$$\nabla z_m = \begin{cases} \beta|w|^{\beta-1}\nabla w, & \text{in } A_m, \\ m\nabla w, & \text{in } B_m, \end{cases} \tag{A.5}$$

de onde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^p dx = \beta^p \int_{A_m} |w|^{p(\beta-1)}|\nabla w|^p dx + m^p \int_{B_m} |\nabla w|^p dx. \tag{A.6}$$

Por (A.4) e (A.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla z_m|^p - |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla w_m dx\right) dx = (\beta^p - p\beta + p - 1)\int_{A_m} |w|^{p(\beta-1)}|\nabla w|^p dx \tag{A.7}$$

Ainda por (A.4), resulta que

$$\int_{A_m} |w|^{p(\beta-1)}|\nabla w|^p dx \leq \frac{1}{p\beta - p + 1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla w_m dx. \tag{A.8}$$

De (A.7) e (A.8),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^p dx \leq \frac{\beta^p}{p\beta - p + 1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla w_m dx \tag{A.9}$$

Visto que, $|z_m|^p = |w|^{p-2}ww_m$ em $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ e $\beta > 1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla z_m|^p + b(x)|z_m|^p\right] dx \leq \beta^p \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla w_m dx + b(x)|w|^{p-2}ww_m\right] dx.$$

Usando (A.3), e visto que w é solução de (A.1), teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla z_m|^p + b(x)|z_m|^p\right] dx \leq \beta^p \int_{\mathbb{R}^N} L(x,w)w_m dx. \tag{A.10}$$

A seguir, S denota a melhor constante de sobolev que verifica

$$\|u\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \forall u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Da definição de z_m e da hipótese $|L(x,s)| \leq \ell(x)|s|^{p-1}$ para todo $s > 0$, deduzimos

$$\left[\int_{A_m} |z_m|^{p^*} dx\right]^{p/p^*} \leq S\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^p dx \leq S\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} L(x,w)w_m dx,$$

isto é,

$$\left[\int_{A_m}|z_m|^{p^*}dx\right]^{p/p^*}\leq S\beta^p\int_{\mathbb{R}^N}(x)|w|^{p-2}ww_m dx=S\beta^p\int_{\mathbb{R}^N}\ell(x)|z_m|^p dx.$$

Se $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q}=1$, pela desigualdade de Hölder,

$$\left[\int_{A_m}|z_m|^{p^*}dx\right]^{p/p^*}\leq S\beta^p||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|z_m|^{pq_1}dx\right]^{1/q_1}.$$

Por outro lado, visto que $|z_m|=|w|^\beta$ em A_m e $|z_m|\leq|w|^\beta$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, obtemos

$$\left[\int_{A_m}|w|^{\beta p^*}dx\right]^{p/p^*}\leq S\beta^p||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{pq_1\beta}dx\right]^{1/q_1}.$$

Passando o limite de $m\to+\infty$, segue do Teorema da Convergência Monótona

$$||w||^{\beta p}_{L^{\beta p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq S\beta^p||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}||w||^{\beta p}_{L^{\beta pq_1}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}$$

e, consequentemente,

$$||w||_{L^{\beta p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq\beta^{\frac{1}{\beta}}\left(S||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right)^{\frac{1}{p\beta}}||w||_{L^{\beta pq_1}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.\tag{A.11}$$

Desde que $pq>N$ e $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q}=1$, resulta que, $q_1<\frac{N}{N-p}$. Seja $\sigma=\frac{N}{q_1(N-p)}>1$. Quando $\beta=\sigma$ em (A.11), temos $\beta pq_1=p^*$ e

$$||w||_{L^{p^*\sigma}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq\sigma^{\frac{1}{\sigma}}\left(S||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right)^{\frac{1}{p\sigma}}||w||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.\tag{A.12}$$

Quando $\beta=\sigma^2$ em (A.11), temos: $\beta pq_1=p^*\sigma$ e

$$||w||_{L^{p^*\sigma^2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq\sigma^{\frac{2}{\sigma^2}}\left(S||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right)^{\frac{1}{p\sigma^2}}||w||_{L^{p^*\sigma}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.\tag{A.13}$$

De (A.12) e (A.13), teremos

$$||w||_{L^{p^*\sigma^2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq\sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}}\left(S||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)}||w||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.\tag{A.14}$$

Continuando com o processo de iteração, β em (A.11) quando σ^j , mostramos que

$$||w||_{L^{p^*\sigma^j}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq\sigma^{\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}+\frac{3}{\sigma^3}+\ldots+\frac{j}{\sigma^j}\right)}\left(S||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^3}+\ldots+\frac{1}{\sigma^j}\right)}||w||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.\tag{A.15}$$

Uma vez que,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\sigma^j}=\frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}\quad\text{e}\quad\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma^j}=\frac{1}{\sigma-1},$$

resulta de (A.15),

$$||w||_{L^r(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\leq\sigma^{\frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}}\left(S||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)}||w||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})},\tag{A.16}$$

para todo $r\geq p^*$. Recordando que

$$||w||_{L^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}=\lim_{r\to+\infty}||w||_{L^r(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})},$$

podemos concluir que a Proposição A.1 é válida para

$$M = \sigma^{\frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}} \left(S||\ell||_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)},$$

onde

$$\sigma = \frac{N(q-1)}{q(N-p)}.$$

■

Observação A.2 *Aqui, é muito importante observarmos que a constante M obtida na Proposição A.1 não depente da função b.*

Como consequência, mostramos que se w é limitada na norma $L^r(\mathbb{R}^N)$, para algum $r > p^*$, então $||w||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ é limitada, mesmo no caso crítico. Porém, salientamos que no nosso trabalho, conseguimos esta limitação no crescimento quasicrítico nos Capítulos 1 e 3 (Veja Lemas 1.4.4 e 3.3.4) e um tipo de crescimento subcrítico no Capítulo 2 (Veja Lema 2.3.3) . Mais uma vez, enfatizamos que a dificuldade, para obtermos versões dos resultados obtidos nos capítulos 1 e 3 com crescimento crítico, reside em conseguirmos a limitação uniforme na norma $L^r(\mathbb{R}^N)$, para algum $r > p^*$.

Corolário A.3 *Sejam $N > p$, $r > p^*$ e*

$$|L(x,s)| \leq C_0|s|^{p^*-1}, \ \textit{para todo } s \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Então, existe uma constante $M = M(C_0, ||w||_{L^r(\mathbb{R}^N)}) > 0$ tal que

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M\|w\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)},$$

para qualquer $w \in E \cap L^r(\mathbb{R}^N)$ solução fraca do problema (A.1).

Demonstração. A prova é uma aplicação direta da Proposição A.1, pois podemos observar que

$$L(x,w) \leq \ell(x)|w|^{p-1} \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde

$$|\ell(x)| = C_0|w|^{p^*-p}.$$

Em seguida, verificamos que $\ell \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q = r/(p^* - p)$ e observamos que

$$pq > N \text{ se, e somente se, } r > p^*.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] J. F. L. Aires, M. A. S. Souto, Existence of solutions for a quasilinear Schrödinger equation with vanishing potentials, *J. Math. Anal. Appl.*, **416** (2014), 924-946.

[2] J. F. L. Aires, M. A. S. Souto, Equation with positive coefficient in the quasilinear term and vanishing potential, *to appear in Topol. Methods Nonlinear Anal.*

[3] C. O. Alves, G. M. Figueiredo, Multiple Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation on $\mathbb{R}^N$, *Acta Appl. Math.,* (2014), DOI 10.1007/s10440-014-9942-8.

[4] C. O. Alves, Y. Wang, Y. Shen, Soliton solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations with a parameter, arXiv:1309.4606 [math.AP].

[5] C. O. Alves, M. A. S. Souto, Existence of solutions for a class of elliptic equations in R^N with vanishing potentials, *J. Differential Equations,* **252** (2012), 5555-5568.

[6] C. O. Alves, Marco A. S. Souto, Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity, *J. Differential Equations*, **254** (2013), 1977-1991.

[7] C. O. Alves, G. M. Figueiredo, U. B. Severo, Multiplicity of positive solutions for a class of quasilinear problems, *Adv. Differential Equations,* **252** (2009), 911-942.

[8] C. O. Alves, G. M. Figueiredo, U. B. Severo, A Result of Multiplicity of Solutions for a Class of Quasilinear Equations, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,* **55** (2012), 291-309.

[9] A. Ambrosetti, Z.-Q. Wang, Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials, *Differential Integral Equations*, **18** (2005), 1321-1332.

[10] A. Ambrosetti, V. Felli, A. Malchiodi, Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity, *J. Eur. Math. Soc.*, **7** (2005), 117-144.

[11] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, D. Ruiz, Bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity, *J. Anal. Math.*, **98** (2006), 317-348.

[12] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.,* **262** (1973), 349-381.

[13] W. D. Bastos, O. H. Miyagaki, R. S. Vieira, Existence of solutions for a class of degenerate quasilinear elliptic equation in RN with vanishing potentials, *Boundary Value Problems,* **92** (2013).

[14] V. Benci, G. Cerami, Existence of positive solutions of the equation $-\Delta u + a(x)u = u^{(N+2)/(N-2)}$, *J. Funct. Anal.*, **88** (1) (1990), 90-117.

[15] V. Benci, C. R. Grisanti, A. M. Micheletti, Existence and non existence of the ground state solution for the nonlinear Schr̈odinger equations with $V(\infty) = 0$, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **26** (2005), 203-219.

[16] V. Benci, C. R. Grisanti, A. M. Micheletti, Existence of solutions for the nonlinear Schrödinger equation with $V(\infty) = 0$, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, **66** (2005), 53-65.

[17] H. Berestyckit, P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations, I - existence of a ground state, *Arch. Rat. Mech. Analysis,* **82** (1983), 313-346.

[18] C. Borovskii, A. Galkin, Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter, *J. Exp. Theor. Phys.*, **77** (1983), 562-573.

[19] D. Bonheure, J. Van Schaftingen, Ground states for nonlinear Schrödinger equation with potential vanishing at infinity, *Annali Math. Pura Appl.*, **189** (2010), 273-301.

[20] H. Brezis, T. Kato, Remarks on the Schrödinger operator with regular complex potentials, *J. Math. Pures et Appl.,* **58** (1979), 137-151.

[21] H. Brezis, E. Lieb, A Relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *P. American Mathematical Society,* **88** (1983), 486-490.

[22] L. Brüll, H. Lange, Köln, Stationary, Oscillatory and Solitary waves type solutions of singular nonlinear Schrödinger equations, *Math. Mech. in the Appl. Sci.*, **8** (1986), 559-575.

[23] X. L. Chen, R. N. Sudan, Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993), 2082-2085.

[24] M. Colin, L. Jeanjean, Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach, *Nonlinear Analysis,* **56** (2004), 213-226.

[25] A. De Bouard, J. Saut, Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.*, **189** (1997), 73-105.

[26] M. Del Pino, P.Felmer, Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Calc. Var. Partial Differential Equations,* **4** (1996), 121-137.

[27] E. DiBenedetto, Local regularity C^{1+a} of weak solutions of degenerate elliptic equations, *Nonlinear Analysis,* **7** (1983), 827-850.

[28] J. M. B. do Ó, Olímpio H. Miyagaki, Sérgio H.M. Soares, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations with critical growth, *J. Differential Equations,* **248** (2010), 722-744.

[29] J. M. B. do Ó, U. Severo, Quasilinear Schrödinger quations involving concave and convex nonlinrearities, *Comm. Pure Appl. Anal.,* **8** (2009), 621–644.

[30] X. D. Fang, A. Szulkin, Multiple solutions for a quasilinear Schrödinger equation, *J. Differential Equations,* **254** (2013), 2015-2032.

[31] M. Ghimenti, A. M. Micheletti, Existence of minimal nodal solutions for the Nonlinear Schrödinger equations with $V(\infty) = 0$, *Advances in Differential Equations*, **11** no.12 (2006), 1375-1396.

[32] S. Kurihura, Large-amplitude quasi-solitons in superfluids films, *J. Phys. Soc. Japan*, **50** (1981), 3262-3267.

[33] H. Lange, M. Poppenberg, H. Teisniann, Nash-More methods for the solution of quasilinear Schrödinger equations, *Comm. Partial Differential Equation*, **24** (7&8) (1999), 1399-1418.

[34] P. L. Lions, The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part I and II, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Lineairé*, (1984), 109-145, 223-283.

[35] X. Liu, J. Liu, Z. Q. Wang, Ground states for quasilinear Schrödinger equations with critical growth, *Calc. Var.,* **46** (2013), 641-669.

[36] J. Liu, Y. Wang, Z. Wang, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II, *J. Differential Equations,* **187** (2003), 473-493.

[37] J. Liu, Y. Wang, Z. Wang, Solutions for quasilinear Schrödinger Equations via the Nehari Method, *Comm. Partial Differential Equation,* **29** (2004), 879-901.

[38] A. Moameni, Existence of soliton solutions for a quasilinear Schrödinger equation involving critical exponent in $\mathbb{R}^N$, *J. Differential Equations,* **229** (2006), 570-587.

[39] I. Peral, Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian, *Lecture Notes at the Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations at ICTP of Trieste,* (1997).

[40] M. Poppenberg, K. Schmitt, Z. Q. Wang, On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations, *Lecture Notes in Mathematics,* **14** (2002), 329-344.

[41] D. Ruiz, G. Siciliano, Existence of ground states for a nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinearity,* **23** (2010), 1221-1233.

[42] Y. Shen, Y. Wang, Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations, *Nonlinear Analysis*, **80** (2013), 194-201.

[43] U. B. Severo, Estudo de uma classe de equacões de Schrödinger quase-lineares, *Tese de Doutorado*, *Unicamp*, (2007).

[44] U.B. Severo, Existence of weak solutions for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian, *Electron. J. Diff. Equations,* **56** (2008), 1-16.

[45] E. A. B. Silva, G. F. Vieira, Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth, *Nonlinear Analysis,* **72** (2010), 2935-2949.

[46] E. A. B. Silva, G. F. Vieira, Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth, *Calc. Var.,* **39** (2010), 1-33.

[47] P. Tolksdorf, Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations, *J. Differential Equations,* **51** (1984), 126-150.

[48] N. S. Trudinger, On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 721-747.

[49] Y. Wang, W. Zou, Bound states to critical quasilinear Schrödinger equations, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.,* **19** (2012), 19-47.

[50] M. Yang, Existence of solutions for a quasilinear Schrödinger equation with subcritical nonlinearities, *Lecture Notes in Mathematics,* **75** (2012), 5362-5373.

[51] M. Yang, Y. Ding, Existence of semiclassical states for a quasilinear Schrödinger equation with critical exponent in $\mathbb{R}^N$, *Annali Math. Pura Appl.,* (2012), 787-809.

[52] Y. Wang, J. Yang, A. A. Abdelgadir, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, *J. Math. Phys.,* **54** (2013).

[53] M. Willem, *Minimax Theorems* , Birkhäuser Boston, MA, 1996.