Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre os Teoremas de Bohnenblust–Hille

por

Daniel Núñez Alarcón

João Pessoa - PB
Março/2014

Sobre os Teoremas de Bohnenblust–Hille

por

Daniel Núñez Alarcón †

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Março/2014

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes

Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Março/2014

Resumo

Os teoremas de Bohnenblust–Hille, demonstrados em 1931 no prestigioso jornal Annals of Mathematics, foram utilizados como ferramentas muito úteis na solução do famoso *Problema da convergência absoluta de Bohr*. Após um longo tempo esquecidos, estes teoremas têm sido bastante explorados nos últimos anos. Este último quinquênio experimentou o surgimento de várias obras dedicadas a estimar as constantes de Bohnenblust–Hille ([13, 18, 20, 26, 27, 39, 42, 44, 46, 53]) e também conexões inesperadas com a Teoria da Informação Quântica apareceram (ver, por exemplo, [38]). Há, de fato, quatro casos para serem investigados: polinomial (casos real e complexo) e multilinear (casos real e complexo). Podemos resumir em uma frase as principais informações dos trabalhos recentes: as constantes das desigualdades de Bohnenblust–Hille são, em geral, extraordinariamente menores do que as primeiras estimativas tinham previsto. Neste trabalho apresentamos algumas das nossas pequenas contribuições ao estudo das constantes nas desigualdades de Bohnenblust-Hille, os quais encontram-se contidos em ([40, 41, 42, 44]).

Palavras-chave: Desigualdade de Bohnenblust-Hille; Desigualdade 4/3 de Littlewood; Operadores Multilineares; Operadores Múltiplo Somantes; Polinômios Homogêneos.

Abstract

The Bohnenblust–Hille theorems, proved in 1931 in the prestigious journal Annals of Mathematics, were used as very useful tools in the solution of the famous "Bohr's absolute convergence problem". After a long time overlooked, these theorems have been explored in the recent years. Last quinquennium experienced the rising of several works dedicated to estimate the Bohnenblust–Hille constants ([13, 18, 20, 26, 27, 39, 42, 44, 46, 53]) and also unexpected connections with Quantum Information Theory appeared (see, e.g., [38]). There are in fact four cases to be investigated: polynomial (real and complex cases) and multilinear (real and complex cases). We can summarize in a sentence the main information from the recent preprints: the Bohnenblust–Hille constants are, in general, extraordinarily smaller than the first estimates predicted. In this work, we present some of our small contributions to the study of the constants of the inequalities Bohnenblust-Hille, these are contained in ([40, 41, 42, 44]).

Keywords: Bohnenblust-Hille's Inequality; Littlewood's 4/3 Inequality; Multilinear Operators; Multiplo Summing Operators; Homogeneous Polynomials.

Prólogo

O Problema da Convergência Absoluta de Bohr

Uma série de Dirichlet comum é uma série da forma

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

onde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathbb{C}$, e $s \in \mathbb{C}$.

As séries de Dirichlet desempenham um papel importante na teoria analítica dos números e foram chamadas assim em homenagem ao célebre matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Em contraste com as séries de potências (nas quais os domínios de convergências absoluta, condicional e uniforme são círculos e todos estes coincidem), os domínios maximais, onde as séries de Dirichlet convergem condicionalmente, uniforme ou absolutamente são semiplanos ($\operatorname{Re} s > \sigma$) e, em geral, os semiplanos de convergências absoluta, condicional e uniforme *não* coincidem.

Mais precisamente, para cada série de Dirichlet $F(s)$, chamamos $\sigma = \sigma_c$, σ_u ou σ_a de abscissas de convergência condicional, uniforme ou absoluta respectivamente; σ_a é definido como o ínfimo dos $r \in \mathbb{R}$ tais que se $\operatorname{Re} s > r$, tem-se que $F(s)$ converge absolutamente e, mudando o advérbio "absolutamente", encontramos definições análogas para σ_c e σ_u.

De modo geral, para uma série de Dirichlet $F(s)$, temos a seguinte relação entre as abscissas de convergência:

$$\sigma_c \leq \sigma_u \leq \sigma_a. \tag{1}$$

O exemplo mais famoso das séries de Dirichlet é

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a função zeta de Riemann.

Para $\zeta(s)$, vale $\sigma_c = \sigma_u = \sigma_a = 1$. Com efeito, é fácil ver que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ converge absolutamente se $\operatorname{Re} s > 1$. Basta observar que $|1/n^s| = 1/n^{\operatorname{Re} s}$ e, como para $x \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ converge quando $x > 1$, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ converge em valor absoluto se $\operatorname{Re} s > 1$. Por outro lado, observemos que qualquer semiplano que contenha o semiplano acima mencionado não vai ser um domínio de convergência condicional para $\zeta(s)$. De fato, basta lembrar que se $s = 1$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

transforma-se na conhecida série harmônica, a qual é divergente.

Um outro exemplo de uma série de Dirichlet é $H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / n^s$, a função ζ de Riemann alternada. Logicamente, esta série converge absolutamente no mesmo semiplano que o faz a função ζ de Riemann. Assim, para $H(s)$, temos $\sigma_a = 1$.

Porém, as abscissas de convergência condicional de ζ e H não coincidem. Mais exatamente, a abscissa de convergência condicional de H é zero. Com efeito, a convergência condicional para $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 0$ segue da generalização de Abel-Dirichlet-Dedekind (veja [28, Pág 143]) das séries alternadas, a qual implica em que se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para zero e de variação limitada, então, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} X_n$ converge. Em nosso caso, a sequência $1/n^s$ tem variação limitada, pois

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| = O\left(\frac{1}{n^{1+\operatorname{Re} s}} \right)$$

e, como foi dito antes, a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\operatorname{Re} s}$ converge para $1+\operatorname{Re} s > 1$ (i.e. $\operatorname{Re} s > 0$).

Assim, uma série de Dirichlet pode convergir condicionalmente mas não absolutamente. A análise feita acima, para a função ζ de Riemann alternada, indica que a largura máxima da faixa vertical em que uma série de Dirichlet converge condicionalmente, mas não absolutamente, é maior ou igual do que 1.

Com um pouco mais de esforço, podemos ver que a largura máxima da faixa vertical em que uma série de Dirichlet converge condicionalmente, mas não absolutamente, é exatamente 1. Com efeito, se, para $s \in \mathbb{C}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ converge, segue que $(a_n/n^s)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero e, assim, é limitada, i.e. $|a_n/n^s| \leq C$ para um certo $C > 0$. Finalmente, se $w \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re} w > \operatorname{Re} s + 1$, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^w}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{w-s}} \cdot \frac{a_n}{n^s}\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{\operatorname{Re}(w-s)}},\end{aligned}$$

e, como $\operatorname{Re}(w-s) > 1$, conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^w}\right|$ converge. Logo, a largura máxima da faixa vertical em que uma série de Dirichlet converge condicionalmente, mas não absolutamente, é 1.

Se denotamos com a letra T a largura máxima da faixa vertical na qual uma série de Dirichlet converge uniformemente, mas não absolutamente, o que pode ser dito com respeito a T? Está questão foi considerada em 1913 ([10]) por Harald Bohr.

Contrariamente ao feito acima, não é nada trivial dar resposta a este interrogante. De (1), segue que $T \leq 1$. Harald Bohr conhecia muito mais do que isso, ele sabia que a largura máxima da faixa vertical na qual uma série de Dirichlet converge uniformemente, mas não absolutamente, era menor ou igual a $\frac{1}{2}$. Porém, Bohr não conseguiu nenhum exemplo de uma série de Dirichlet tal que $(\sigma_a - \sigma_u) \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Qual é a largura máxima T da faixa vertical na qual uma série de Dirichlet converge uniformemente, mas não absolutamente? Esta questão é conhecida como o Problema da Convergência Absoluta de Bohr e intrigou a comunidade matemática por quase duas décadas.

Até que em 1931 Einar Hille e Henri Frédéric Bohnenblust, em um excelente trabalho (considerado em [35] pelo eminente matemático estado-unidense Henri Berge Helson de: "a remarkable piece of work"), resolveram o interrogante.

Em um primeiro passo, eles generalizaram a desigualdade 4/3 de Littlewood:

Teorema 0.0.1 (Desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille) *Para cada* m*, existe uma constante* $C_{\mathbb{C},m} \geq 1$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N} |U(e_{i_1},...,e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_{\mathbb{C},m} \|U\| \tag{2}$$

para toda forma m-linear $U : l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{C}$ *e para qualquer inteiro positivo* N *com* $C_{\mathbb{C},m} = m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$.

No mesmo trabalho, Bohnenblust e Hille também demonstraram a seguinte desigualdade para polinômios homogêneos:

Teorema 0.0.2 (Desigualdade Polinomial de Bohnenblust-Hille) *Para cada* m*, existe uma constante* $D_{\mathbb{C},m} \geq 1$ *tal que, para todo polinômio* $m-$*homogêneo,*

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$$

sobre $\mathbb{C}^N$*, tem-se*

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_{\mathbb{C},m} \|P\|, \tag{3}$$

onde $D_{\mathbb{C},m} = m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}} \frac{m^m}{(m!)^{\frac{m+1}{2m}}}$.

Com ajuda desses dois teoremas, finalmente, Bohnenblust e Hille resolveram o problema da convergência absoluta de Bohr. De fato, eles provaram em [11] que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existem séries de Dirichlet para as quais:

$$\sigma_a - \sigma_u = \frac{m-1}{2m}.$$

Assim, a largura máxima da faixa vertical na qual uma série de Dirichlet converge uniformemente, mas não absolutamente, é:

$$T = \frac{1}{2}.$$

É nestes dois teoremas, conhecidos como desigualdades de Bohnenblust–Hille, que encontra-se enquadrado o presente trabalho.

Sumário

Introdução

As desigualdades polinomial e multilinear de Bohnenblust–Hille têm aplicações importantes em diferentes áreas da Matemática e da Física tais como Teoria dos Operadores, Análise Harmônica, Análise Complexa, Análise de Fourier, Teoria Analítica dos Números e Teoria da Informação Quântica (ver [20, 27] e referências ali contidas).

Desde sua prova, no *Annals of Mathematics* em 1931, as desigualdades (multilinear e polinomial) de Bohnenblust–Hille foram ignoradas por décadas (ver [11]) e só voltaram aos holofotes nos últimos anos, com obras de A. Defant, L. Frerick, J. Ortega -Cerdá, M. Ounaïes, D. Popa, U. Schwarting, K. Seip, entre outros.

A desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille prova a existência de uma função positiva $D : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ tal que, para todo polinômio m homogêneo P em $\mathbb{C}^N$, a $\ell_{\frac{2m}{m+1}}$-norma do conjunto de coeficientes de P é limitada superiormente por $D(m)$ vezes a *sup*-norma de P no polidisco unitário. Um resultado análogo é válido se substituirmos $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$.

As estimativas iniciais para $D(m)$ apresentam um crescimento da ordem $m^{m/2}$ e só em 2011 ([18]) a importância dessa desigualdade foi redescoberta e as estimativas para $D(m)$ foram substancialmente melhoradas.

No documento acima mencionado, é provado que $D(m)$ podem ser escolhida hiper-contractiva, mais precisamente,

$$D(m) \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1} \sqrt{m} \left(\sqrt{2}\right)^{m-1}. \tag{4}$$

Esse resultado, além da sua importância matemática, tem marcantes aplicações em diferentes contextos (ver [18]).

A versão multilinear da desigualdade de Bohnenblust–Hille tem uma similar, *mutatis mutandis,* formulação:

Desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille Para todo inteiro positivo $m \geq 1$, existe uma sequência de escalares positivos $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ em $[1, \infty)$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left| U(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \sup_{z_1,\ldots,z_m \in \mathbb{D}^N} \left| U(z_1, \ldots, z_m) \right|$$

para toda forma m-linear $U : \mathbb{C}^N \times \cdots \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ e todo inteiro positivo N, onde $(e_i)_{i=1}^{N}$ denota a base canônica de $\mathbb{C}^N$, e $\mathbb{D}^N$ representa o polidisco unitário aberto em $\mathbb{C}^N$. Como antes, temos o respectivo resultado também para o caso de escalares reais.

O caso $m = 2$ é o famoso teorema 4/3 de Littlewood (veja [21, 29, 36]).

O propósito original do teorema 4/3 de Littlewood foi resolver um problema de P. J. Daniell sobre funções de variação limitada (veja [36]). Por outro lado, a desigualdade de Bohnenblust–Hille foi inventada para resolver o famoso problema da convergência absoluta de Bohr dentro da teoria das séries de Dirichlet (este assunto foi explorado recentemente por vários autores, ver [6, 12, 15, 17, 19, 23, 22] e referências ali contidas).

Alguns resultados independentes foram provados nos anos 70, quando foram obtidas constantes menores na desigualdade. Aparentemente os autores não tinham conhecimento da existência dos resultados originais de Bohnenblust e Hille.

O esquecimento da obra de Bohnenblust e Hille no passado é tão perceptível que o livro de Blei ([7], 2001) enuncia a desigualdade de Bohnenblust–Hille como “the

Littlewood's $2m/(m+1)$-inequality" e absolutamente nenhuma menção ao artigo de Bohnenblust e Hille é feita em todo o livro.

De acordo com o livro de Blei, a "Littlewood's $2m/(m+1)$-inequality" é originalmente devida a A. M. Davie ([14], 1973) e, independentemente, a G. Johnson e W. Woodward ([31], 1974), o que é um equívoco pois de fato, o trabalho de Bohnenblust e Hille antecede as obras mencionadas em mais de 40 anos.

Na desigualdade multilinear, é conhecido que $C_m \in [1, \infty)$ para todo m e que o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo mas, por outro lado, os valores ótimos para C_m permanecem em mistério. A única informação precisa que conhecemos para escalares reais é que $C_2 = \sqrt{2}$ é ótima (veja [27]).

As constantes originais obtidas por Bohnenblust e Hille (para o caso complexo) são

$$C_m = m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Depois, esses resultados foram melhorados para

$$C_m = 2^{\frac{m-1}{2}} \text{ (Davie, Kaisjer, 70's ([14, 34]))},$$

e

$$C_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \text{ (Quéffelec, 1995 ([49]))}.$$

E, recentemente, foi provado em ([26]) que as constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille têm crescimento sub-exponencial (para ambos os casos escalares reais e complexos).

O presente trabalho versa sobre estudos recentes das constantes dos teoremas multilinear e polinomial de Bohnenblust–Hille, e sobre o comportamento assintótico destas. Encontra-se dividido em dois capítulos.

O Capítulo 1 está dedicado à desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille.

Dentre outras coisas, encontramos melhores estimativas superiores para as constantes multilineares de Bohnenblust-Hille no caso de escalares complexos.

O ponto crucial do nosso argumento é que as constantes que surgem no Teorema 1.1.2 são derivados das constantes que aparecem na desigualdade de Khinchine para variáveis de Steinhaus. Como veremos no final da seção, no caso de escalares complexos, usar variáveis de Steinhaus ao invés de funções de Rademacher nos fornece melhores constantes para a desigualdade de Bohnenblust-Hille.

Denotemos as constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear (real ou complexa) de Bohnenblust–Hille por $(K_m)_{m=1}^{\infty}$. Como mencionamos acima, em 2012 ([26]) é provado que $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ têm crescimento sub-exponencial. Um problema natural, relativo ao comportamento assintótico da sequência $(K_m)_{m=1}^{\infty}$, é tentar responder a seguinte pergunta: É verdade que

$$\lim_{m\to\infty} (K_m - K_{m-1}) = 0?$$

Nossa ferramenta para resolver essa questão é um resultado que chamamos de: Teorema de Dicotomia. Em especial, mostramos que a resposta ao problema acima é essencialmente positiva num sentido que será evidente ao longo da Seção 1.2. Outra consequência do Teorema de Dicotomia é que $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ tem uma espécie de crescimento não-polinomial: se $p(m)$ é qualquer polinômio não constante, então, K_m *não é* assintoticamente igual a $p(m)$. Mais do que isso, se

$$q > \log_2\left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.526,$$

então,

$$K_m \nsim m^q.$$

Ainda no primeiro capítulo, estudamos a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille para o caso $m = 2$, que é a desigualdade 4/3 de Littlewood para formas bilineares.

Quando o expoente 4/3 é substituído por qualquer $r \geq \frac{4}{3}$, então, existe uma constante ótima $L_{\mathbb{K},r}$ que satisfaz

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq L_{\mathbb{K},r} \|U\| . \tag{5}$$

O nosso principal resultado nesta direção afirma que, para cada $r \geq \frac{4}{3}$, a constante ótima $L_{\mathbb{R},r}$ que satisfaz (5) é

$$L_{\mathbb{R},r} = \begin{cases} 2^{\frac{2-r}{r}} \text{ para } r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right) \\ 1 \text{ para } r \geq 2. \end{cases}$$

Como uma consequência de nossas estimativas, é mostrado que as constantes ótimas $L_{\mathbb{R},r}$ são sempre estritamente maiores do que as constantes ótimas $L_{\mathbb{C},r}$, para todo $r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right)$.

Os resultados apresentados nesse primeiro capítulo estão contidos nas publicações:

[41] *On the growth of the optimal constants of the multilinear Bohnenblust-Hille inequality.* D. Núñez-Alarcón. Linear Alg. Appl., 439(8): 2494-2499, (2013).

[42] *On the Bohnenblust–Hille inequality and a variant of Littlewood's 4/3 inequality.* D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda. J. Funct. Anal., 264(1): 326–336, (2013).

O segundo capítulo está dedicado ao estudo da desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille e encontra-se organizado em duas seções.

A Seção 2.1 foca-se no estudo da interação entre a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund e as desigualdades de Bohnenblust–Hille.

Esta seção contém uma prova bastante simples da otimalidade do expoente $2m/(m+1)$ nas desigualdades polinomial e multilinear de Bohnenblust–Hille. A otimalidade deste expoente é bem conhecida, mas a nossa abordagem, embora essencialmente devida a H. P. Boas [8], parece não estar explicitamente isolada na literatura.

As primeiras provas da otimalidade do expoente $2m/(m+1)$ nas desigualdades de Bohnenblust–Hille, devido à ausência de ferramentas probabilísticas avançadas, eram muito complicadas. De acordo com Defant *et al* ([18, Pág 486]) " *Bohnenblust e Hille mostraram, por meio de um argumento altamente não trivial, que o expoente* $\frac{2m}{m+1}$ *não pode ser melhorado*" ou de acordo com Defant e Schwarting [24, Pág 90], "*Bohnenblust e Hille provaram com um argumento sofisticado que o expoente* $\frac{2m}{m+1}$ *é ótimo*".

Nesta seção, enfatizamos como a otimalidade do expoente $\frac{2m}{m+1}$ pode ser obtida como um corolário simples da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund; de fato, como ficará claro no texto, um resultado formalmente mais forte é válido.

Por outro lado, esboçamos algumas ideias que podem ser úteis na investigação de limites inferiores para as constantes ótimas da desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille do caso complexo. Finalizando a seção mostraremos como a desigualdade de Bohnenblust–Hille pode ser usada para provar a otimalidade do expoente $\frac{m+1}{2}$ da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (inclusive no caso de escalares reais).

Na seção 2.2, dissertaremos brevemente sobre o estado da arte das constantes na desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille. Como veremos, recentemente, foi provado em [13] que as constantes ótimas na desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille (caso real) são *hipercontrativas* e esse resultado é ótimo.

Contrariamente ao caso de escalares reais, podemos afirmar que, no caso de escalares complexos, não há resultados que forneçam limitantes inferiores não triviais para as constantes ótimas D_m para polinômios m-homogêneos ($m > 2$). Justamente no final da Seção 2.2 exibiremos limitantes inferiores não triviais para estas constantes, para todo $m \geq 2$.

Mais precisamente, mostraremos que

$$D_m \geq \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{1}{2m}} > 1$$

para todo $m \geq 2$.

Os resultados apresentados neste capítulo fazem parte dos trabalhos:

[40] *A note on the polynomial Bohnenblust–Hille inequality.* D. Núñez-Alarcón. J. Math. Anal. Appl., 407(1): 179-181, (2013).

[44] *There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants* $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ *with* $\lim_{n\to\infty}(C_{n+1} - C_n) = 0$. D. Núñez–Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, D. M. Serrano-Rodríguez. J. Funct. Anal., 264(2): 429–463, (2013).

Finalmente, no apêndice, deixamos um problema em aberto sobre a existência de uma desigualdade multilinear *forte* de Bohnenblust-Hille.

Notação e terminologia

- Em todo esse texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$.

- Ocasionalmente escreveremos $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função". O termo *operador m-linear* será usado nos termos da seguinte definição:

Definição 0.0.3 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, ..., E_m$ e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um operador $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é m-linear (multilinear) se é linear em cada variável. Mais precisamente, $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é m-linear (multilinear) se para todos $x_1 \in E_1, ..., x_m \in E_m$ e $i = 1, ..., m$, os operadores*

$$A_{(x_1,...,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},...,x_m)} : E_i \longrightarrow F$$
$$A_{(x_1,...,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},...,x_m)}(y) = A(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_m)$$

são lineares.

- Denotamos para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto de todos os operadores multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F por $L(E_1, ..., E_m; F)$. É fácil ver que o conjunto $L(E_1, ..., E_m; F)$ é um espaço vetorial munido com as operações usuais de espaços de funções. Alem disso, se $E_1, ..., E_m$ e F são espaços vetoriais normados,

$$\|A\| := \sup_{\|x_m\|} \leq 1 \, \|A(x_1, ..., x_m)\|_F$$

  define uma norma em $L(E_1, ..., E_m; F)$, a qual chamaremos eventualmente de *sup*-norma.

- Se A for limitado em alguma bola de $E_1 \times \cdots \times E_m$, dizemos que A é um operador m-linear contínuo. Denotamos por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, o espaço normado de todos os operadores m-lineares contínuos de de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F.

- Se $F = \mathbb{K}$, e $dim(E_i)$ é finita para todo $i = 1, ..., m$ diremos que A é uma *forma* $m-$linear.

- O polidisco unitário fechado em $\mathbb{K}^m$, é o conjunto

$$\{w = (w_1, ..., w_m) \in \mathbb{K}^m; |w_i| \leq 1 \text{ para todo } i = 1, ..., m\}$$

- Diremos que uma sequência $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ é hipercontrativa se existe uma constante $C > 1$, tal que

$$X_n \leq C^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

Desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille

A desigualdade multilinear de Bohnenblust e Hille [11] é um aperfeiçoamento da desigualdade 4/3 de Littlewood, generalizada para formas multilineares (veja também [18, 20, 21] para recentes abordagens): para todo inteiro positivo m, existe uma constante $C_{\mathbb{K},m} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left| U(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_{\mathbb{K},m} \sup_{z_1,\ldots,z_m \in \mathbb{D}^N} |U(z_1, ..., z_m)|$$

para toda forma m-linear $U : \ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N \to \mathbb{C}$ e todo inteiro positivo N.

A estimativa original para $C_{\mathbb{C},m}$ é $m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$; foi ainda melhorada para $2^{\frac{m-1}{2}}$ em [14, 34] e para $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$ em [49] e, recentemente, constantes ainda melhores, com ótimo comportamento assintótico, foram obtidas em [46, 26] (para trabalhos relacionados, veja [27, 39, 44]).

A motivação original das desigualdades de Bohnenblust-Hille repousa sobre o famoso problema da convergência absoluta de Bohr que consiste em determinar a largura máxima T da faixa vertical em que uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge uniformemente mas não absolutamente. A desigualdade de Bohnenblust–Hille foi uma ferramenta crucial para dar uma solução final ao problema de Bohr: $T = 1/2$.

1.1 Sobre as constantes na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille. Caso complexo

Nesta seção iremos dar melhores estimativas superiores das constantes para o caso complexo da desigualdade de Bohnenblust–Hille. Além do interesse matemático intrínseco de encontrar constantes ótimas para as desigualdades, a busca de melhores constantes em desigualdades do tipo Bohnenblust-Hille tem uma longa história motivada por objetivos concretos.

Como ilustração, recordamos que, em 2011, foi provado que a desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille é hipercontrativa. A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdá, M. Ounaïes and K. Seip obtiveram, como consequência, vários resultados novos relacionados com o estudo de séries de Dirichlet. Por exemplo, obtiveram uma generalização de um resultado dado por H. P. Boas e D. Khavinson [9] sobre os raios de Bohr n-dimensionais.

Como já mencionamos no resumo desta tese, uma das aplicações mais recentes da desigualdade de Bohnenblust-Hille reside no campo da teoria da informação quântica, uma vez que o crescimento exato das $C_{\mathbb{K},m}$ está relacionado a uma conjectura de Aaronson e Ambainis [1] sobre simulações clássicas de testes de algoritmos quânticos (ver também [32]). Também podemos citar [38] para as aplicações das estimativas de [46] na Teoria da Informação Quântica. Chamamos a atenção para o fato que as constantes de [46] são as menores que conhecemos.

1.1.1 A importância das variáveis de Steinhaus

Seja $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes em algum espaço de probabilidade (Ω, Σ, P) com distribuição uniforme, com respeito à medida de Lebesgue, no círculo unitário complexo

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Estas são as chamadas variáveis aleatórias de Steinhaus. A utilidade das variáveis aleatórias de Steinhaus na prova da desigualdade de Bohnenblust-Hille parece ter sido observada pela primeira vez por H.Queffélec [49].

Em nossa presente abordagem, mudaremos a prova apresentada em [20, 46], substituindo as funções de Rademacher habituais por variáveis de Steinhaus.

O primeiro dos resultados que nos permitirá melhorar as constantes da desigualdade de Bohnenblust-Hille é uma desigualdade técnica (Teorema 1.1.2), que é uma versão de um resultado semelhante apresentado em [20, 46] para as funções de Rademacher, usando desta vez, variáveis de Steinhaus. O ponto crucial em nosso argumento é que as constantes que surgem no Teorema 1.1.2 são derivadas das constantes que aparecem na desigualdade de Khinchine para variáveis de Steinhaus e, como veremos mais adiante, este procedimento gera melhores constantes para a desigualdade de Bohnenblust-Hille.

Recordemos a desigualdade de Khinchine para variáveis de Steinhaus e outros resultados úteis:

Teorema 1.1.1 (Desigualdade de Khinchine) *Para todo* $0 < p < \infty$*, existem constantes* $\widetilde{A_p}$ *e* $\widetilde{B_p}$ *tais que*

$$\widetilde{A_p}\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{n=1}^{N}a_n\varepsilon_n\right\|_p \leq \widetilde{B_p}\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

para todo inteiro positivo N *e escalares* $a_1,\ldots,a_N$.

De [45, p. 151] sabemos que

$$A_p \leq \widetilde{A_p} \tag{1.2}$$

para todo p, onde A_p denota as constantes que aparecem ao invés de $\widetilde{A_p}$ na desigualdade de Khinchine para funções de Rademacher. Por exemplo, quando $p = 1$ é sabido que $A_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ e $\widetilde{A_p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886$.

Para mais detalhes sobre as desigualdades Khinchine, recomendamos [25, Teorema 1.10] para o caso de funções de Rademacher e [3, Seção 2] para casos mais gerais, incluindo o caso de variáveis de Steinhaus.

O seguinte resultado, crucial para a prova da desigualdade de Bohnenblust-Hille, tem essencialmente a mesma prova da versão análoga para funçoes de Rademacher (ver [20, 43, 46]).

Teorema 1.1.2 *Sejam* $1 \leq r \leq 2$, *e* $(y_{i_1,\ldots,i_m})_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}$ *uma matriz em* $\mathbb{C}$. *Então,*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |y_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{1/2} \leq \left(\widetilde{A_r}\right)^{-m} \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_m} y_{i_1\ldots i_m} \right\|_r .$$

Tendo em vista (1.2), concluímos que as constantes $\left(\widetilde{A_r}\right)^{-m}$ não são maiores do que as constantes de seu análogo para as funções de Rademacher e, por isso, teremos melhores estimativas para as constantes na desigualdade de Bohnenblust-Hille.

1.1.2 Melhorando as constantes do caso multilinear complexo

A prova da desigualdade de Bohnenblust-Hille, substituindo as funções de Rademacher pelas variáveis de Steinhaus, é a mesma prova dada em [46]. A diferença nas constantes é uma consequência das novas constantes da desigualdade de Khinchine para variáveis de Steinhaus. Para tornar o texto mais autosuficiente, faremos os detalhes da demonstração.

Para isso, ainda precisamos de duas desigualdades, a saber a de Minkowski e uma variação de uma desigualdade devida a Ron Blei. A desigualdade de Minkowski é um resultado clássico, muito usado na teoria da medida, devido ao matemático alemão Hermann Minkowski. Enunciá-la-emos explicitamente, pois várias desigualdades semelhantes são associadas a Minkowski. O leitor interessado pode encontrar uma prova desta desigualdade em [52].

Lema 1.1.3 (Desigualdade de Minkowski para integrais) *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{B}, \mu)$ *espaços de medida sigma-finitos. Se* $u : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *é* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$*-mensurável, então*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |u\,(x,y)|\,\nu\,(dy)\right)^p \mu\,(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |u\,(x,y)|^p \,\mu\,(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \nu\,(dy)\,,$$

para todo $p \in [1, \infty)$, com a igualdade para $p = 1$.

Como mencionamos, outra desigualdade que usaremos é uma variação de uma desigualdade devida a Ron Blei [7, Theorem 5 and 36.]. Esta variante foi concebida por A. Defant et al. [20, Lemma 3.1.]. Para uma prova detalhada desta desigualdade recomendamos a dissertação [43].

Teorema 1.1.4 (Blei, Defant et al.) *Sejam A e B dois conjuntos finitos não vazios e $(a_{ij})_{i,j \in A\times B}$ uma matriz escalar com entradas positivas; denotemos suas linhas e colunas por $\alpha_j = (a_{ij})_{i\in A}$ e $\beta_i = (a_{ij})_{j \in B}$. Então, para $q, r_1, r_2 \geq 1$, com $q > \max(r_1, r_2)$, tem-se*

$$\left(\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)}\right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}} \leq \left(\sum_{i\in A} \|\beta_i\|_q^{r_1}\right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}} \left(\sum_{j\in B} \|\alpha_j\|_q^{r_2}\right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}}$$

com

$$\omega : [1,q)^2 \to [0,\infty), \; \omega(x,y) := \frac{q^2(x+y) - 2qxy}{q^2 - xy},$$
$$f : [1,q)^2 \to [0,\infty), \; f(x,y) := \frac{q^2 x - qxy}{q^2(x+y) - 2qxy}.$$

Agora sim, temos reunidas as ferramentas necessárias para dar uma demonstração do resultado principal deste capítulo, o qual nos vai dar menores estimativas para as constantes na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille no caso de escalares complexos.

Teorema 1.1.5 *Se $m \geq 1$, então*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left|U(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_{\mathbb{C},m} \sup_{z_1,\ldots,z_m\in\mathbb{D}^N} |U(z_1,\ldots,z_m)|$$

para toda forma m-linear $U : \ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N \to \mathbb{C}$ e todo inteiro positivo N com

$$C_{\mathbb{C},1} = 1,$$
$$C_{\mathbb{C},m} = \frac{C_{\mathbb{C},\frac{m}{2}}}{\left(\widetilde{A_{\frac{2m}{m+2}}}\right)^{m/2}}$$

para m par e

$$C_{\mathbb{C},m} = \left(\frac{C_{\mathbb{C},\frac{m-1}{2}}}{\left(\widetilde{A_{\frac{2m-2}{m+1}}}\right)^{\frac{m+1}{2}}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(\frac{C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}}}{\left(\widetilde{A_{\frac{2m+2}{m+3}}}\right)^{\frac{m-1}{2}}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}.$$

para m ímpar.

Demonstração. Façamos o caso m ímpar. O caso $m=1$ é a desigualdade de Khinchine, e o caso $m=2$ é a desigualdade 4/3 de Littlewood. Procederemos por indução, obtendo o caso m (ímpar) como combinação dos casos $\frac{m-1}{2}$ e $\frac{m+1}{2}$.

Supondo que o resultado é válido para $\frac{m-1}{2}$ e $\frac{m+1}{2}$, provaremos que é válido para m. Seja $U:\ell_\infty^N\times\cdots\times\ell_\infty^N\to\mathbb{C}$ e N um inteiro positivo qualquer.

Consideremos na notação do Teorema 1.1.4,

$$\begin{aligned}
&q=2,\\
&s_1=\frac{2\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\frac{m-1}{2}+1}=\frac{2m-2}{m+1},\\
&s_2=\frac{2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\frac{m+1}{2}+1}=\frac{2m+2}{m+3}.
\end{aligned}$$

Assim, $\omega(s_1,s_2)=\frac{2m}{m+1}$. Logo, do Teorema 1.1.4,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N}\left|U\left(e_{i_1}^{(1)},\dots,e_{i_m}^{(m)}\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\\
&\leq\left(\sum_{i_1,\dots,i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N}\left\|\left(U\left(e_{i_1}^{(1)},\dots,e_{i_m}^{(m)}\right)\right)_{i_{\frac{m+1}{2}},\dots,i_m=1}^{N}\right\|_2^{s_1}\right)^{\frac{f(s_1,s_2)}{s_1}}\\
&\times\left(\sum_{i_{\frac{m+1}{2}},\dots,i_m=1}^{N}\left\|\left(U\left(e_{i_1}^{(1)},\dots,e_{i_m}^{(m)}\right)\right)_{i_1,\dots,i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N}\right\|_2^{s_2}\right)^{\frac{f(s_2,s_1)}{s_2}}.
\end{aligned}$$

Precisamos estimar os dois fatores acima. Começaremos com o segundo fator, para o qual escrevemos $dt:=dt_1\dots dt_{\frac{m-1}{2}}$. Para cada $i_{\frac{m+1}{2}},\dots,i_m$ fixo, temos, do Teorema 1.1.2,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(U\left(e_{i_1}^{(1)},\dots,e_{i_m}^{(m)}\right)\right)_{i_1,\dots,i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N}\right\|_2^{s_2}\\
&\leq\left(\widetilde{A_{s_2}^{\frac{1-m}{2}}}\right)^{s_2}\int_{I^{\frac{m-1}{2}}}\left|\sum_{i_1,\dots,i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N}\varepsilon_{i_1}(t_1)\dots\varepsilon_{i_{\frac{m-1}{2}}}\left(t_{\frac{m-1}{2}}\right)U\left(e_{i_1}^{(1)},\dots,e_{i_m}^{(m)}\right)\right|^{s_2}dt\\
&=\left(\widetilde{A_{s_2}^{\frac{1-m}{2}}}\right)^{s_2}\int_{I^{\frac{m-1}{2}}}\left|U\left(\sum_{i_1=1}^{N}\varepsilon_{i_1}(t_1)e_{i_1}^{(1)},\dots,\sum_{i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N}\varepsilon_{i_{\frac{m-1}{2}}}\left(t_{\frac{m-1}{2}}\right)e_{i_{\frac{m-1}{2}}}^{\left(\frac{m-1}{2}\right)},e_{i_{\frac{m+1}{2}}}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)},\dots,e_{i_m}^{(m)}\right)\right|^{s_2}dt.
\end{aligned}$$

Somando sobre $i_{\frac{m+1}{2}},...,i_m = 1,...,N$, obtemos

$$\sum_{i_{\frac{m+1}{2}},...,i_m=1}^{N} \left\| \left(U \left(e_{i_1}^{(1)},...,e_{i_m}^{(m)} \right) \right)_{i_1,...,i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N} \right\|_2^{s_2}$$
$$\leq \left(\widetilde{A_{s_2}}^{-\frac{m-1}{2}} \right)^{s_2} \times$$
$$\int_{I^{\frac{m-1}{2}}} \sum_{i_{\frac{m+1}{2}},...,i_m=1}^{N} \left| U \left(\sum_{i_1=1}^{N} \varepsilon_{i_1}(t_1) e_{i_1}^{(1)},..., \sum_{i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N} \varepsilon_{i_{\frac{m-1}{2}}} \left(t_{\frac{m-1}{2}} \right) e_{i_{\frac{m-1}{2}}}^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}, e_{i_{\frac{m+1}{2}}}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)},...,e_{i_m}^{(m)} \right) \right|^{s_2} dt.$$

No integrando, usando a hipótese de indução para $\frac{m+1}{2}$, temos

$$\sum_{i_{\frac{m+1}{2}},...,i_m=1}^{N} \left| U \left(\sum_{i_1=1}^{N} \varepsilon_{i_1}(t_1) e_{i_1}^{(1)},..., \sum_{i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N} \varepsilon_{i_{\frac{m-1}{2}}} \left(t_{\frac{m-1}{2}} \right) e_{i_{\frac{m-1}{2}}}^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}, e_{i_{\frac{m+1}{2}}}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)},...,e_{i_m}^{(m)} \right) \right|^{s_2} \tag{1.3}$$
$$\leq \left(C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}} \left\| U \left(\sum_{i_1=1}^{N} \varepsilon_{i_1}(t_1) e_{i_1}^{(1)},..., \sum_{i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N} \varepsilon_{i_{\frac{m-1}{2}}} \left(t_{\frac{m-1}{2}} \right) e_{i_{\frac{m-1}{2}}}^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}, \cdot,...,\cdot \right) \right\|_{\pi(s_2;1)} \right)^{s_2}$$
$$\leq \left(C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}} \|U\| \right)^{s_2},$$

onde $\pi(s_2;1)$ denota a norma múltiplo $(s_2;1)$-somante (para mais detalhes sobre operadores múltiplo somantes, recomendamos a tese [47]). Assim,

$$\left(\sum_{i_{\frac{m+1}{2}},...,i_m=1}^{N} \left\| \left(U \left(e_{i_1}^{(1)},...,e_{i_m}^{(m)} \right) \right)_{i_1,...,i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N} \right\|_2^{s_2} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq \widetilde{A_{s_2}}^{-\frac{m-1}{2}} \|U\| C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}}.$$

Analogamente, obtemos a estimativa do primeiro fator

$$\left(\sum_{i_1,...,i_{\frac{m-1}{2}}=1}^{N} \left\| \left(U \left(e_{i_1}^{(1)},...,e_{i_m}^{(m)} \right) \right)_{i_{\frac{m+1}{2}},...,i_m=1}^{N} \right\|_2^{s_1} \right)^{\frac{1}{s_1}} \leq \widetilde{A_{s_1}}^{-\frac{m+1}{2}} \|U\| C_{\mathbb{C},\frac{m-1}{2}}.$$

Logo, combinando ambas estimativas, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\left|U\left(e_{i_1}^{(1)},\ldots,e_{i_m}^{(m)}\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\\
&\leq\left(\widetilde{A_{s_1}}^{-\frac{m+1}{2}}\|U\|\,C_{\mathbb{C},\frac{m-1}{2}}\right)^{f(s_1,s_2)}\left(\widetilde{A_{s_2}}^{-\frac{m-1}{2}}\|U\|\,C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}}\right)^{f(s_2,s_1)}\\
&=\left(\widetilde{A_{\frac{2m-2}{m+1}}}^{-\frac{m+1}{2}}\|U\|\,C_{\mathbb{C},\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}}\left(\widetilde{A_{\frac{2m+2}{m+3}}}^{-\frac{m-1}{2}}\|U\|\,C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}.
\end{aligned}$$

Com isto fica demonstrado o caso m ímpar.

Com a respectiva mudança das constantes A_p pelas $\widetilde{A_p}$, o caso m par é inteiramente análogo ao feito em [46]. ■

Como foi dito anteriormente, de [45] sabemos que $A_p \leq \widetilde{A_p}$ para todo p e, assim, segue facilmente que as constantes do Teorema 1.1.5 são menores do que as constantes do resultado análogo em [46]. Para $p = 1$, J. Sawa [51] mostrou que o valor ótimo para $\widetilde{A_p}$ é

$$\widetilde{A_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Como $C_1 = 1$, temos

$$C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

que foi o valor obtido por Queffélec [49].

A estimativa dos valores para as $C_{\mathbb{C},m}$ baseia-se na estimativa dos valores ótimos para $\widetilde{A}_p$ com

$$p \in \left\{\frac{2m}{m+2} : m \geq 2\right\} \cup \left\{\frac{2m-2}{m+1} : m \geq 3\right\} \cup \left\{\frac{2m+2}{m+3} : m \geq 3\right\} \subset [1,2).$$

Como um "*Added in proof* " no mesmo artigo [51], J. Sawa afirma que para o parâmetro p, com $p_0 < p < 2$ e $p_0 \in (0,2)$, definido como a única raiz da equação

$$2^{p/2} \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\left(\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\right)^2,$$

as constantes ótimas são

$$\widetilde{A_p} = \left(\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

Uma aproximação de 4 dígitos nos fornece $p_0 \approx 0.4756$. No entanto, Sawa não apresentou nenhuma prova de sua afirmação. Mas, felizmente, para $p \geq 1$, H. König provou que (1.4) é, de fato, o valor ótimo de $\widetilde{A_p}$ (veja [3, Seção 2] e as referências ali contidas).

Usando esses valores para $\widetilde{A_p}$ construímos a tabela a seguir, onde se pode verificar as diferentes estimativas para $C_{\mathbb{C},m}$ que foram obtidas até o momento.

m	constantes novas	[46] (2012)	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$ ([49, 21], 1995)	$2^{\frac{m-1}{2}}$ ([14, 34],70's)	$m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$ ([11],1931)
2	≈ 1.13	–	≈ 1.13	≈ 1.41	≈ 2.38
3	≈ 1.24	–	≈ 1.27	2	≈ 4.16
4	≈ 1.32	–	≈ 1.44	≈ 2.83	≈ 6.73
5	≈ 1.4	–	≈ 1.62	4	≈ 10.51
6	≈ 1.46	–	≈ 1.83	≈ 5.66	≈ 16.09
7	≈ 1.52	≈ 1.93	≈ 2.06	8	≈ 24.32
8	≈ 1.57	≈ 2.03	≈ 2.33	≈ 11.31	≈ 36.44
9	≈ 1.63	≈ 2.17	≈ 2.63	16	≈ 54.23
10	≈ 1.68	≈ 2.29	≈ 2.97	≈ 22.63	≈ 80.28
11	≈ 1.73	≈ 2.45	≈ 3.35	32	≈ 118.35
12	≈ 1.77	≈ 2.59	≈ 3.78	≈ 45.43	≈ 173.87
13	≈ 1.81	≈ 2.66	≈ 4.26	64	≈ 254.68
14	≈ 1.84	≈ 2.73	≈ 4.81	≈ 90.51	≈ 372.13
15	≈ 1.88	≈ 2.81	≈ 5.43	128	≈ 542.57
16	≈ 1.91	≈ 2.87	≈ 6.12	≈ 181.02	≈ 789.61
100	≈ 3.3	≈ 7.6	$\approx 1.56 \cdot 10^3$	$\approx 7.96 \cdot 10^{14}$	$\approx 8.15 \cdot 10^{15}$

Finalmente, com o objetivo de dar algumas informações sobre o comportamento assintótico das constantes ótimas na desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille para o caso complexo, na seguinte seção calcularemos o limite quando $m \to \infty$ do quociente $\frac{C_{\mathbb{C},m}}{C_{\mathbb{C},\frac{m}{2}}}$, analogamente ao trabalho feito por D. Diniz *et al* em [26] .

Como $\widetilde{A_p} = \left(\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$, temos

$$\widetilde{A_{\frac{2m}{m+2}}} = \left(\Gamma\left(\frac{\frac{2m}{m+2}+2}{2}\right)\right)^{\frac{m+2}{2m}}$$

e

$$\frac{C_{\mathbb{C},m}}{C_{\mathbb{C},\frac{m}{2}}} = \left(\Gamma\left(\frac{\frac{2m}{m+2}+2}{2}\right)\right)^{\frac{-m-2}{4}}.$$

Usando algumas propriedades básicas da função gamma, como feito em [26], obtemos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{C_{\mathbb{C},m}}{C_{\mathbb{C},\frac{m}{2}}} = \lim_{m\to\infty} \left(\Gamma\left(\frac{\frac{2m}{m+2}+2}{2}\right)\right)^{\frac{-m-2}{4}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma} \approx 1.23539.$$

1.2 Um Teorema de Dicotomia

Como já mencionamos, as constantes originais que Bohnenblust e Hille obtiveram para o caso complexo são

$$C_{\mathbb{C},m} = m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Posteriormente, esses resultados foram melhorados para

$$C_{\mathbb{C},m} = 2^{\frac{m-1}{2}} \text{ (Davie, Kaisjer, 1973 ([14, 34]))}$$

e

$$C_{\mathbb{C},m} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \text{ (Quéffelec, 1995 ([49])).}$$

Numericamente as melhorias feitas são bastante boas. Porém, pode se observar que todas estas expressões têm crescimento exponencial.

Um ponto de ruptura foi dado em 2012 em ([26]). Nesse artigo, foi demonstrado que as constantes ótimas $(K_{\mathbb{K},m})_{m=1}^{\infty}$ que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille têm crescimento subexponencial (para os dois casos, escalares reais e complexos). Essa nova informação traz a questão sobre qual será o comportamento assintótico daquelas constantes ótimas. Assim, um possível passo seguinte é responder se a subexponencialidade das constantes ótimas pode ser melhorada, ou não.

Seja $(K_{\mathbb{K},m})_{m=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille. Podemos nos perguntar, por exemplo,

Problema 1.2.1 $(K_{\mathbb{K},m})_{m=1}^{\infty}$, *tem crecimento polinomial?*

Problema 1.2.2 *É verdade que*

$$\lim_{m\to\infty} (K_{\mathbb{K},m} - K_{\mathbb{K},m-1}) = 0? \tag{1.5}$$

Neste capítulo, entre outras coisas, daremos resposta a estes dois problemas. Veremos que a resposta do Problema 1.2.2 é positiva em certo sentido. Mais precisamente, como consequência de um de nossos resultados principais (Teorema de Dicotomia) mostraremos que se existem $L_1, L_2 \in [0,\infty]$ tais que

$$L_1 = \lim_{m\to\infty} (K_{\mathbb{K},m} - K_{\mathbb{K},m-1}) \text{ e } L_2 = \lim_{m\to\infty} \frac{K_{\mathbb{K},2m}}{K_{\mathbb{K},m}},$$

então,

$$L_1 = 0$$

e

$$L_2 \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}],$$

onde γ denota a constante de Euler-Mascheroni (veja (1.10)). A não existência dos limites acima seria um acontecimento extremamente estranho uma vez que não há nenhuma razão aparente para um comportamento patológico para as constantes ótimas $(K_{\mathbb{K},m})_{m=1}^{\infty}$.

Outra consequência do Teorema de Dicotomia é a resposta negativa ao Problema 1.2.1. De fato, é provado que a sequência $(K_{\mathbb{K},m})_{m=1}^{\infty}$ das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille *não pode* ter um crecimento do tipo polinomial. Mais ainda, se

$$q > \log_2\left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.526,$$

então,

$$K_{\mathbb{K},m} \not\sim m^q.$$

Para o caso de escalares complexos, a afirmação ainda é valida para

$$q > \log_2\left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right) \approx 0.305.$$

1.2.1 O Teorema de Dicotomia

Primeiramente, mostraremos resultados que são válidos para ambos os casos, escalares reais e complexos. Por tal motivo, usaremos a mesma notação para os dois. Denotaremos por $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille.

A partir de agora, diremos que uma sequência de números reais positivos $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é *bem comportada* se existem $L_1, L_2 \in [0, \infty]$ tais que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} = L_1 \tag{1.6}$$

e

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = L_2. \tag{1.7}$$

Note-se que as condições para que uma sequência seja bem comportada são bastante fracas, por exemplo, observe-se que L_1, L_2 podem ser ∞. Assim, qualquer sequência da forma

$$\begin{aligned}
R_m &= ba^{cm}, \text{ para } (a,b,c) \in [0,\infty)^2 \times (-\infty,\infty), \text{ ou} \\
R_m &= ba^{\frac{c}{m}}, \text{ para } (a,b,c) \in [0,\infty)^2 \times (-\infty,\infty), \text{ ou} \\
R_m &= bm^{a}, \text{ para } (a,b) \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty), \text{ ou} \\
R_m &= b\log m, \text{ para } b \in (0,\infty), \text{ ou} \\
R_m &= \sum_{j=0}^{k} a_j m^j, \text{ com } a_k > 0
\end{aligned}$$

é bem comportada. Como os elementos de $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ estão dentro do intervalo $[1,\infty)$, restringiremos nosso estudo às sequências bem comportadas com valores em $[1,\infty)$. Observe-se também que, mesmo restritos a sequências em $[1,\infty)$, os limites (1.6) e (1.7) são, de fato, independentes. Por exemplo

$$R_m := \begin{cases} \sqrt{m}, & \text{se } m = 2^k \text{ para algum } k \\ 2\sqrt{m}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

satisfaz (1.6), com $L_1 = \sqrt{2}$, mas não cumpre (1.7). Por outro lado, definindo para todo inteiro positivo $k > 1$,

$$B_k := \{2^k - 1, ..., 2^{k+1} - 2\},$$

a sequência

$$R_m := \begin{cases} m^k, & \text{se } m \in B_k \text{ para algum } k \text{ ímpar} \\ \left(2^k - 1\right)^k + km, & \text{se } m \in B_k \text{ para algum } k \text{ par} \end{cases}$$

satisfaz (1.7), mas não satisfaz (1.6).

Denotemos a sequência subexponencial de constantes que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille construída em [46] por $(C_m)_{m=1}^{\infty}$. Assim

$$C_m = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1, \\ \left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}\right)^{-1} C_{\frac{m}{2}} & \text{se } m \text{ é par e} \\ \left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{-1-m}{2}} C_{\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{1-m}{2}} C_{\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} & \text{se } m \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

com

$$A_p := \sqrt{2} \left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/p},$$

para $p > p_0 \approx 1.847$ e

$$A_p := 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

para $p \leq p_0 \approx 1.847$, onde p_0 é definido como sendo o único número real no intervalo $(1, 2)$ tal que

$$\Gamma\left(\frac{p_0 + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Como estamos interessados em estudar o comportamento da sequência $(K_m)_{m=1}^{\infty}$, podemos restringir nossa atenção para sequências $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ tais que $1 \leq R_m \leq C_m$ para todo m.

Neste capítulo, nosso resultado principal é a seguinte dicotomia:

Teorema de Dicotomia. Se $1 \leq R_m \leq C_m$ para todo m, então, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é subexponencial e não bem comportada.

(ii) $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é bem comportada com

$$\lim_{m \to \infty} \frac{R_{2m}}{R_m} \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}] \tag{1.8}$$

e

$$\lim_{m \to \infty} (R_m - R_{m-1}) = 0. \tag{1.9}$$

Como um corolário, temos a seguinte informação sobre as constantes ótimas $(K_m)_{m=1}^{\infty}$:

Corolário 1.2.3 *A sequência das constantes ótimas* $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ *que satisfazem a desigualdade de Bohnenblust–Hille é:*

(i) subexponencial e não bem comportada

ou

(ii) bem comportada com

$$\lim_{m\to\infty} \frac{K_{2m}}{K_m} \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}]$$

e

$$\lim_{m\to\infty} (K_m - K_{m-1}) = 0.$$

Se (i) for verdadeira, então teremos um resultado completamente surpreendente: o mau comportamento de $(K_m)_{m=1}^{\infty}$. Por outro lado, se (ii) é verdadeira, teremos uma informação de forma quase definitiva sobre o crescimento de $(K_m)_{m=1}^{\infty}$.

Destacamos que existem sequências bem comportadas $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ tais que

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = 0,$$

porém

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} \notin [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}].$$

Com efeito, como $\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}} \approx 1.44$, para

$$R_m = m^{\frac{3}{5}}$$

temos

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = 0$$

e

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} = 2^{\frac{3}{5}} \notin [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}].$$

Por outro lado, como uma consequência de nosso resultado, observamos o seguinte fato: se $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é bem comportada, e

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} \in [1, 2),$$

então necessariamente

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = 0.$$

Assim, no nosso caso, a condição (1.9) é supérflua.

1.2.2 Prova do Teorema de Dicotomia

De agora em diante, a letra γ denotará a constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left((-\log m) + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right) \approx 0.577. \tag{1.10}$$

Lema 1.2.4 *Se $1 \le R_m \le C_m$ para todo m e existe $L \in [0,\infty]$ tal que*

$$L = \lim_{m\to\infty}\frac{R_{2m}}{R_m}, \tag{1.11}$$

então,

$$L \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}].$$

Demonstração. Suponhamos $L < 1$. Para qualquer $0 < \varepsilon < 1 - L$, existe um N_0 tal que

$$m \ge N_0 \Rightarrow \frac{R_{2m}}{R_m} < 1 - \varepsilon.$$

Argumentando por indução, temos

$$R_{2^l N_0} < R_{N_0}(1-\varepsilon)^l$$

para todo inteiro positivo l e concluímos que

$$\lim_{l\to\infty} R_{2^l N_0} = 0,$$

que é impossível, pois $R_m \ge 1$ para todo m. Para simplificar a notação, escreveremos

$$\alpha := \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}.$$

Agora, mostraremos que $L > \alpha$ é também impossível. De [26], é sabido que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{C_{2m}}{C_m} = \alpha.$$

Provaremos que se $L > \alpha$, existe um N suficientemente grande tal que $R_N > C_N$, chegando deste modo a uma contradição.

Com efeito, dado um pequeno $0 < \varepsilon < L - \alpha$, existe um n_0 tal que

$$m \ge n_0 \Rightarrow \frac{C_{2m}}{C_m} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} := A \text{ e } \frac{R_{2m}}{R_m} > \alpha + \varepsilon := B.$$

Procedendo indutivamente, temos

$$C_{2^l n_0} < A^l C_{n_0}$$

$$R_{2^l n_0} > B^l R_{n_0}$$

para todo inteiro positivo l. Com isso,

$$\frac{R_{2^l n_0}}{C_{2^l n_0}} > \frac{B^l R_{n_0}}{A^l C_{n_0}} = \left(\frac{B}{A}\right)^l \frac{R_{n_0}}{C_{n_0}}.$$

Como $\frac{B}{A} > 1$, concluímos que

$$\lim_{l\to\infty} \left(\frac{B}{A}\right)^l \frac{R_{n_0}}{C_{n_0}} = \infty$$

e assim existe um inteiro positivo N_1 tal que

$$\frac{R_{2^{N_1} n_0}}{C_{2^{N_1} n_0}} > 1,$$

que é uma contradição. ∎

Lema 1.2.5 *Se $1 \leq R_m \leq C_m$ para todo m e o limite (1.11) existe, então, existe um inteiro positivo N_0 tal que*

$$\frac{2^l N_0}{R_{2^l N_0}} > \frac{N_0}{R_{N_0}} \left(\frac{4}{3}\right)^l$$

para todo inteiro positivo l.

Demonstração. Do lema anterior temos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} = L \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}].$$

Assim, como

$$\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}} < \frac{3}{2},$$

existe um certo N_0 tal que

$$\frac{R_{2m}}{R_m} < \frac{3}{2}$$

para todo $m \geq N_0$. Logo, por indução,

$$R_{2^l N_0} < \left(\frac{3}{2}\right)^l R_{N_0}$$

para todo inteiro positivo l. Concluímos que

$$\frac{2^l N_0}{R_{2^l N_0}} > \frac{2^l N_0}{\left(\frac{3}{2}\right)^l R_{N_0}} = \frac{N_0}{R_{N_0}} \left(\frac{4}{3}\right)^l$$

para todo l. ∎

Lema 1.2.6 *Se* $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ *é bem comportada e* $1 \leq R_m \leq C_m$ *para todo* m*, então,*

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = 0. \tag{1.12}$$

Demonstração. Seja $M := \lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1})$. A tarefa principal é mostrar que $M \notin (0, \infty)$.

Suponha que $M \in (0, \infty)$. Neste caso, de (1.12), existe um inteiro positivo N_1 tal que

$$m \geq N_1 \Rightarrow R_m - R_{m-1} > \frac{M}{2}.$$

Assim,

$$m \geq N_1 \Rightarrow R_{2m} - R_m > \frac{mM}{2}$$

e

$$m \geq N_1 \Rightarrow \frac{R_{2m}}{R_m} - 1 > \left(\frac{mM}{2}\right)\frac{1}{R_m}.$$

Do Lema 1.2.4, temos

$$1 \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} \leq \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}.$$

Logo, existe um inteiro positivo N_2 tal que

$$m \geq N_2 \Rightarrow \frac{R_{2m}}{R_m} < \frac{3}{2}.$$

Deste modo, se $N_3 := \max\{N_1, N_2\}$, temos

$$m \geq N_3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{R_{2m}}{R_m} - 1 > \left(\frac{mM}{2}\right)\frac{1}{R_m}. \tag{1.13}$$

Do lema anterior sabemos que existe N_0 tal que

$$\frac{2^l N_0}{R_{2^l N_0}} > \frac{N_0}{R_{N_0}}\left(\frac{4}{3}\right)^l \tag{1.14}$$

para todo inteiro positivo l.

Agora, vamos escolher um número inteiro positivo l_0 tal que

$$l > l_0 \Rightarrow N_l := 2^l N_0 > N_3.$$

Assim, de (1.13), sabemos que

$$l \geq l_0 \Rightarrow N_l > N_3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \left(\frac{N_l M}{2}\right)\frac{1}{R_{N_l}} = \left(\frac{M}{2}\right)\frac{2^l N_0}{R_{2^l N_0}}. \tag{1.15}$$

Mas, como

$$\lim_{l\to\infty} \frac{N_0}{R_{N_0}} \left(\frac{4}{3}\right)^l = \infty,$$

de (1.14) e (1.15), chegamos a uma contradição.

O argumento para mostrar que $\lim_{m\to\infty}(R_m - R_{m-1})$ não pode ser infinito é uma consequência do argumento desenvolvido anteriormente. ∎

Observe-se que uma simples modificação da prova dos lemas anteriores fornece o seguinte resultado geral:

Proposição 1.2.7 *Se $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é bem comportada e*

$$1 \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} < 2,$$

então,

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = 0.$$

Nosso principal resultado é uma consequência direta dos lemas anteriores:

Teorema 1.2.8 (Dicotomia) *Se $1 \leq R_m \leq C_m$ para todo m, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(i) $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é subexponencial e não bem comportada.

(ii) $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é bem comportada com

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}]$$

e

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = 0.$$

Destacamos que a informação $\lim_{m\to\infty}(R_m - R_{m-1}) = 0$ em (ii) é uma consequência do fato de que $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é bem comportada, com $\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}]$; isto é devido à Proposição 1.2.7.

O corolário seguinte responde positivamente, em certa forma, o Problema 1.2.2:

Corolário 1.2.9 *A sequência das constantes ótimas $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ que satisfazem a desigualdade de Bohnenblust–Hille é:*

(i) subexponencial e não bem comportada

ou

(ii) bem comportada com

$$\lim_{m\to\infty} \frac{K_{2m}}{K_m} \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}]$$

e

$$\lim_{m\to\infty} (K_m - K_{m-1}) = 0.$$

No caso escalar real, é conhecido que $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ satisfaz

$$2^{1-\frac{1}{m}} \leq K_m \leq C_m$$

para todo inteiro positivo m (veja [27]). Não é difícil encontrar exemplos de sequências subexponenciais e não bem comportadas que satisfaçam a desigualdade anterior. Por exemplo,

$$R_m := \begin{cases} 2^{1-\frac{1}{m}}, & \text{se } m = 2^k \text{ para algum } k \\ C_m, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1.2.3 Comportamento não-polinomial das constante ótimas

É bem sabido que o expoente $\frac{2m}{m+1}$ na desigualdade, tanto polinomial como multilinear, de Bohnenblust–Hille é ótimo. Por isso, o senso comum nos dita que as constantes ótimas da desigualdade de Bohnenblust–Hille devem de ter um comportamento uniforme, sem oscilações estranhas no seu crescimento. Se a parte (i) do Corolário 1.2.9 fosse verdadeira, o resultado obtido seria fortemente inesperado. Por outro lado, se a parte (ii) do Corolário 1.2.9 for verdadeira, sendo o conjecturado neste estudo, também teremos informações importantes sobre o crescimento destas constantes. Por exemplo:

$$\lim_{m\to\infty} (K_m - K_{m-1}) = 0$$

e este também é um resultado surpreendente, tendo em vista as estimativas anteriores conhecidas para o crescimento destas constantes (veja [11, 20, 21, 39]).

Como outra aplicação do Teorema de Dicotomia, temos o seguinte resultado, mencionado na introdução, o qual dá resposta negativa ao Problema 1.2.1.

Corolário 1.2.10 *Seja $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille. Se $p(m)$ é qualquer polinômio não-constante, então,*

$$K_m \not\sim p(m).$$

Mais ainda, se

$$q \in \mathbb{R} - [0, \beta]\,, \tag{1.16}$$

com

$$\beta := \log_2 \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.526,$$

e $c \in (0,\infty)$*, então, a sequência* $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ *não pode ser da forma*

$$K_m \sim cm^q.$$

Com efeito, escrevendo $B_m^{(q)} = cm^q$ se $K_m \sim B_m^{(q)}$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \frac{K_{2m}}{K_m} &= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{B_{2m}^{(q)}}{B_m^{(q)}} . \frac{K_{2m}}{B_{2m}^{(q)}} . \frac{B_m^{(q)}}{K_m} \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{B_{2m}^{(q)}}{B_m^{(p)}} \right) \cdot \lim_{m\to\infty} \left(\frac{K_{2m}}{B_{2m}^{(q)}} \right) \cdot \lim_{m\to\infty} \left(\frac{B_m^{(q)}}{K_m} \right) \\ &= 2^q.\end{aligned}$$

Como $q \in \mathbb{R} - \left[0, \log_2\left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)\right]$, temos

$$2^q \notin [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}]$$

e isto contradiz o Teorema de Dicotomia. O caso $q < 0$ é obviamente impossível. Um procedimento análogo mostra que se $p(m)$ é qualquer polinômio não-constante, então,

$$K_m \nsim p(m). \quad \blacksquare$$

As consequências do Teorema de Dicotomia foram confirmadas e complementadas posteriormente por diferentes autores. Por exemplo, o Corolário 1.2.9 foi melhorado em [44] para:

- **Teorema** ([44, Theorem 8.1]). Seja $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille. Se existe $L \in [-\infty, \infty]$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} (K_{m+1} - K_m) = L,$$

então,

$$L = 0.$$

Observe-se que, no teorema acima, não é preciso que as $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ sejam bem comportadas para concluir que $L = 0$ quando $\lim_{m\to\infty} (K_{m+1} - K_m) = L$.

Uma outra conclusão importante em [44, Theorem 8.5] é que, para todo $m \geq 2$,

$$K_m < 1.65\,(m-1)^{\log_2\left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)} + 0.13.$$

Isto, além de confirmar o Corolario 1.2.10, fornece informações mais precisas sobre as K_m. Por exemplo o fato de terem crescimento subpolinomial e p-sub-harmônico para $p \approx 0.47$.

1.2.4 Teorema de Dicotomia para o caso de escalares complexos

Na subseção 1.2.1, foi dito que os resultados apresentados são válidos para ambos casos, escalares reais e complexos. Isto é devido ao fato de que as melhores constantes conhecidas na desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille para escalares complexos são menores do que as melhores constantes conhecidas na desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille para escalares reais.

Dito isto, escreveremos a seguir os resultados correspondentes ao caso complexo, os quais podem ser facilmente deduzidos a partir dos raciocínios introduzidos nas seções anteriores.

Lembremos que, na seção anterior, é provado, no Teorema 1.1.5, que, para o caso de escalares complexos, a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille é satisfeita com constantes $(C_{\mathbb{C},m})_{m=1}^{\infty}$ dadas por:

$$C_{\mathbb{C},m} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1, \\ \left(\widetilde{A}_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}\right)^{-1} C_{\mathbb{C},\frac{m}{2}} & \text{se } m \text{ é par e} \\ \left(\widetilde{A}_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{-1-m}{2}} C_{\mathbb{C},\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(\widetilde{A}_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{1-m}{2}} C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} & \text{se } m \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

com

$$\widetilde{A_p} = \left(\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, também é provado, na mesma seção (subseção 1.1.2), que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{C_{\mathbb{C},2m}}{C_{\mathbb{C},m}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}.$$

Temos, assim, um teorema de dicotomia e seus respectivos corolários, onde são usadas estas novas informações:

Teorema 1.2.11 (Dicotomia) *Se $1 \leq R_m \leq C_{\mathbb{C},m}$ para todo m, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(i) $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é subexponencial e não bem comportada.

(ii) $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é bem comportada com

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_{2m}}{R_m} \in [1, e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}]$$

e

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - R_{m-1}) = 0.$$

Corolário 1.2.12 *A sequência das constantes ótimas* $(K_{\mathbb{C},m})_{m=1}^{\infty}$ *que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille para o caso de escalares complexos é:*

(i) subexponencial e não bem comportada

ou

(ii) bem comportada com

$$\lim_{m\to\infty} \frac{K_{\mathbb{C},2m}}{K_{\mathbb{C},m}} \in [1, e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}]$$

e

$$\lim_{m\to\infty} (K_{\mathbb{C},m} - K_{\mathbb{C},m-1}) = 0.$$

Corolário 1.2.13 *Seja* $(K_{\mathbb{C},m})_{m=1}^{\infty}$ *a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille para o caso de escalares complexos. Se* $p(m)$ *é qualquer polinômio não-constante, então,*

$$K_{\mathbb{C},m} \nsim p(m).$$

Mais ainda, se

$$q \in \mathbb{R} - [0, \beta], \tag{1.17}$$

com

$$\beta := \log_2 \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma} \right) \approx 0.30497,$$

e $c \in (0, \infty)$, *então, a sequência* $(K_{\mathbb{C},m})_{m=1}^{\infty}$ *não pode ser da forma*

$$K_{\mathbb{C},m} \sim cm^q.$$

1.3 Variações da desigualdade 4/3 de Littlewood

A desigualdade 4/3 de Littlewood [36] (veja também [29]) afirma que existe uma constante $L_{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq L_{\mathbb{K}} \|U\|$$

para toda forma bilinear $U : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo N. É bastante conhecido que o expoente 4/3 é ótimo e recentemente foi demonstrado, também por Diniz, Muñoz-Fernández, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda em [27] que a constante $L_{\mathbb{R}} = \sqrt{2}$ é igualmente ótima. Para escalares complexos, é sabido que $L_{\mathbb{C}} \leq 2/\sqrt{\pi}$.

No entanto, se substituirmos $4/3$ por $r > 4/3$, pela inclusão das normas é claro que existe uma constante ótima $L_{\mathbb{K},r}$ que satisfaz

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq L_{\mathbb{K},r} \|U\|$$

e é menor que $\sqrt{2}$ (caso real) e $2/\sqrt{\pi}$ (caso complexo).

Neste capítulo, entre outros resultados, obteremos a constante ótima $L_{\mathbb{R},r}$ para todo $r \geq \frac{4}{3}$; com efeito, provaremos que

$$L_{\mathbb{R},r} = \begin{cases} 2^{\frac{2-r}{r}} \text{ para } r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right) \\ 1 \text{ para } r \geq 2. \end{cases}$$

Como consequência de nossas estimativas, veremos que

$$L_{\mathbb{R},r} > L_{\mathbb{C},r}$$

para todo $r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right)$.

1.3.1 As variações. Caso real

Como mencionamos anteriormente, se substituirmos $4/3$ por $r > 4/3$, então, a constante ótima $L_{\mathbb{K},r}$ que satisfaz

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq L_{\mathbb{K},r} \|U\| \tag{1.18}$$

é menor que $\sqrt{2}$. Nosso objetivo principal é encontrar o valor ótimo de $L_{\mathbb{K},r}$ para cada $r \geq 4/3$:

Teorema 1.3.1 *As constante ótima $L_{\mathbb{R},r}$ que satisfaz (1.18) é*

$$L_{\mathbb{R},r} = \begin{cases} 2^{\frac{2-r}{r}} \textit{ para } r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right) \\ 1 \textit{ para } r \geq 2. \end{cases}$$

Demonstração. O caso $r \geq 2$ é bastante simples. Na verdade, pode-se utilizar que o corpo escalar real tem cotipo 2 e a sua constante de cotipo é 1. Por isso,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|U\| \tag{1.19}$$

para todo N e toda forma bilinear $U : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$. Usando (1.19) e a monotonicidade da norma ℓ_r, deduzimos que $L_{\mathbb{R},r} \leq 1$. Por outro lado, utilizando $U_0(x,y) = x_1y_1$ em (1.18), concluímos que $L_{\mathbb{R},r} \geq 1$.

Agora, vamos lidar com o caso $r \in [\frac{4}{3}, 2)$. Usando um argumento simples de interpolação, podemos mostrar que se $\theta \in (0,1)$ é tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{4/3} + \frac{1-\theta}{2},$$

então,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i,e_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i,e_j)|^{4/3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\theta} \left(\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i,e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\theta} \\
&\leq \left(\sqrt{2}\,\|U\|\right)^{\theta} (\|U\|)^{1-\theta} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{\theta} \|U\| \\
&= 2^{\frac{2-r}{r}} \|U\|.
\end{aligned}$$

No outro sentido, inspirados em [27], consideramos

$$U_1(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2, \tag{1.20}$$

temos $\|U_1\| = 2$ e, assim,

$$L_{\mathbb{R},r} \geq \frac{4^{\frac{1}{r}}}{\|U_1\|} = 2^{\frac{2-r}{r}}.$$

Temos assim, a igualdade. ∎

1.3.2 As variações. Caso complexo

Para todo $r \geq 2$ é válido o mesmo raciocínio utilizado para $L_{\mathbb{R},r}$. Assim, para todo $r \geq 2$, temos $L_{\mathbb{C},r} = 1$.

Mostraremos que

$$L_{\mathbb{C},r} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4-2r}{r}} \quad \text{para todo } r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right).$$

No entanto, não temos informação se nossas estimativas são ótimas para $r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right)$.

Para o caso de escalares complexos, as melhores estimativas que conhecemos para a constante no teorema $4/3$ de Littlewood é

$$L_{\mathbb{C},\frac{4}{3}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

O mesmo argumento de interpolação utilizado no caso de escalares reais pode ser usado para mostrar que se $\theta \in (0,1)$ é tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{4/3} + \frac{1-\theta}{2},$$

então,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i,e_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i,e_j)|^{4/3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\theta} \left(\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i,e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\theta} \\ &\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4-2r}{r}} \|U\|.\end{aligned}$$

Por outro lado, para $r \geq 4/3$, é fácil verificar, como no caso real, que $L_{\mathbb{C},r} \geq 1$. No entanto, se $r \in \left[\frac{4}{3},2\right)$, a nossa técnica para fornecer estimativas inferiores ótimas para $L_{\mathbb{R},r}$ parece inútil para o caso complexo. A tabela a seguir é ilustrativa:

r	$L_{\mathbb{C},r} \geq$	$L_{\mathbb{C},r} \leq$
	1	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4-2r}{r}}$
4/3	1	$2/\sqrt{\pi} \approx 1.128380$
1.93	1	1.0088
1.95	1	1.0062
1.99	1	1.0012
≥ 2	1	1

Como $L_{\mathbb{R},r} = 2^{\frac{2-r}{r}}$ e $L_{\mathbb{C},r} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4-2r}{r}}$ para todo $r \in \left[\frac{4}{3},2\right)$, resulta que

$$L_{\mathbb{R},r} > L_{\mathbb{C},r} \tag{1.21}$$

para todos os casos não triviais, i.e., sempre que $r \in \left[\frac{4}{3},2\right)$.

1.3.3 Sobre as variações no caso complexo

Não sabemos se nossas estimativas superiores para escalares complexos são as ótimas. Agora enfatizamos que uma técnica diferente, embora bastante eficaz para estimativas na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille, fornece resultados piores. Esta abordagem é baseada em argumentos recentes de [20, 46]. Por uma questão de praticidade, lembremos alguns resultados úteis mencionados anteriormente:

Teorema 1.3.2 (Desigualdade de Khinchine) *Para todo $0 < p < \infty$, existem constantes A_p e B_p tais que*

$$A_p\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.22}$$

para todo inteiro positivo N e escalares $a_1, \ldots, a_n$ (r_n denota a enésima função de Rademacher).

Para $p > p_0$, com $1 < p_0 < 2$ definido por

$$\Gamma\left(\frac{p_0+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

um resultado dado por U. Haagerup ([30]) afirma que

$$A_p := \sqrt{2}\left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/p} \tag{1.23}$$

é a melhor constante que satisfaz (1.22). Para $p \leq p_0$, o melhor valor é

$$A_p = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}. \tag{1.24}$$

Teorema 1.3.3 (Blei, Defant et al, [20, Lemma 3.1]) *Sejam A e B dois conjuntos finitos e não-vazios e $(a_{ij})_{(i,j)\in A\times B}$ uma matriz escalar com entradas positivas; denotemos suas colunas por $\alpha_j = (a_{ij})_{i\in A}$ e suas linhas por $\beta_i = (a_{ij})_{j\in B}$. Então, para $q, s_1, s_2 \geq 1$, com $q > \max(s_1, s_2)$, temos*

$$\left(\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{ij}^{w(s_1,s_2)}\right)^{\frac{1}{w(s_1,s_2)}} \leq \left(\sum_{i\in A}\|\beta_i\|_q^{s_1}\right)^{\frac{f(s_1,s_2)}{s_1}} \left(\sum_{j\in B}\|\alpha_j\|_q^{s_2}\right)^{\frac{f(s_2,s_1)}{s_2}},$$

com

$$w : [1,q)^2 \to [0,\infty),\ w(x,y) := \frac{q^2(x+y)-2qxy}{q^2-xy},$$
$$f : [1,q)^2 \to [0,\infty),\ f(x,y) := \frac{q^2x-qxy}{q^2(x+y)-2qxy}.$$

Como observado anteriormente, é possível usar uma versão mais conveniente do Teorema 1.3.2:

Teorema 1.3.4 (Desigualdade de Khinchine) *Para todo $0 < p < \infty$, existem constantes $\widetilde{A_p}$ e $\widetilde{B_p}$ tais que*

$$\widetilde{A_p}\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{n=1}^{N}a_n\varepsilon_n\right\|_p \leq \widetilde{B_p}\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.25}$$

para todo inteiro positivo N e escalares $a_1, \ldots, a_n$ (ε_n denota variáveis aleatórias de Steinhaus).

De [45, p. 151], sabemos que

$$A_p \leq \widetilde{A_p} \tag{1.26}$$

$$\widetilde{A_p} = \left(\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

e estas constantes são ótimas para o caso que é de nosso interesse, i.e., $p \geq 1$ (veja [3, 51]). Assim, usamos os resultados anteriores e obtemos:

Proposição 1.3.5 *A constante ótima $L_{\mathbb{C},r}$ que satisfaz:*

$$L_{\mathbb{C},r} \leq \left(\left(\Gamma\left(\frac{\frac{2r}{4-r}+2}{2}\right)\right)^{\frac{4-r}{2r}}\right)^{-1}$$

para todo $r \in \left(\frac{4}{3}, 2\right)$.

Nesta demonstração utilizamos o conceito de somabilidade, para detalhes sobre operadores absolutamente somantes recomendamos [25]).

Demonstração. Seja $U : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{C}$ uma forma bilinear. Usamos o Teorema 1.3.3 com

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = \frac{2r}{4-r}, \\ q = 2 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} \omega(s_1, s_2) = r, \\ f(s_1, s_2) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Temos então

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| (U(e_i, e_j))_{j=1}^{N} \right\|_2^{s_2}\right)^{\frac{f(s_2,s_1)}{s_2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \left\| (U(e_i, e_j))_{i=1}^{N} \right\|_2^{s_1}\right)^{\frac{f(s_1,s_2)}{s_1}}.$$

Logo, do Teorema 1.3.4, temos

$$\begin{aligned} \left\| (U(e_i, e_j))_{i=1}^{N} \right\|_2^{s_1} &\leq \left(\widetilde{A_{s_1}}^{-1}\right)^{s_1} \int\limits_{[0,1]} \left| \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(t) U(e_i, e_j) \right|^{s_1} dt \\ &= \left(\widetilde{A_{s_1}}^{-1}\right)^{s_1} \int\limits_{[0,1]} \left| \sum_{i=1}^{N} U(\varepsilon_i(t) e_i, e_j) \right|^{s_1} dt. \end{aligned}$$

Somando sobre $j = 1, \ldots, N$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{N} \left\| (U(e_i, e_j))_{i=1}^{N} \right\|_2^{s_1} \leq \left(\widetilde{A_{s_1}}^{-1}\right)^{s_1} \int\limits_{[0,1]} \sum_{j=1}^{N} \left| U(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(t) e_i, e_j) \right|^{s_1} dt.$$

Assim

$$\sum_{j=1}^{N}\left\|(U(e_i,e_j))_{i=1}^{N}\right\|_2^{s_1} \leq \left(\widetilde{A_{s_1}}^{-1}\right)^{s_1} \int\limits_{[0,1]} \left\|U(\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(t)e_i,.)\right\|_{\pi(s_1;1)}^{s_1} dt$$
$$\leq \left(\widetilde{A_{s_1}}^{-1}\right)^{s_1} \|U\|^{s_1},$$

onde $\pi(s_1;1)$ denota a $(s_1;1)$-norma absoluta.

Logo

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\left\|(U(e_i,e_j))_{i=1}^{N}\right\|_2^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq \widetilde{A_{s_1}}^{-1}\|U\|.$$

Como $s_1 = s_2$, a outra estimativa é análoga; combinando ambas estimativas obtemos $\left(\sum\limits_{i,j=1}^{N}|U(e_i,e_j)|^r\right)^{1/r} \leq \left(\widetilde{A_{s_1}}^{-1}\|U\|\right)^{1/2}\left(\widetilde{A_{s_1}}^{-1}\|U\|\right)^{1/2} = \widetilde{A_{s_1}}^{-1}\|U\|.$

Ou seja

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N}|U(e_i,e_j)|^r\right)^{1/r} \leq \left(\left(\Gamma\left(\frac{\frac{2r}{4-r}+2}{2}\right)\right)^{\frac{4-r}{2r}}\right)^{-1}\|U\|.$$

Concluimos assim que

$$L_{\mathbb{C},r} \leq \left(\left(\Gamma\left(\frac{\frac{2r}{4-r}+2}{2}\right)\right)^{\frac{4-r}{2r}}\right)^{-1}$$

para todo $r \in \left[\frac{4}{3},2\right)$. ■

Porém, uma inspeção direta revela

$$\left(\Gamma\left(\frac{4}{4-r}\right)\right)^{\frac{r-4}{2r}} > \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4-2r}{r}}$$

para todo $r \in \left(\frac{4}{3},2\right)$ e, assim, as estimativas da subseção 1.3.2 têm, de fato, mais precisão.

Capítulo 2

Desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille

Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, e m um inteiro positivo qualquer. De forma geral, temos a seguinte definição:

Definição 2.0.6 *Dizemos que $p : E \to \mathbb{K}$, é um polinômio homogêneo em E de grau m, se existe uma forma $m-$linear*

$$Q : E^m \to \mathbb{K}$$

tal que

$$p(x) = Q(x, x, ..., x)$$

para todo $x \in E$.

Denotando por $\widehat{Q}$ a restrição de Q à diagonal de E^m, temos um famoso resultado algébrico que diz o seguinte:

Lema 2.0.7 *Para todo polinômio $m-$homogêneo p, existe uma única forma simétrica m-linear*

$$P : E^m \to \mathbb{K}$$

tal que $\widehat{P} = p$.

Tal forma simétrica m-linear é chamada de forma polar de p.

Um outro resultado conhecido diz que polinômios m-homogêneos e formas $m-$lineares são contínuas sobre E se, e somente se, são limitados na bola unitária B_E ou B_{E^m}, respetivamente.

Em tal caso podemos definir as normas:

$$\|p\| := \sup\{|p(x)|; x \in B_E\} \tag{2.1}$$

para p um polinômio m-homogêneo contínuo em E, e

$$\|P\| := \sup\{|P(x_1, ..., x_m)|; x_1, ..., x_m \in B_E\}$$

para P uma forma $m-$multilinear contínua em E^m. Em geral, estas normas são muito difíceis de serem calculadas.

Denotando por $\mathcal{P}(^mE)$, o espaço de todos os polinômios $m-$homogêneos e contínuos sobre E, a igualdade (2.1) define uma norma sobre $\mathcal{P}(^mE)$.

Como caso particular, quando $E = \mathbb{K}^n$, o polinômio m-homogêneo p pode ser escrito como

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha, \tag{2.2}$$

com $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_n} ... x_n^{\alpha_n}$.

Quando o espaço de Banach tem dimensão finita, é possível definir em $\mathcal{P}(^mE)$ a seguinte norma. Lembremos que se a dimensão de E for n, podemos identificá-lo com $\mathbb{K}^n$.

Definição 2.0.8 *Seja E um espaço de Banach de dimensão finita e p um polinômio m-homogêneo contínuo em E.*

$$|p|_q := \left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

define a l_q, $q \geq 1$, norma de $p(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$, que será denotada por $|\cdot|_q$

Assim, quando E for de dimensão finita, teremos que existem constantes $c_{m,n}$ e $C_{m,n}$, tais que

$$c_{m,n} |p|_q \leq \|p\| \leq C_{m,n} |p|_q, \tag{2.3}$$

para todo $p \in \mathcal{P}(^mE)$. Isto é, as normas $\|.\|$ e $|.|_q$ vão ser equivalentes.

Um caso particular da anterior desigualdade é a desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille, a saber, quando $q = \frac{2m}{m+1}$. Segundo esta desigualdade, se $q = \frac{2m}{m+1}$, então

$$|p|_q \leq c_{m,n}^{-1} \|p\|$$

transforma-se em

$$|p|_{\frac{2m}{m+1}} \leq c_m \|p\|.$$

Dito de outro modo, se $q = \frac{2m}{m+1}$, então a constante é independente da dimensão do espaço $\mathbb{K}^n$.

Bohnenblust e Hille provaram que $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo, no sentido que se considerarmos $q < \frac{2m}{m+1}$, perderemos a independência da dimensão do espaço $\mathbb{K}^n$.

Dissertaremos um pouco neste capítulo sobre esta famosa desigualdade e sua profunda relação com a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund. No final do capítulo escreveremos sobre o estado da arte das constantes que satisfazem a desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille e daremos estmativas inferiores não-triviais para as constantes ótimas no caso complexo.

2.1 As desigualdades de Bohnenblust–Hille e Kahane–Salem–Zygmund

A desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (veja [33, Teorema 4, Capítulo 6] e também [50]) é um resultado poderoso e com diversas aplicações (veja [5, 8, 9, 16, 48]). Essa desigualdade, em suas formulações mais gerais, é um resultado probabilístico, mas no nosso caso, uma versão mais fraca é suficiente.

Teorema 2.1.1 *[Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund]Sejam m, n inteiros positivos. Então existem sinais $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ tais que o polinômio m-homogêneo*

$$P_{m,n} : \ell_\infty^n \to \mathbb{C}$$

dado por

$$P_{m,n}(z) = \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_\alpha z^\alpha$$

satisfaz

$$\|P_{m,n}\| \leq C n^{(m+1)/2} \sqrt{\log m}$$

onde $C > 0$ é uma constante universal que não depende de n nem de m.

Desde a publicação do famoso artigo [8] de H. P. Boas, o uso da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund e alguns resultados probabilísticos avançados na teoria das séries de Dirichlet parece ter-se tornado, em certo sentido, usual (veja, por exemplo, [4, 18, 37] e as referências ali contidas). Neste capítulo, fornecemos conexões explícitas entre a desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund e as desigualdades de Bohnenblust-Hille que podem ser úteis em futuras investigações.

2.1.1 Uma prova simples de que o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo

Como mencionamos na Introdução, a prova (dada por Bohnenblust e Hille) da otimalidade o expoente $2m/(m+1)$ na desigualdade de Bohnenblust–Hille era demasiado complicada. Veremos a seguir que a desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund nos dá uma prova bastante simples deste fato, a essência do nosso argumento pode ser encontrada no artigo de Boas [8].

Em [7] há uma prova alternativa da otimalidade do expoente $2m/(m+1)$ para o caso de formas m-lineares. Porém, o argumento é também nada trivial e envolve os conceitos de conjuntos p-Sidon e sistemas subgaussianos. Agora, mostraremos que a otimalidade do expoente $\frac{2m}{m+1}$ é uma conseqüência direta da desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund (os resultados são demonstrados para escalares complexos, mas o mesmo argumento vale para escalares reais, uma vez que é óbvio que a desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund pode ser adaptada ao caso de escalares reais).

Teorema 2.1.2 *O expoente $\frac{2m}{m+1}$ na desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille é ótimo.*

Demonstração. Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo fixo. Para cada n, seja $P_{m,n} : \ell_\infty^n \to \mathbb{C}$ o polinômio m-homogêneo que satisfaz a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund. Para nosso objetivo é suficiente considerar o caso $n > m$.

Seja $q < \frac{2m}{m+1}$. Então, um cálculo de combinatória mostra que

$$\textstyle\sum_{|\alpha|=m} |\varepsilon_\alpha|^q = p(n) + \displaystyle\frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(n-k),$$

onde $p(n) > 0$ é um polinômio de grau $m-1$. Se a desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille fosse válida com o expoente q, então, teríamos a existência de uma constante $C_{m,q} > 0$ tal que

$$C_{m,q}C \geq \frac{1}{n^{(m+1)/2}\sqrt{\log m}}\left(p(n) + \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)\right)^{1/q}$$

para todo n, com C do Teorema 2.1.1. Elevando ambos lados ao expoente q e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$(C_{m,q}C)^q \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r(n)}{m!n^{q(m+1)/2}\left(\sqrt{\log m}\right)^q} + \frac{p(n)}{n^{q(m+1)/2}\left(\sqrt{\log m}\right)^q}\right),$$

com

$$r(n) = \prod_{k=0}^{m-1}(n-k).$$

Como

$$\deg r = m > \frac{q(m+1)}{2},$$

teríamos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r(n)}{m!n^{q(m+1)/2}\left(\sqrt{\log m}\right)^q} + \frac{p(n)}{n^{q(m+1)/2}\left(\sqrt{\log m}\right)^q}\right) = \infty,$$

uma contradição. Por outro lado, como a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille (com expoente q) implica na desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille com o mesmo expoente, concluímos que $\frac{2m}{m+1}$ é também ótimo no caso multilinear. ■

Lembramos que um polinômio de Bernoulli é um polinômio cujos coeficientes são -1 ou 1; a prova anterior, embora simples, prova, de fato, um resultado mais forte:

Teorema 2.1.3 *Seja $q \geq 1$ tal que existe uma constante $C_{q,m} \geq 1$ que satisfaz*

$$\left(\sum_{|\alpha|=m}|\varepsilon_\alpha|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{q,m}\|P_{m,n}\|$$

para todo polinômio de Bernoulli m-homogêneo $P_{m,n} : \ell_\infty^n \to \mathbb{C}$ definido por

$$P_{m,n}(z) = \sum_{|\alpha|=m}\varepsilon_\alpha z^\alpha.$$

Então,

$$q \geq \frac{2m}{m+1}.$$

2.1.2 A constante da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund e as constantes ótimas da desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille

De agora em diante, K_m^{pol} denota a constante ótima satisfazendo a (m-homogênea) desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille (caso complexo) e C denota a constante universal da desigualdade Kahane-Salem-Zygmund.

Nesta subseção, vamos esboçar algumas conexões entre a constante universal da desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund e as constantes ótimas da desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille (caso complexo); esta abordagem pode ser útil para a construção de estratégias adequadas para a investigação das estimativas inferiores para as constantes de Bohnenblust–Hille (caso complexo).

A busca das constantes ideais de qualquer natureza é naturalmente dividida em duas abordagens diferentes: a busca de estimativas superiores e estimativas inferiores. Para a desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille, a situação não é diferente.

O melhor resultado em limitantes superiores para a desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille (caso complexo) é devido a Defant*et al.*, publicado em 2011, em [18] (ver (2.9)). Por outro lado, as estimativas para limites inferiores apresenta poucos avanços no caso complexo. Até agora, o único resultado não-trivial (para escalares complexos) afirma que

$$K_2^{pol} \geq 1.1066 \text{ ([13])}.$$

Vamos começar com uma observação simples: as constantes ótimas que satisfazem a (m homogênea) desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille podem ser usadas para estimar a constante universal C da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund .

Com efeito, usando o mesmo procedimento da seção anterior (escolhendo $m = n$), conclui-se que

$$K_m^{pol} C \geq \frac{1}{m^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\log m}} \left(\frac{(2m-1)!}{m!\,(m-1)!} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \tag{2.4}$$

para todo $m \geq 2$. Um cálculo simples fornece uma cota inferior para o valor ótimo de C. De fato, para $m = 2$, de (2.4), temos

$$K_2^{pol} C > 0.9680. \tag{2.5}$$

Mas, de [49, Theorem III.1], sabemos que

$$K_2^{pol} \leq 1.7432$$

e, assim, concluímos que

$$C > \frac{0.9680}{1.7432} > 0.5553. \tag{2.6}$$

Porém, usando uma técnica diferente pode-se obter uma estimativa bastante melhor para C. De [2, eq 3.1] e o "Maximum Modulus Principle"(como é usado em [13]), podemos mostrar que se $P_2 : \ell_\infty^2 \to \mathbb{C}$ é definido por

$$P_2(z_1, z_2) = az_1^2 + bz_2^2 + cz_1z_2 \tag{2.7}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, então,

$$\|P_2\| = \begin{cases} |a+b| + |c| & \text{se } ab \geq 0 \text{ ou } |c(a+b)| > 4|ab|, \\ (|a| + |b|)\sqrt{1 + \frac{c^2}{4|ab|}} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, se $a, b, c \in \{-1, 1\}$, os valores possíveis para a norma de P_2 são 3 e $\sqrt{5}$. Assim, resulta imediato que

$$C \geq \frac{\sqrt{5}}{2^{3/2}\sqrt{\log 2}} > 0.9495. \tag{2.8}$$

Não encontramos estimativas inferiores para C na literatura, assim, provavelmente, (2.8) pode ser de interesse. A diferença entre as estimativas (2.6) e (2.8) é talvez devida ao fato de que polinômios de Bernoulli parecem não ser bons candidatos para prover cotas inferiores para K_m^{pol}. Na verdade, em [13], a melhor escolha para a obtenção de cotas inferiores para a constante na desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille entre todos os polinômios da forma (2.7) é

$$P_2(z_1, z_2) = z_1^2 - z_2^2 + \frac{352\,203}{125\,000} z_1 z_2.$$

Como C é uma constante universal, presumimos que (2.4) talvez não seja útil nas estimativas das constantes de Bohnenblust–Hille. Para uma versão mais forte de (2.4), parece que deve evitar-se a utilização da constante universal C e usar valores particulares de C para escolhas específicas de m, n. Mais precisamente, se $n \geq m \geq 2$ estão fixos, a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund diz-nos que existe uma constante

$C_{m,n}$ com $0 < C_{m,n} \leq C$ tal que existem sinais $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ e um polinômio m-homogêneo

$$P_{m,n} : \ell_\infty^n \to \mathbb{C}$$
$$P_{m,n}(z) = \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_\alpha z^\alpha,$$

com

$$\|P_{m,n}\| \leq C_{m,n} n^{(m+1)/2} \sqrt{\log m}.$$

Mantendo essa notação, temos que

$$K_m^{pol} C_{m,n} \geq \frac{1}{n^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\log m}} \left(\frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!} \right)^{\frac{m+1}{2m}}$$

sempre que m, n sejam inteiros positivos com $n \geq m \geq 2$. Assim, a busca dos valores ótimos de $C_{m,n}$, além de seu interesse intrínseco, pode ajudar na investigação incipiente de cotas inferiores para as constantes da desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille K_m^{pol}. Porém, nossa suspeita é que os polinômios de Bernoulli (e, portanto, a desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund) são eficazes exclusivamente para a prova da otimalidade do expoente $\frac{2m}{m+1}$ (Teorema 2.1.2) e, como aconteceu no caso $m = n = 2$, eles não parecem eficientes para o cálculo das constantes K_m^{pol}.

2.1.3 A desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund: o expoente $\frac{m+1}{2}$ é ótimo até para escalares reais?

É óbvio que a norma de um polinomio de Bernoulli sobre o corpo escalar complexo nunca é menor do que a sua norma sobre o corpo escalar real. Mais precisamente, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\varepsilon_\alpha \in \{-1, 1\}$ e

$$P_{\mathbb{K}} : \ell_\infty^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$
$$P_{\mathbb{K}}(z) = \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_\alpha z^\alpha,$$

então,

$$\|P_{\mathbb{R}}\| \leq \|P_{\mathbb{C}}\|.$$

Um exemplo concreto: se $P_{\mathbb{K}} : \ell_\infty^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é dado por

$$P_{\mathbb{K}}(z) = z_1^2 - z_2^2 + z_1 z_2,$$

então,

$$\|P_{\mathbb{R}}\| = \frac{5}{4} < \sqrt{5} = \|P_{\mathbb{C}}\|.$$

Assim, como mencionamos no início da primeira seção deste capítulo, é óbvio que a desigualdade de Kahane - Salem - Zygmund vale para escalares reais. Parece ser bem conhecido que a potência $\frac{m+1}{2}$ na desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund é ótima para escalares complexos, mas para escalares reais o resultado parece não ser claro. Em qualquer caso, provaremos a seguir que o expoente $\frac{m+1}{2}$ é ótimo para ambos casos.

Teorema 2.1.4 *O expoente $\frac{m+1}{2}$ na desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund é ótima para ambos os casos de escalares reais e complexos.*

Demonstração. O argumento é semelhante à prova da otimalidade do Teorema 2.1.2. Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo fixo, $n \geq m$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Suponhamos que a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund é valida para um expoente $q < \frac{m+1}{2}$. Para cada n e m, seja $P_{m,n} : \ell_\infty^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ o polinômio m-homogêneo que satisfaz a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund com este exponente q. Como na prova do Teorema 2.1.2, temos

$$\sum\nolimits_{|\alpha|=m} |\varepsilon_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} = p(n) + \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$$

onde $p(n) > 0$ é um polinômio de grau $m-1$; e existiria uma constante $C_{(q)} > 0$ tal que

$$K_m^{pol} C_{(q)} \geq \frac{1}{n^q\sqrt{\log m}}\left(p(n) + \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)\right)^{(m+1)/2m}$$

para todo n. Logo,

$$\left(K_m^{pol} C_{(q)}\right)^{\frac{2m}{m+1}} \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r(n)}{m!n^{\frac{2mq}{m+1}}\left(\sqrt{\log m}\right)^{\frac{2m}{m+1}}} + \frac{p(n)}{n^{\frac{2mq}{m+1}}\left(\sqrt{\log m}\right)^{\frac{2m}{m+1}}}\right),$$

com r como na prova do Teorema 2.1.2. Como

$$\deg r = m > \frac{2mq}{m+1},$$

obtemos um absurdo. ■

2.2 Sobre as constantes na desigualdade polinomial de Bohnenblust-Hille

Como foi dito na Introdução, Bohnenblust e Hille também demonstraram em [11] uma versão da desigualdade para polinômios homogêneos. Eles demonstraram que:

Teorema 2.2.1 *Para cada m, existe uma constante $D_{\mathbb{C},m} \geq 1$ tal que, para todo polinômio $m-$homogêneo $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ sobre $\mathbb{C}^N$, tem-se*

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_{\mathbb{C},m} \|P\|$$

As constantes originais dadas por Bohnenblust-Hille aparentemente não foram expressadas explicitamente. Num trabalho recente, Defant e Sevilla-Peris [23] escrevem as constantes que talvez Bohnenblust-Hille consideravam como sendo válidas na desigualdade, as quais são, a saber,

$$D_{\mathbb{C},m} = m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}} \frac{m^m}{(m!)^{\frac{m+1}{2m}}}.$$

Como mencionamos na Seção 1.2, atualmente é conhecido que as constantes ótimas na desigualdade de Bohnenblust–Hille para o caso multilinear possuem crescimento subpolinomial. Em vista disto, a investigação de limitantes inferiores para as constantes de Bohnenblust–Hille parece ser uma tarefa importante. Os resultados existentes para aplicações multilineares e escalares reais são altamente não-triviais.

Na seção 1.2, comentamos que em [27] é mostrado que para aplicações multilineares e escalares reais tem-se que

$$K_{\mathbb{R},m} \geq 2^{1-\frac{1}{m}}$$

e ainda está em aberto se estas estimativas são ótimas ou não. Assim, a possibilidade de as constantes multilineares de Bohnenblust–Hille serem limitadas está aberta. Mais ainda, para o caso multilinear complexo, não existem limitantes inferiores conhecidos diferentes dos triviais e também, até que se mostre o contrário, a possibilidade de as constantes ótimas no caso complexo serem para todo m, $C_{\mathbb{C},m} = 1$ não pode ser descartada. Na Seção 2.2.2, daremos estimativas inferiores não-triviais para a desigualdade polinomial, caso complexo. Mostraremos que se $m \geq 2$, então,

$$D_{\mathbb{C},m} \geq \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{1}{2m}}.$$

2.2.1 Bohnenblust-Hille para polinômios homogêneos. Estado da arte

A desigualdade de Bohnenblust–Hille para polinômios homogêneos ([11], 1931) garante que existe uma função $D_{\mathbb{K}} : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ tal que, para todo polinômio m-homogêneo P sobre $\mathbb{K}^N$, a $\ell_{\frac{2m}{m+1}}$-norma do conjunto de coeficientes de P é limitada superiormente por $D_{\mathbb{K}}(m)$ vezes a sup-norma de P no polidisco unitário.

Escrevendo $D_{\mathbb{K},m} = D_{\mathbb{K}}(m)$, as estimativas históricas para as constantes no caso polinomial complexo são:

$$D_{\mathbb{C},m} \leq \begin{cases} m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}} \frac{m^m}{(m!)^{\frac{m+1}{2m}}} & [11]\ (1931) \\ \left(\sqrt{2}\right)^{m-1} \frac{m^{\frac{m}{2}}(m+1)^{\frac{m+1}{2}}}{2^m (m!)^{\frac{m+1}{2m}}} & [14,\ 34]\ (70\text{'s}) \\ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \frac{m^{\frac{m}{2}}(m+1)^{\frac{m+1}{2}}}{2^m (m!)^{\frac{m+1}{2m}}} & [49]\ (1995) \end{cases}$$

Recentemente, em ([18], 2011), é provado que para o caso complexo,

$$D_{\mathbb{C},m} \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1} \sqrt{m} \left(\sqrt{2}\right)^{m-1}, \tag{2.9}$$

que nos fornece a hipercontratividade da desigualdade. Mais precisamente, a estimativa anterior garante que existe $C > 1$ tal que, para cada m e para todo polinômio $m-$homogêneo $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ sobre $\mathbb{C}^N$, tem-se

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C^m \|P\|. \tag{2.10}$$

Similar à versão multilinear, o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo.

Como afirmamos no resumo deste trabalho, podemos resumir em uma frase as principais informações dos trabalhos recentes: as constantes das desigualdades de Bohnenblust–Hille são, em geral, extraordinariamente menores do que as primeiras estimativas tinham previsto.

Para entender o significado da frase anterior, basta lembrar que, para o caso da desigualdade multilinear, as melhores constantes conhecidas passaram de ter crescimento exponencial a ter crescimento p-sub-harmônico para um correspondente $p \in (0, 1)$. Por sua vez, para o caso da desigualdade para polinômios homogêneos, caso complexo, as constantes passaram de ter crescimento da ordem $o\left(m^{\frac{m}{2}}\right)$ a ter, como foi dito acima, crescimento hipercontrativo.

Esta situação não é diferente para o caso da desigualdade para polinômios homogêneos sobre escalares reais. Parece ser *folclore* o fato da desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille ser válida para escalares reais, mas nenhuma estimativa aparece na literatura.

Recentemente em [13] num trabalho de Campos, Muñoz-Fernández, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda, os autores usam resultados clássicos e um caso especial de [21, Lema 5] para proporcionar a seguinte estimativa:

Teorema 2.2.2 *Se P é um polinômio $m-$homogêneo em $\mathbb{R}^n$, dado por*

$$P\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha x^\alpha,$$

então

$$\left(\sum_{|\alpha|=m}|a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\leq D_{\mathbb{R},m}\left\|P\right\|$$

com

$$D_{\mathbb{R},m}=C_{\mathbb{R},m}\frac{m^m}{\left(m!\right)^{\frac{m+1}{2m}}}$$

Porém, um estudo com ideias modernas no mesmo trabalho ([13]), forneceu a seguinte nova estimativa e com isto a hipercontratividade das constantes para o caso de escalares reais.

Teorema 2.2.3 (Campos, Muñoz, Pellegrino, Seoane.) *Se P é um polinômio $m-$homogêneo sobre $\mathbb{R}^N$ dado por*

$$P\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha x^\alpha,$$

então,

$$\left(\sum_{|\alpha|=m}|a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\leq D_{\mathbb{R},m}\left\|P\right\|$$

com

$$D_{\mathbb{R},m}\leq\left(2^{\frac{3}{2}}(\sqrt[3]{\frac{e\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}})\right)^m<\left(3.3521\right)^m.$$

É precisamente neste caso polinomial para escalares reais que, aparentemente temos o maior avanço na busca de limitantes inferiores. No mesmo trabalho [13] em que os autores provam a hipercontratividade para o caso polinomial real, é dada uma estimativa inferior tendendo a infinito. Mais do que isso, uma estimativa inferior com crescimento exponencial, o que permite concluir em [13] que:

Teorema 2.2.4 (Campos, Muñoz, Pellegrino, Seoane.) *O crescimento das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille para escalares reais não pode ser melhor do que hipercontrativo. Mais ainda,*

$$D_{\mathbb{R},m} > \left(\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}} \right)^m > (1.1771)^m$$

para todo inteiro positivo m.

Resumindo,

$$(3.3521)^m > D_{\mathbb{R},m} > (1.1771)^m$$

e a hipercontratividade no caso polinomial real é ótima!

É natural pensar que para a desigualdade polinomial complexa seja valida uma afirmação do mesmo tipo. Porém, não é conhecido que existam estimativas inferiores para $D_{\mathbb{C},m}$ diferentes das triviais, com a única exceção do caso $m = 2$.

2.2.2 Caso complexo. Um Teorema $1 + \epsilon$

Em nosso conhecimento, o único limitante inferior não trivial para as constantes da desigualdade polinomial (complexa)de Bohnenblust–Hille é

$$D_{\mathbb{C},2} \geq 1.1066,$$

provado em [13]. O fato de não se conhecer estimativas para as normas de polinômios complexos de graus superiores a dois é um impedimento para obter estimativas inferiores eventualmente boas para $D_{\mathbb{C},m}$, com $m > 2$. Nosso seguinte resultado, que aparece em [40], fornece-nos estimativas inferiores não-triviais.

Teorema 2.2.5 *Para todo $m \geq 2$,*

$$D_{\mathbb{C},m} \geq \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{1}{2m}} > 1.$$

Demonstração. Seja $P_2 : \ell_\infty^2 \to \mathbb{C}$ um polinômio 2-homogêneo dado por

$$P_2(z_1, z_2) = az_1^2 + bz_2^2 + cz_1z_2.$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $ab < 0$ e $|c(a + b)| \leq 4|ab|$. De (2.1.2), sabemos que

$$\|P_2\| = (|a| + |b|)\sqrt{1 + \frac{c^2}{4|ab|}}.$$

Para cada $m \geq 2$, consideremos

$$P_m(z) = z_3 \dots z_m P_2(z_1, z_2).$$

Escolhendo $a = -b = 1$, a $\ell_{\frac{2m}{m+1}}$ norma dos coeficientes de P_m é

$$\left(\sqrt[m+1]{a^{2m}} + \sqrt[m+1]{b^{2m}} + \sqrt[m+1]{c^{2m}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} = \left(2 + \sqrt[m+1]{c^{2m}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}$$

e

$$\|P_m\| = \|P_2\| = (|a| + |b|)\sqrt{1 + \frac{c^2}{4\,|ab|}} = \sqrt{4 + c^2}.$$

Assim, obtemos

$$D_{\mathbb{C},m} \geq f_m(x)$$

para todo número real x, com

$$f_m(x) = \left(2 + \sqrt[m+1]{x^{2m}}\right)^{\frac{(m+1)}{2m}} . \left(\sqrt{4 + x^2}\right)^{-1}.$$

Resolvendo $f'_m(x) = 0$, concluímos que $x = 2^{\frac{m+1}{2}}$ é o ponto onde o máximo é atingido. Assim,

$$D_{\mathbb{C},m} \geq f_m(2^{\frac{m+1}{2}}) = \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{1}{2m}}.$$

Um cálculo simples mostra que $(1 + 2^{1-m})^{\frac{1}{2m}} > 1$. ■

Observação 2.2.6 *Adotando o polinômio* $P(z) = \prod_{j=1}^{k} P_2(z_{2j-1}, z_{2j})$ *para* $m = 2k$ *(resp.,* $P(z) = z_m \prod_{j=1}^{k} P_2(z_{2j-1}, z_{2j})$ *para* $m = 2k + 1$*), o Teorema 2.2.5 pode ser levemente melhorado para:*

$$D_{\mathbb{C},m} \geq \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{1}{4}} \ \textit{(resp., } \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{m-1}{4m}} \textit{).}$$

Acreditamos que as estimativas inferiores dadas no Teorema 2.2.5 estão longe de serem as estimativas ótimas.

Como um comentário final, estamos persuadidos a acreditar que a chave que permitirá encontrar melhores estimativas inferiores para o caso complexo encontra-se em [2], mediante uma apropriada generalização das ideias ali expostas a polinômios de graus maiores.

Apêndice

Existe uma desigualdade multilinear forte de Bohnenblust–Hille?

Ainda há uma série de questões em aberto sobre o crescimento das constantes ótimas que satisfazem as desigualdades multilineares (e polinomiais) de Bohnenblust–Hille a serem resolvidas. Por exemplo, *não* é claro que as melhores constantes $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ que satisfazem a desigualdade multilinear Bohnenblust–Hille tendam ao infinito. Parece que as estimativas originais nos induziam a pensar que, de fato, $K_m \to \infty$, porém não existe nenhuma evidência concreta.

Como mencionamos no capítulo 2, para o caso de escalares reais é sabido que

$$K_m \geq 2^{1-\frac{1}{m}} \tag{2.11}$$

e $K_2 = \sqrt{2}$. Por outro lado todas as estimativas conhecidas para as constantes na desigualdade de Bohnenblust–Hille sugerem que "provavelmente" tem-se $\lim_{m\to\infty} K_m = \infty$. Contudo, como uma questão de fato, não sabemos de qualquer prova de que a sequência $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ tende ao infinito. Nesta direção, só sabemos que, para o caso real, K_3 é estritamente maior que K_2 (veja [27]). Assim, não é completamente impossível que as estimativas de (2.11) sejam ótimas.

Embora ainda permaneça em um véu de mistério, combinando todas as informações obtidas até agora, acreditamos que a possibilidade da limitação das constantes da desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille deve ser seriamente considerada. Preferimos não conjecturar que é verdade, mas em vez disso, colocamo-lo como um problema em aberto:

Problema 2.2.7 *Existe uma constante universal $K_{\mathbb{K}}$ tal que*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\left|U(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq K_{\mathbb{K}} \sup_{z_1,\ldots,z_m\in\mathbb{D}^N}|U(z_1,\ldots,z_m)|$$

para todo inteiro positivo $m \geq 1$, toda forma m-linear $U : \mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo N?

Conjectura 2.2.8 *Se a resposta do anterior problema é positiva, conjecturamos que $K_{\mathbb{R}} = 2$ e $K_{\mathbb{C}} \leq 2$.*

Justificamos nossa conjectura de que $K_{\mathbb{R}} = 2$ motivados pelas cotas inferiores obtidas em [27] para as constantes da desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille (caso real)

$$K_m \geq 2^{1-\frac{1}{m}}. \tag{2.12}$$

Destacamos que o caso $m = 2$ em (2.12) é ótimo, i.e., $\sqrt{2}$ é a constante ótima para a desigualdade 2-linear de Bohnenblust–Hille (caso real). Como fato adicional, se considerarmos $m = 1$, então, a fórmula (2.12) também fornece um valor ótimo. Então, uma vez que, em cada nível m, a estimativa inferior para K_m é obtida pelo mesmo argumento indutivo (para detalhes, veja [27]) e, como os casos $m = 1, 2$, fornecem constantes ótimas, acreditamos que não é impossível que a fórmula (2.12) dê os valores exatos para as constantes ótimas de Bohnenblust–Hille.

Reforçamos nossa crença, observando os vários trabalhos recentes que mostram que o crescimento das constantes na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille é, de fato, muito mais lento do que as estimativas originais previam.

Parece ser *folclore* (embora não formalmente provado) que as constantes para o caso de escalares reais são maiores do que as constantes para o caso complexo. Por exemplo, para $m = 2$, temos $K_2 = \sqrt{2}$ no caso real e $K_2 \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} < \sqrt{2}$ no caso complexo. Além disso, o crescimento das constantes no caso complexo parece ser mais lento do que o crescimento no caso real (veja [41, 42]). Então, se a nossa conjectura é correta, parece natural pensar que $K_{\mathbb{C}} \leq K_{\mathbb{R}}$.

Em nosso entender, a possibilidade de uma "*desigualdade forte de Bohnenblust–Hille*" só se aplica para *formas multilineares* desde que, no caso de polinômios, é mostrado em [13] que, pelo menos para escalares reais, as constantes ótimas não são limitadas.

Referências Bibliográficas

[1] S. Aaronson, A. Ambainis, *The Need for Structure in Quantum Speedups*, In Proceedings of ICS. (2011), 338–352. arXiv:0911.0996

[2] R. M. Aron, M. Klimek, *Supremum norms for quadratic polynomials*, Arch. Math. (Basel) **76** (2001), no. 1, 73–80.

[3] A. Baernstein, R. C. Culverhouse, *Majorization of sequences, sharp vector Khinchin inequalities, and bisubharmonic functions*, Studia Math. **152** (2002), 231–248.

[4] R. Balasubramanian, B. Calado, H. Queffélec, *The Bohr inequality for ordinary Dirichlet series*, Studia Math. **175** (2006), 285–304.

[5] F. Bayart, *Maximum modulus of random polynomials*, Quart. J. Math. **63** (2012), 21–39.

[6] O. Blasco, *The Bohr radius of a Banach space, Vector measures, integration and related topics*, Oper. Theory Adv. Appl., **201**, Birkhäuser Verlag, Basel, (2010), 59–64. ??

[7] R. Blei, *Analysis in Integer and Fractional Dimensions*, Cambridge Studies in Advances Mathematics, 2001.

[8] H. P. Boas, *The football player and the infinite series*, Notices Amer. Math. Soc. **44** (1997), 1430–1435.

[9] H. P. Boas, D. Khavinson, *Bohr's power series theorem in several variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2975–2979.

[10] H. Bohr, *Über die Beteutung der Potenzreihen unendlieh vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen* $\sum \frac{a_n}{n^s}$, *Nachrichten von de Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Mathematisch-Physikalische Klasse. (1913), 441–488.

[11] H. F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. of Math. **32** (1931), 600–622.

[12] E. Bombieri and J. Bourgain, *A remark on Bohr's inequality*, Int. Math. Res. Not. **80** (2004), 4307–4330.

[13] J. R. Campos, G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *The bohnenblust-Hille inequality for real homogeneous polynomials is hypercontractive and this result is optimal*, arXiv:1209.4632v2.

[14] A. M. Davie, *Quotient algebras of uniform algebras*, J. London Math. Soc. **7** (1973), 31–40.

[15] A. Defant, D. García, M. Maestre, *Bohr's power series theorem and local Banach space theory*, J. Reine Angew. Math. **557** (2003), 173–197.

[16] A. Defant, D. García, M. Maestre, *Maximum moduli of unimodular polynomials*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), 209–229.

[17] A. Defant, D. García, M. Maestre, P. Sevilla-Peris, *Bohr's strips for Dirichlet series in Banach spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. **44** (2011), 165–189.

[18] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdá, M. Ounaïes, K. Seip, *The polynomial Bohnenblust–Hille inequality is hypercontractive*, Ann. of Math. **174** (2011), 485–497.

[19] A. Defant, M. Maestre, C. Prengel, *The Aritmetic Bohr radius*, Quart. J. Math. **59** (2008), 189-205.

[20] A. Defant. D. Popa, U. Schwarting, *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 220–242.

[21] A. Defant, P. Sevilla-Peris, *A new multilinear insight on Littlewood's 4/3-inequality*, J. Funct. Anal. **256** (2009), 1642–1664.

[22] A. Defant, P. Sevilla-Peris, *Convergence of Dirichlet polynomials in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 681–697.

[23] A. Defant, P. Sevilla-Peris, *The Bohnenblust–Hille cycle of ideas: from yesterday to today*, (2013) Preprint.

[24] A. Defant, U. Schwarting, *Bohr's radii and strips – a microscopic and a macroscopic view*, Note Mat. **31** (2011), 87–101.

[25] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. **43** (1995), xvi+474.

[26] D. Diniz, G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *The asymptotic growht of the constants in the Bohnenblust–Hille inequality is optimal*, J. Funct. Anal. **263** (2012), 415–428.

[27] D. Diniz, G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 575–580.

[28] P. G. L. Dirichlet, *Vorlesungen iiber Zahlentheorie*, Braunschweig. (1863), Suplemented and revised by R. Dedekind; corrected Chelsea reprint. (1968).

[29] D. J. H. Garling, *Inequalities: a journey into linear analysis*, Cambridge. 2007.

[30] U. Haagerup, *The best constants in the Khinchin inequality*, Studia Math. **70** (1982), 231–283.

[31] G. Johnson, G. Woodward, *On p-Sidon sets*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 161–167.

[32] M. Junge, C. Palazuelos, D. Pérez-García, I. Villanueva, M. M. Wolf, *Unbounded violations of bipartite Bell inequalities via operator space theory*, Comm. Math. Phys. **300** (2010), 715–739.

[33] J. P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 5, Cambridge University Press, Cambridge. 1993.

[34] S. Kaijser, *Some results in the metric theory of tensor products*, Studia Math. **63** (1978), 157–170.

[35] R. R. Kallman (ed.), *Einar Hille: Classical analysis and functional analysis, selected papers*, The MIT Press, Cambridge, MA. 1975.

[36] J. E. Littlewood, *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables*, Quart. J. Math. Oxford. **1** (1930), 164–174.

[37] B. Maurizi, H. Queffélec, *Some remarks on the algebra of bounded Dirichlet series*, J. Fourier Anal. Appl. **16** (2010), 676–692.

[38] A. Montanaro, *Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory*, J. Math. Phys. 53, 122206 (2012); doi: 10.1063/1.4769269.

[39] G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Estimates for the asymptotic behaviour of the constants in the Bohnenblust Hille inequality*, Lin. Mult. Algebra **60** (2012), 573–582.

[40] D. Núñez-Alarcón, *A note on the polynomial Bohnenblust–Hille inequality*, J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), 179-181.

[41] D. Núñez-Alarcón, *On the growth of the optimal constants of the multilinear Bohnenblust-Hille inequality*, Linear Alg. Appl. **439** (2013), 2494-2499.

[42] D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *On the Bohnenblust–Hille inequality and a variant of Littlewood's 4/3 inequality*, J. Funct. Anal. **264** (2013), 326–336.

[43] D. Núñez-Alarcón, *O Teorema de Bohnenblust-Hille*, Dissertação de Mestrado, UFPB. 2011.

[44] D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, D. M. Serrano-Rodríguez, *There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants* $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ *with* $\lim_{n\to\infty}(C_{n+1}-C_n)=0$, J. Funct. Anal. **264** (2013), 429–463.

[45] A. Pełczyński, *Norms of classical operators in function spaces*, Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau,1983), Astérisque. **131** (1985), 137–162.

[46] D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *New upper bounds for the constants in the Bohnenblust Hille inequality*, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 300–307.

[47] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Thesis. Univ. Compl. Madrid. 2003.

[48] I. Pitowsky, *Macroscopic objects in quantum mechanics: A combinatorial approach*, Physical Review A 70, 022103 (2004).

[49] H. Queffélec, H, *Bohr's vision of ordinary Dirichlet series: old and new results*, J. Anal. **3** (1995), 43–60.

[50] R. Salem, A. Zygmund, *Some properties of trigonometric series whose terms have random signs*, Acta Math. **91** (1954) 245–301.

[51] J. Sawa, *The best constant in the Khinchine inequality for complex Steinhaus variables, the case $p = 1$,* Studia Math. **81** (1985), 107–126.

[52] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press. 2005.

[53] D. M. Serrano-Rodríguez, *Improving the closed formula for subpolynomial constants in the multilinear Bohnenblust–Hille inequalities,* Linear Alg. Appl. **438** (2013), 3124–3138.