Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Equações de Schrödinger quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito

por

Gilson Mamede de Carvalho

João Pessoa - PB
Julho/2016

Equações de Schrödinger quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito

por

Gilson Mamede de Carvalho †

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Julho/2016

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (UFPA)

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva (UFG)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos (UFCG)

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (UFPB)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo (UFPB)
Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Julho/2016

Resumo

Neste trabalho, estudamos existência de solução do tipo onda estacionária para uma classe de equações de Schrödinger quaselineares, envolvendo pontencias que podem ser singular na origem ou que podem se anular no infinito. Para dimensões maiores que dois, consideramos não-linearidades com crescimento subcrítico. Em dimensão dois, trabalhamos com não linearidades possuindo crescimente crítico exponencial. Para a obtenção de nossos resultados, usamos técnicas variacionais, mais especificamente, uma versão do Teorema do Passo da Montanha, um resultado de regularidade do tipo Brézis-Kato, argumentos do tipo princípio da criticalidade simétrica, método de iteração de Moser e uma desigualdade do tipo Trundinger-Moser.

Palavras-chave: Equações de Schrödinger; Potenciais singulares ou se anulando no infinito; Métodos variacionais; Espaços de Orlicz; Desigualdade de Trudinger-Moser

Abstract

In this work, we study existence of standing wave solution for a class of quasilinear Schrödinger equations involving potentials that may be singular at the origin or vanishing at infinity. For dimensions bigger than two, we consider nonlinearities with subcritical growth. In dimension two, we work with nonlinearities having exponential critical growth. To obtain our results, we have used variational techniques, more specifically, a version of the Mountain Pass Theorem, a regularity result of Brézis-Kato type, arguments of symmetrical criticality principle type, Moser iteration method and a Trundinger-Moser type inequality.

Keywords: Quasilinear Schrödinger; Singular potentials or vanishing at infinity; Orlics spaces; Trudinger-Moser inequality.

Sumário

Notação e terminologia 1

Introdução 1

1 Equações quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito em dimensão $N \geq 3$ **10**

1.1 A mudança de variável f e o espaço de Orlicz E_1 14

1.2 Um resultado de regularidade do tipo Brézis-Kato 20

1.3 Propriedades do funcional I 24

1.3.1 Pontos críticos de I e soluções fracas de (P_1) 24

1.4 Prova do Teorema 1.0.7 32

2 Equações quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito em dimensão dois com crescimento crítico exponencial **39**

2.1 Propriedades dos espaços Y_{rad} e $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ 43

2.2 O espaço de Orlicz E_2 49

2.3 Uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser 54

2.4 Propriedades do funcional I 58

2.5 Pontos críticos do funcional I e soluções fracas de (P_2) 59

2.6 Prova do Teorema 2.0.8 64

3 Equações quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito envolvendo um parâmetro positivo **74**

3.1 O problema auxiliar 77

3.2 Pontos críticos de L_κ e solução fracas de (3.3) 82

3.3 Geometria do passo da montanha e a condição de Palais-Smale 86

3.4 Prova do Teorema 3.0.8 90

Referências **97**

Notação e terminologia

- C, C_0, C_1, ... denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$;
- $supp(f)$ denota o suporte da função f;
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ representa o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$ e $C_{0,rad}^\infty(\mathbb{R}^N) = \big\{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N); u \text{ é radial}\big\}$;
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável} : \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}$, em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por
$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p};$$
- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por
$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$
- Para $N \geq 3$, $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma do gradiente
$$\|\nabla u\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
e $D_{rad}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \big\{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N);\ u \text{ é radial}\big\}$;
- $H^1(\mathbb{R}^2)$ denota espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, onde
$$W^{1,2}(\mathbb{R}^2) = \left\{\begin{array}{l} u \in L^2(\mathbb{R}^2);\ \textit{existem } g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^2) \textit{tais que, para } i = 1,2; \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}^2} g_i \varphi dx,\ \textit{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \end{array}\right\}$$

munido com a norma

$$\|u\|_{1,2}^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2$$

e $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2); u \text{ é radial}\}$;

- $B_R(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio R e B_R a bola aberta de raio R centrada na origem;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano da função u;
- Para $N \geq 3$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ denota o expoente crítico de Sobolev;
- Para $N \geq 2$, $O(N)$ denota o grupo das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$.

Introdução

O principal objetivo deste trabalho de tese consiste na obtenção de resultados de existência de solução para equações de Schrödinger quaselineares da forma

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + W(x)\psi - \eta(x, |\psi|^2)\psi - \epsilon\left[\Delta\rho(|\psi|^2)\right]\rho'(|\psi|^2)\psi, \tag{1}$$

onde $\psi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é a função incógnita, ϵ é uma constante real, W é um potencial dado e $\eta : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ são funções apropriadas. Equações quaselineares do tipo (1) aparecem naturalmente na Física-Matemática e tem modelado alguns fenômenos físicos, dependendo da não linearidade ρ considerada. Por exemplo, quando $\rho(s) = s$, (1) foi usada para modelar uma equação de membrana de superfluido na física de plasmas, veja Kurihara em [32]. Quando $\rho(s) = (1+s)^{1/2}$, a equação (1) modelou a auto-canalização de um laser de auta potência ultra curto na matéria, veja [14, 15]. Para mais detalhes e aplicações físicas, veja também [37, 40] e suas referências.

Neste trabalho, considerando o caso $\rho(s) = s$, nosso maior interesse é garantir a existência de soluções do tipo onda estacionária para a equação (1), isto é, soluções da forma

$$\psi(x,t) = \exp(-i\mathcal{E}t)u(x),$$

em que $\mathcal{E} \in \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função real com $u(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por meio de cálculos simples, é fácil mostrar que ψ satisfaz (1) se, e somente se, u é solução da seguinte equação elíptica quaselinear:

$$-\Delta u + V(x)u - \epsilon\Delta(u^2)u = h(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

onde $V(x) = W(x) - \mathcal{E}$ é o novo potencial e $h(x,u) := \eta(x,u^2)u$ é a nova não linearidade.

Nos últimos anos, motivados pelas aplicações na Física, o estudo da equação (2) tem atraído a atenção de muitos pesquisadores da área de equações diferenciais. O caso semilinear, isto é, quando $\epsilon = 0$, já foi estudado extensivamente por vários autores com uma grande variedade de hipóteses sobre o potencial V e sobre a não linearidade h, veja por exemplo [4, 11, 12, 13, 18, 41, 44, 47]. O problema quaselinear ($\epsilon \neq 0$) também despertou a atenção de vários pesquisadores da área, veja, por exemplo, [3, 19, 21, 25, 26, 23, 45] e suas referências. Quando comparamos o estudo do caso semilinear com o caso quaselinear, observa-se que o quaselinear apresenta dificuldades extras quando queremos aplicar técnicas variacionais, isto é, associar um funcional energia ao problema (2) e fazer um estudo de existência de pontos críticos do mesmo. Especificamente, devido a presença do termo quaselinear e não convexo $\Delta(u^2)u$, não podemos garantir que o funcional associado a (2) esteja bem definido sobre os espaços de Sobolev usuais, por causa do termo integral $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx$, exceto quando $N = 1$ (veja [40]).

Aqui, mais precisamente, investigamos a existência de solução não nula e não negativa para a seguinte classe de problemas quaselineares do tipo (2):

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u - \epsilon[\Delta(u^2)]u = Q(|x|)h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0 \quad \text{as} \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{P}$$

em que $N \geq 2$, $V, Q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ são potenciais contínuos e não-negativos que satisfazem hipóteses convenientes na origem e no infinito, e $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo condições adequadas para tratar esta classe de problemas. Salientamos que os trabalhos citados acima assumiram que o potencial, nos problemas quaselineares, satisfazia as hipóteses

$$\limsup_{|x|\to 0} V(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \liminf_{|x|\to\infty} V(x) > 0.$$

Até o presente momento, não conhecemos trabalhos que lidam com a equação (2) cujo potencial V verifica ao mesmo tempo as condições:

i) $\limsup\limits_{|x|\to 0} V(x) = +\infty$ (singular na origem);

ii) $\liminf\limits_{|x|\to\infty} V(x) = 0$ (anulando-se no infinito).

As principais dificuldades encontradas no estudo do problema (P) são a possível perda de compacidade, uma vez que estamos trabalhando em todo o $\mathbb{R}^N$ e a presença do termo quaselinear e não convexo $\Delta(u^2)u$, o qual nos impede de aplicar diretamente métodos variacionais, pois o funcional energia associado a (P), geralmente, não está bem definido sobre os espaços de Sobolev usuais. Além disso, tem as características próprias dos potenciais V e Q que, como veremos, podem ser singulares na origem, coercivos e podem se anular no infinito. O fato de V não ser necessariamente limitado inferiormente por uma constante positiva e poder ser singular na origem, faz com que surjam dificuldades extras nas estimativas para se obter que soluções de (P) estejam em $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Este trabalho de tese está dividido em três capítulos.

No Capítulo 1, estudamos existência de solução fraca não nula e não negativa para o problema (P) com $N \geq 3$ e $\epsilon = 1$. Neste capítulo, assumimos que os potenciais V e Q satisfazem as seguintes condições:

(V_1) $V : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $V(r) \geq 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $a \in \mathbb{R}$ e $a_0 \geq -2$ tais que

$$0 < \liminf_{r \to 0^+} \frac{V(r)}{r^{a_0}} \leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{V(r)}{r^{a_0}} < \infty \quad \text{e} \quad 0 < \liminf_{r \to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}};$$

(Q_1) $Q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $Q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $b, b_0 \in \mathbb{R}$ com

(i) $b_0 > b$ quando $b \geq -2,\ a \leq -2$;

(ii) $b_0 \geq b,\ b_0 > -2$ quando $b \leq \max\{a, -2\}$,

satisfazendo

$$0 < \liminf_{r \to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} \leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} < \infty.$$

Para estabelecermos as hipóteses sobre a não-linearidade $h(s)$, introduzimos os seguintes números:

$$\alpha := \begin{cases} \dfrac{2(N+b)}{N-2}, & \text{se } b \geq -2 \text{ e } a \leq -2; \\ 2, & \text{if } b \leq \max\{a, -2\}; \end{cases}$$

e

$$\beta := \frac{2(N+b_0)}{N-2}.$$

Estes números estão relacionados com alguns resultados de imersão contínua e compacta, como veremos no Capítulo 1. Observe que, pela condição (V_1), $2 \leq \alpha$ e pela condição (Q_1), $\alpha < \beta$. Dessa forma, pedimos as seguintes condições sobre h:

(h_1) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $h(s) = o(|s|^{\alpha-1})$ quando $s \to 0$;

(h_2) existem $p \in (\max\{4, \alpha+1\}, 2\beta)$ e $C_1 > 0$ tais que

$$|h(s)| \leq C_1(1 + |s|^{p-1}), \text{ para todo } s \in \mathbb{R};$$

(h_3) existe $\mu > 2$ tal que

$$0 \leq 2\mu H(s) := 2\mu \int_0^s h(t)dt \leq sh(s), \text{ para todo } s \geq 0.$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.0.1 *Suponha que as condições (V_1), (Q_1) e $(h_1) - (h_3)$ são satisfeitas com $b > -\frac{N+2}{N}$ em $(Q_1)_i$ e $b \neq -2$ em $(Q_1)_{ii}$. Então, o problema (P) tem uma solução fraca não nula e não negativa.*

Para demonstrar este resultado, usamos uma mudança de variável introduzida nos trabalhos precursores de J. Liu, Y. Wang e Z.-Q. Wang [36] e M. Colin e L. Jeanjean [21], e transformamos o problema quaselinear em um problema semilinear, o qual tem um funcional energia associado bem definido e Gateaux-diferenciável em um espaço de Orlicz com peso. Estabelecemos um resultado que relaciona os pontos críticos desse funcional com as soluções do problema quaselinear. Daí, mostramos que o funcional energia satisfaz as hipóteses geométricas de uma versão do Teorema do Passo da Montanha e a condição de compacidade de Palais-Smale. Assim, concluímos que o ponto crítico do funcional associado é, de fato, uma solução fraca não nula e não negativa para (P). Para isto, foi necessário obtermos uma versão do resultado de regularidade de Brézis-Kato e um resultado do tipo princípio de criticalidade simétrica para o nosso contexto.

No Capítulo 2, estudamos existência de solução fraca não nula e não negativa para o problema (P), em dimensão $N = 2$ e com $\epsilon = 1$. Neste capítulo, assumimos as seguintes hipóteses sobre os potenciais V e Q:

(V_2) $V : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $V(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $a_0 > -2$ e $a > -2$ tais que

$$0 < \liminf_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} \le \limsup_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} < \infty$$

e

$$0 < \liminf_{r\to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} \le \limsup_{r\to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} < \infty.$$

(Q_2) $Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $Q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $-2 < b < a$ e $-2 < b_0 \le 0$ satisfazendo

$$0 < \liminf_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} \le \limsup_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{r\to +\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} < \infty.$$

Destacamos que, no referido capítulo, a não linearidade h possui crescimento exponencial crítico para esta classe de problemas quaselineares, mais especificamente, h satisfaz as seguintes condições:

(h_1) (*Crescimento exponencial crítico*) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{h(s)}{e^{\lambda s^4}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \lambda > \lambda_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \lambda < \lambda_0; \end{cases}$$

(h_2) $\lim\limits_{s\to 0} h(s)/s = 0$;

(h_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que para todo $s > 0$ vale

$$0 \le 2\mu H(s) := 2\mu \int_0^s h(t)dt \le sh(s);$$

(h_4) Existe uma constante $\xi > 0$ tal que

$$H(t) \ge \frac{\xi}{4} t^4 \quad \text{para todo } t \ge 0.$$

O principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 0.0.2 *Suponha que as condições (V_2), (Q_2) e $(h_1) - (h_4)$ sejam satisfeitas e que, em (h_4),*

$$\xi > \frac{\mu(3\pi + \|V\|_{L^1(B_2)})^2 + 12\pi(\mu-2)}{(\mu-2)\|Q\|_{L^1(B_1)}}.$$

Então, o problema (P) tem uma solução fraca não nula e não negativa.

Para demonstrar este resultado, assim como no Capítulo 1, usamos uma mudança de variável introduzida em [21] e [36] para transformar o problema quaselinear em outro semilinear, o qual mostramos que possui um funcional energia associado bem definido e Gateaux diferenciável sobre um espaço de Orlicz com peso. Para isto, foi essencial obtermos uma versão da Desigualdade de Trudinger-Moser para este espaço de Orlicz (veja mais detalhes no decorrer do Capítulo 2). Dessa forma, foi possível mostrar que o funcional associado ao problema semilinear satisfazia as condições geométricas de uma versão do Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, mostramos que o funcional satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale para níveis abaixo de um valor específico. Usando a hipótese (h_4), provamos que o nível do passo da montanha está entre os níveis onde se tem compacidade e, portanto, obtemos um ponto crítico não nulo no nível do passo da montanha. Daí, com a obtenção de um resultado do tipo princípio da criticalidade simétrica, conseguimos mostrar que este ponto crítico é uma solução não nula e não negativa para (P).

Problemas elípticos com crescimento exponencial crítico em $\mathbb{R}^2$, envolvendo a Desigualdade de Trudinger-Moser, tem recebido a atenção de muitos pesquisadores após os trabalhos pioneiros de N. Trudinger [30] e J. Moser [39]. Para problemas semilineares em $\mathbb{R}^2$ com crescimento crítico, veja, por exemplo, [5, 17, 22, 28] e suas referências. Com respeito a problemas quaselineares envolvendo crescimento exponencial crítico, podemos citar [23, 24, 26, 27, 38, 50]. Vale salientar que estes trabalhos consideram apenas potenciais V limitados inferiormente por uma constante positiva e que não se anulam no infinito. Portanto, nosso resultado principal no Capítulo 2 melhora e complementa os referidos trabalhos, uma vez que obtemos solução no nível do passo da montanha.

No Capítulo 3, investigamos a existência de solução fraca não nula e não negativa para o problema (P), cuja dimensão $N \geq 3$ e $\epsilon = -\kappa/2$ com $\kappa > 0$. Dessa forma, o problema (P) torna-se

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u + \dfrac{\kappa}{2}[\Delta(u^2)]u = Q(|x|)h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0 \quad \text{as} \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Neste capítulo, assumimos que os potenciais V e Q satisfazem as hipóteses:

(V_3) $V : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $V(r) \geq 0$ para todo $r > 0$ e exitem constantes

$a > -2(N-1)$ e $a_0 \geq -2$ tais que

$$0 < \liminf_{r \to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} \leq \limsup_{r \to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} < \infty$$

e

$$0 < \liminf_{r \to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} \leq \limsup_{r \to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} < \infty.$$

(Q_3) $Q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é um potencial contínuo, $Q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $b_0 > -2$ e $b \in \mathbb{R}$ com

i) $b = a < b_0$ se $a < -2$;

ii) $b \leq a$ e $b_0 > b$ se $a \geq -2$

satisfazendo os limites

$$0 < \liminf_{r \to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} \leq \limsup_{r \to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} < \infty.$$

Equações de Schrödinger do tipo acima, com o parâmetro $\kappa > 0$, desempenha um papel importante em vários domínios da Física, como, por exemplo, em ótica não linear e física dos plasmas (veja os trabalhos [16, 29, 34]). Recentemente, vários pesquisadores abordaram problemas do tipo (3), podemos citar [2, 6, 8, 49] e suas referências. Salientamos, que estes trabalhos, com exceção de [2], abordaram somente potenciais limitados inferiormente por uma constante positiva e assintóticos a uma constante positiva no infinito. Mas, Aires em [2] não lida com potenciais singulares.

Agora, definindo o número $\beta = 2(N+b_0)/(N-2)$, segue que $\beta > 2$ pois $b_0 > -2$. Assim, com relação a não linearidade h, pedimos as seguintes condições:

(h_1) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $\lim_{s \to 0} h(s)/s = 0$;

(h_2) Existem $p \in (2, \beta)$ e $C_1 > 0$ tais que

$$|h(s)| \leq C_1(1 + |s|^{p-1}) \ \ \forall \ s \in \mathbb{R};$$

(h_3) Existe $\mu > 2$ tal que para todo $s \geq 0$,

$$0 \leq \mu H(s) := \mu \int_0^s h(t)dt \leq sh(s) \ \ \forall \ s \geq 0.$$

O resultado principal deste capítulo está contido no seguinte teorema:

Teorema 0.0.3 *Suponha que as condições* (V_3), (Q_3) *e* $(h_1)-(h_3)$ *são satisfeitas. Então, existe* $\kappa_0 > 0$ *tal que, para todo* $0 < \kappa < \kappa_0$, *o problema (3) tem uma solução fraca* u_κ *não nula e não negativa.*

Na prova deste teorema, surge a mesma dificuldade como nos casos anteriores. O funcional energia associado não está bem definido nos espaços de Sobolev usuais por causa do termo $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx$. Mas, a mudança de variável usada nos capítulos anteriores não funciona neste caso, pois o termo $1-\kappa u^2$ pode mudar de sinal. Seguindo idéias introduzidas por Y. Shen e Y. Wang em [45] e C. Alves, Y. Shen e Y. Wang em [6], consideramos um problema auxiliar e uma outra mudança de variável. O novo funcional energia, o qual está associado a um problema semilinear, está bem definido e é de classe C^1 num espaço de Banach adequado e mostramos que pontos críticos deste funcional, com norma L^∞ menor que $1/\sqrt{3\kappa}$, são soluções fracas de (3). Para isto, usamos o método de iteração de Moser para estimar a norma L^∞ da solução e, novamente, é essencial obtermos um resultado do tipo princípio de criticalidade simétrica para este caso.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os resultados principais, bem como, as hipóteses sobre os potenciais V e Q e sobre a não linearidade h. No decorrer de todo este trabalho, a menos que seja explicitado, as convergências serão em $n \in \mathbb{N}$, quando $n \to \infty$.

Capítulo 1

Equações quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito em dimensão $N \geq 3$

O principal objetivo deste capitulo consiste em estabelecer um resultado de existência de solução fraca não nula e não negativa para (P) com $\epsilon = 1$ e em dimensão $N \geq 3$. Ou seja, estudamos a existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u - [\Delta(u^2)]u = Q(|x|)h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{P_1}$$

Aqui, assumimos que os potenciais V e Q satisfazem as seguintes condições:

(V_1) $V : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $V(r) \geq 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $a \in \mathbb{R}$ e $a_0 \geq -2$ tais que

$$0 < \liminf_{r \to 0^+} \frac{V(r)}{r^{a_0}} \leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{V(r)}{r^{a_0}} < \infty \quad \text{e} \quad 0 < \liminf_{r \to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}};$$

(Q_1) $Q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $Q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $b, b_0 \in \mathbb{R}$ com

(i) $b_0 > b \quad \text{quando} \quad b \geq -2, \ a \leq -2;$

(ii) $b_0 \geq b, \ b_0 > -2 \quad \text{quando} \quad b \leq \max\{a, -2\},$

satisfazendo

$$0 < \liminf_{r\to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} \le \limsup_{r\to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{r\to +\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} < \infty.$$

Observe que sob as condições (V_1) e (Q_1), os potenciais V e Q podem ser singular na origem ou podem se anular no infitito.

Exemplo 1.0.4 *Sejam $V, Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definidos por $V(r) = 4r^{-1}$ e $Q(r) = 3r^{-\frac{3}{2}}$. Facilmente, se constata que V e Q satisfazem as condições (V_1) e (Q_1), respectivamente.*

Observação 1.0.5 *Como ressaltado na Introdução, problemas do tipo (P_1) despertaram a atenção de vários pesquisadores da área, podemos citar, por exemplo, [3, 19, 21, 25, 26, 23, 45] e suas referências. Mas, até onde sabemos, não há problemas quaselineares do tipo acima abordando potenciais singulares e que se anulam no infinito. Até no caso $Q \equiv 1$, o nosso resultado principal deste capítulo complementa os trabalhos citados.*

A partir das constantes a, a_0, b e b_0, introduzimos os seguintes números:

$$\alpha := \begin{cases} \dfrac{2(N+b)}{N-2}, & \text{if } b \ge -2 \text{ e } a \le -2; \\ 2, & \text{if } b \le \max\{a, -2\}; \end{cases}$$

e

$$\beta := \frac{2(N+b_0)}{N-2}.$$

Observação 1.0.6 *Se $b_0 \ge 0$ então $\beta \ge 2^*$. Por outro lado, se $b_0 < 0$ então $\beta < 2^*$.*

Das condições (V_1) e (Q_1), podemos concluir facilmente que $\alpha < \beta$. Aqui, assumimos h satisfazendo as seguintes condições:

(h_1) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $h(s) = o(|s|^{\alpha-1})$ quando $s \to 0$;

(h_2) existem $p \in (\alpha, 2\beta)$ e $C_1 > 0$ tais que

$$|h(s)| \le C_1(1 + |s|^{p-1}), \text{ para todo } s \in \mathbb{R};$$

(h_3) existe $\mu > 2$ tal que

$$0 \le 2\mu H(s) := 2\mu \int_0^s h(t)dt \le sh(s), \text{ para todo } s \ge 0.$$

Neste capítulo, uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (P_1) se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz a identidade

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2)\nabla u \nabla \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} [2u|\nabla u|^2 + V(|x|)u]\phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(u)\phi \, dx, \quad (1.1)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observe que a função identicamente nula é uma solução fraca para (P_1). Mas, o nosso interesse consiste na obtenção de solução não nula e não negativa. Para apresentarmos o principal resultado deste capítulo, introduzimos alguns espaços normados que desempenham papel importante em nossos estudos. Para todo $1 \leq q < \infty$, definimos o espaço de Lebesgue com o peso Q por

$$L^q(\mathbb{R}^N; Q) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^q \, dx < \infty \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{q,Q} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Também definimos os espaços de Hilbert

$$X = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < \infty \right\}$$

e

$$\begin{aligned} X_{rad} &= \{u \in X : u(x) = u(gx)\ \forall g \in O(N)\} \\ &= \left\{ u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < \infty \right\}, \end{aligned}$$

munidos com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(|x|)uv) dx$$

e a correspondente norma

$$\|u\|_X = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

No que segue, enunciamos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 1.0.7 *Suponha que as condições (V_1), (Q_1) e $(h_1) - (h_3)$ são satisfeitas com $b > -\frac{N+2}{N}$ em $(Q_1)_i$, $b \neq -2$ em $(Q_1)_{ii}$ e $p > \max\{4, \alpha + 1\}$. Então, o problema (P_1) tem uma solução fraca não nula e não negativa $u \in X_{rad}$.*

Observação 1.0.8 *Como consequência do Teorema 1.0.7, obtemos um resultado de existência de solução fraca não nula e não negativa para a seguinte classes de problemas quaselineares*

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{1}{|x|^{\gamma}} u - [\Delta(u^2)]u = Q(|x|)|u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \\ u(x) \to 0 \quad \textit{quando} \quad |x| \to \infty, \end{cases}$$

com $0 < \gamma \leq 2$*,* $\max\{4, \alpha + 1\} < p < 2\beta$ *e* Q *satisfazendo a condição* (Q_1)*. Quando* $\gamma = 2$*, o potencial* $V(|x|) = 1/|x|^2$ *é conhecido na literatura como* ***Potencial de Hardy****. Estudos envolvendo potenciais* V*, do tipo acima no caso semilinear* $(\kappa = 0)$*, foram abordados em diversos trabalhos, veja, por exemplo, [7, 10] e suas referências.*

Uma das dificuldades encontrada no estudo do problema (P_1) é a possível perda de compacidade, uma vez que estamos trabalhando em todo o $\mathbb{R}^N$. Além disso, não podemos aplicar métodos variacionais diretamente ao problema estudado, pois o funcional energia associado ao problema (P_1), dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1 + 2u^2)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(u)dx, \tag{1.2}$$

não está bem definido nos espaços de Sobolev usuais, devido a presença do termo $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx$. Observe que soluções fracas de (P_1) podem ser vistas como pontos críticos do funcional J em um espaço de funções apropriado, pois a derivada formal de Gateaux de J é dado por

$$\begin{aligned} J'(u).\phi = &\int_{\mathbb{R}^N}(1 + 2u^2)\nabla u \nabla \phi \, dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u\phi \, dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(u)\phi \, dx. \end{aligned}$$

Com o objetivo de contornar as dificuldades destacadas anteriormente, usamos uma mudança de variável a fim de transformar o problema quaselinear em um semilinear. Depois, obtemos um resultado que relaciona as soluções fracas deste problema semilinear com as soluções fracas de (P_1). Daí, com o auxílio de um resultado de compacidade e usando as condições de crescimento sobre a não linearidade h, verificamos que o funcional energia associado ao problema semilinear está bem definido e é Gateaux diferenciável sobre um espaço de Orlicz com peso E_1 (que será definido mais adiante). Além disso, constatamos que o funcional satisfaz as hipóteses de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, como também, a condição de compacidade de Palais-Smale. Com isto e usando um resultado do tipo Princípio da Criticalidade Simétrica, garantimos a existência de uma solução fraca não nula para o problema semilinear. Em seguida, usando um resultado de regularidade do tipo Brézis-Kato e de um Lema Radial, verificamos que a solução pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que é não negativa. Finalmente, usando o resultado que relaciona as soluções do problema semilinear com as soluções do problema quaselinear, concluímos que (P_1) possui uma solução fraca não nula e não negativa.

1.1 A mudança de variável f e o espaço de Orlicz E_1

Como já foi observado acima, não podemos aplicar técnicas variacionais diretamente para estudar existência de uma solução fraca para o problema (P_1), por causa da presença do termo $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx$ na definição do funcional J. Para transpor esta dificuldade, usamos a ideia desenvolvida por Liu, Wang e Wang em [36] (veja também [21]), isto é, utilizamos uma mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, onde f é definida por

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1+2f^2(t))^{1/2}} \qquad \text{em} \quad [0,+\infty), \\ f(t) &= -f(-t) \qquad \text{em} \quad (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Com esta mudança de variável, a partir do funcional J, obtemos um novo funcional definido por

$$I(v) = J(f(v)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v|^2 + V(|x|)f^2(v)]\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(f(v))\, dx. \tag{1.3}$$

No lema abaixo, listamos algumas propriedades da função $f(t)$, cuja prova pode ser encontrada em [21, 25].

Lema 1.1.1 *A função $f(t)$ satisfaz as seguintes propiedades:*

(1) f está bem definida, é uma função de classe C^∞ e é uma função invertível;

(2) $|f'(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(3) $|f(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(4) $f(t)/t \to 1$ quando $t \to 0$;

(5) $f(t)/\sqrt{t} \to 2^{1/4}$ quando $t \to +\infty$;

(6) $f(t)/2 \leq tf'(t) \leq f(t)$ *para todo* $t \geq 0$*;*

(7) $|f(t)| \leq 2^{1/4}|t|^{1/2}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(8) $f^2(t)$ *é uma função estritamente convexa;*

(9) existe uma constante positiva C *tal que*

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & |t| \leq 1 \\ C|t|^{1/2}, & |t| \geq 1; \end{cases}$$

(10) existem constantes positivas C_1 *e* C_2 *tais que*

$$|t| \leq C_1|f(t)| + C_2|f(t)|^2 \ \ para \ \ todo \ \ t \in \mathbb{R};$$

(11) $|f(t)f'(t)| \leq 1/\sqrt{2}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(12) existe $C > 0$ *tal que* $f^2(2t) \leq Cf^2(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(13) Se $\varrho > 1$*, então* $|f(\varrho t)|^2 \leq \varrho^2|f(t)|^2$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(14) Se $0 \leq \varrho \leq 1$*, então* $|f(\varrho t)|^2 \leq \varrho|f(t)|^2$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Agora, definimos um subespaço, do tipo Orlicz, de $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$E_1 = \left\{ v \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N); \ \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v)dx < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|v\| = \|\nabla v\|_2 + \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(\lambda v)dx\right]. \tag{1.4}$$

$(E_1, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach (veja por exemplo [25]). O principal resultado desta secção consiste em obter um resultado de compacidade envolvendo o espaço E_1. Para isto, precisamos de alguns lemas auxiliares.

Lema 1.1.2 *(1)* E_1 *é um espaço vetorial normado quando munido com a norma dada em (1.4). Além disso, existe uma constante positiva* $C > 0$ *tal que*

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v)\, dx}{\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v)\, dx\right]^{1/2}} \leq C\|v\|, \tag{1.5}$$

para todo $v \in E_1$*;*

(2) Se $v_n \to v$ em E_1 então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|f^2(v_n) - f^2(v)|\, dx \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|f(v_n) - f(v)|^2\, dx \to 0;$$

(3) Se $v_n \to v$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v_n)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v)\, dx,$$

então

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(\xi(v_n - v))\, dx\right] \to 0.$$

Demonstração. Veja Proposição 2.1 de [25] ■

Corolário 1.1.3 *X_{rad} está imerso continuamente em E_1.*

Demonstração. De fato, pela definição do espaço X_{rad} e o item (3) do Lema 1.1.1 temos que $X_{rad} \subset E_1$. Considerando $(v_n) \subset X_{rad}$ com $v_n \to 0$ em X_{rad}, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)v_n^2 dx \to 0.$$

Em particular, desde que $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $v_n \to 0$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Portanto, pelo item (3) do Lema 1.1.2 temos $v_n \to 0$ em E_1 e com isto finalizamos a prova desta proposição. ■

No que segue, apresentamos dois lemas importantes para a demonstração do resultado principal desta seção. O primeiro é uma espécie de desigualdade de Gagliardo e o segundo é um resultado de imersão do espaço X_{rad} nos espaços $L^q(Q, \mathbb{R}^N)$. As demonstrações dos referidos lemas podem ser encontradas em [33] e em [47], respectivamente.

Lema 1.1.4 *Sejam $N \geq 3$ e $q = \frac{2(N+c)}{N-2}$ para algum $c \geq -2$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^c |u|^q dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,$$

para todo $u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.1.5 *Suponha que (V_1) e (Q_1) sejam válidas. Então, a imersão $X_{rad} \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N; Q)$ é contínua se $\alpha \leq q \leq \beta$. Além disso, se $b \geq \max\{a, -2\}$, a imersão é compacta para $\alpha < q < \beta$ e se $b < \max\{a, -2\}$, a imersão é compacta para $2 \leq q < \beta$.*

De posse deste lemas, temos o resultado principal desta seção.

Teorema 1.1.6 *Suponha que as condições* (V_1) *e* (Q_1) *sejam satisfeitas. Então, a aplicação* $v \to f(v)$ *de* E_1 *em* $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ *é contínua para* $\alpha \leq q \leq 2\beta$*. Além disso, se* $b \geq \max\{a, -2\}$ *então a aplicação é compacta para* $\alpha < q < 2\beta$*, e se* $b < \max\{a, -2\}$*, a aplicação é compacta para* $2 \leq q < 2\beta$*.*

Demonstração. Primeiramente, observe que se $v \in E_1$ então $f(v) \in X_{rad}$. Pelo lema anterior, X_{rad} está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ para $\alpha \leq q \leq \beta$. Logo, $f(v) \in L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ e pelo item (2) do Lema 1.1.1

$$\|f(v)\|_{q,Q} \leq C_1 \|f(v)\|_X \leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(|x|) f^2(v)) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Dado $R > 1$, pela condição (Q_1), existem $m, M > 0$ tais que

$$Q(r) \leq m r^{b_0}, \quad \text{se } 0 < r < R \quad \text{e}$$
$$Q(r) \leq M r^{b}, \quad \text{se } r > R.$$

Assim, pelo item (3) do Lema 1.1.1 e pelo Lema 1.1.4, temos

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_{2\beta,Q}^{2\beta} &\leq m \int_{B_R} |x|^{b_0} |f(v)|^{2\beta} \, dx + M \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |x|^{b} |f(v)|^{2\beta} \, dx \\ &\leq m \int_{B_R} |x|^{b_0} |v|^{\beta} \, dx + M \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |x|^{b_0} |v|^{\beta} \, dx \\ &\leq C \|\nabla v\|_2^{\beta} \leq C \|v\|^{\beta}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Portanto, $f(v) \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^N, Q)$ e, pela desigualdade de interpolação, a aplicação $v \to f(v)$ de E_1 em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ está bem definida para cada $\alpha \leq q \leq 2\beta$. Para mostrar que a aplicação é contínua, considere (v_n) uma sequência em E_1 tal que $v_n \to v$ em E_1. Em particular,

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

para cada $i = 1, 2, ..., N$ e pelo item (2) do Lema 1.1.2

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) |f(v_n) - f(v)|^2 dx \to 0. \tag{1.8}$$

Assim, a menos de subsequência, existe $h_i \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq h_i$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$ para cada $i = 1, 2, ..., N$, e pelo item (2) do Lema 1.1.1, temos

$$\left|\frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i}\right| \leq \left|f'(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right| \leq \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right| \leq h_i$$

e

$$\frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} = f'(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to f'(v)\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial f(v)}{\partial x_i}$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, para cada $i = 1, 2, ..., N$. Deste modo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\nabla f(v_n) \to \nabla f(v) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Esta informação em conjunto com (1.8) nos diz que $f(v_n) \to f(v)$ em X_{rad}. Então, pela Proposiçao 1.1.5, segue que $f(v_n) \to f(v)$ em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ se $\alpha \leq q \leq \beta$. Neste ponto, observe que para concluirmos que a aplicação é contínua, nos resta mostrar que $f(v_n) \to f(v)$ em $L^{2\beta}(\mathbb{R}^N, Q)$, pois, caso isto seja verdade, com a informação que $f(v_n) \to f(v)$ em $L^\alpha(\mathbb{R}^N, Q)$ e por interpolação, concluiremos que $f(v_n) \to f(v)$ em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$, para todo $\alpha \leq q \leq 2\beta$. Usando (1.7), segue que

$$\|f(v_n - v)\|_{2\beta,Q} \leq C\|v_n - v\|^{\frac{1}{2}} \to 0. \tag{1.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|f(v_n - v)\|_{2\beta,Q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n - v)|^{2\beta}dx\right)^{\frac{1}{2\beta}} \\
&= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f^2(v_n - v)|^{\beta}dx\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f^2(v_n - v)\|^{\frac{1}{2}}_{\beta,Q}.
\end{aligned}$$

Assim, por (1.9), $f^2(v_n - v) \to 0$ em $L^\beta(\mathbb{R}^N, Q)$. Consequentemente, existe $w \in L^\beta(\mathbb{R}^N, Q)$ tal que, a menos de subsequência, $f^2(v_n - v) \leq w$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Usando o item (12) do Lema 1.1.1 e a convexidade de f^2, temos

$$\begin{aligned}
f^{2\beta}(v_n) = \left[f^2(2(\frac{1}{2}v_n))\right]^\beta &\leq C\left[f^2(\frac{1}{2}v_n)\right]^\beta \\
&= C\left[f^2\left(\frac{1}{2}(v_n - v) + \frac{1}{2}v\right)\right]^\beta \\
&\leq C\left[\frac{1}{2}f^2(v_n - v) + \frac{1}{2}f^2(v)\right]^\beta \\
&\leq C_1 w^\beta + C_1 f^{2\beta}(v).
\end{aligned}$$

Daí, usando que $\left(C_1 w^{\beta} + C_1 f^{2\beta}(v)\right) \in L^1(\mathbb{R}^N; Q)$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que $f(v_n) \to f(v)$ em $L^{2\beta}(\mathbb{R}^N, Q)$, o que finaliza a prova da continuidade.

Agora, provaremos a compacidade da aplicação. Trataremos apenas o caso em que $b \geq \max\{a, -2\}$, uma vez que o outro é similar. Para isto, considere $(v_n) \subset E_1$ uma sequência limitada. Em particular, (v_n) é limitada em $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$, e pelo item (1) do Lema 1.1.2, $(\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) f^2(v_n) dx)$ é também limitada. Então, por (1.6) e (1.7), $(f(v_n))$ é limitada em X_{rad} e em $L^{2\beta}(\mathbb{R}^N, Q)$. Fixando $q \in (\alpha, \beta)$, da imersão compacta de X_{rad} em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$, existe $w \in L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ tal que $f(v_n) \to w$ em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ e em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Logo, pelo Lema de Brézis-Lieb, concluímos que $w \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N, Q)$ e $w \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^N, Q)$. Assim, de acordo com a desigualdade de interpolação, dado $s \in [q, 2\beta)$, existe $\lambda \in (0, 1]$ tal que

$$\|f(v_n) - w\|_{s,Q} \leq \|f(v_n) - w\|^{\lambda}_{q,Q} \|f(v_n) - w\|^{1-\lambda}_{2\beta,Q} \leq C\|f(v_n) - w\|^{\lambda}_{q,Q} \to 0,$$

de onde segue que $f(v_n) \to w$ em $L^s(\mathbb{R}^N, Q)$ para todo $q \leq s < 2\beta$. Com um argumento similar, concluímos que $f(v_n) \to w$ em $L^s(\mathbb{R}^N, Q)$ para todo $\alpha < s \leq q$, e isto completa a prova da proposição. ■

Corolário 1.1.7 *Suponha que as condições* (V_1) *e* (Q_1) *são satisfeitas. Então,* E_1 *está imerso continuamente em* $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ *se* $\alpha \leq q \leq \beta$. *Além disso, tal imersão é compacta se* $\alpha < q < \beta$ *quando* $b \geq \max\{a, -2\}$, *e é compacta* $2 \leq q < \beta$ *quando* $b < \max\{a, -2\}$.

Demonstração. Se $q \in [\alpha, \beta]$ então, pelo item (10) do Lema 1.1.1, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$Q(|x|)|v|^q \leq C[Q(|x|)|f(v)|^q + Q(|x|)|f(v)|^{2q}]. \tag{1.10}$$

Desde que $q, 2q \in [\alpha, 2\beta]$, pela Proposição 1.1.6, $v \in L^q(\mathbb{R}^N, Q)$, o que nos diz que E_1 é um subespaço de $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ sempre que $\alpha \leq q \leq \beta$. Vejamos que, de fato, tal imersão é contínua. Para isto, considere uma sequência $(v_n) \subset E_1$ tal que $v_n \to 0$ em E_1. Usando a Proposição 1.1.6 mais uma vez, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^q dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^{2q} dx \to 0.$$

Usando as convergências acima em conjunto com (1.10), segue que $v_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ e a continuidade da imersão está provada. Agora, vamos provar apenas o primeiro caso da compacidade, uma vez que a prova do outro é análoga. Seja (v_n) uma sequência limitada em E_1. Como vimos na prova da Proposição 1.1.6, existe $u \in L^s(\mathbb{R}^N, Q)$ tal que

$$u_n = f(v_n) \to u,$$

para todo $\alpha < s < 2\beta$. Em particular, $u_n \to u$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Além disso, existem $h_q \in L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ e $h_{2q} \in L^{2q}(\mathbb{R}^N, Q)$ tais que $|u_n| \leq h_q$ e $|u_n| \leq h_{2q}$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Assim, pelo item (10) do Lema 1.1.1, temos

$$|v_n|^q \leq Ch_q^q + Ch_{2q}^{2q} \quad \text{em quade todo ponto de } \mathbb{R}^N.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que $v_n \to v = f^{-1}(u)$ em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ sempre que $\alpha < q < \beta$, e o corolário está provado. ■

Proposição 1.1.8 *E_1 está imerso continuamente em $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^N)$, munido com a norma $\|\cdot\|$, é denso em E_1.*

Demonstração. Pela definição da norma em E_1, segue diretamente que E_1 está imerso continuamente em $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. A prova da densidade de $C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^N)$ em E_1 usa argumentos similares aos anteriores e omitimos aqui. ■

Devido a Beresticky e Lions também temos a seguinte caracterização para as funções pertencentes $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^2)$ (veja Lema Radial AIII em [13]).

Lema 1.1.9 *Sejam $N \geq 3$ e $v \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Então, existe uma função u contínua em $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tal que $v = u$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Além disso, existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que para toda $u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$,*

$$|u(x)| \leq C\|\nabla u\|_2 |x|^{-\frac{N-2}{2}},$$

em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| >> 1$.

1.2 Um resultado de regularidade do tipo Brézis-Kato

Nesta seção, provamos um resultado de regularidade do tipo Brézis-Kato, o qual será essencial para mostrarmos que os pontos críticos do funcional I pertencem à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como estamos interessados em um comportamento local, faremos o resultado para bolas abertas $B_R \subset \mathbb{R}^N$. Para a prova, nos inspiramos nas referências [31] e [46].

Proposição 1.2.1 *Seja $l : B_R \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory tal que para quase todo $x \in B_R$ vale a seguinte desigualdade*

$$|l(x,s)| \leq Q(|x|)a(x)(1+|s|) + C_1 Q(|x|) + V(|x|), \tag{1.11}$$

onde $C_1 > 0$, V e Q são funções satisfazendo as condições (V_1) e (Q_1), respectivamente e $a(x) \in L^{\frac{N+b_0}{2+b_0}}(Q, B_R)$. Se $v \in E_1$ é uma função satisfazendo $-\Delta v = l(x,v)$ em B_R, isto é,

$$\int_{B_R} \nabla v \nabla \varphi \, dx = \int_{B_R} l(x,v)\varphi \, dx \quad \forall \, \varphi \in H^1_{0,rad}(B_R), \tag{1.12}$$

então $v \in L^q(B_R)$ para todo $1 < q < \infty$.

Demonstração. Primeiramente, escolha $\eta \in C^\infty_{0,rad}(B_R)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ em B_{R_1} com $R_1 < R$, e $|\nabla \eta| \leq C_1$. Para $s, L > 0$, considere $\varphi := v \min\{|v|^{2s}, L^2\}\eta^2 \in H^1_{0,rad}(B_R)$ com supp $\varphi \subset\subset B_R$. Como v satisfaz (1.12), temos

$$\int_{B_R} \nabla v \nabla (v \min\{|v|^{2s}, L^2\}\eta^2) dx = \int_{B_R} l(x,v)(v \min\{|v|^{2s}, L^2\}\eta^2) dx \tag{1.13}$$

Agora, usando (1.11), a condição (V_1) e a imersão contínua $E_1 \subset D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, se $s > 0$ é tal que

$$2s+1 \in (1, 2^*-1) \quad \text{e} \quad a_0 \frac{2^*-1}{2^*-2s-2} + N > 0,$$

por Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} V(|x|)|v| \min\{|v|^{2s}, L^2\}\eta^2 dx &\leq C_2 \int_{B_R} |x|^{a_0}|v|^{2s+1} \\
&\leq C_2 \left(\int_{B_R} |x|^{a_0 t_2} dx \right)^{\frac{1}{t_2}} \left(\int_{B_R} |v|^{(2s+1)t_1} dx \right)^{\frac{1}{t_1}},
\end{aligned}$$

onde

$$t_1 = \frac{2^*-1}{2s+1} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{2^*-1}{2^*-2s-2}.$$

Assim, $a_0 t_2 + N > 0$ e

$$\int_{B_R} V(|x|)|v| \min\{|v|^{2s}, L^2\}\eta^2 dx \leq C = C(N, a_0, R, v).$$

De maneira análoga mostra-se que

$$C_1 \int_{B_R} Q(|x|)|v| \min\{|v|^{2s}, L^2\}\eta^2 dx \leq C = C(N, b_0, R, v).$$

Desta forma,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{B_R} l(x,v)[v\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2]dx\right| \\
&\quad\le \int_{B_R} Q(|x|)a(x)(1+|v|)|v|\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2dx \\
&\quad+\int_{B_R} V(|x|)|v|\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2dx + C_1\int_{B_R} Q(|x|)|v|\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2dx \\
&\quad\le 2\int_{B_R} Q(|x|)a(x)(1+|v|^2)\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2dx + C.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Observe também que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} \nabla v\nabla(v\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2)dx &= \int_{B_R}|\nabla v|^2\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2dx \\
&+2\int_{B_R}\nabla v\nabla\eta[\eta v\min\{|v|^{2s},L^2\}]dx+\frac{s}{2}\int_{\{|v|^s<L\}}|v|^{2s-2}\eta^2|\nabla(v^2)|^2dx.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Retornando a (1.13) com (1.14) e (1.15), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R}|\nabla v|^2(\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2)dx+\frac{s}{2}\int_{\{|v|^s<L\}}|v|^{2s-2}\eta^2|\nabla(|v|^2)|^2dx \\
&\quad\le 2\int_{B_R}Q(|x|)a(x)(1+|v|^2)\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2dx \\
&\quad-2\int_{B_R}\nabla v\nabla\eta(v\eta)\min\{|v|^{2s},L^2\}dx+C \\
&\quad=2\int_{B_R}Q(|x|)a(x)\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2dx+2\int_{B_R}Q(|x|)a(x)\min\{|v|^{2s},L^2\}|v|^2\eta^2dx \\
&\quad-2\int_{B_R}\nabla v\nabla\eta(v\eta)\min\{|v|^{2s},L^2\}dx+C \\
&\quad\le 2\int_{B_R}Q(|x|)a(x)\eta^2dx+4\int_{B_R}Q(|x|)a(x)|v|^2|\eta|^2\min\{|v|^{2s},L^2\}dx \\
&\quad+2\int_{B_R}\min\{|v|^{2s},L^2\}\left(\frac{1}{4}|\nabla v|^2\eta^2+C|\nabla\eta|^2v^2\right)dx+C.
\end{aligned}
$$

Daí, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{B_R}|\nabla v|^2(\min\{|v|^{2s},L^2\}\eta^2)dx+\frac{s}{2}\int_{\{|v|^s<L\}}|v|^{2s-2}\eta^2|\nabla(|v|^2)|^2dx \\
&\qquad\le 2\int_{B_R}Q(|x|)a(x)\eta^2dx+4\int_{B_R}Q(|x|)a(x)|v|^2|\eta|^2\min\{|v|^{2s},L^2\}dx \\
&\qquad+C\int_{B_R}\min\{|v|^{2s},L^2\}|\nabla\eta|^2v^2dx+C
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Agora, considerando $\psi := v\min\{|v|^s,L\}\eta$, temos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\psi\|^2_{B_R,2} &\le C\int_{B_R}|\nabla v|^2\eta^2\min\{|v|^{2s},L^2\}dx+C\int_{B_R}\min\{|v|^{2s},L^2\}|v|^2|\nabla\eta|^2dx \\
&+C\int_{\{|v|^s<L\}}|v|^{2s-2}|\nabla(|v|^2)|^2\eta^2dx.
\end{aligned}
$$

Usando a estimativa (1.16), a Desigualdade de Hölder e os fatos que $a \in L^{\frac{N+b_0}{2+b_0}}(Q, B_R)$ e $(2s+2) \in [2, 2^*]$, concluímos

$$\|\nabla\psi\|_{B_R,2}^2 \leq C + C\int_{B_R} Q(|x|)a(x)|v|^2\eta^2 \min\{|v|^{2s}, L^2\}dx, \tag{1.17}$$

onde C é uma constante que não depende de L. Seja K um número real maior que 1. Usando a Desigualdade de Hölder, em conjunto com a condição (Q_1) e o Lema 1.1.4, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} Q(|x|)a(x)|v|^2\eta^2 \min\{|v|^{2s}, L^2\}dx = \\
&\quad \int_{a\leq K} Q(|x|)a(x)|v|^2\eta^2 \min\{|v|^{2s}, L^2\}dx + \int_{a>K} Q(|x|)a(x)|v|^2\eta^2 \min\{|v|^{2s}, L^2\}dx \\
&\quad \leq K\int_{a\leq K} Q(|x|)|v|^{2s+2}dx \\
&\qquad + \left(\int_{a>K} Q(|x|)a(x)^{\frac{N+b_0}{2+b_0}}dx\right)^{\frac{2+b_0}{N+b_0}} \left(\int_{a>K} Q(|x|)[|v|^2\eta^2 \min\{|v|^{2s}, L^2\}]^{\frac{\beta}{2}}dx\right)^{\frac{2}{\beta}} \\
&\quad \leq CK + C(K)\left(\int_{B_R} |x|^{b_0}[|v|\eta \min\{|v|^{s}, L\}]^{\beta}dx\right)^{\frac{2}{\beta}} \\
&\quad \leq CK + C(K)\left(\int_{B_R} |x|^{b_0}|\psi|^{\beta}dx\right)^{\frac{2}{\beta}} \\
&\quad \leq CK + C(K)\int_{B_R} |\nabla\psi|^2dx \\
&\quad = CK + C(K)\|\nabla\psi\|_{B_R,2}^2.
\end{aligned}$$

Tomando K suficientemente grande de modo que $C(K) \leq 1/2$, pela estimativa obtida logo acima e (1.17), temos

$$\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{B_R,2}^2 \leq C, \tag{1.18}$$

onde C é uma constante positiva que independe de L. Fazendo $L \to \infty$, obtemos que $\psi \to |v|^{s+1}\eta$ e, pela estimativa (1.18), $|v|^{s+1}\eta \in D_{rad}^{1,2}(B_R) \hookrightarrow L^{2^*}(B_R)$ sempre que $v \in L^{2s+2}(B_R)$. Agora, usaremos um argumento de iteração de Moser. Considerando $s_0 = 0$ e

$$s_i + 1 = (s_{i-1}+1)\frac{2^*}{2} = \left(\frac{2^*}{2}\right)^i, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Agora, note que se $2s_1 + 2 = 2^*$ então $v \in L^{2s_1+2}(B_R)$ e, portanto, $|v|^{s_1+1}\eta \in L^{2^*}(B_R)$. Desta forma, $v \in L^{(s_1+1)2^*}(B_{R_1})$, uma vez que $R_1 < R$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $v \in L^{(s+1)2^*}(B_R)$. Também observe que se $2s_2 + 2 = (s_1+1)2^*$ então $v \in L^{2s_2+2}(B_R)$ e, portanto, $|v|^{s_2+1}\eta \in L^{2^*}(B_R)$. Logo, $v \in L^{(s_2+1)2^*}(B_{R_1})$ e, como no caso anterior, chegamos que $v \in L^{(s_2+1)2^*}(B_R)$. Continuando com esta itereção, obtemos que $v \in L^{(s_i+1)2^*}(B_R)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e, assim, desde que $s_i + 1 \to +\infty$ quando $i \to +\infty$, pela desigualdade de interpolação obtemos que $v \in L^q(B_R)$ para todo $1 \leq q < +\infty$. ■

1.3 Propriedades do funcional I

Nesta seção, estabelecemos as principais propriedades do funcional energia I.

Proposição 1.3.1 *O funcional I satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $I : E_1 \to \mathbb{R}$ está bem definido e é contínuo;

(2) $I : E_1 \to \mathbb{R}$ é Gateaux diferenciável em E_1 com derivada de Gateaux dada por:

$$I'(u).\phi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + V(|x|)f(u)f'(u)\phi)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)g(f(u))f'(u)\phi\, dx;$$

(3) $I'(u) \in E_1'$ para toda $u \in E_1$ e se $v_n \to v$ em E_1 então $I'(v_n) \to I'(v)$ na topologia fraca $*$ de E_1'.

Demonstração. Devido as hipóteses (h_1) e (h_2), dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq \varepsilon |s|^{\alpha-1} + C_\varepsilon |s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Consequentemente,

$$|H(s)| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}|s|^\alpha + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Daí, pela Proposição 1.1.6 e com a definição do espaço E_1, mostra-se facilmente que I está bem definido sobre o espaço E_1. A continuidade é uma consequência direta da Proposição 1.1.6, (1.20) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Para provar os itens (2) e (3), usamos (1.20), a Proposição 1.1.6 e procedemos de maneira análoga como na prova da Proposição 2.9 em [25]. ■

1.3.1 Pontos críticos de I e soluções fracas de (P_1)

Nesta seção, o nosso principal objetivo consiste em mostrar que pontos críticos do funcional I pertencem à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que estes estão relacionados com soluções fracas de (P). Para tanto, precisamos obter um resultado do tipo Princípio de Criticalidade Simétrica.

Observemos também que pontos críticos de I são soluções fracas da equação semilinear

$$-\Delta v = f'(v)[Q(|x|)h(f(v)) - V(|x|)f(v)] \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{1.21}$$

Inicialmente, vamos provar alguns resultados técnicos.

Observação 1.3.1.1 *i) Se $b_0 \geq 0$ na condição (Q_1), então para todo $R > 0$ existe uma constante $M = M(R) > 0$ tal que $Q(|x|) \leq M$ para todo $x \in B_R$.*

ii) Se $a_0 \geq 0$ na condição (V_1), então para todo $R > 0$ existe uma constante $C = C(R) > 0$ tal que $V(|x|) \leq C$ para todo $x \in B_R$.

Demonstração. Pela condição (Q_1), dado $R > 0$ existe $M' > 0$ tal que

$$Q(|x|) \leq M'|x|^{b_0} \leq M'R_0^{b_0}, \tag{1.22}$$

para todo $|x| < R$. Por (1.22) obtemos o item (i). De maneira similar, provamos o item (ii). ∎

Lema 1.3.2 *Sejam $q > \beta$, $R \geq 1$ e $v \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e suponha que Q satisfaz a condição (Q_1). Então, existe uma constante $C = C(N, q, b_0) > 0$ tal que*

$$\left| \int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^{q-1} f'(v) w dx \right| \leq C R^{\frac{N-2}{2}(\beta - q)} \|\nabla v\|_2^{q-1} \|\nabla w\|_2,$$

para todo $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Pela condição (Q_1), existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$Q(|x|) \leq C_1|x|^b \leq C_1|x|^{b_0},$$

para todo $|x| > R$. Usando esta desigualdade em conjunto com a desigualdade de Hölder, a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e o item (2) do Lema 1.1.1, para $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^{q-1}|f'(v)||w|dx \\
&\leq C \left(\int_{B_R^c} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1} b_0} |f(v)|^{(q-1)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_{B_R^c} |w|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \qquad (1.23) \\
&\leq C \left(\int_{B_R^c} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1} b_0} |f(v)|^{(q-1)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \|\nabla w\|_2.
\end{aligned}$$

Considerando $q-2^* < \delta < q-1$ e usando o Lema 1.1.9, a desigualdade de Hölder com os expoentes $t = (2^*-1)/(q-1-\delta)$ e $t' = (2^*-1)/(2^*-q+\delta)$, e usando novamente a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R^c} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1}b_0} |f(v)|^{(q-1)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\
&\qquad = \int_{B_R^c} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1}b_0} |f(v)|^{\delta\frac{2^*}{2^*-1}} |f(v)|^{(q-1-\delta)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\
&\qquad \leq C \|\nabla f(v)\|_2^{\delta\frac{2^*}{2^*-1}} \int_{B_R^c} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1}\left(b_0-\delta\frac{N-2}{2}\right)} |f(v)|^{(q-1-\delta)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\
&\qquad \leq C \|\nabla f(v)\|_2^{\delta\frac{2^*}{2^*-1}+\frac{2^*}{t}} \left(\int_{B_R^c} |x|^{\frac{2^*}{2^*-q+\delta}\left(b_0-\delta\frac{N-2}{2}\right)} dx \right)^{\frac{1}{t'}}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Desde que

$$\frac{2^*}{2^*-q+\delta}\left(b_0 - \delta\frac{N-2}{2}\right) + N = \frac{N}{2^*-q+\delta}(\beta - q) < 0,$$

segue que

$$\int_{B_R^c} |x|^{\frac{2^*}{2^*-q+\delta}\left(b_0-\delta\frac{N-2}{2}\right)} dx \leq C R^{\frac{N}{2^*-q+\delta}(\beta-q)}. \tag{1.25}$$

Assim, das estimativas (1.23), (1.24), (1.25) e o item (2) do Lemma 1.1.1 concluímos que

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^{q-1}|f'(v)||w| dx \leq C R^{\frac{N-2}{2}(\beta-q)} \|\nabla v\|_2^{q-1} \|\nabla w\|_2,$$

como desejamos demonstrar. ■

Lema 1.3.3 *Sejam $1 < q < \beta$, $r_0 > 0$ e $v \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e suponha que condição (Q_1) seja satisfeita. Então, existe $C = C(N, q, b_0) > 0$ tal que*

$$\left| \int_{B_r} Q(|x|)|f(v)|^{q-1} f'(v) w dx \right| \leq C r^{\frac{N-2}{2}(\beta-q)} \|\nabla v\|_2^{q-1} \|\nabla w\|_2,$$

para todo $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Assumindo a condição (Q_1) verdadeira, podemos garantir que existe $C > 0$ tal que $Q(|x|) \leq C|x|^{b_0}$ para todo $0 < |x| < r_0$. Dado $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, procedendo de forma similar como na prova do Lema 1.3.2, obtemos

$$\int_{B_r} Q(|x|)|f(v)|^{q-1}|f'(v)||w| dx \leq C r^{\frac{N-2}{2}(\beta-q)} \|\nabla v\|_2^{q-1} \|\nabla w\|_2,$$

e o resultado segue. ■

Proposição 1.3.4 *Suponha que* (V_1), (Q_1), $(h_1)-(h_2)$ *são satisfeitas com* $b \geq -\frac{N+2}{2N}$ *em* $(Q_1)_{(i)}$ *e* $b \neq -2$ *em* $(Q_1)_{(ii)}$. *Então para todo* $v \in E_1 \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e* $w \in X$, *existe* $C = C(N, b_0, \|v\|) > 0$ *tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(f(v))f'(v)w dx \right| \leq C\|w\|_X. \tag{1.26}$$

Demonstração. A partir do item (2) do Lema 1.1.1 e das condições $(h_1)-(h_2)$ existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|g(f(v))||f'(v)||w|dx \leq\; & C_1 \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v)|^{\alpha-1}|w|dx \\ & + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta-1}|w|dx. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Para $R \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta-1}|w|dx =\; & \int_{B_R} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta-1}|w|dx \\ & + \int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta-1}|w|dx. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Desde que $b_0 \geq -2$, $v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, usando a condição (Q_1), a desigualdade de Hölder e desde que $\int_{B_R} |x|^{2Nb_0/(N+2)}dx < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta-1}|w|dx & \leq C \int_{B_R} |x|^{b_0}|w|dx \\ & \leq C \left(\int_{B_R} |x|^{\frac{2N}{N+2}b_0} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_{B_R} |w|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \\ & \leq C\|\nabla w\|_2 \\ & \leq C\|w\|_X. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Agora, usando o Lema 1.3.2 com $q = 2\beta$, segue que

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta-1}|w|dx \leq CR^{\frac{N-2}{2}(-\beta+1)}\|\nabla v\|_2^{2\beta-1}\|w\|_X, \tag{1.30}$$

e em consequência de (1.28), (1.29) e (1.30), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta-1}|w|dx \leq C\|w\|_X. \tag{1.31}$$

Por outro lado, em virtude do Lema 1.3.3 com $q = \alpha$, temos

$$\int_{B_R} Q(|x|)|f(v)|^{\alpha-1}|w|dx \leq CR^{\frac{N-2}{2}(\beta-\alpha)}\|\nabla v\|_2^{\alpha-1}\|w\|_X. \tag{1.32}$$

Neste ponto, consideramos dois casos:

Case 1. $b \geq -(N+2)/N$, $a \leq -2$;

Neste caso, por definição $\alpha = 2(N+b)/(N-2)$. Sendo assim, defina $c := 2Nb/(N+2)$ e um cálculo simples mostra que

$$(\alpha - 1)\frac{2N}{N+2} = \frac{2(N+c)}{N-2}.$$

Ademais, $b \geq -(N+2)/N$ se, e somente se, $c \geq -2$. Assim, a partir do Lema 1.1.4 e da desigualdade de Hölder, chegamos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^{\alpha-1}|w|dx &\leq C\left(\int_{B_R^c} |x|^{\frac{2Nb}{N+2}}|f(v)|^{(\alpha-1)\frac{2N}{N+2}}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\left(\int_{B_R^c}|w|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\\ &\leq C\left(\int_{B_R^c}|x|^c|f(v)|^{\frac{2(N+c)}{N-2}}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\|\nabla w\|_2\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx\right)^{\frac{(N+c)}{N-2}\frac{2^*-1}{2^*}}\|w\|_X.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Case 2. $b \leq \max\{a, -2\}$, $b \neq -2$;

Neste caso, $\alpha = 2$. Se $\max\{a, -2\} = a$, então $b \leq a$. Deste modo, usando a Proposição 1.1.6 e a condição (V_1), temos

$$\begin{aligned}\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)||w|dx &\leq \left(\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R^c}Q(|x|)|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left(\int_{B_R^c}|x|^b|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_{B_R^c}|x|^a|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left(\int_{B_R^c}V(|x|)|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|w\|_X.\end{aligned} \tag{1.34}$$

Agora, suponha $\max\{a, -2\} = -2$. Assim, $b < -2$ e portanto $(N/2)b + N < 0$. Daí, usando a imersão $X \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)||w|dx \leq C\left(\int_{B_R^c} Q(|x|)^{\frac{2N}{N+2}}|f(v)|^{\frac{2N}{N+2}}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\|w\|_X. \tag{1.35}$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder com os expoentes $(N+2)/N$ e $(N+2)/2$

segue que

$$\begin{aligned}\int_{B_R^c} Q(|x|)^{\frac{2N}{N+2}}|f(v)|^{\frac{2N}{N+2}}dx &= \int_{B_R^c} Q(|x|)^{\frac{N}{N+2}}Q(|x|)^{\frac{N}{N+2}}|f(v)|^{\frac{2N}{N+2}}dx \\ &\leq \left(\int_{B_R^c} Q(|x|)^{\frac{N}{2}}dx\right)^{\frac{2}{N+2}}\left(\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)|^2dx\right)^{\frac{N}{N+2}} \\ &\leq C\left(\int_{B_R^c}|x|^{\frac{N}{2}b}dx\right)^{\frac{2}{N+2}} < \infty,\end{aligned}$$

pois $(N/2)b+N<0$. Então, de (1.35) concluímos que

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)||w|dx \leq C(v)\|w\|_X. \tag{1.36}$$

Portanto, das estimativas (1.27), (1.31), (1.33), (1.32), (1.34) e (1.36), concluímos a demonstração deste resultado. ■

Corolário 1.3.5 *Seja $v \in E_1 \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Então, o funcional linear $T_v : X \to \mathbb{R}$ definido por*

$$T_v.w = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f(v)f'(v)wdx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(f(v))f'(v)wdx$$

é contínuo.

Demonstração. É suficiente mostrar que existe uma constante $C>0$ tal que $|T_v.w| \leq C\|w\|_X$ para todo $w \in X$. Contudo, pela desigualdade de Hölder e o item 2) do Lema 1.1.1, temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w dx\right| \leq \|\nabla v\|_2\|w\|_X \quad \text{e} \\ &\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f(v)f'(v)wdx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}}\|w\|_X,\end{aligned}$$

donde juntamente com (1.26) da Proposição 1.3.4, segue o resultado. ■

Como nos espaços de Lebesgue usuais, quando o domínio tem medida de Lebesgue finita, podemos comparar os espaços de Lebesgue com peso Q.

Proposição 1.3.6 *Suponha que (Q_1) seja satisfeita e sejam s,t e R constantes reais positivas com $s<t$. Então, existe uma constante positiva $C=C(R,,b_0,N,s,t)$ tal que*

$$\left(\int_{B_R} Q(|x|)|v|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq C\left(\int_{B_R} Q(|x|)|v|^t dx\right)^{\frac{1}{t}}$$

para todo $v \in L^t(B_R,Q)$.

Demonstração. Considere $v \in L^t(B_R, Q)$ e sejam γ_1 e γ_2 números reais maiores que 1 tais que $s\gamma_1 = t$ e $1/\gamma_1 + 1/\gamma_2 = 1$. Da condição (Q_1), existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $Q(|x|) \leq C_1|x|^{b_0}$ para todo $x \in B_R$. Daí, pela desigualdade de Hölder com γ_1 e γ_2, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} Q(|x|)|v|^s dx &= \int_{B_R} Q(|x|)^{\frac{1}{\gamma_2}} Q(|x|)^{\frac{1}{\gamma_1}} |v|^s dx \\ &\leq \left(\int_{B_R} Q(|x|)dx\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \left(\int_{B_R} Q(|x|)|v|^t dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \\ &\leq C_1^{\frac{1}{\gamma_2}} \left(\int_{B_R} |x|^{b_0} dx\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \left(\int_{B_R} Q(|x|)|v|^t dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \\ &\leq CR^{\frac{b_0+N}{\gamma_2}} \left(\int_{B_R} Q(|x|)|v|^t dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}},\end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

■

A próxima proposição relaciona os pontos críticos de I com as soluções fracas do problema (P_1).

Proposição 1.3.7 *Suponha que as condições (V_1), (Q_1), $(h_1) - (h_2)$ sejam satisfeitas e que $p > 4$. Então, todo ponto crítico do funcional I pertence à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $v \in E_1$ é um ponto crítico de I então $u = f(v)$ é uma solução fraca do problema (P_1).*

Demonstração. Seja $v \in E$ um ponto crítico de I. Então, $I'(v).\varphi = 0$ para todo $\varphi \in E_1$. Logo, para toda bola B_R, temos

$$\int_{B_R} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{B_R} l(x, v)\varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in H^1_{0,rad}(B_R),$$

onde $l(x, v) := f'(v)[Q(|x|)h(f(v)) - V(|x|)f(v)]$. Usando a condição (h_2), as propriedades (2), (7) e (11) do Lema 1.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}|l(x, v)| &\leq C_1 f'(v)Q(|x|) + C_1 Q(|x|)f'(v)|f(v)|^{p-1} + V(|x|)f'(v)|f(v)| \\ &\leq C_1 Q(|x|) + C_1 Q(|x|)|f(v)|^2|f(v)|f'(v)|f(v)|^{p-4} + V(|x|) \\ &\leq Q(|x|)a(x)(1 + |v|) + C_1 Q(|x|) + V(|x|),\end{aligned} \tag{1.37}$$

onde $a(x) := C_2|f(v(x))|^{p-4}$. Desde que

$$(p-4)\frac{N+b_0}{2+b_0} < (2\beta - 4)\frac{N+b_0}{2+b_0} = 2\beta \quad \text{e} \quad f(v) \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^N; Q),$$

pela Proposição 1.3.6 segue que $a \in L^{\frac{N+b_0}{2+b_0}}(Q, B_R)$ e, em virtude da Proposição 1.2.1, concluímos que $v \in L^q(B_R)$ para todo $1 < q < \infty$. Usando (1.37) e as condições (V_1) e (Q_1) observamos que $l(x,v) \in L^q(B_R)$ para todo $1 < q < \infty$. Assim, por argumentos de regularidade elíptica, obtemos que $v \in W^{2,q}(B_R)$ para todo $1 < q < \infty$ e, portanto, tomando q suficientemente grande de forma que $2q > N$, devido as desigualdades de Sobolev, concluímos que $v \in C^{1,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $0 < \gamma < 1$. Em particular, $v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e pelo Lema 2.1.1, $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Para provarmos a segunda parte, observamos que $|\nabla u|^2 = |f'(v)|^2 |\nabla v|^2 \leq |\nabla v|^2$. Consequentemente, $u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Usando a notação do Corolário 1.3.5, temos que $T_v.w = 0$ para todo $w \in X_{rad} \subset E_1$. Desde que T_v é um funcional linear contínuo em X, pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único $\widehat{v} \in X$ satisfazendo $T_v.\widehat{v} = \|\widehat{v}\|^2_X = \|T_v\|^2_{X'}$. Assim, usando o Teorema da Mudança de Variáveis, para todo $w \in X$, temos

$$T_v.(gw) = T_v.w \quad \text{e} \quad \|gw\|_X = \|w\|_X, \quad \text{para todo } g \in O(N).$$

Tomando $w = \widehat{v}$, pela unicidade segue que $g\widehat{v} = \widehat{v}$ para todo $g \in O(N)$, isto é, $\widehat{v} \in X_{rad}$. Assim, $T_v.\widehat{v} = 0$, pois v é ponto crítico de I e, portanto, $\|T_v\|_{X'} = 0$ e isto é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) f(v) f'(v) w dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) h(f(v)) f'(v) w dx, \tag{1.38}$$

para todo $w \in X$. Observando que $(f^{-1})'(t) = 1/f'(f^{-1}(t))$, temos

$$(f^{-1})'(t) = [1 + 2(f(f^{-1}(t)))^2]^{1/2} = (1 + 2t^2)^{1/2}$$

e isto implica que

$$\nabla v = (f^{-1})'(u) \nabla u = (1 + 2u^2)^{1/2} \nabla u. \tag{1.39}$$

Para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que $f'(v)^{-1}\varphi = (1 + 2u^2)^{1/2}\varphi \in X$ e

$$\nabla(f'(v)^{-1}\varphi) = 2(1 + 2u^2)^{-1/2} u \varphi \nabla u + (1 + 2u^2)^{1/2} \nabla \varphi. \tag{1.40}$$

Tomando $w = f'(v)^{-1}\varphi$ em (1.38) e usando (1.39) – (1.40), obtemos (1.1), e com isto, mostramos que $u = f(v)$ é uma solução fraca de (P_1). $\blacksquare$

Observação 1.3.1.2 *Usando alguns argumentos utilizados em [21] (veja também [43]), temos que se* $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap E_1$ *é um ponto crítico do funcional* I *então* $u = f(v)$ *é uma solução clássica de* (P_1)*. Além disso, supondo que* V*,* Q *e* h *são localmente Hölder contínuas, usando regularidade de Schauder podemos mostrar que* $v \in C^{2,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *para algum* $\gamma \in (0, 1)$*.*

A Proposição 1.3.7 nos diz que para encontrarmos uma solução não nula de (P_1) é suficiente mostrar a existência de um ponto crítico não nulo do funcional I. Isto será feito na próxima seção.

1.4 Prova do Teorema 1.0.7

Esta seção é dedicada a mostrar o resultado principal deste capítulo. Para tanto, fazemos uso da seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha (veja, por exemplo, [9]).

Teorema 1.4.1 *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\Phi \in C(X, \mathbb{R})$ *um funcional Gateaux diferenciável em* X*, com derivada de Gateaux contínua da topologia da norma de* X *na topologia fraca* $*$ *de* X'*. Suponha que* $\Phi(0) = 0$ *e seja* $S \subset X$ *um fechado de* X *que desconecta (por caminhos)* X*. Sejam* $v_0 = 0$ *e* $v_1 \in X$ *pontos pertencentes a componentes conexas distintas de* $X \backslash S$*. Suponha ainda que*

$$\inf_S \Phi \geq \lambda > 0 \quad e \quad \Phi(v_1) \leq 0 \tag{1.41}$$

e seja

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X);\ \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = v_1\}.$$

Então,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \lambda$$

e existe uma sequência de Palais-Smale para Φ *no nível* c*.*

Agora, definamos a aplicação

$$\Upsilon : E_1 \to \mathbb{R}; \quad \Upsilon(v) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v|^2 + V(|x|) f^2(v)] dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $\rho > 0$, consideramos também o seguinte conjunto

$$S_\rho = \{v \in E_1; \Upsilon(v) = \rho\}.$$

Note que Υ é uma aplicação contínua de acordo com o item (2) do Lema 1.1.2. Assim, S_ρ é um subconjunto fechado de E_1 e desconecta E_1 em duas componentes conexas. Desde que $h(0) = 0$ e como estamos interessados em soluções não negativas, vamos estender $h(s) = 0$ para todo $s < 0$. A próxima proposição nos garante que I satisfaz as condições (1.4.2).

Proposição 1.4.2 (Geometria do passo da montanha) *O funcional I satisfaz as seguintes condições:*

i) Existem $\rho, \sigma_0 > 0$ tais que $I(v) \geq \sigma_0$ para todo $v \in S_\rho$;

ii) Existe $v_1 \in E$ satisfazendo $\Upsilon(v) > \rho$ e $I(v_1) < 0$.

Demonstração. Pelas condições (h_1) e (h_2), dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|H(s)| \leq \varepsilon |s|^\alpha + C_\varepsilon |s|^{2\beta}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Daí, sendo $\rho > 0$ e $v \in S_\rho$ temos

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(|x|)f^2(v))dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(f(v))dx \\ &\geq \frac{\rho^2}{2} - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v)|^\alpha \, dx - C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v)|^{2\beta} \, dx \\ &= \frac{\rho^2}{2} - \varepsilon \|f(v)\|^\alpha_{\alpha,Q} - C_\varepsilon \|f(v)\|^{2\beta}_{2\beta,Q}. \end{aligned}$$

Usando as estimativas (1.6) e (1.7), chegamos que

$$I(v) \geq \frac{\rho^2}{2} - \varepsilon C_1 \rho^\alpha - C_2 \rho^\beta = \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1 \rho^{\alpha-2} - C_2 \rho^{\beta-2} \right).$$

Desde que $\beta > \alpha \geq 2$, supondo $\rho < 1$, temos que $\rho^{\beta-2} < \rho^{\alpha-2}$, assim da estimativa logo acima, temos

$$I(v) \geq \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1 \rho^{\beta-2} - C_2 \rho^{\beta-2} \right) = \rho^2 \left(\frac{1}{2} - (\varepsilon C_1 + C_2)\rho^{\beta-2} \right).$$

Tomando $0 < \rho < (2[\varepsilon C_1 + C_2])^{2-\beta}$ temos que $I(v) \geq \rho^2 \left(\frac{1}{2} - (\varepsilon C_1 + C_2)\rho^{\beta-2} \right) = \sigma_0 > 0$, se $v \in S_\rho$, e assim o item $i)$ está provado.

Para concluirmos que o item $ii)$ é verdadeiro, é suficiente mostrar que existe $\varphi \in E$ tal que $I(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Pela condição (h_3), existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$H(s) \geq C_1 s^{2\mu} - C_2, \quad \text{para todo } s \geq 0. \tag{1.42}$$

Escolhendo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $supp(\varphi) = \mathcal{K}$, com $0 \notin \mathcal{K}$, usando a estimativa (1.42), temos

$$I(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathcal{K}} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2)\, dx - C_1 \int_{\mathcal{K}} |f(t\varphi)|^{2\mu}\, dx + C_3|\mathcal{K}|,$$

onde $|\mathcal{K}|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto $\mathcal{K}$. Derivando $f(s)/s$ e usando a propriedade (6) do Lema 1.1.1 , segue que $f(s)/s$ é não crescente para $s > 0$. Assim, como $0 < t\varphi(x) \leq t$ para todo $x \in \mathcal{K}$ e $t > 0$, obtemos que $f(t\varphi(x)) \geq f(t)\varphi(x)$. Daí, usando a condição (9) do Lema 1.1.1, temos

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &\leq \frac{t^2}{2}\left[\int_{\mathcal{K}} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2)\, dx - C_1\frac{f(t)^{2\mu}}{t^2}\int_{\mathcal{K}} \varphi^{2\mu}\, dx + \frac{C_2}{t^2}|\mathcal{K}|\right] \\ &\leq \frac{t^2}{2}\left[\int_{\mathcal{K}} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2)\, dx - C_1\frac{t^\mu}{t^2}\int_{\mathcal{K}} \varphi^{2\mu}\, dx + \frac{C_2}{t^2}|\mathcal{K}|\right]. \end{aligned}$$

Com a estimativa acima e usando o fato de $\mu > 2$, observamos que $I(t\varphi) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$. ■

A seguir, vamos mostrar que as sequências de Palais-Smale são limitadas em E_1.

Lema 1.4.3 *Toda sequência de Palais-Smale para I é limitada em E_1.*

Demonstração. Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(v_n) \subset E_1$ uma sequência de Palais Smale no nível c para o funcional I. Para todo $\delta > 0$, exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, temos

$$|I'(v_n)v_n| \leq \|I'(v_n)\|\|v_n\| \leq \delta\|v_n\|. \tag{1.43}$$

Usando a propriedade (6) do Lema 1.1.1 e a condição (h_3), temos

$$\begin{aligned} I(v_n) - \frac{1}{\mu}I'(v_n)v_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(|x|)f^2(v_n)]\, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(f(v_n))dx + \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(f(v_n))f'(v_n)v_n dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(|x|)f^2(v_n)]\, dx. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Pela definição de norma no espaço E_1, temos

$$\|v_n\| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v_n)\, dx \tag{1.45}$$

e, portanto, das estimativas (1.43), (1.44) e (1.45), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mu - 2}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{\mu - 2 - 2\delta}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v_n)dx \leq \\ c + \frac{\delta}{\mu}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta}{\mu}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Em particular, vale

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx \leq c+\frac{\delta}{\mu}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\delta}{\mu},$$

de onde concluímos que $\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx\right)$ é uma sequência limitada. Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\mu - 2 - 2\delta > 0$ e usando a limitação de $\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx\right)$ em (1.46) chegamos que $(\int_{\mathbb{R}^N}V(|x|)f^2(v_n)dx)$ é também uma sequência limitada. Portanto, de (1.45) concluímos que (v_n) é uma sequência limitada em E_1. ■

O próximo lema será usado para mostrar a condição de Palais-Smale para I.

Lema 1.4.4 *Se $\alpha+1<p\leq 2\alpha$, então existe $\varepsilon>0$ tal que $\theta:=\alpha+\varepsilon\in(\alpha,\beta)$ e*

$$(p-2)\frac{\theta}{\theta-1}\in(\alpha,2\beta).$$

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que $\theta<\beta$ se, e somente se, $\varepsilon<\beta-\alpha$. Assim, para $0<\varepsilon<\beta-\alpha$, temos

$$(p-2)\frac{\theta}{\theta-1}\leq(2\alpha-2)\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha+\varepsilon-1}<2(\alpha+\varepsilon)<2\beta.$$

Por outro lado,

$$(p-2)\frac{\theta}{\theta-1}-\alpha=\frac{(p-2)(\alpha+\varepsilon)-\alpha(\alpha+\varepsilon-1)}{\alpha+\varepsilon-1}=\frac{[p-(\alpha+1)]\alpha-\varepsilon(\alpha-p+2)}{\alpha+\varepsilon-1}.$$

Logo, se $\alpha-p+2\leq 0$ então $(p-2)\theta/(\theta-1)>\alpha$. Quando $\alpha-p+2>0$, se

$$0<\varepsilon<\frac{[p-(\alpha+1)]\alpha}{\alpha-p+2}$$

então $(p-2)\theta/(\theta-1)>\alpha$. Portanto, o lema está provado para

$$0<\varepsilon<\min\left\{(\beta-\alpha),\frac{[p-(\alpha+1)]\alpha}{\alpha-p+2}\right\}.$$

■

Proposição 1.4.5 *O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, para todo $c\in\mathbb{R}$.*

Demonstração. Sejam $c\in\mathbb{R}$ e $(v_n)\subset E_1$ uma sequência de Palais-Smale no nível c. Devido ao Lema 1.4.3, (v_n) é limitada em E_1. Em consequência do Corolário 1.1.7, existe $v\in E_1$ tal que, a menos de subsequência, $v_n\to v$ em $L^q(\mathbb{R}^N,Q)$, para todo

$\alpha < q < \beta$. Como $Q(|x|) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, segue que $v_n \to v$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Além disso, desde que $f^2(s)$ é uma função convexa, o funcional $\Upsilon(v)$ também é convexo. Portanto,

$$\frac{1}{2}\Upsilon(v) - \frac{1}{2}\Upsilon(v_n) \geq \frac{1}{2}\Upsilon'(v_n)(v - v_n)$$

e disto, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V(|x|)f^2(v)\right)\, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^2 + V(|x|)f^2(v_n)\right)\, dx \\ \geq I'(v_n)(v - v_n) + \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(f(v_n))f'(v_n)(v - v_n)\, dx. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Dado $\delta > 0$, por (1.19) e do item (2) do Lema 1.1.1 tem-se que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(f(v_n))f'(v_n)(v - v_n)\, dx \right| \\ &\qquad \leq \delta \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^{\alpha-1}|v_n - v|\, dx \\ &\qquad\quad + C_\delta \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^{p-1}|f'(v_n)||v_n - v|\, dx. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Usando a desigualdade de Hölder, com os expoentes α e $\alpha/(\alpha - 1)$, o item (3) do Lema 1.1.1 e o Corolário 1.1.7, segue que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^{\alpha-1}|v_n - v|\, dx \\ &\quad \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^\alpha\, dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n - v|^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq C, \end{aligned} \tag{1.49}$$

onde C é uma constante positiva que não depende de n. Neste ponto, vamos dividir a prova desta proposição em dois casos: $\alpha + 1 < p \leq 2\alpha$ e $2\alpha < p < 2\beta$. Para o primeiro caso, vamos usar o item (11) do Lema 1.1.1, a desigualdade de Hölder, com expoentes $\theta = \alpha + \varepsilon$ e $\theta/(\theta - 1)$, onde θ foi dado no Lema 1.4.4, e o Corolário 1.1.7 para concluir que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^{p-2}|f(v_n)f'(v_n)||v_n - v|\, dx \\ &\quad \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^{(p-2)\theta/(\theta-1)}\, dx\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n - v|^\theta\, dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\quad \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n - v|^\theta\, dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

No segundo caso, isto é, quando $2\alpha < p < 2\beta$, utizamos o item (11) do Lema 1.1.1, a desigualdade de Hölder, com expoentes p e $p/(p-1)$ e o Corolário 1.1.7 para concluir que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^{p-2}|f(v_n)f'(v_n)||v_n - v| \, dx \\
&\quad \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v_n)|^p \, dx \right)^{\frac{p}{p-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n - v|^{p/2} \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \\
&\quad \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n - v|^{p/2} \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Desde que $\delta > 0$ foi arbitrário, em consequência das duas últimas convergências acima e das estimativas (1.48) e (1.49), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)g(f(v_n))f'(v_n)(v - v_n) \, dx \to 0.$$

Com esta convergência, o fato que $I'(v_n).(v - v_n) \to 0$ e a estimativa (1.47), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V(|x|)f^2(v) \right) \, dx \\
&\quad \geq \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx + \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v_n) \, dx.
\end{aligned} \tag{1.50}
$$

Por outro lado, pela semicontinuidade da norma em $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e o Lema de Fatou, concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx \quad \text{e}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v) \, dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v_n) \, dx.$$

Então, de acordo com a estimativa (1.50), a menos de subsequência, devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx \quad \text{e} \tag{1.51}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v_n) \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(v) \, dx. \tag{1.52}$$

Logo, por (1.52) e o item (3) do Lema 1.1.2, obtemos

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)f^2(\xi(v_n - v)) \, dx \right] \to 0. \tag{1.53}$$

Portanto, das convergências (1.51) e (1.53) obtemos que $v_n \to v$ em E_1 e a prova está finalizada. ■

Agora, pelo Teorema 1.4.1 e a Proposição 1.4.5 garantimos que existe $v \in E_1$ tal que

$$I(v) = c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ and } \gamma(1) = v_1\}$ e, desde que $c > 0$, temos $v \neq 0$. Além disso, como v é um ponto crítico de I, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla v \nabla w + V(|x|) f(v) f'(v) w] \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) h(f(v)) f'(v) w \, dx, \tag{1.54}$$

para todo $w \in E_1$. Tomando $w = -v^-$, onde $v^- = \max\{-v, 0\}$, como função teste em (1.54), e usando que $h(s) = 0$ para todo $s \leq 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) f'(v) f(v)(-v^-) \, dx = 0.$$

Desde que $f(v)v^- \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^2 \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(|x|) f(v)(-v^-)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} \, dx = 0,$$

de onde podemos concluir que $v^- = 0$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Portanto, $v \geq 0$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, finalizando a prova do resultado principal deste capítulo.

Capítulo 2

Equações quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito em dimensão dois com crescimento crítico exponencial

Neste capítulo, estabelecemos um resultado de existência de solução fraca não nula e não negativa para (P) quando $N = 2$ e $\epsilon = 1$, ou seja, estudamos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u - [\Delta(u^2)]u = Q(|x|)h(u), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{P_2}$$

Aqui, assumimos que os potenciais V e Q satisfazem as seguintes condições:

(V_2) $V : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $V(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $a_0 > -2$ e $a > -2$ tais que

$$0 < \liminf_{r \to 0^+} \frac{V(r)}{r^{a_0}} \leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{V(r)}{r^{a_0}} < \infty \quad \text{e}$$

$$0 < \liminf_{r \to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} \leq \limsup_{r \to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} < \infty.$$

(Q_2) $Q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $Q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $-2 < b_0 \leq 0$ e $-2 < b < a$ satisfazendo

$$0 < \liminf_{r \to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} \leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} < \infty.$$

Observe que as condições (V_2) e (Q_2), descritas acima, permitem que os potenciais V e Q sejam singulares na origem ou se anulem no infinito.

Exemplo 2.0.6 *Sejam $V, Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dados por*

$$V(r) = 4r^{-1} \quad e \quad Q(r) = 3r^{-\frac{3}{2}}.$$

Note que V e Q são singulares na origem, se anulam no infinito e satisfazem as condições (V_1) e (Q_1), respectivamente.

Exemplo 2.0.7 *Sejam $V, Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dados por*

$$V(r) = \begin{cases} 4r^{-1}, & se\ 0 < r < 2, \\ \dfrac{1}{2}r^2, & se\ r \geq 2. \end{cases} \quad e \quad Q(r) = 3r^{-\frac{3}{2}}.$$

Observe que V e Q são singulares na origem, V é coercivo, Q se anula no infinito e satisfazem as condições (V_1) e (Q_1), respectivamente.

Com respeito a função h, pedimos que seja uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(h_1) (*Crescimento exponencial crítico*) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{h(s)}{e^{\lambda s^4}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \lambda > \lambda_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \lambda < \lambda_0; \end{cases}$$

(h_2) $\lim\limits_{s\to 0} h(s)/s = 0$;

(h_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que, para todo $s > 0$, vale

$$0 \leq 2\mu H(s) := 2\mu \int_0^s h(t)dt \leq sh(s);$$

(h_4) Existe uma constante $\xi > 0$ tal que

$$H(t) \geq \frac{\xi}{4}t^4 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Como já observado na Introdução, (h_1) estabelece a definição de crescimento crítico para esta classe de problemas.

Neste capítulo, uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (P_2) se $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e vale a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+2u^2)\nabla u \nabla\phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} 2u|\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)u\phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)h(u)\phi \, dx, \quad (2.1)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Observe que a função identicamente nula é uma solução fraca para (P_2). Mas, nosso intuito é obter solução não nula. Para que possamos apresentar o principal resultado deste capítulo, neste momento, introduzimos alguns espaços normados. Para todo $1 \leq q < \infty$, definimos o espaço de Lebesgue com o peso Q por

$$L^q(\mathbb{R}^2; Q) = \left\{ u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u|^q\, dx < \infty \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{q,Q} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u|^q\, dx \right)^{1/q}.$$

Também definimos os espaços de Hilbert

$$Y = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2); \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)u^2 dx < \infty \right\}$$

e

$$\begin{aligned} Y_{rad} &= \{u \in Y : u(x) = u(gx)\ \forall g \in O(N)\} \\ &= \left\{ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2); \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)u^2 dx < \infty \right\}, \end{aligned}$$

munidos com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(|x|)uv) dx$$

e a correspondente norma

$$\|u\|_Y = \left(\int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A seguir, enunciamos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.0.8 *Suponha que as condições (V_2), (Q_2) e $(h_1) - (h_4)$ sejam satisfeitas e que, em (h_4),*

$$\xi > \frac{\mu(3\pi + \|V\|_{L^1(B_2)})^2 + 12\pi(\mu - 2)}{(\mu - 2)\|Q\|_{L^1(B_1)}}.$$

Então, o problema (P) tem uma solução fraca não nula e não negativa em Y_{rad}.

Uma das dificuldades encontradas no estudo do problema (P_2) é a possível perda de compacidade, uma vez que estamos trabalhando em todo o $\mathbb{R}^2$. Além disso, não podemos aplicar diretamente métodos variacionais ao problema estudado, pois o funcional energia associado ao problema (P_2), dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (1 + 2u^2)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)H(u) dx, \tag{2.2}$$

não está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^2)$, devido a presença do termo $\int_{\mathbb{R}^2} u^2|\nabla u|^2 dx$. Observe que soluções fracas de (P_2) podem ser vistas como pontos críticos do funcional J em um espaço de funções apropriado, visto que formalmente a derivada de Gateaux de J é dado por

$$\begin{aligned} J'(u).\phi = &\int_{\mathbb{R}^2}(1+2u^2)\nabla u \nabla \phi \, dx + 2\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla u|^2 \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)u\phi \, dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)h(u)\phi \, dx. \end{aligned}$$

Com o objetivo de contornar estas dificuldades, como realizado no Capítulo 1, usamos uma mudança de variável a fim de transformar o problema quaselinear em um semilinear, o qual tem um funcional I bem definido e Gateaux-diferenciável sobre um espaço de Orlicz $E_2 \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ (definido mais adiante), graças a uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser. Posteriormente, usando argumentos do tipo princípio de criticalidade simétrica, mostramos que pontos críticos de I são soluções fracas de (P_2). Daí, constatamos que o funcional I satisfaz as hipóteses de uma versão do Teorema do Passo da Montanha e, usando um resultado de compacidade, mostramos que I satisfaz a condição de Palais-Smale em níveis abaixo de um valor específico. Usando a condição (h_4), obtemos uma estimativa que garante que o nível c do passo da montanha está no intervalo onde se tem compacidade. Com isto, obtemos um ponto crítico não nulo e não negativo para o funcional I e, portanto, uma solução fraca não nula e não negativa para (P_2).

Observação 2.0.9 *Se $a > 0$ e $b_0 = b = 0$, o potencial $Q(r) \equiv 1$ satisfaz a condição (Q_1). Assim, o resultado principal deste capítulo nos assegura a existência de uma solução não nula e não negativa no nível do passo da montanha para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u - [\Delta(u^2)]u = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty. \end{cases}$$

Mesmo neste caso ($Q \equiv 1$), V pode ser singular. Vale salientar também que não consideramos a seguinte hipótese padrão:

$$\text{existem } M > 0 \text{ e } s_0 > 0 \text{ tais que } H(s) \leq Mh(s) \text{ para todo } s \geq s_0,$$

a qual foi usada por vários autores em problemas semilineares e quaselineares envolvendo crescimento crítico exponencial. Além disso, obtemos uma solução no nível do passo da montanha. Nesse sentido, nosso resultado melhora e complementa alguns resultados existentes na literatura, como, por exemplo, [23, 24, 26, 27, 38, 50].

2.1 Propriedades dos espaços Y_{rad} e $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$

A seguir, apresentamos os principais resultados referentes ao espaço Y_{rad}, o qual destacamos a imersão compacta de Y_{rad} em alguns espaços de Lebesgue com o peso Q. Não podemos usar os resultados de Su, Wang e Willem encontrados em [47], visto que trabalhamos em um subespaço de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$, porque, aqui, consideramos que o estudo sobre $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^2)$ não é adequado. Esta mudança de espaço nos trouxe dificuldades extras, pois a norma em $H^1(\mathbb{R}^2)$ possui um termo a mais que a norma em $D^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.

Neste capítulo, temos um resultado análogo ao da Proposição 1.1.5. Para prová-lo, usamos o seguinte lema radial (veja, por exemplo, [44, 47]):

Lema 2.1.1 *Suponha que* (V_2) *seja válida. Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que para todo* $u \in Y_{rad}$ *temos*

$$|u(x)| \leq C\|u\|_Y |x|^{-\frac{2+a}{4}} \quad \textit{para todo } |x| >> 1.$$

Agora, veremos o principal resultado deste capítulo relacionado a compacidade.

Proposição 2.1.2 *Suponha que* (V_2) *e* (Q_2) *sejam válidas. Então,* Y_{rad} *está imerso continuamente e compactamente em* $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ *se* $2 \leq q < \infty$.

Demonstração. Considere

$$S_q = \inf_{u \in Y_{rad},\ u \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2)dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u|^q dx\right)^{\frac{2}{q}}}.$$

Observe que para mostrar a continuidade da imersão é suficiente verificar que $S_q > 0$. Então, vamos supor, por contradição, que $S_q = 0$. Assim, existe uma sequência $(u_n) \subset Y_{rad}$ com $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_n|^2 + V(|x|)u_n^2)dx \to 0 \quad \text{e}$$
$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u|^q dx = 1, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Decorrente das condições (V_2) e (Q_2), temos que dado $R > 0$ existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$Q(|x|) \leq C_1|x|^b \quad \text{e} \quad V(|x|) \geq C_2|x|^a, \quad \text{para todo} \quad |x| > R.$$

Nas estimativas acima, podemos supor R suficientemente grande de forma que o Lema 2.1.1 seja válido. Assim, desde que $b < a$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^q dx &\leq C_1 \int_{B_R^c} |x|^b |u_n|^q dx \\
&= \frac{C_1}{C_2} \int_{B_R^c} |x|^{b-a} C_2 |x|^a |u_n|^2 |u_n|^{q-2} dx \\
&\leq C \int_{B_R^c} \|u_n\|_Y^{q-2} |x|^{b-a} |x|^{-\frac{a+2}{4}(q-2)} V(|x|)|u_n|^2 dx \qquad (2.3)\\
&\leq C R^{b-a-(q-2)\frac{a+2}{4}} \|u_n\|_Y^{q-2} \int_{B_R^c} V(|x|)|u_n|^2 dx \\
&\leq C R^{b-a-(q-2)\frac{a+2}{4}} \|u_n\|_Y^{q}.
\end{aligned}$$

Além disso, devido à condição (Q_2), dado $0 < r_0 < 1/2$ existe uma constante positiva C_3 satisfazendo

$$Q(|x|) \leq C_3 |x|^{b_0} \quad \text{para todo } 0 < |x| < r_0. \qquad (2.4)$$

Agora, consideramos uma função $\varphi \in C_{0,rad}^\infty(B_1)$ satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in B_1$, $\varphi(x) = 1$ se $|x| < 1/2$, $\varphi(x) = 0$ se $3/4 < |x| < 1$ e, para algum $C > 0$, $|\nabla \varphi(x)| < C$ para todo $x \in B_1$. Considere também a restrinção da função u_n à bola B_1 e observe que $\varphi u_n \in H_0^1(B_1)$. Daí, escolhendo $\sigma > 1$ de tal forma que $b_0 \sigma > -2$, usando a desigualdade (2.4) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_0}} Q(|x|)|u_n|^q dx &= \int_{B_{r_0}} Q(|x|)|\varphi u_n|^q dx \\
&\leq C_3 \int_{B_{r_0}} |x|^{b_0} |\varphi u_n|^q dx \\
&\leq C_3 \left(\int_{B_{r_0}} |x|^{b_0 \sigma} dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_{B_{r_0}} |\varphi u_n|^{\frac{q\sigma}{\sigma-1}} dx \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
&\leq C r_0^{b_0 \sigma + 2} \left(\int_{B_1} |\varphi u_n|^{\frac{q\sigma}{\sigma-1}} dx \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Pela imersão contínua de $H_0^1(B_1)$ em $L^s(B_1)$ para todo $s \geq 2$ e, denotando $C_4 =$

$\min_{B_{\frac{3}{4}}\setminus B_{\frac{1}{2}}} V(|x|)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_0}} Q(|x|)|u_n|^q dx &\leq Cr_0^{b_0\sigma+2}\left(\int_{B_1}|\nabla(\varphi u_n)|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}\\
&\leq Cr_0^{b_0\sigma+2}\left(\int_{B_1}|u_n\nabla\varphi|^2 dx+\int_{B_1}|\varphi\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}\\
&\leq Cr_0^{b_0\sigma+2}\left(\int_{B_{\frac{3}{4}}\setminus B_{\frac{1}{2}}}\frac{C_4}{C_4}|u_n|^2 dx+\int_{B_1}|\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} \qquad (2.5)\\
&\leq Cr_0^{b_0\sigma+2}\left(\int_{B_{\frac{3}{4}}\setminus B_{\frac{1}{2}}}V(|x|)|u_n|^2 dx+\int_{B_1}|\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}\\
&\leq Cr_0^{b_0\sigma+2}\|u_n\|_Y^q.
\end{aligned}$$

Ainda precisamos estimar a integral de $Q(|x|)|u_n|^q$ em $B_R\setminus B_{r_0}$. Para isto, considere $C_5=\max_{x\in B_R\setminus B_{r_0}} Q(|x|)$ e usando a imersão contínua de $H^1_{rad}(B_R\backslash B_{r_0})$ em $L^q(B_R\backslash B_{r_0})$ e que $\min_{x\in B_R\setminus B_{r_0}} V(|x|)=C>0$, temos

$$\int_{B_R\setminus B_{r_0}} Q(|x|)|u_n|^q dx\leq C_5\int_{B_R\setminus B_{r_0}}|u_n|^q dx\leq C\|u_n\|_Y^q. \qquad (2.6)$$

Assim, de (2.3), (2.5) e (2.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^q dx\leq C(R^{b-a-(q-2)\frac{a+2}{4}}+r_0^{b_0\sigma+2}+1)\|u_n\|_Y^q=o_n(1),$$

o que contradiz a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^q dx=1 \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Logo, $S_q>0$ e assim concluímos que Y_{rad} está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^2,Q)$ para todo $q\geq 2$. Para mostrar a compacidade, vamos considerar (u_n) uma sequência limitada em Y_{rad}. Logo, existe $u\in Y_{rad}$ tal que, a menos de subsequência, $u_n\rightharpoonup u$ em Y_{rad}. Sem perda de generalidade, podemos supor que $u=0$ e usando as estimativas (2.3) e (2.5), obtemos

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^q dx\leq CR^{b-a-(q-2)\frac{a+2}{4}}\|u_n\|_Y^q\leq C_1R^{b-a-(q-2)\frac{a+2}{4}} \quad \text{e}$$
$$\int_{B_{r_0}} Q(|x|)|u_n|^q dx\leq Cr_0^{b_0\sigma+2}\|u_n\|_Y^q\leq C_2r_0^{b_0\sigma+2}.$$

Dado $\varepsilon>0$, podemos tomar R suficientemente grande e r_0 suficientemente pequeno de modo que

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^q dx\leq\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{B_{r_0}} Q(|x|)|u_n|^q dx\leq\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2.7)$$

Além disso, pela imersão compacta de $H^1_{rad}(B_R \backslash B_{r_0})$ em $L^q(B_R \backslash B_{r_0})$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$\int_{B_R \backslash B_{r_0}} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq C_5 \int_{B_R \backslash B_{r_0}} |u_n|^q dx \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Logo, $u_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ e com isto finalizamos a demonstração da proposição.

■

Proposição 2.1.3 *Y_{rad}, munido com a norma $\|\cdot\|_Y$, é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em Y_{rad}. Em particular, observamos que $(V(|x|)^{\frac{1}{2}} u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Desta forma, existe $\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{aligned} &V(|x|)^{\frac{1}{2}} u_n \to \widetilde{u} \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \\ &V(|x|)^{\frac{1}{2}} u_n \to \widetilde{u} \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Como $V(|x|) > 0$, temos

$$u_n \to V(|x|)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{u} =: u \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2. \tag{2.10}$$

Como (u_n) é uma sequência de Cauchy em Y_{rad}, então $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$, para cada $i = 1, 2$. Então, existe $u_i \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to u_i \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \\ &\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to u_i \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Agora, fixe arbitrariamente $R > 0$ e considere $\widetilde{u}_n : B_R \to \mathbb{R}$ definida por $\widetilde{u}_n(x) = u_n(x) - u_n(R)$, onde $u_n(R) = u_n(|x|)$ com $|x| = R$. Assim, $\widetilde{u}_n \in H^1_0(B_R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|\nabla \widetilde{u}_n - \nabla \widetilde{u}_m\|_2 \leq \|\nabla u_n - \nabla u_m\|_2,$$

de onde concluímos que $(\widetilde{u}_n)$ é uma sequência de Cauchy em $H^1_0(B_R)$. Portanto, existe $u_R \in H^1_0(B_R)$ tal que

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}_n \to u_R \quad \text{em } H^1_0(B_R) \quad \text{e} \\ &\widetilde{u}_n \to u_R \quad \text{em quase todo ponto de } B_R. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Decorre de (2.10) e (2.12) que

$$\begin{aligned} &u_R = u - u(R) \quad \text{em quase todo ponto de } B_R \quad \text{e} \\ &\frac{\partial \widetilde{u}_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u_R}{\partial x_i} \quad \text{em quase todo ponto de } B_R, \text{ para } i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De (2.11) e (2.13) temos que $\partial u_R/\partial x_i = u_i$ em quase todo ponto de B_R. Neste momento, mostraremos que u tem derivada fraca e que $\partial u/\partial x_i = u_i$, para cada $i = 1, 2$. Para isto, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $R > 0$ suficientemente grande de forma que $supp(\varphi) \subset B_R$. Assim, usando (2.13) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{B_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{B_R} [u_R + u(R)] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \int_{B_R} \frac{\partial u_R}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= - \int_{B_R} u_i \varphi dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} u_i \varphi dx. \end{aligned}$$

Logo, retornando a (2.11), concluímos que $\partial u_n/\partial x_i \to \partial u/\partial x_i$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } n \geq n_1. \tag{2.14}$$

Para finalizar a prova, resta-nos apenas mostrar que $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$. É fácil ver que u é radial. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $(\varphi_k^n)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi_k^n \to u_n$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ e, portanto, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_k^n - u_n\|_{1,2} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } k \geq k_n. \tag{2.15}$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\psi_n = \varphi^n_{k_n+1}$. Claramente, temos que $(\psi_n) \subset C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ e por (2.9), (2.14) e (2.15), temos

$$\begin{aligned} \|\psi_n - u\|_{1,2} &\leq \|\psi_n - u_n\|_{1,2} + \|u_n - u\|_{1,2} \\ &= \|\psi_n - u_n\|_{1,2} + \|\nabla u_n - \nabla u\|_2 + \|u_n - u\|_2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, (ψ_n) converge para u na norma de $H^1(\mathbb{R}^2)$ o que nos diz que $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ e assim $u \in Y_{rad}$. Portanto, Y_{rad} é um espaço de Banach. ■

Proposição 2.1.4 *$C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$, munido com a norma $\|\cdot\|_Y$, é denso em Y_{rad}.*

Demonstração. A demonstração deste resultado será dividida em duas etapas. Na primeira, vamos considerar uma função $u \in Y_{rad}$ com suporte compacto. Seja $\Omega = supp(u)$ e considere $(\varphi_n) \subset C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi_n \to u$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$. Assim, $\varphi_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 2$ e $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, para cada $i = 1, 2$. Escolhendo $R > 0$ suficientemente grande de forma que $\Omega \cup supp(\varphi_n) \subset B_R$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por (V_2) existe $C > 0$ tal que

$$V(r) \leq Cr^{a_0}, \text{ se } 0 < r < r_0 \quad \text{e} \quad V(r) \leq C, \text{ se } r_0 \leq r \leq R.$$

Daí,

$$\int_{B_R \setminus B_{r_0}} V(|x|)|\varphi_n - u|^2 dx \leq C \int_{B_R \setminus B_{r_0}} |\varphi_n - u|^2 dx. \tag{2.16}$$

Além disso, escolhendo $\gamma > 1$ de modo que $a_0\gamma > -2$ e usando a desigualdade de Hölder com os expoentes γ e $\gamma/(\gamma - 1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_0}} V(|x|)|\varphi_n - u|^2 dx &\leq C \int_{B_{r_0}} |x|^{a_0}|\varphi_n - u|^2 dx \\
&\leq C \left(\int_{B_{r_0}} |x|^{a_0\gamma} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{B_{r_0}} |\varphi_n - u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
&\leq 2\pi C r_0^{a\gamma+2} \left(\int_{B_{r_0}} |\varphi_n - u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Utilizando as convergências

$$\int_{B_R \setminus B_{r_0}} |\varphi_n - u|^2 dx \to 0 \quad \text{e} \quad \left(\int_{B_{r_0}} |\varphi_n - u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \to 0,$$

e as estimativas (2.16) e (2.17), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)|\varphi_n - u|^2 dx \to 0.$$

Assim, $\varphi_n \to u$ em Y_{rad}. Ou seja, se $u \in Y_{rad}$ tem suporte compacto, existe $(\varphi_n) \subset C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi_n \to u$ em Y_{rad}. Agora, considere $u \in Y_{rad}$, não necessariamente de suporte compacto, e definamos

$$u_n(x) = M_n(x)u(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

onde $M_n(x) := M(x/n)$ com $M \in C_{0,rad}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo $0 \leq M \leq 1$ e

$$M(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_1 \\ 0, & \text{se } x \in B_2^c, \end{cases} \quad \text{e} \quad |\nabla M(x)| \leq C|x|^{\frac{b}{2}} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2,$$

para algum $C > 0$. Note que

$$\begin{aligned} &u_n \to u \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2, \\ &|u_n(x)| \leq |u(x)| \quad \text{e} \\ &V(|x|)|u_n - u|^2 \leq 4V(|x|)u^2. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)|u_n - u|^2 dx \to 0. \tag{2.18}$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \leq 2\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial M_n}{\partial x_i} u\right|^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^2} \left|M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \tag{2.19}$$

e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue novamente, verificamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left|M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \to 0. \tag{2.20}$$

Utilizando a condição (Q_2), para $n > R$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial M_n}{\partial x_i} u\right|^2 dx &= \int_{B_{2n} \backslash B_n} \left|\frac{1}{n} \frac{\partial M(\frac{x}{n})}{\partial x_i} u\right|^2 dx \\ &\leq \frac{C}{n^2} \int_{B_{2n} \backslash B_n} \left|\frac{x}{n}\right|^b |u|^2 dx \\ &= \frac{C}{n^{2+b}} \int_{B_{2n} \backslash B_n} |x|^b |u|^2 dx \\ &\leq \frac{C}{n^{2+b}} \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u|^2 dx \\ &\leq \frac{C}{n^{2+b}} \to 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Então, a partir de (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) concluímos que $u_n \to u$ em Y_{rad}, o que finaliza a demonstração desta proposição. ■

2.2 O espaço de Orlicz E_2

Como já foi observado no início deste capítulo, não podemos aplicar diretamente técnicas variacionais para estudar existência de uma solução fraca para o problema (P_2), por causa da presença do termo $\int_{\mathbb{R}^2} u^2|\nabla u|^2 dx$ no funcional J. Para contornarmos esta dificuldade, da mesma forma como no Capítulo 1, consideramos a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, onde

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1+2f^2(t))^{1/2}} \quad \text{on} \quad [0,+\infty), \\ f(t) &= -f(-t) \quad \text{on} \quad (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Com esta mudança de variável, a partir do funcional J, obtemos um novo funcional dado por

$$I(v) := J(f(v)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla v|^2 + V(|x|)f^2(v)]\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)H(f(v))\, dx. \tag{2.22}$$

Relembremos que a função $f(t)$ possui algumas propriedades usuais, veja Lema 1.1.1 no Capítulo 1.

Agora, introduzimos um subespaço, do tipo Orlicz, de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$E_2 = \left\{ v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2);\ \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v)dx < \infty \right\}$$

e munido com a norma

$$\|v\| = \|\nabla v\|_2 + \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(\lambda v)dx\right]. \tag{2.23}$$

$(E_2, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach (veja Proposição 2.2.5). O principal resultado desta secção consiste em mostrar que a aplicação $v \mapsto f(v)$ de E_2 em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ é contínua e compacta para todo $q \geq 2$. Para isto, precisamos de alguns lemas auxiliares.

Lema 2.2.1 *(1) E_2 é um espaço normado com a norma dada em (2.23). Além disso, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que*

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v)\, dx}{\left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v)\, dx\right]^{1/2}} \leq C\|v\|, \ \ \forall\, v \in E_2 \tag{2.24}$$

(2) Se $v_n \to v$ in E_2 então

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)|f^2(v_n) - f^2(v)|\, dx \to 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)|f(v_n) - f(v)|^2\, dx \to 0;$$

(3) Se $v_n \to v$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v_n)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v)\, dx,$$

então

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(\xi(v_n - v))\, dx\right] \to 0.$$

Demonstração. Veja Proposição 2.1 de [25]. ■

Corolário 2.2.2 *Suponha válidas as condições* (V_2) *e* (Q_2)*. Então,* Y_{rad} *está imerso continuamente em* E_2*.*

Demonstração. Desde que $|f(s)| \leq |s|$, segue que $Y_{rad} \subset E_2$. Seja $(v_n) \subset Y_{rad}$ com $v_n \to 0$ em Y_{rad}. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) v_n^2 dx \to 0.$$

Como $V(r) > 0$ para todo $r > 0$, temos que $v_n \to 0$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$ e usando o item (3) do Lema 1.1.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx \to 0.$$

Assim, pelo item (3) do Lema 2.2.1, $v_n \to 0$ em E_2 e o resultado está provado. ■

Neste momento, enunciamos o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2.3 *Suponha que* (V_2) *e* (Q_2) *sejam satisfeitas. Então, a aplicação* $v \mapsto f(v)$*, de* E_2 *em* $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$*, é contínua e compacta para todo* $q \in [2, \infty)$*.*

Demonstração. Para verificar que tal aplicação está bem definida, siga exatamente os mesmos passos da prova da Proposição 1.1.6, só que ao invés de usar a Proposição 1.1.5, use a Proposição 2.1.2. Mostremos, então, a continuidade da aplicação. Considere uma sequência $(v_n) \subset E_2$ tal que $v_n \to v$ em E_2. Em particular, temos

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2)$$

para $i = 1, 2$. Assim, a menos de subsequência, existe $h_i \in L^2(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq h_i \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2.$$

Logo, usando o item (2) da Proposição 1.1.1, temos

$$\left| \frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} \right| = \left| f'(v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq h_i \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2.$$

Além disso,

$$\frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} \to \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2.$$

Assim, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos garante que

$$\frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} \to \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2), \tag{2.25}$$

para $i = 1, 2$. Usando o item (2) do Lema 2.2.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)|f(v_n) - f(v)|^2 dx \to 0. \tag{2.26}$$

Em vista das convergências (2.25) e (2.26), segue que $f(v_n) \to f(v)$ em Y_{rad} e pela Proposição 2.1.2, $f(v_n) \to f(v)$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$, para cada $2 \leq q < \infty$, de onde concluímos que a aplicação f de E_2 em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ é contínua para cada $2 \leq q < \infty$.

Agora, provaremos a compacidade da aplicação. Considere (v_n) uma sequência limitada em E_2. Pelo item (1) do Lema 2.2.1, $(\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx)$ é limitada em $\mathbb{R}$. Por outro lado, pelo item (2) do Lema 1.1.1, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f(v_n)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f'(v_n)|^2 |\nabla v_n|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx \leq C.$$

Desse modo, $(f(v_n))$ é limitada em Y_{rad}. Logo, existe $u \in Y_{rad}$ tal que, a menos de subsequência, $f(v_n) \rightharpoonup u$ em Y_{rad}. Pela Proposição 2.1.2, $f(v_n) \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ para todo $2 \leq q < \infty$, concluindo assim, a demonstração da compacidade da aplicação. ■

Como consequência direta do Teorema 2.2.3, vale o seguinte resultado de imersão do espaço E_2 em alguns espaços de Lebesgue com o peso Q.

Corolário 2.2.4 *Suponha que as condições (V_2) e (Q_2) são válidas. Então, E_2 está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ para todo $2 \leq q < \infty$.*

Demonstração. Sejam $v \in E_2$ e $q \in [2, \infty)$. Então, pelo item (10) do Lema 1.1.1 e pela Proposição 2.2.3, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|v|^q dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^q dx + C \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^{2q} dx < \infty.$$

Portanto, $E_2 \subset L^q(\mathbb{R}^2, Q)$. Para verificarmos que esta imersão é contínua, considere $(v_n) \subset E_2$ tal que $v_n \to 0$ em E_2. Então, pelo Teorema 2.2.3

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|v_n|^q dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v_n)|^q dx + C \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v_n)|^{2q} dx \to 0,$$

o que mostra a continuidade da imersão. Agora, seja (v_n) uma sequência limitada em E_2. Pelo Teorema 2.2.3, existe $u \in L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ tal que $u_n = f(v_n) \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$.

Em particular, $u_n \to u$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$, e existe $h_q \in L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ tal que $|u_n| \leq h_q$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$. Usando o item (10) do Lema 1.1.1, obtemos

$$|v_n| \leq C(h_q + h_{2q}^2) \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^2.$$

Como $(h_q^q + Ch_{2q}^{2q}) \in L^1(\mathbb{R}^2, Q)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$v_n \to v = f^{-1}(u) \quad \text{em } L^q(\mathbb{R}^2, Q),$$

finalizando a prova deste resultado. ■

No que segue, mostramos que o espaço E_2 é completo quando munido com a norma dada em (2.23).

Proposição 2.2.5 *E_2 é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(v_n) \subset E_2$ uma sequência de Cauchy. Pela imersão contínua de E_2 em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ para todo $2 \leq q < \infty$, (v_n) é uma sequência de Cauchy em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$. Desta forma, existe $v_q \in L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ tal que $v_n \to v_q$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$. Além disso, $(\frac{\partial v_n}{\partial x_i})$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$, para $i = 1, 2$. Daí, seguindo os mesmos argumentos usados na demonstração da Proposição 2.1.3, existe $v_q \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial v_q}{\partial x_i}$, para $i = 1, 2$. Por outro lado, como (v_n) é limitada em E_2, pelo item (1) do Lema 2.2.1 segue que $(\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx)$ é limitada e, usando o Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_q) dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx,$$

de onde concluímos que $v_q \in E_2$. Fazendo uso do item (1) do Lema 2.2.1 novamente obtemos que $(\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n - v_m) dx)$ é limitada e dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n - v_m) dx \leq \left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n - v_m) dx \right]^{\frac{1}{2}} \|v_n - v_m\| < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_1$. Fixando $m > n_1$ e usando novamente o Lema de Fatou, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_m - v_q) dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_m - v_n) dx < \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_m - v_q) dx = 0,$$

e assim existe $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo $V(|x|)f^2(v_m - v_q) \leq w$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$. Com esta informação e dos itens (8) e (12) do Lema 1.1.1, temos

$$\begin{aligned} V(|x|)f^2(v_m) &= V(|x|)f^2(v_m - v_q + v_q) \\ &\leq CV(|x|)f^2\left(\frac{1}{2}(v_m - v_q) + \frac{1}{2}v_q\right) \\ &\leq CV(|x|)f^2(v_m - v_q) + CV(|x|)f^2(v_q) \\ &\leq C[w + V(|x|)f^2(v_q)] \in L^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que $\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v_n)dx$ e, pelo item (3) do Lema 2.2.1,

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(\xi(v_n - v_q))dx\right] \to 0,$$

finalizando a prova desta proposição. ∎

Observação 2.2.6 *$C^{\infty}_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ munido com a norma dada em (1.4) é denso em E_2. A demonstração deste fato segue argumentos similares aos anteriores.*

Além disso, Berestycki-Lions mostraram a seguinte caracterização para as funções que pertencem à $H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$ (veja [13]):

Lema 2.2.7 *Seja $v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2)$. Então, existe uma função u contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ tal que $v = u$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$. Além disso, existem $C, \gamma > 0$ tais que*

$$|u(x)| \leq C|x|^{\frac{-1}{2}}\|v\|_{1,2}, \quad \textit{para } |x| > \gamma.$$

2.3 Uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser

Nesta seção, provamos uma desigualdade do tipo Trundinger-Moser para o espaço E_2. Tal desigualdade é imprescindível para os estudos neste capítulo, uma vez que a não linearidade $h(s)$ tem um crescimento do tipo exponencial crítico em $+\infty$, conforme (h_1). Para demonstrar esta desigualdade precisamos de três resultados preliminares, o primeiro deles é uma desigualdade do tipo Trundinger-Moser com singularidade devido a Adimurthi-Sandeep, veja [1]. O segundo resultado é uma espécie de lema radial para funções em E_2 e o terceiro é uma consequência deste lema.

Lema 2.3.1 *Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, para todo $\gamma > 0$ e $d \in [0, 2)$ temos que*

$$|x|^{-d} e^{\gamma |u|^2} \in L^1(\Omega).$$

Além disso,

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\Omega} \frac{e^{\gamma |u|^2}}{|x|^d} dx < +\infty$$

se, e somente se, $\frac{\gamma}{4\pi} + \frac{d}{2} \leq 1$.

Demonstração. Veja Teorema 2.1 de [1]. ■

Lema 2.3.2 *Suponha que a condição (V_2) seja satisfeita. Então, existem $C > 0$ e $R_0 > 0$ tais que, para todo $v \in E_2$, tem-se*

$$|f(v(x))| \leq C\Upsilon(v)|x|^{-\frac{a+2}{4}} \quad \textit{para todo } |x| > R_0,$$

onde

$$\Upsilon(v) = \left(\int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla v|^2 + V(|x|) f^2(v)] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Se $v \in E_2$ então pelos itens 2) e 3) do Lema 1.1.1, $f(v) \in Y_{rad}$. Assim, Pelo Lema 2.1.1 existem $C > 0$ e $R_0 > 0$ tais que

$$|f(v(x))| \leq C\|f(v)\|_Y |x|^{-\frac{a+2}{4}}, \quad \text{se } |x| > R_0.$$

Além do mais, usando o item 2) do Lema 1.1.1 novamente, temos

$$\|f(v)\|_Y^2 = \int_{\mathbb{R}^2} [|f'(v)|^2 |\nabla v|^2 + V(|x|) f^2(v)] dx \leq \Upsilon(v)^2.$$

Das duas estimativas acima, o resultado segue. ■

Corolário 2.3.3 *Seja D um número real positivo. Então, existem $C > 0$ e $R_0 > 0$ tais que*

$$|v(x)| \leq CD|x|^{-\frac{a+2}{4}}, \; \textit{se } |x| > R_0,$$

para todo $v \in E_2$ satisfazendo $\Upsilon(v) \leq D$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3.2, existem $C > 0$ e $R_0 > 0$ tais que

$$|f(v(x))| \leq CDR_0^{-\frac{a+2}{4}} \quad \text{para todo } |x| > R_0. \tag{2.27}$$

para todo $v \in E_2$ satisfazendo $\Upsilon(v) \leq D$. Agora, observe que, pelo item (4) do Lema 1.1.1 e por f ser invertível, temos

$$\frac{f^{-1}(t)}{t} \to 1, \quad \text{quando } t \to 0.$$

Assim, existe $r_0 > 0$ tal que $|f^{-1}(t)| \leq 2|t|$, sempre que $|t| \leq r_0$. Também existe $r_1 > 0$ tal que $2|t| \leq |f(t)|$ para todo $|t| \leq r_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor R_0 suficientemente grande de modo que $2CDR_0^{-(a+2)/4} < \min\{r_0, r_1\}$. Assim, se $v \in E_2$ satisfaz $\Upsilon(v) \leq D$ então, em vista de (2.27), temos

$$|v(x)| = |f^{-1}(f(v(x)))| \leq 2|f(v(x))| \leq 2CDR_0^{-\frac{a+2}{4}} < r_1 \quad \text{para todo } |x| > R_0$$

e, portanto, novamente pelo Lema 2.3.2,

$$2|v(x)| \leq |f(v(x))| \leq CD|x|^{-\frac{a+2}{4}} \quad \text{para todo } |x| > R_0,$$

o que prova o resultado. ■

No que segue, enunciamos e demonstramos o principal resultado desta subseção, uma versão da Desigualdede de Trudinger-Moser para funções em E_2.

Teorema 2.3.4 *Suponha que as condições (V_2) e (Q_2) sejam satisfeitas. Então, para todo $v \in E_2$ e $\lambda > 0$, $Q(|x|)[e^{\lambda v^2} - 1] \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, se $\lambda < 4\pi(1 + \frac{b_0}{2})$, para cada $D > 0$, existe $C = C(a, b, b_0, \lambda, D) > 0$ tal que*

$$\sup_{v \in E_2; \|\nabla v\|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)[e^{\lambda v^2} - 1]dx \leq C,$$

sempre que $\Upsilon(v) \leq D$.

Demonstração. Seja $R_1 > 0$ de modo que o Corolário 2.3.3 seja válido em $|x| = R_1$. Pela condição (Q_2), existe $C_1 > 0$ tal que

$$Q(r) \leq C_1 r^{b_0}, \ \forall\ 0 < r < R_1 \quad \text{e} \quad Q(r) \leq C_1 r^b, \ \forall\ r > R_1. \tag{2.28}$$

Fixando $R > R_1$ temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{\lambda v^2} - 1)dx &= \int_{B_R^c} Q(|x|) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j v^{2j}}{j!} dx \\ &= \int_{B_R^c} Q(|x|) \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^j v^{2j}}{j!} dx + \int_{B_R^c} Q(|x|)\lambda v^2 dx \\ &\leq C_1 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{B_R^c} |x|^b v^{2j} dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|) v^2 dx. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Uma vez que E_2 está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^2, Q)$, existe $C_2 > 0$ satisfazendo

$$\|v\|_{2,Q}^2 \leq C_2 \|v\|^2 \leq C_2(1 + \Upsilon(v) + \Upsilon(v)^2)^2, \tag{2.30}$$

para todo $v \in E_2$. Por outro lado, usando o Corolário 2.3.3, temos

$$\int_{B_R^c} |x|^b v^{2j} dx \leq C^{2j} \Upsilon(v)^{2j} \int_{B_R^c} |x|^b |x|^{-2j\frac{a+2}{4}} dx,$$

sempre que $\Upsilon(v) \leq D$. Desde que $a > -2$ e $b - \frac{j(a+2)}{2} + 2 < b - a$, para todo natural $j \geq 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c} |x|^b v^{2j} dx &\leq C^{2j} \Upsilon(v)^{2j} 2\pi \int_R^\infty s^{b-\frac{j(a+2)}{2}+1} ds \\
&\leq -C^{2j} \frac{2\pi \Upsilon(v)^{2j} R^{b-\frac{j(a+2)}{2}+2}}{b - \frac{j(a+2)}{2} + 2} \\
&\leq -C^{2j} \frac{2\pi \Upsilon(v)^{2j} R^{b-a}}{b-a} \\
&= \frac{2\pi C^{2j} \Upsilon(v)^{2j} R^{b-a}}{a-b}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

A partir das estimativas (2.29), (2.30) e (2.31), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{\lambda v^2} - 1) dx &\leq C_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{C^{2j} j}}{j!} \frac{\Upsilon(v)^{2j}}{(a-b) R^{a-b}} + C_2 (1 + \Upsilon(v) + \Upsilon(v)^2)^2 \\
&\leq C_3 e^{C^2 \lambda \Upsilon(v)^2} + C_2 (1 + \Upsilon(v) + \Upsilon(v)^2)^2
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $C_3 = C(a, b, R)$. Desde que v é radial e contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, podemos denotar $v(R)$ como o número real dado por $v(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ com $|x| = R$. Daí, definindo $u : B_R \to \mathbb{R}$ por $u(x) = v(x) - v(R)$, segue que $u \in H^1_{0,rad}(B_R)$ e, além do mais, fixe $R > R_0$ de modo que o Corolário 2.3.3 seja satisfeito para $|x| = R$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
v^2(x) &\leq (1+\varepsilon) u^2(x) + (1 + C_\varepsilon) v(R)^2 \\
&\leq (1+\varepsilon) u^2(x) + (1 + C_\varepsilon) C^2 \Upsilon^2(v) R^{-\frac{a+2}{2}} \\
&\leq (1+\varepsilon) u^2(x) + 1,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

para todo $x \in B_R$, onde consideramos R suficientemente grande. Usando (2.28), o Lema 2.3.1 e (2.33), obtemos

$$\int_{B_R} Q(|x|)(e^{\lambda v^2} - 1) dx \leq C_1 \int_{B_R} \frac{e^{\lambda v^2} - 1}{|x|^{-b_0}} dx \leq e^{4\pi} \int_{B_R} \frac{e^{\lambda(1+\varepsilon)u^2} - 1}{|x|^{-b_0}} dx < \infty, \tag{2.34}$$

em virtude da primeira parte do Lema 2.3.1. Assim, desde que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\lambda v^2} - 1) dx = \int_{B_R} Q(|x|)(e^{\lambda v^2} - 1) dx + \int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{\lambda v^2} - 1) dx,$$

usando as estimativas (2.32) e (2.34), concluímos que $Q(|x|)(e^{\lambda v^2} - 1) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, considere $\varepsilon > 0$ de modo que $\lambda(1+\varepsilon) < 4\pi(1+\frac{b_0}{2})$. Portanto, das estimativas (2.32) e (2.34) em conjunto com o Lema 2.3.1, concluímos que existe $C_D > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)[e^{\lambda v^2} - 1]dx < C_D,$$

para todo $v \in E_2$ com $\|\nabla v\|_2 \leq 1$ e $\Upsilon(v) \leq D$. ■

2.4 Propriedades do funcional I

Esta seção apresenta as principais propriedades do funcional I.

Proposição 2.4.1 *O funcional I satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $I : E_2 \to \mathbb{R}$ está bem definido e é contínuo;

(2) $I : E_2 \to \mathbb{R}$ é Gateaux diferenciável em E_2 com derivada de Gateaux dada por

$$I'(u).\phi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + V(|x|)f(u)f'(u)\phi)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)g(f(u))f'(u)\phi\, dx;$$

(3) $I'(u) \in E_2'$ para toda $u \in E_2$ e se $v_n \to v$ em E_2 então $I'(v_n) \to I'(v)$ na topologia fraca $*$ de E_2'.

Demonstração. (1) Por (h_1), se $\lambda > \lambda_0$, existem constantes positivas c e R_0 tais que se $s > R_0$ então

$$h(s) \leq c(e^{\lambda s^4} - 1). \tag{2.35}$$

Já a condição (h_2) nos diz que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva r_0 tal que se $0 < s < r_0$ então

$$h(s) \leq \varepsilon |s|. \tag{2.36}$$

Logo, das estimativas (2.35) e (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} h(s) &\leq \varepsilon|s| + c_1|s|(e^{\lambda s^4} - 1) \quad \text{e} \\ H(s) &\leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + c_2|s|^3(e^{\lambda s^4} - 1). \end{aligned} \tag{2.37}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Usando as estimativas (2.37), para todo $v \in E_2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)H(f(v))dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)f^2(v)dx + c\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^3(e^{\lambda f^4(v)} - 1)dx \tag{2.38}$$

donde pela Proposição 2.2.3, concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)f^2(v)dx < +\infty.$$

Agora, considere $r_1, r_2 > 1$ com $1/r_1 + 1/r_2 = 1$. Usando a desigualdade de Hölder, a Proposição 2.2.3 e o Teorema 2.3.4, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^3(e^{\lambda f^4(v)} - 1)dx \leq \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^{3r_1}dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\lambda r_2 f^4(v)} - 1)dx\right)^{\frac{1}{r_2}} < +\infty.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Logo, em vista de (2.38), $I : E_2 \to \mathbb{R}$ está bem definido. Sejam $(v_n) \subset E_2$ e $v \in E_2$ tais que $v_n \to v$ em E_2. Assim, pelo item (2) do Lema 2.2.1, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx \quad \text{e} \\ &\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v)dx.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Por (2.38), (2.39), pelo Teorema 2.3.4 e pela imersão contínua de E_2 em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$, existe $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $Q(|x|)H(f(v_n(x))) \leq w(x)$ em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^2$ e, como $Q(|x|)H(f(v_n(x))) \to Q(|x|)H(f(v(x)))$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)H(f(v_n(x)))dx \to \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)H(f(v(x)))dx. \tag{2.41}$$

Das convergências (2.40) e (2.41), segue que $I(v_n) \to I(v)$ e, portanto, I é contínuo.

A demonstração dos outros dois itens são análogos aos itens (2) e (3) da Proposição 1.3.1. ∎

2.5 Pontos críticos do funcional I e soluções fracas de (P_2)

Aqui, vamos relacionar os pontos críticos de I com as soluções fracas de (P_2). Para tanto, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Proposição 2.5.1 *Suponha que as condições (V_2), (Q_2), $(h_1) - (h_2)$ são satisfeitas. Então, para todo $v \in E_2$ fixado e todo $w \in Y$, existe $C = C(b_0, \|v\|) > 0$ tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)h(f(v))f'(v)w dx \right| \leq C\|w\|_Y. \tag{2.42}$$

Demonstração. Pela estimativa (2.37) e usando os itens (2) e (11) do Lema 1.1.1, obtemos

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)h(f(v))f'(v)wdx\right| \leq \\ &\qquad \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)||w|dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\lambda f^4(v)}-1)|w|dx. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Seja $R > 1$. Pelas condições (Q_2) e (V_2), existe $C > 0$ tal que $Q(|x|) \leq C|x|^b$ e $V(|x|) \geq C|x|^a$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ com $|x| > R$. Assim, como $a > b$ e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} Q(|x|)|f(v)||w|dx &\leq C\int_{B_R^c} |x|^b|f(v)||w|dx \\ &\leq C\int_{B_R^c} |x|^a|f(v)||w|dx \\ &\leq C\int_{B_R^c} V(|x|)|f(v)||w|dx \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)w^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_v\|w\|_Y. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Por outro lado, a Desigualdade de Hölder e o Teorema 2.2.3 implicam que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} Q(|x|)|f(v)||w|dx &\leq \left(\int_{B_R} Q(|x|)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R} Q(|x|)w^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_v\left(\int_{B_R} Q(|x|)w^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Usando a condição (Q_2), existe $C > 0$ tal que $Q(|x|) \leq C|x|^{b_0}$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ com $|x| < r_0$. Agora considere $1 < q < -2/b_0$ e $\varphi \in C_{0,rad}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in B_R$, $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in B_{2R}^c$ e $|\nabla\varphi(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Observe que $\varphi w \in H_0^1(B_{2R})$. Daí, pela desigualdade de Hölder com os expoentes q e $q/(q-1)$ e a imersão contínua de $H_0^1(B_{2R})$ em $L^t(B_{2R})$, para todo $t \geq 2$,

temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} Q(|x|)w^2dx &\leq C\int_{B_R} |x|^{b_0}w^2dx \\
&\leq C\left(\int_{B_R} |x|^{b_0q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{B_R} w^{\frac{2q}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq C_{b_0}\left(\int_{B_R} w^{\frac{2q}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= C_{b_0}\left(\int_{B_R} |\varphi w|^{\frac{2q}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq C_{b_0}\left(\int_{B_{2R}} |\varphi w|^{\frac{2q}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq C_0\int_{B_{2R}} |\nabla(\varphi w)|^2dx,
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

onde $C_0 = C(b_0, R)$. Denotando $m_V = \min_{B_{2R}\backslash B_R} V(|x|)$, usando (2.46) e a imersão contínua de $H^1(B_{2R}\backslash B_R)$ em $L^2(B_{2R}\backslash B_R)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} Q(|x|)w^2dx &\leq C_0\int_{B_{2R}} |w\nabla\varphi|^2dx + C_0\int_{B_{2R}} |\varphi\nabla w|^2dx \\
&\leq C_0\int_{B_{2R}\backslash B_R} |(w\nabla\varphi)|^2dx + C_0\int_{B_{2R}} |\nabla w|^2dx \\
&\leq \frac{C_1}{m_V}\int_{B_{2R}\backslash B_R} V(|x|)|w|^2dx + C_0\int_{B_{2R}} |\nabla w|^2dx \\
&\leq \frac{C_1}{m_V}\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)|w|^2dx + C_0\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w|^2dx \\
&\leq C_2\|w\|_Y^2,
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

onde $C_2 = C(b_0, R, V)$. Logo, das estimativas (2.44), (2.45) e (2.47), concluímos que

$$
\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)||w|dx \leq C\|w\|_Y, \tag{2.48}
$$

onde $C = C(v, b_0, R, V)$. Agora, vamos estimar a segunda integral do lado direito de (2.43). Para isto, procedemos de maneira análoga ao caso anterior. Usando a desigualdade de Hölder, o item 7) do Lema 1.1.1, as condições (V_2) e (Q_2) e o Teorema

2.3.4, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{\lambda f^4(v)}-1)|w|dx &\leq \left(\int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{2\lambda f^4(v)}-1)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R^c} Q(|x|)|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{4\lambda v^2}-1)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(C\int_{B_R^c} |x|^b|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_v \left(\int_{B_R^c} |x|^a|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_v \left(\int_{B_R^c} V(|x|)|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_v\|w\|_Y.
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder, o Teorema 2.3.4 e a estimativa (2.47), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} Q(|x|)(e^{\lambda f^4(v)}-1)|w|dx &\leq \left(\int_{B_R} Q(|x|)(e^{2\lambda f^4(v)}-1)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} Q(|x|)w^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_v \left(\int_{B_R} Q(|x|)w^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{v,b_0}\|w\|_Y.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Das estimativas (2.49) e (2.50), obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\lambda f^4(v)}-1)|w|dx \leq C_{v,b_0}\|w\|_Y. \tag{2.51}
$$

Logo, de (2.48) e (2.51) concluímos a prova desta proposição. ■

Corolário 2.5.2 *Se $v \in E_2$ então o funcional linear $T_v : Y \to \mathbb{R}$ definido por*

$$
T_v.w = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f(v)f'(v)wdx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)h(f(v))f'(v)wdx
$$

é contínuo.

Demonstração. Vamos mostrar que existe $C > 0$ tal que $|T_v.w| \leq C\|w\|_Y$, para todo $w \in Y$. Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla w dx\right| \leq \|\nabla v\|_2\|w\|_Y \quad \text{e}
$$

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f(v)f'(v)wdx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_Y.
$$

Destas desigualdades em conjunto com a Proposição 2.5.1, segue a demonstração. ■

Proposição 2.5.3 *Suponha que as condições* (V_2), (Q_2), $(h_1)-(h_4)$ *sejam satisfeitas. Se* $v \in E_2$ *é um ponto crítico de* I *então* $u = f(v)$ *é uma solução fraca do problema* (P_2).

Demonstração. Seja $v \in E_2$ um ponto crítico de I e $R > 0$, então v satisfaz

$$-\Delta v = f'(v)(Q(|x|)h(f(v)) - V(|x|)f(v)) = w$$

no sentido fraco em $B_R \subset \mathbb{R}^2$. Como já foi verificado, pelas condições (h_1) e (h_2) obtemos a estimativa (2.37)$>$ Daí, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|w(x)| \leq C_1|f'(v(x))f(v(x))| \left[Q(|x|) + Q(|x|)(e^{\lambda f(v(x))^4} - 1) + V(|x|)\right].$$

Usandos as condições (V_1), (Q_1), o item 12) do Lema1.1.1 e a estimativa acima, existe $C_2 > 0$ tal que

$$|w(x)| \leq C_2 \left[|x|^{b_0} + Q(|x|)(e^{\lambda f(v(x))^4} - 1) + |x|^{a_0}\right]. \tag{2.52}$$

Agora precisamos analizar quatro casos separadamente:

- Se $a_0 \geq 0$ e $b_0 \geq 0$

Neste caso, existem constantes $C_3, C_4, C_5, C_6 > 0$ tal que $|x|^{a_0} \leq C_3$ e $|x|^{b_0} \leq C_3$, então de (2.52) para todo $t > 1$, segue que

$$\begin{aligned}
|w(x)|^t &\leq C_4 \left[C_5 + Q(|x|)^t(e^{2t\lambda v(x)^2} - 1)\right] \\
&\leq C_4 \left[C_5 + Q(|x|)^{t-1}Q(|x|)(e^{2t\lambda v(x)^2} - 1)\right] \\
&\leq C_6 \left[1 + Q(|x|)(e^{2t\lambda v(x)^2} - 1)\right].
\end{aligned}$$

Assim, usando o Teorema 2.3.4, obtemos

$$\int_{B_R} |w(x)|^t dx \leq \int_{B_R} C_6 \left[1 + Q(|x|)(e^{2t\lambda v(x)^2} - 1)\right] dx < \infty.$$

Portanto, $w \in L^t(B_R)$ para todo $t > 1$.

- Se $-2 < a_0 < 0$ e $-2 < b_0 < 0$

Usando as condições (V_1), (Q_2) e a estimativa (2.52), existe $C_3 > 0$ de modo que

$$|w(x)| \leq C_3 \left[|x|^{b_0} + |x|^{b_0}(e^{\lambda f(v(x))^4} - 1) + |x|^{a_0} \right]. \tag{2.53}$$

Agora considere $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$ tais que $-2 < a_0 t_1 < 0$ e $-2 < b_0 t_2 < 0$. Tomando $t = \min\{t_1, t_2\}$ e usando (2.53), existe $C_4 > 0$ satisfazendo

$$\int_{B_R} |w(x)|^t dx \leq C_4 \int_{B_R} \left[|x|^{b_0 t} + |x|^{b_0 t}(e^{2t\lambda v(x)^2} - 1) + |x|^{a_0 t} \right] dx.$$

Uma vez que $-2 < a_0 t < 0$ e $-2 < b_0 t < 0$. Usando o Lema 2.3.1 em conjunto com a estimativa logo acima verificamos que $w \in L^t(B_R)$, onde $t = \min\{t_1, t_2\}$.

Utilizando os dois casos estudados acima, verificamos que se $a_0 \geq 0$ e $-2 < b_0 < 0$, ou $-2 < a_0 < 0$ e $b_0 \geq 0$, garantimos a existência de uma constante $t > 1$ tal que $w \in L^t(B_R)$. Logo, pelo resultado de regularidade da Seção 2 em [20], obtemos que $v \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, para algum $\gamma \in (0,1)$. Em particular, $v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

A prova da segunda parte desta proposição é análoga a prova da Proposição 1.3.7, por isso omitiremos aqui. ■

Observação 2.5.0.3 *Como no Capítulo 1, temos que se $v \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap E_2$ é um ponto crítico do funcional I então $u = f(v)$ é uma solução clássica de (P_2).*

A Proposição 2.5.3 nos diz que para encontrarmos uma solução não nula para (P_2), é suficiente mostrar a existência de um ponto crítico não nulo para o funcional I.

2.6 Prova do Teorema 2.0.8

Nesta seção, provamos o resultado principal deste capítulo. Mostramos que o funcional I satisfaz as hipóteses de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, mais precisamente, o Teorema 1.4.1. Também verificamos que I satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale no nível do passo da montanha, donde garantimos a existência de um ponto crítico não-nulo $v \in E_2$ para I e, com isso, $u = f(v) \in Y_{rad}$ é uma solução fraca para (P_2).

Para cada $\rho > 0$, vamos considerar o seguinte conjunto

$$S_\rho = \{v \in E_2; \Upsilon(v) = \rho\}.$$

Temos que S_ρ é um subconjunto fechado de E_2 que desconecta E_2 em duas componentes conexas. Além do mais, como estamos interessados em soluções não negativas de (P_2), vamos estender $h(s) = 0$ para todo $s < 0$. A próxima proposição nos garante que I tem a geometria do passo da montanha.

Proposição 2.6.1 (Geometria do passo da montanha) *O funcional I satisfaz as seguintes condições:*

i) Existem $\rho, \sigma_0 > 0$ com $\rho < 1$ tais que $I(v) \geq \sigma_0$ para todo $v \in S_\rho$;

ii) Existe $v \in E_2$ satisfazendo $\Upsilon(v) > \rho$ e $I(v) < 0$.

Demonstração. *i)* Como vimos na estimativa (2.37), dado $\varepsilon > 0$ e $\lambda > \lambda_0$, existe $C = C_\varepsilon > 0$ tal que

$$H(s) \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + C|s|^3(e^{\lambda s^4} - 1), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Considere $\rho > 0$ e $v \in S_\rho$. Logo,

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(|x|)f^2(v))dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)H(f(v))dx \\ &\geq \frac{\rho^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|f(v)|^2\, dx - C\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^3(e^{\lambda f^4(v)} - 1)\, dx. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Agora, considere $r_1, r_2 > 1$ de forma que $1/r_1 + 1/r_2 = 1$. Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^3(e^{\lambda f^4(v)} - 1)dx \\ &\qquad \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^{3r_1}dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\lambda r_2 f^4(v)} - 1)dx\right)^{\frac{1}{r_2}}. \end{aligned}$$

Assim, usando o item 7) do Lema 1.1.1 e observando que $f(v) \in Y_{rad}$ sempre que $v \in E_2$ para usar a Proposição 2.1.2, temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^3(e^{\lambda f^4(v)} - 1)dx \\ &\qquad \leq C\|f(v)\|_Y^3 \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2\lambda r_2 v^2} - 1)dx\right)^{\frac{1}{r_2}} \\ &\qquad \leq C\Upsilon(v)^3 \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2\lambda r_2 v^2} - 1)dx\right)^{\frac{1}{r_2}} \\ &\qquad = C\rho^3 \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2\lambda r_2 v^2} - 1)dx\right)^{\frac{1}{r_2}}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2\lambda r_2 v^2}-1)dx &= \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2\lambda r_2 \Upsilon(v)^2 \frac{v^2}{\Upsilon(v)^2}}-1)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2\lambda r_2 \rho^2 (\frac{v}{\rho})^2}-1)dx\end{aligned} \tag{2.56}$$

e considere $0 < \rho < 1$ pequeno de forma que $2\lambda r_2 \rho^2 < 4\pi(1 + (b_0/2))$. Como $1/\rho > 1$ segue do item 13) do Lema 1.1.1 que se $v \in S_\rho$ e $\widehat{v} := v/\rho$ então $\Upsilon(\widehat{v}) \leq 1$ e também temos $\|\nabla \widehat{v}\|_2 \leq 1$. Logo, pelo Teorema 2.3.4 em conjunto com as estimativas (2.55) e (2.56), segue que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v)|^3(e^{\lambda f^4(v)}-1)dx \leq C\rho^3.$$

Com a desigualdade acima e (2.54), temos

$$\begin{aligned} I(v) &\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|f(v)\|^2_{2,Q} - C\|f(v)\|^3_{r_1,Q} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\rho^2 - C\rho^3 \\ &= \rho^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}-C\rho\right). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Agora, note que se $\varepsilon < 1$ e tomando ainda $\rho < \frac{2(1-\varepsilon)}{C}$ então $I(v) \geq \sigma_0 > 0$ para todo $v \in E_2$ com $\Upsilon(v) = \rho$.

ii) Pela condição (h_3), existem constantes positivas C_1, C_2 tais que $H(s) \geq C_1|s|^{2\mu} - C_2$ para todo $s \geq 0$. Considere $\varphi \in C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ não nula tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e que $0 \notin supp(\varphi) =: K$. Assim, temos

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \frac{t^2}{2}\int_K |\nabla\varphi|^2dx + \frac{1}{2}\int_K V(|x|)f^2(t\varphi)dx - \int_K Q(|x|)H(f(t\varphi))dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_K (|\nabla\varphi|^2 + V(|x|)\varphi^2)dx - C_1\int_K Q(|x|)|f(t\varphi)|^{2\mu}dx + C_2\int_K Q(|x|)dx \end{aligned} \tag{2.58}$$

Desde que $f(s)/s$ é decrescente em $(0,+\infty)$ e $0 \leq t\varphi \leq t$ para $t > 0$, temos

$$\frac{f(t\varphi)}{t\varphi} \geq \frac{f(t)}{t} \quad \text{e} \quad f(t\varphi) \geq f(t)\varphi,$$

Retornando à (2.58), obtemos

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &\leq \frac{t^2}{2}\int_K (|\nabla\varphi|^2 + V(|x|)\varphi^2)dx - C_1\int_K Q(|x|)f^{2\mu}(t)\varphi^{2\mu}dx + C \\ &\leq \frac{t^2}{2}\left[\int_K (|\nabla\varphi|^2 + V(|x|)\varphi^2)dx - C_2\frac{f^{2\mu}(t)}{t^2} + C\right] \\ &\leq \frac{t^2}{2}\left[C_3 - C_2\frac{f^{2\mu}(t)}{t^2}\right] \to -\infty \end{aligned} \tag{2.59}$$

pois pelo item 9) do Lema 1.1.1, temos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f^{2\mu}(t)}{t^2} \geq \lim_{t\to\infty} Ct^{\mu-2} = +\infty.$$

Portanto, tomando t suficientemente grande e considerando $v = t\varphi$ segue que $I(v) < 0$, como queríamos demonstrar. ■

Com as Proposições 2.4.1 e 2.6.1 constatamos que o funcional I satisfaz as hipóteses do Teorema 1.4.1. Assim, existe uma sequência de Palais-Smale $(v_n) \subset E_2$ para I no nível de energia $c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) > 0$.

Com a finalidade de mostrar que I satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale no nível c_0, a seguir, demonstramos um resultado que nos assegura que toda sequência de Palais-Smale para I, em qualquer nível c, é limitada em E_2.

Lema 2.6.2 *Seja $(v_n) \subset E_2$ uma sequência de Palais-Smale para I em um nível qualquer $c \in \mathbb{R}$. Então, (v_n) é limitada em E_2.*

Demonstração. Sejam c um número real e $(v_n) \subset E_2$ uma sequência de Palais-Smale para o funcional I no nível c. Então, $I(v_n) \to c$ e $I'(v_n) \to 0$. Logo,

$$|I'(v_n)v_n| \leq \|I'(v_n)\|\|v_n\| \leq o_n(1)\|v_n\|. \tag{2.60}$$

Pelo item 6) do Lema 1.1.1 e pela condição (h_3), obtemos

$$\begin{aligned} I(v_n) - \frac{1}{\mu}I'(v_n)v_n &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx \\ &\quad - \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f(v_n)f'(v_n)v_n]dx \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)\left[h(f(v_n))f'(v_n)v_n - \mu H(f(v_n))\right]dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx \\ &\quad + \frac{1}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)[h(f(v_n))f(v_n) - 2\mu H(f(v_n))]dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Logo de (2.60) e (2.61) chegamos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx &\leq c + o_n(1) + o_n(1)\|v_n\| \\ &\leq c + o_n(1) + o_n(1)\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1)\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx. \end{aligned}$$

Disto, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}-o_n(1)\right)\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx \leq \\
c+o_n(1)+o_n(1)\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Assim, podemos concluir que $\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx\right)$ é limitada em $\mathbb{R}$. Com efeito, seja $t_n=\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$, a partir de (2.62), para n grande, obtemos

$$
\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx \leq C+\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}
$$

e assim

$$
\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)t_n^2 \leq C+t_n,
$$

o que mostra que (t_n) é limitada. Usando (2.62) novamente, para n grande, temos

$$
\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}-o_n(1)\right)\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx \leq C+\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}
$$

e como (t_n) é limitada segue que $\left(\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx\right)$ é limitada. Desde que

$$
\|v_n\| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+1+\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx,
$$

concluímos que (v_n) é limitada em E_2. ∎

Corolário 2.6.3 *Se $(v_n) \subset E_2$ é uma sequência de Palais-Smale para I no nível c, então*

$$
\Upsilon(v_n)^2 \leq \frac{2\mu}{\mu-2}c+o_n(1).
$$

Demonstração. Como (v_n) é limitada em E_2, da estimativa (2.62), temos

$$
\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx \leq c+o_n(1)
$$

e daí

$$
\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx+\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx \leq \frac{2\mu}{\mu-2}c+o_n(1).
$$

∎

No que segue, mostramos que I satisfaz a condição de Palais-Smale em alguns níveis de energia c.

Proposição 2.6.4 *Se c é um número real positivo tal que $c < (\mu - 2)/4\mu$, então I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c.*

Demonstração. Sejam $0 < c < (\mu - 2)/4\mu$ e (v_n) uma sequência de Palais-Smale para I no nível c. Então, pelo Lema 2.6.2, (v_n) é limitada em E_2 e, em particular, as sequências

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx\right) \quad \text{e} \quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx\right)$$

são limitadas. Para todo $n \in \mathbb{N}$, considerando $u_n := f(v_n)$, pelo item 2) do Lema 1.1.1, obtemos

$$|\nabla u_n| = |f'(v_n)\nabla v_n| \leq |\nabla v_n|,$$

de onde segue que (u_n) é limitada em Y_{rad}. Desta forma, existe $u \in Y_{rad}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em Y_{rad}. Usando a Proposição 2.1.2 temos $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ para todo $q \geq 2$ e desde que $Q > 0$ em $\mathbb{R}^2$, também temos $u_n \to u$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, usando o Corolário 2.2.4, podemos garantir que, para cada $q \geq 2$, a existência de uma função $v \in L^q(\mathbb{R}^2, Q)$ tal que $v_n \to v$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$. Em particular, $v_n \to v$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^2$. Logo, como f e f^{-1} são funções contínuas, $u = f(v)$ e $f^{-1}(u) = v$. Observe que $v \in E_2$. Sendo $(\Upsilon(v_n))$ limitada, a menos de subsequência, existe $\tau \geq 0$ tal que $\Upsilon(v_n) \to \tau$. Neste ponto, vamos considerar duas possibilidades:

1) $\tau = 0$;

Neste caso, segue que

$$0 \leq \|u_n\|_Y^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f'(v_n)\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx \leq \Upsilon(v_n)^2 \to 0.$$

Logo, $u_n \to 0$ em Y_{rad} e, portanto, $v = f^{-1}(u) = 0$. Utilizando o item 3) do Lema 2.2.1, temos

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(\xi(v_n))\, dx\right] \to 0.$$

Portanto, $v_n \to 0$ em E_2 e, neste caso, concluímos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c.

2) $\tau > 0$;

Para este caso, defina $\widehat{v_n} = v_n/\Upsilon(v_n)$ e observe que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ tem-se que $\Upsilon(v_n) < \tau + \varepsilon$. Pelas propriedades 13) e 14) do Lema 1.1.1

temos

$$f^2(\widehat{v_n}) = f^2\left(\frac{v_n}{\Upsilon(v_n)}\right) \leq \left(\frac{1}{\Upsilon(v_n)} + \frac{1}{\Upsilon^2(v_n)}\right) f^2(v_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\widehat{v_n})^2 &\leq \frac{1}{\Upsilon(v_n)^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \left(\frac{1}{\Upsilon(v_n)} + \frac{1}{\Upsilon(v_n)^2}\right)\int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx \\
&\leq \left(\frac{1}{\Upsilon(v_n)} + \frac{1}{\Upsilon(v_n)^2}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla v_n|^2 + V(|x|) f^2(v_n)] dx\right) \\
&= 1 + \Upsilon(v_n) \\
&\leq 1 + \tau + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Além disso, note que $\|\nabla \widehat{v_n}\|_2 \leq 1$. Usando (2.37) e (2.63), os itens 2) e 11) do Lema 1.1.1 e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|) h(f(v_n)) f'(v_n)(v_n - v) dx\right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v_n)||v_n - v| dx \\
&\quad + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|f(v_n) f'(v_n)|(e^{\lambda f^4(v_n)} - 1)|v_n - v| dx \\
&\leq \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|) f^2(v_n) dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|v_n - v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2r_1\lambda v_n^2} - 1) dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|v_n - v|^{r_2} dx\right)^{\frac{1}{r_2}} \\
&\leq C\|v_n - v\|_{2,Q} + C_\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2r_1\lambda v_n^2} - 1) dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \|v_n - v\|_{r_2,Q},
\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde $r_1, r_2 > 1$ são tais que $1/r_1 + 1/r_2 = 1$. Note que se conseguirmos mostrar que $\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2r_1\lambda v_n^2} - 1)dx\right)$ é limitada para algum $r_1 > 1$, então desde que $v_n \to v$ em $L^q(\mathbb{R}^2, Q)$, para todo $q \geq 2$, da estimativa (2.64), temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|) h(f(v_n)) f'(v_n)(v_n - v) dx\right| \to 0. \tag{2.65}$$

Para isto, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2r_1\lambda v_n^2} - 1) dx = \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2r_1\lambda \Upsilon^2(v_n)\widehat{v_n}^2} - 1) dx. \tag{2.66}$$

Além disso, do Corolário 2.6.3 e da hipótese sobre c, segue que

$$2r_1\lambda\Upsilon^2(v_n) \leq 2r_1\lambda\frac{2\mu}{\mu - 2}c + o_n(1) \leq \lambda r_1 + o_n(1) < 4\pi\left(1 + \frac{b_0}{2}\right),$$

para $r_1 > 1$ suficientemente próximo de 1 e n grande. Assim, relembrando que $\|\nabla \widehat{v_n}\|_2 \leq 1$ and $\Upsilon(\widehat{v_n})^2 \leq 1 + \tau + \varepsilon$, usando (2.66) e o Teorema 2.3.4, concluímos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2r_1\lambda v_n^2}-1)dx \leq C_\tau,$$

e, consequentemente, a convergência (2.65) acontece. Neste ponto, desde que $f^2(s)$ é estritamente convexa temos que Υ^2 também o é, e portanto

$$\frac{1}{2}\Upsilon^2(v)-\frac{1}{2}\Upsilon^2(v_n)\geq\frac{1}{2}(\Upsilon^2)'(v_n)(v-v_n),$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v)dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx\\ &\geq I'(v_n)(v-v_n)+\int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)h(f(v_n))f'(v_n)(v_n-v)dx.\end{aligned}$$

Daí, pela estimativa (2.65) e desde que $\|I'(v_n)\|\to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2dx+&\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v)dx\\ &\geq\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx+\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx\right].\end{aligned}\tag{2.67}$$

Por outro lado, o Lema de Fatou nos garante que

$$\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v)dx\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}V(|x|)f^2(v_n)dx.\tag{2.68}$$

Além disso, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2dx\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v_n|^2dx.$$

Para verificar isto, definimos o espaço de Hilbert

$$Y_Q=\left\{u\in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2);\ \int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)u^2dx<\infty\right\},$$

munido com o produto interno

$$\langle u,v\rangle_{Y_Q}=\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla u\nabla v+Q(|x|)uv]dx$$

e a sua respectiva norma

$$\|v\|_{Y_Q}=\left(\int_{\mathbb{R}^2}[|\nabla u|^2+Q(|x|)u^2]dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a imersão contínua de E_2 em $L^2(\mathbb{R}^2,Q)$, verificamos que E_2 está imerso continuamente em Y_Q. Daí, uma vez que (v_n) é limitada em E_2, segue que (v_n) é limitada em Y_Q. Então, existe $w \in Y_Q$ tal que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup w$ em Y_Q e, pela imersão contínua de Y_Q em $L^2(\mathbb{R}^2, Q)$, temos $v_n \rightharpoonup w$ em $L^2(\mathbb{R}^2, Q)$. Além disso, já observamos que $v_n \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^2, Q)$, em particular, $v_n \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathbb{R}^2, Q)$. Assim, pela unicidade do limite fraco, $v = w$. Como o funcional $\Phi(v) := \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx$ é convexo e contínuo em Y_Q então é fracamente semicontínua inferiormente, donde concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx. \tag{2.69}$$

Assim de (2.67), (2.68) e (2.69), a menos de subsequência, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v_n) dx = \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(v) dx.$$

Usando novamente o item 3) do Lema 2.2.1, temos

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|) f^2(\xi(v_n - v))\, dx\right] \to 0.$$

Então, $v_n \to v$ em E_2 e, portanto, a prova está finalizada. ■

Agora, nos resta mostrar que o nível do passo da montanha c_0 está abaixo de $(\mu - 2)/(4\mu)$. Para isto, precisamos da seguinte observação:

Observação 2.6.5 *Se $\varphi \in C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ então para t suficientemente grande temos $J(t\varphi) < 0$. A prova deste fato é análoga ao do item ii) da Proposição 2.6.1 e será omitida.*

Proposição 2.6.6 *Suponha que a condição (h_4) seja satisfeita com*

$$\xi > \frac{\mu(3\pi + \|V\|_{L^1(B_2)})^2 + 12\pi(\mu - 2)}{(\mu - 2)\|Q\|_{L^1(B_1)}}.$$

Então, $c_0 < (\mu - 2)/4\mu$.

Demonstração. Seja $\varphi \in C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in B_1$, $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in B_2^c$ e $|\nabla\varphi(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Então, pela Observação 2.6.5, existe $t > 0$ suficientemente grande de modo que $J(t\varphi) < 0$. Denote por $\phi = t\varphi$ e observe que $I(f^{-1}(\phi)) = J(\phi) < 0$, assim usando a condição (h_4), temos

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\le s\le 1} I(\gamma(s)) \le \max_{0\le s\le 1} I(f^{-1}(s\phi)) = \max_{0\le s\le 1} J(s\phi)\\
&= \max_{0\le s\le 1}\left[\frac{s^2}{2}\|\phi\|_Y^2 + s^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi^2|\nabla\phi|^2dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)H(s\phi)dx\right]\\
&\le \max_{0\le s\le 1}\left[\frac{s^2}{2}\|\phi\|_Y^2 + s^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi^2|\nabla\phi|^2dx - \frac{\xi s^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)\phi^4dx\right]\\
&\le \max_{s\ge 0}\left[\frac{s^2}{2}\|\phi\|_Y^2 + \frac{s^4}{4}\left(\xi\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)\phi^4dx - 4\int_{\mathbb{R}^2}\phi^2|\nabla\phi|^2dx\right)\right]\\
&= \frac{\|\phi\|_Y^4}{4\left(\xi\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)\phi^4dx - 4\int_{\mathbb{R}^2}\phi^2|\nabla\phi|^2dx\right)}
\end{aligned}
$$

Usando a definção de ϕ e a hipótese em ξ, obtemos

$$
\begin{aligned}
c_0 &\le \frac{\|\varphi\|_Y^4}{4\left(\xi\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)\varphi^4dx - 4\int_{\mathbb{R}^2}\varphi^2|\nabla\varphi|^2dx\right)}\\
&= \frac{\left(\int_{B_2\setminus B_1}|\nabla\varphi|^2dx + \int_{B_2} V(|x|)f^2(\varphi)dx\right)^2}{4\left(\xi\int_{B_2} Q(|x|)\varphi^4dx - 4\int_{B_2\setminus B_1}\varphi^2|\nabla\varphi|^2dx\right)}\\
&\le \frac{\left(\int_{B_2\setminus B_1}|\nabla\varphi|^2dx + \int_{B_2} V(|x|)f^2(\varphi)dx\right)^2}{4\left(\xi\int_{B_1} Q(|x|)dx - 4\int_{B_2\setminus B_1}\varphi^2|\nabla\varphi|^2dx\right)}\\
&\le \frac{\left(3\pi + \|V\|_{L^1(B_2)}\right)^2}{4(\xi\|Q\|_{L^1(B_1)} - 12\pi)}\\
&< \frac{\mu-2}{4\mu},
\end{aligned}
$$

e a prova da proposição segue. ∎

Logo, pelo Teorema 1.4.1, existe $v\in E_2$ tal que $I(v)=c_0$ e $I'(v)=0$, ou seja, v é um ponto crítico não-nulo de I e, portanto, $u=f(v)$ é uma solução fraca não nula de (P_2). A prova que $u\ge 0$ em $\mathbb{R}^2$ segue os mesmos argumentos do Capítulo 1. Assim, finalizamos a prova do resultado principal deste capítulo.

Capítulo 3

Equações quaselineares com potenciais singulares ou se anulando no infinito envolvendo um parâmetro positivo

O principal objetivo deste capítulo consiste em estabelecer um resultado de existência de solução fraca não nula e não negativa para (P) com $\epsilon = -\kappa/2$, $\kappa > 0$ e $N \geq 3$, isto é, vamos estudar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u + \dfrac{\kappa}{2}[\Delta(u^2)]u = Q(|x|)h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{P_3}$$

Aqui, assumimos os potenciais V e Q satisfazendo as seguintes condições:

(V_3) $V : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $V(r) \geq 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $a > -2(N-1)$ e $a_0 \geq -2$ tais que

$$0 < \liminf_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} < \infty \quad \text{e}$$

$$0 < \liminf_{r\to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} \leq \limsup_{r\to +\infty} \frac{V(r)}{r^{a}} < \infty;$$

(Q_3) $Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínuo, $Q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e existem constantes $b \in \mathbb{R}$ e $b_0 > -2$ com

i) $b = a < b_0$ se $a < -2$;

ii) $b \leq a$ e $b_0 > b$ se $a \geq -2$

satisfazendo os limites

$$0 < \liminf_{r \to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} \leq \limsup_{r \to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} < \infty.$$

Observe que as condições (V_3) e (Q_3), descritas acima, possibilita que os potenciais V e Q sejam singulares na origem ou se anulem no infinito.

Exemplo 3.0.7 *Sejam $V, Q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dados por*

$$V(r) = 4r^{-1} \quad e \quad Q(r) = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{2}}{2} r^{-\frac{1}{2}}, & se\ 0 < r \leq 2 \\ 3r^{-1}, & se\ r > 2. \end{cases}$$

Note que V e Q são singulares na origem, se anulam no infinito e satisfazem as condições (V_3) e (Q_3), respectivamente.

A fim de introduzir as hipóteses sobre a não linearidade h, considere o número

$$\beta := \frac{2(N + b_0)}{N - 2}.$$

Desde que $b_0 > -2$ temos que $\beta > 2$. Além disso, note que $\beta \geq 2^*$ se $b_0 \geq 0$ e $\beta < 2^*$ se $b_0 < 0$. Aqui, assumimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e satisfazendo as seguintes hipóteses:

(h_1) $h(s) = o(s)$, quando $s \to 0$;

(h_2) Existem $p \in (2, \beta)$ e $C_1 > 0$ tais que

$$|h(s)| \leq C_1(1 + |s|^{p-1}), \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

(h_3) Existe $\mu > 2$ tal que $s \geq 0$,

$$0 \leq \mu H(s) := \mu \int_0^s h(t)dt \leq sh(s), \forall s \geq 0.$$

De forma similar ao Capítulo 1, uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (P_3) se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e vale a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 - \kappa u^2) \nabla u \nabla \phi \, dx - \kappa \int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla u|^2 \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} [Q(|x|)h(u) - V(|x|)u] \phi \, dx, \quad (3.1)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observe que a função identicamente nula é uma solução para (P_3). Logo, nosso interesse consiste na obtenção de solução não nula. Para apresentarmos o principal resultado deste capítulo, introduzimos, como antes, os espaços em que trabalhamos. Para todo $1 \leq q < \infty$, definimos o espaço de Lebesgue com o peso Q por

$$L^q(\mathbb{R}^N; Q) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^q\, dx < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|u\|_{q,Q} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^q\, dx \right)^{1/q}.$$

Também definimos os espaços de Hilbert

$$X = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < \infty \right\}$$

e

$$\begin{aligned} X_{rad} &= \{u \in X : u(x) = u(gx)\ \forall g \in O(N)\} \\ &= \left\{ u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < \infty \right\}, \end{aligned}$$

munidos com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(|x|)uv) dx$$

e a correspondente norma

$$\|u\|_X = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De posse das condições sobre os potenciais V e Q e sobre a não linearidade h, enunciamos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.0.8 *Suponha que as condições (V_3), (Q_3) e $(h_1) - (h_3)$ são satisfeitas. Então, existe $\kappa_0 > 0$ tal que se $0 < \kappa < \kappa_0$ o problema (P_3) tem uma solução fraca não nula e não negativa $u \in X_{rad}$.*

Como nos capítulos anteriores, não podemos aplicar diretamente métodos variacionais ao problema (P_3), pois o funcional energia associado ao problema (P_3), dado por

$$J_\kappa(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \kappa u^2)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(u) dx, \qquad (3.2)$$

não está bem definido nos espaços de Sobolev usuais. Note que soluções fracas de (P_3) podem ser vistas como pontos críticos do funcional J em um espaço de funções apropriado, pois a derivada formal de Gateaux de J é dada por

$$\begin{aligned} J'_\kappa(u).\phi = & \int_{\mathbb{R}^N} (1-\kappa u^2)\nabla u \nabla \phi \, dx - \kappa \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u\phi \, dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(u)\phi \, dx. \end{aligned}$$

Além disso, outra dificuldade encontrada aqui é que o termo $(1-\kappa u^2)$ pode mudar de sinal e, devido a isto, não podemos usar a mudança de variável introduzida por Colin e Jeanjean, que foi usada nos Capítulos 1 e 2.

Com o objetivo de contornar estas dificuldades, consideramos um problema auxiliar (quaselinear) e observamos que suas soluções fracas, uniformemente limitadas por $1/\sqrt{3\kappa}$, são soluções de (P_3). Posteriormente, através de uma mudança de variável, transformamos o problema auxiliar em um semilinear cujas soluções estão relacionadas com as do problema auxiliar. Usando a versão clássica do Teorema do Passo da Montanha e um argumento do tipo princípio de criticalidade simétrica, mostramos a existência de uma solução fraca não nula e não negativa v_κ para o referido problema semilinear, a qual dá origem a uma solução $u_\kappa \in X_{rad}$ do problema auxiliar. Para finalizar, usando o método de iteração de Moser, mostramos que $\|u_\kappa\|_\infty \leq 1/\sqrt{3\kappa}$, de onde concluímos que u_κ é uma solução fraca de (P_3).

3.1 O problema auxiliar

Nesta seção, consideramos o seguinte problema auxiliar:

$$-\mathrm{div}\left(g^2(u)\nabla u\right) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(|x|)u = Q(|x|)h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{3.3}$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{1-\kappa t^2}, & \text{se} \quad 0 \leq t < 1/\sqrt{3\kappa} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2\kappa}}\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}, & \text{se} \quad t \geq 1/\sqrt{3\kappa} \\ g(-t), & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Através de cálculos simples é possível mostrar que g é uma função de classe C^1. Além disso, g é par, $1/\sqrt{6} \leq g(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, +\infty)$.

Definindo $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $G(s) = \int_0^s g(t)dt$, observamos que G é uma função crescente e, portanto, invertível com inversa denotada por G^{-1}. Além disso, G e G^{-1} são funções de classe C^2 e G^{-1} é uma função ímpar. O próximo lema apresenta algumas propriedades das funções g e G^{-1}. A prova deste lema pode ser encontrada em [6].

Lema 3.1.1 *As funções g e G^{-1} satisfazem as seguintes propiedades:*

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{G^{-1}(t)}{t} = 1$;

(2) $\displaystyle\lim_{t\to \infty} \frac{G^{-1}(t)}{t} = \sqrt{6}$;

(3) $t \leq G^{-1}(t) \leq \sqrt{6}t,\ \forall\ t \geq 0$;

(4) $-\dfrac{1}{2} \leq t\dfrac{g'(t)}{g(t)} \leq 0,\ \forall\ t \geq 0$.

Definição 3.1.2 *Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (3.3) se $u \in X$ e vale a igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^2(u)\nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(u)g'(u)|\nabla u|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(u)\varphi dx$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Associado ao problema (3.3), temos o seguinte funcional energia

$$I_\kappa(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} g^2(u)|\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(u)\, dx. \tag{3.4}$$

Proposição 3.1.3 *Seja u uma solução fraca de (3.3) satisfazendo $\|u\|_\infty \leq 1/\sqrt{3\kappa}$. Então, u é uma solução fraca de (P_3).*

Demonstração. Desde que $|u(x)| \leq 1/\sqrt{3\kappa}$, para quase todo ponto de $x \in \mathbb{R}^N$, usando a definição de g, temos

$$g(u) = \sqrt{1-\kappa u^2} \quad \text{e} \quad g'(u) = \frac{-\kappa u}{\sqrt{1-\kappa u^2}}. \tag{3.5}$$

Usando (3.5) e o fato de u ser uma solução fraca de (3.3), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1-\kappa u^2)\nabla u \nabla \varphi dx - \kappa \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)h(u)\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Logo, u é uma solução fraca de (P_3). ∎

A fim de encontrar uma solução fraca de (3.3), consideramos a mudança de variável $u = G^{-1}(v)$. Assim, obtemos um novo funcional $L_\kappa(v) = I_\kappa(G^{-1}(v))$, ou seja,

$$\begin{aligned} L_\kappa(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} g^2(G^{-1}(v))|\nabla G^{-1}(v)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|G^{-1}(v)|^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(G^{-1}(v))dx \qquad (3.6) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|G^{-1}(v)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(G^{-1}(v))dx. \end{aligned}$$

Objetivando mostrar que L_κ possui um ponto crítico não nulo, demonstramos um resultado de imersão de X_{rad} em alguns espaços de Lebesgue com peso Q. Para isto, necessitamos de dois resultados preliminares. O primeiro é o Lema 1.1.4 do Capítulo 1 e o outro é o seguinte lema radial para funções de X_{rad}:

Lema 3.1.4 *Suponha que (V_1) seja válida. Então, existem $C > 0$ e $R_0 > 0$ tais que que para todo $u \in X_{rad}$,*

$$|u(x)| \le C\|u\|_X |x|^{-\frac{2(N-1)+a}{4}}, \quad \textit{para todo } |x| \ge R_0.$$

Demonstração. Veja, por exemplo, [47, 44]. ∎

Proposição 3.1.5 *Suponha que as condições (V_3) e (Q_3) sejam válidas. Então, a imersão $X_{rad} \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N; Q)$ é contínua para todo $2 \le q \le \beta$. Além disso, a imersão $X_{rad} \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N; Q)$ é compacta para todo $2 < q < \beta$.*

Demonstração. Seja $2 \le q \le \beta$. Observe que para mostrar a continuidade da imersão de X_{rad} em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$, é suficiente provar que $S_q > 0$, onde

$$S_q = \inf_{u \in X_{rad},\ u \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2)dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^q dx\right)^{\frac{2}{q}}}.$$

Suponha, por contradição, que $S_q = 0$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subset X_{rad} \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + V(|x|)u_n^2)dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u_n|^q dx\right)^{\frac{2}{q}}} \to S_q = 0.$$

Além do mais, podemos assumir que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(|x|)u_n^2)dx \to 0 \quad \text{e} \\ &\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u_n|^q dx = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Agora, pela condição (Q_3), dado $r_0 > 0$ existe $M > 0$ tal que $Q(r) \leq Mr^{b_0}$ para todo $0 < r \leq r_0$ e, como $2 \leq q \leq \beta$, existe também $-2 \leq c \leq b_0$ satisfazendo $q = 2(N+c)/(N-2)$. Assim, pelo Lema 1.1.4, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}} Q(|x|)|u_n|^q dx &\leq M \int_{B_{r_0}} |x|^{b_0}|u_n|^q dx \\ &= M \int_{B_{r_0}} |x|^{b_0-c}|x|^c|u_n|^{\frac{2(N+c)}{N-2}} dx \\ &\leq M r_0^{b_0-c} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^c|u_n|^{\frac{2(N+c)}{N-2}} dx \\ &\leq M r_0^{b_0-c} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por outro lado, usando a condição (Q_3) mais uma vez, existe $M_1 > 0$ tal que $Q(r) \leq M_1 r^b$, para todo $r > r_0$. Daí,

$$\int_{B_{r_0}^c} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq M_1 \int_{B_{r_0}^c} |x|^b|u_n|^q dx. \tag{3.9}$$

Da condição (V_3), existe $M_2 > 0$ tal que $M_2 r^a \leq V(r)$ para todo $r > r_0$. Deste modo, usando que $b \leq a$, a estimativa (3.9) e o Lema 3.1.4, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}^c} Q(|x|)|u_n|^q dx &\leq M_1 \int_{B_{r_0}^c} |x|^{b-a}|x|^a|u_n|^{q-2}|u_n|^2 dx \\ &\leq C\frac{M_1}{M_2} r_0^{b-a}\|u_n\|^{q-2} r_0^{-\frac{2(N-1)+a}{4}(q-2)} \int_{B_{r_0}^c} M_2|x|^a|u_n|^2 dx \\ &\leq C r_0^{b-a} r_0^{-\frac{2(N-1)+a}{4}(q-2)} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u_n|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir das estimativas (3.7), (3.8) e (3.10) obtemos

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u_n|^2 dx \to 0,$$

gerando, assim, um absurdo. Portanto, $S_q > 0$ e com isto concluímos que X_{rad} está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$, para todo $2 \leq q \leq \beta$.

Agora, provemos a compacidade da imersão de X_{rad} em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$, para todo $2 < q < \beta$. Seja (u_n) uma sequência limitada em X_{rad}. Assim, existe $u \in X_{rad}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X_{rad} e, sem perda de generalidade, podemos supor que $u = 0$. Sejam $0 < R_1 < R_2$. Da mesma maneira que obtivemos as estimativas (3.8) e (3.10), segue que

$$\int_{B_{R_1}} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq M R_1^{b_0-c}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}, \quad \text{com } -2 \leq c < b_0, \text{ e}$$
$$\int_{B^c_{R_2}} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq C R_2^{b-a} R_2^{-\frac{2(N-1)+a}{4}(q-2)} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u_n|^2 dx.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher R_1 suficientemente pequeno e R_2 suficientemente grande de modo que

$$\int_{B_{R_1}} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{B^c_{R_2}} Q(|x|)|u_n|^q dx \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.11}$$

onde $2 < q < \beta$. Para finalizar, usamos a imersão compacta de $H^1_{rad}(B_{R_2}\backslash B_{R_1})$ em $L^q(B_{R_2}\backslash B_{R_1})$ para todo $2 \leq q < \infty$. Com isto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_{R_2}\backslash B_{R_1}} Q(|x|)|u_n|^q dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{3.12}$$

De (3.11) e (3.12), obtemos
$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x)|u_n|^q dx < \varepsilon.$$
Logo, X_{rad} está compactamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$, para todo $2 < q < \beta$. ■

Pelas condições (h_1) e (h_2), temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$|h(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Da esimativa acima em conjunto com os itens 1) e 2) do Lema 3.1.1, temos

$$\begin{aligned} &|H(G^{-1}(s))| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p \quad \text{e} \\ &|G^{-1}(s)h(G^{-1}(s))| \leq \varepsilon|s|^2 + C_\varepsilon|s|^p, \end{aligned} \tag{3.14}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Usando as estimativas (3.14) e a Proposição 3.1.5 podemos provar que o funcional $L_\kappa : X_{rad} \to \mathbb{R}$ está bem definido e é de classe C^1, com derivada dada por

$$L'_\kappa(v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\varphi dx \tag{3.15}$$

para $v, \varphi \in X_{rad}$.

3.2 Pontos críticos de L_κ e solução fracas de (3.3)

Nesta seção, mostramos um resultado que relaciona os pontos críticos de L_κ com as soluções fracas de (3.3). Para isto, como nos capítulos anteriores, precisamos usar argumentos do tipo Princípio de Criticalidade Simétrica. Antes, vamos precisar de alguns lemas auxiliares.

Lema 3.2.1 *Sejam $1 < q < \beta$ e $v \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, suponha que a condição (Q_3) é satisfeita. Então, para todo $r_0 > 0$ existe uma constante $C = C(N, q, b_0, r_0) > 0$ tal que*

$$\left| \int_{B_{r_0}} Q(|x|)|v|^{q-1} w dx \right| \leq C r_0^{\frac{N-2}{2}(\beta - q)} \|\nabla v\|_2^{q-1} \|\nabla w\|_2, \quad \textit{para todo } w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Pela condição (Q_3), existe $C_1 > 0$ tal que

$$Q(|x|) \leq C_1 |x|^{b_0} \quad \text{para todo} \quad 0 < |x| < r_0.$$

Com esta estimativa e usando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_0}} Q(|x|)|v|^{q-1}|w| dx &\leq C \left(\int_{B_{r_0}} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1} b_0} |v|^{(q-1)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_{B_{r_0}} |w|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \\ &\leq C \left(\int_{B_{r_0}} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1} b_0} |v|^{(q-1)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \|\nabla w\|_2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Considerando $q - 2^* < \delta < q - 1$, fazendo uso do Lema 1.1.9, da desigualdade de Hölder, com expoentes $t = (2^* - 1)/(q - 1 - \delta)$ e $t' = (2^* - 1)/(2^* - q + \delta)$, e da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_0}} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1} b_0} |v|^{(q-1)\frac{2^*}{2^*-1}} dx &= \int_{B_{r_0}} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1} b_0} |v|^{\delta \frac{2^*}{2^*-1}} |v|^{(q-1-\delta)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\ &\leq C \|\nabla v\|_2^{\delta \frac{2^*}{2^*-1}} \int_{B_{r_0}} |x|^{\frac{2^*}{2^*-1}\left(b_0 - \delta \frac{N-2}{2}\right)} |v|^{(q-1-\delta)\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\ &\leq C \|\nabla v\|_2^{\delta \frac{2^*}{2^*-1} - \frac{2^*}{t}} \left(\int_{B_{r_0}} |x|^{\frac{2^*}{2^*-q+\delta}\left(b_0 - \delta \frac{N-2}{2}\right)} dx \right)^{\frac{1}{t'}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Desde que

$$\frac{2^*}{2^* - q + \delta} \left(b_0 - \delta \frac{N-2}{2} \right) + N = \frac{N}{2^* - q + \delta} (\beta - q) > 0,$$

temos

$$\int_{B_{r_0}} |x|^{\frac{2^*}{2^*-q+\delta}\left(b_0-\delta\frac{N-2}{2}\right)}dx \leq Cr_0^{\frac{N}{2^*-q+\delta}(\beta-q)}. \tag{3.18}$$

Assim, das estimativas (3.16), (3.17) e (3.18), obtemos

$$\int_{B_{r_0}} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx \leq Cr_0^{\frac{N-2}{2}(\beta-q)}\|\nabla v\|_2^{q-1}\|\nabla w\|_2.$$

■

Lema 3.2.2 *Suponha que* (V_3), (Q_3), $(g_1)-(g_2)$ *são satisfeitas e seja* $v \in X_{rad}$. *Então, existe uma constante* $C = C(N, b_0, \|v\|) > 0$ *tal que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}wdx\right| \leq C\|w\|_X, \quad \textit{para todo } w \in X. \tag{3.19}$$

Demonstração. Considere $0 < \varepsilon < 2(b_0 - b)/(N-2)$ e suficientemente pequeno de forma que $p < q = \beta - \varepsilon < \beta$. Pelo do item (3) do Lema 3.1.1 e usando as hipóteses $(h_1) - (h_2)$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\left|\frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\right||w|dx \leq C_1\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v||w|dx + C_2\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx$$

Para $R \geq 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx = \int_{B_R} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx + \int_{B_R^c} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx \tag{3.20}$$

e usando o Lema 3.2.1,

$$\int_{B_R} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx \leq CR^{-\frac{N-2}{2}\varepsilon}\|\nabla v\|_2^{q-1}\|\nabla w\|_2 \leq C\|\nabla w\|_2. \tag{3.21}$$

Por outro lado, usando a condição (Q_3), o Lema 1.1.9, a desigualdade de Hölder e a imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx \leq C\|\nabla v\|_2^{q-1}\left(\int_{B_R^c}|x|^{\frac{2Nb-N(q-1)(N-2)}{N+2}}dx\right)^{\frac{N+2}{2N}}\|\nabla w\|_2. \tag{3.22}$$

Desde que $0 < \varepsilon < 2(b_0 - b)/(N-2)$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{2Nb - N(q-1)(N-2)}{N+2} + N &= \frac{2Nb - N(\beta-1-\varepsilon)(N-2) + N^2 + 2N}{N+2}\\
&= \frac{2Nb - 2Nb_0 + N(N-2)\varepsilon}{N+2}\\
&= \frac{N[2(b-b_0) + \varepsilon(N-2)]}{N+2}\\
&< \frac{N[2(b-b_0) + 2(b_0-b)]}{N+2}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_{B_R^c} |x|^{\frac{2Nb-N(q-1)(N-2)}{N+2}} dx < +\infty.$$

Retornando à estimativa (3.22), obtemos

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|v|^{q-1}|w|dx \leq C\|\nabla v\|_2^{q-1}\|\nabla w\|_2. \tag{3.23}$$

Além disso, em virtude do Lema 3.2.1 com $q = 2$

$$\int_{B_R} Q(|x|)|v||w|dx \leq CR^{\frac{N-2}{2}(\beta-2)}\|\nabla v\|_2\|w\|_X.$$

Usando que $b \leq a$, a Proposição 3.1.5 e as condições (V_3) e (Q_3), concluímos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q(|x|)|v||w|dx &\leq \left(\int_{B_R^c} Q(|x|)|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R^c} Q(|x|)|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\int_{B_R^c} |x|^b|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\int_{B_R^c} |x|^a|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\int_{B_R^c} V(|x|)|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|w\|_X.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.2.3 *Se $v \in X_{rad}$ então o funcional linear $T_v : X \to \mathbb{R}$, definido por*

$$T_v.w = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla wdx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}wdx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}wdx,$$

é contínuo.

Demonstração. É suficiente mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|T_v.w| \leq C\|w\|_X \quad \text{para todo } w \in X.$$

Note que, pela desigualdade de Hölder e o Lema 3.1.1, temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla wdx\right| \leq \|\nabla v\|_2\|w\|_X \quad \text{e}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}wdx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|v||w|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|w\|_X.$$

Das desigualdades obtidas acima em conjunto com a estimativa (3.19) do Lema 3.2.3, o resultado segue. ■

Finalmente, a próxima proposição relaciona os pontos críticos de L_κ com as soluções fracas do problema (3.3).

Teorema 3.2.4 *Suponha que as condições (V_3) e (Q_3) sejam satisfeitas. Se $v \in X_{rad}$ é um ponto crítico do funcional L_κ, então $u := G^{-1}(v) \in X_{rad}$ e é uma solução fraca de (3.3).*

Demonstração. Desde que $v \in X_{rad}$ é um ponto crítico de L_κ, usando a notação T_v, temos que $T_v w = 0$, para todo $w \in X_{rad}$. Pelo Corolário 3.2.3, vimos que T_v é um funcional linear contínuo em X. Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $\widehat{v} \in X$ tal que

$$T_v \widehat{v} = \|\widehat{v}\|_X^2 = \|T_v\|_{X'}^2. \tag{3.24}$$

Por outro lado, observe que para todo $g \in O(N)$ e todo $w \in X$, temos

$$T_v(g(w)) = T_v(w) \quad e \quad \|g(w)\|_X = \|w\|_X. \tag{3.25}$$

Assim, escolhendo $w = \widehat{v}$ em (3.25) e usando a unicidade da função $\widehat{v}$ satisfazendo (3.24) temos que $g(\widehat{v}) = \widehat{v}$ para todo $g \in O(N)$. Daí, obtemos que $\widehat{v} \in X_{rad}$ e

$$\|T_v\|_{X'}^2 = T_v \widehat{v} = 0.$$

Assim, $T_v \equiv 0$, donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) \frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi \, dx = 0, \tag{3.26}$$

para todo $\varphi \in X$. Agora, desde que $v \in X_{rad}$, $u := G^{-1}(v)$ também pertence, pois pelo item 3) do Lema 3.1.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|G^{-1}(v)|^2 dx \leq 6 \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|v|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \leq 6 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx.$$

Para $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, defina $\varphi = g(G^{-1}(v))\psi$. Pela definição da função g, temos $|\varphi| \leq |\psi|$ e

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| = \left|\frac{g'(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \frac{\partial v}{\partial x_i} \psi + g(G^{-1}(v)) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right| \leq C \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| + C \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|,$$

ou seja, $\varphi \in X$. Logo, podemos tomar φ como função teste em (3.26) e concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v (g'(u) \nabla u \psi + g(u) \nabla \psi) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) \frac{u}{g(u)} g(u) \psi dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) \frac{h(u)}{g(u)} g(u) \psi dx = 0.$$

Como $u = G^{-1}(v)$, observamos que $v = G(u)$ e $\nabla v = g(u)\nabla u$. Desta forma, da última igualdade, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u)^2 \nabla u \nabla \psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(u) g'(u) |\nabla u|^2 \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)[h(u) - V(|x|)u]\psi dx, \quad (3.27)$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, u é uma solução fraca de (3.3) ■

Pelo último resultado e pela Proposição 3.1.3, para obtermos uma solução fraca de (P_3) é suficiente mostrarmos que L_κ possui um ponto crítico u não nulo e não negativo com $\|u\|_\infty = |G^{-1}(v)| \leq 1/\sqrt{3\kappa}$. Isto será feito nas próximas seções.

3.3 Geometria do passo da montanha e a condição de Palais-Smale

Neste capítulo, usamos o Teorema do Passo da Montanha (veja [42]), a seguir, para obtermos um ponto crítico não-nulo para L_κ. Como estamos interessados em soluções não-negativas, vamos supor que $h(s) = 0$ para $s < 0$.

Teorema 3.3.1 *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale com $\Phi(0) = 0$. Suponha ainda que existam $\rho, \sigma > 0$ e $e \in X$ com $\|e\| > \rho$ tais que*

$$\Phi(v) \geq \sigma \text{ para todo } v \in X \text{ com } \|v\| = \rho \quad e \quad \Phi(e) \leq 0.$$

Então,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \sigma$$

e c é um valor crítico de Φ, onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Lema 3.3.2 (Geometria do passo da montanha) *Se as condições (V_3), (Q_3) e $(h_1) - (h_3)$ são satisfeitas, então*

(i) Existem $\rho, \sigma > 0$ tais que $L_\kappa(v) \geq \sigma$ para todo $v \in X_{rad}$ com $\|v\|_X = \rho$;

(ii) Existe $e \in X_{rad}$ com $\|e\|_X > \rho$ tal que $L_\kappa(e) < 0$.

Demonstração. Pelo item (3) do Lema 3.1.1 em conjunto com a Proposição 3.14 e (3.13), para cada $v \in X_{rad}$, temos

$$\begin{aligned}
L_\kappa(v) &\geq \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + V(|x|)|v|^2 dx\right] - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v|^2 dx - \frac{C_\varepsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v|^p dx \\
&= \frac{1}{2}\|v\|_X^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_{2,Q}^2 - \frac{C_\varepsilon}{p}\|v\|_{p,Q}^p \\
&\geq \frac{1}{2}\|v\|_X^2 - \varepsilon C_1\|v\|_X^2 - C_\varepsilon\|v\|_X^p.
\end{aligned}$$

Desde que $p > 2$, segue que $L_\kappa(v) \geq \sigma > 0$ para $\varepsilon > 0$ e $\|v\| = \rho$ suficientemente pequeno, e a prova do item (i) está finalizada.

Agora, considere $v_0 \in X_{rad}$ com $0 < v_0(x) < 1$ se $x \in B_2 \backslash B_1$ e $v_0(x) = 0$ caso contrário. Assim, para $t > 0$, usando a condição (h_3) e o Lema 3.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
L_\kappa(tv_0) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|G^{-1}(tv_0)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(G^{-1}(tv_0))dx \\
&\leq \frac{7}{2}t^2\|v_0\|_X^2 - C_1\int_{B_2\backslash B_1} Q(|x|)|G^{-1}(tv_0)|^\mu dx + C_2\int_{B_2\backslash B_1} Q(|x|)dx \\
&\leq C_3 t^2 - C_4 t^\mu + C_5,
\end{aligned}$$

onde usamos que $H(t) \geq C_1 t^\mu - C_2$ para todo $t \geq 0$. Uma vez que $\mu > 2$, para t suficientemente grande, segue que $L_\kappa(tv_0) < 0$ e tomando $e := tv_0$ concluímos a prova do item (ii). ■

Como nos capítulos anteriores, também é possível obter o seguinte resultado:

Proposição 3.3.3 *X_{rad} está imerso continuamente em $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^N)$ é denso em X_{rad}.*

A fim de demonstrar que o funcional L_κ satisfaz a condição de Palais-Smale, mostremos, primeiramente, que toda sequência de Palais-Smale para L_κ é limitada.

Lema 3.3.4 *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(v_n) \subset X_{rad}$ uma sequência de Palais-Smale L_κ no nível c. Então, (v_n) é limitada em X_{rad}.*

Demonstração. Considere $(v_n) \subset X_{rad}$ uma sequência de Palais-Smale para L_κ no nível c, isto é,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(|x|)|G^{-1}(v_n)|^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(G^{-1}(v_n))dx = c + o_n(1) \quad \text{e}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \psi dx + &\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \psi dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) \frac{h(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} \psi dx = o_n(1)\|\psi\|_X,
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

para todo $\psi \in X_{rad}$. Definindo $\psi_n := G^{-1}(v_n)g(G^{-1}(v_n))$, temos

$$
\nabla \psi_n = \left(1 + G^{-1}(v_n)\frac{g'(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))}\right) \nabla v_n.
$$

Assim, tomando $\psi = \psi_n$ em (3.28), usando (h_3) e o Lema 3.1.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
o_n(1) + \mu c + o_n(1)\|\psi_n\|_X &= \mu L_\kappa(v_n) - L'_\kappa(v_n)\psi_n \\
&\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|G^{-1}(v_n)|^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)[h(G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n) - \mu H(G^{-1}(v_n))] dx \\
&\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \|v_n\|_X^2.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|\psi_n\|_X^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + G^{-1}(v_n)\frac{g'(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))}\right)^2 |\nabla v_n|^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|G^{-1}(v_n)|^2 |g(G^{-1}(v_n))|^2 dx \\
&\leq 6\|v_n\|_X^2.
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

Então, das estimativas (3.29) e (3.30), segue que

$$
\left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \|v_n\|_X^2 \leq \mu c + o_n(1) + \sqrt{6}\|v_n\|_X.
$$

e isto implica que devemos ter (v_n) limitada em X_{rad}. ■

Teorema 3.3.5 (Condição de Palais-Smale) *Suponha que as condições (V_3) and (Q_3) sejam satisfeitas. Então, o funcional L_κ satisfaz a condição de Palais-Smale em qualquer nível c.*

Demonstração. Seja $(v_n) \subset X_{rad}$ uma sequência de Palais-Smale para L_κ em $c \in \mathbb{R}$, isto é,

$$
L_\kappa(v_n) \to c \quad \text{e} \quad \|L'_\kappa(v_n)\| \to 0.
$$

Em consequência do Lema 3.3.4, temos que (v_n) é limitada em X_{rad}. Assim, existe $v \in X_{rad}$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em X_{rad}. Daí, pela Proposição 3.1.5, a menos de subsequência,

$v_n \to v$ em $L^q(\mathbb{R}^N, Q)$ para todo $2 < q < \beta$. Em particular, $v_n \to v$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= L'_\kappa(v_n).(v_n - v) - L'_\kappa(v).(v_n - v) \\ &= \|\nabla v_n - \nabla v\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\left[\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\right](v_n - v)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\left[\frac{h(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\right](v_n - v)dx \end{aligned} \tag{3.31}$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ satisfazendo (3.14). Daí, usando a desigualdade de Hölder, a imersão contínua de X_{rad} em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e a compacidade da imersão de X_{rad} em $L^p(\mathbb{R}^N, Q)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\frac{h(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))}(v_n - v)dx\right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n||v_n - v|dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{p-1}|v_n - v|dx \\ &\leq \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n - v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ C_\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n - v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\frac{h(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))}(v_n - v)dx \to 0. \tag{3.32}$$

De maneira similar, prova-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}(v_n - v)dx \to 0. \tag{3.33}$$

Das estimativas (3.32) e (3.33), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\left[\frac{h(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\right](v_n - v)dx \to 0. \tag{3.34}$$

Por outro lado, definindo $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\psi(t) = G^{-1}(t)/g(G^{-1}(t))$, usando o item 4) do Lema 3.1.1 e o fato de $1/\sqrt{6} \leq g(s) \leq 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{1}{g(G^{-1}(t))}\left[1 - \frac{G^{-1}(t)g'(G^{-1}(t))}{g(G^{-1}(t))}\right] \\ &\geq \frac{1}{g(G^{-1}(t))} \geq 1, \quad \text{para todo } t \geq 0. \end{aligned}$$

Observando que ψ' é uma função par, segue que $\psi'(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, pelo teorema do valor médio, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função ξ_n entre v_n e v_κ satisfazendo

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\left[\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\right](v_n - v)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\psi'(\xi_n)|v_n - v|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|v_n - v|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Das estimativas (3.31), (3.34) e (3.35), obtemos

$$o_n(1) \geq \|\nabla v_n - \nabla v\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|v_n - v|^2 dx + o_n(1)$$

e isto implica que $\|v_n - v\|_X^2 \to 0$. Portanto, $v_n \to v$ em X_{rad} e o resultado está provado.

■

3.4 Prova do Teorema 3.0.8

Nesta seção, vamos provar o resultado principal deste capítulo. De acordo com os resultados da última seção, usando o Teorema 3.3.1, existe $v_\kappa \in X_{rad}$ tal que

$$L_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa \quad \text{e} \quad L'_\kappa(v_\kappa)\varphi = 0, \quad \text{para todo } \varphi \in X_{rad}.$$

Desde que $c_\kappa > 0$, segue que $v_\kappa \neq 0$. Daí, tomando $\varphi = -v_\kappa^-$, onde $v_\kappa^- = \max\{-v_\kappa, 0\}$, como função teste acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\kappa^-|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\frac{G^{-1}(-v_\kappa^-)}{g(G^{-1}(-v_\kappa^-))}(-v_\kappa^-)\, dx = 0.$$

Observando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\frac{G^{-1}(-v_\kappa^-)}{g(G^{-1}(-v_\kappa^-))}(-v_\kappa^-)\, dx \geq 0,$$

devemos ter $v_\kappa^- \equiv 0$. Portanto, $v_\kappa = v_\kappa^+ \geq 0$. Logo, pelo Teorema 3.2.4, v_κ é uma solução fraca não nula e não negativa do problema (3.3).

Para assegurar que $u_\kappa = G^{-1}(v_\kappa)$ é uma solução fraca não nula e não negativa para (P_3), resta-nos mostrar que v_κ pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que $\|u_\kappa\|_\infty \leq 1/\sqrt{3\kappa}$. Para isto, vamos usar o método de iteração de Moser. Antes disso, precisaremos provar uma limitação uniforme das normas $\|v_\kappa\|_X$, que será necessário em nosso argumento final.

Lema 3.4.1 *Seja $v_\kappa \in X_{rad}$ um ponto crítico de L_κ tal que $L_\kappa(v_\kappa) = c_\kappa$. Então, existe $d > 0$, independente de κ, tal que*

$$\|v_\kappa\|_X \leq d, \quad \textit{para todo } \kappa > 0.$$

Demonstração. Pelas condições (3) e (4) do Lema 3.1.1, $G^{-1}(v_\kappa)g'(G^{-1}(v_\kappa)) \leq 0$. Logo, usando (h_3), obtemos

$$\mu c_\kappa = \mu L_\kappa(v_\kappa) - L'_\kappa(v_\kappa)G^{-1}(v_\kappa)g(G^{-1}(v_\kappa)) \geq \frac{\mu-2}{2}\|v_\kappa\|_X^2,$$

de onde concluímos que

$$\|v_\kappa\|_X^2 \leq \frac{2\mu c_\kappa}{\mu - 2}. \tag{3.36}$$

Agora, definamos o funcional $L_0 : X_{rad} \to \mathbb{R}$ por

$$L_0(v) = 3\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2 + V(|x|)v^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)H(v)dx,$$

Analogamente a L_κ, o funcional L_0 é de classe C^1 em X_{rad} e também possui a geometria do passo da montanha. Assim, o conjunto

$$\Gamma_0 := \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \text{ e } L_0(\gamma(1)) < 0\}.$$

é não vazio e

$$0 < c_0 := \inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{0\leq t\leq 1} L_0(\gamma(t)).$$

Além disso, do Lema 3.1.1 e da hipótese (h_3), segue que

$$\begin{aligned} L_\kappa(v) &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}6V(|x|)|v|^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}Q(|x|)H(v)dx \\ &\leq 3\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2 + V(|x|)v^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N}Q(|x|)H(v)dx \\ &= L_0(v) \end{aligned} \tag{3.37}$$

para todo $v \in X_{rad}$. Considerando $\gamma \in \Gamma_0$ e $e = \gamma(1)$ com $L_0(e) < 0$, por (3.37) segue que $\gamma \in \Gamma_\kappa$, isto é, $\Gamma_0 \subset \Gamma_\kappa$ e

$$c_\kappa = \inf_{\gamma\in\Gamma_\kappa}\max_{0\leq t\leq 1} L_\kappa(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{0\leq t\leq 1} L_\kappa(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{0\leq t\leq 1} L_0(\gamma(t)) = c_0 \tag{3.38}$$

e c_0 não depende de κ. Daí, por (3.36) e considerando $d := [2\mu c_0/(\mu-2)]^{1/2} > 0$, o lema está provado. ■

Proposição 3.4.2 *Suponha que $v \in X_{rad}$ é um ponto crítico não negativo de L_κ, $\tau \in (p, \beta)$, $\sigma_1 = \tau/(\tau - p + 2)$ e $\sigma = p/(2\sigma_1)$. Então, $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e existem constantes $C_1, C_2 > 0$, independentes de v, tais que*

$$\|v\|_\infty \leq [C_1 + C_2\|v\|_X^{\frac{(p-2)\sigma}{2(\sigma-1)}}]\|v\|_X.$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $q \geq 2$, definamos

$$A_m = \left\{x \in \mathbb{R}^N; v(x)^{q-1} \leq m\right\}, \quad D_m = \mathbb{R}^N \backslash A_m \quad \text{e}$$

$$w_m = \begin{cases} v^{2q-1}, & \text{em} \quad A_m \\ m^2 v, & \text{em} \quad D_m. \end{cases}$$

Observe que $w_m \in X_{rad}$, $w_m(x) \leq v(x)^{2q-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\nabla w_m = \begin{cases} (2q-1)v^{2(q-1)}\nabla v, & \text{em} \quad A_m \\ m^2 \nabla v, & \text{em} \quad D_m. \end{cases}$$

Pelas condições (h_1) e (h_2), para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$|h(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon |s|^{p-1} \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Desde que $L'_\kappa(v).w_m = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} w_m dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)\frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} w_m dx, \tag{3.40}$$

usando o item (3) do Lema 3.1.1, o fato que $1/\sqrt{6} \leq g(s) \leq 1$ e as estimativas (3.39) e (3.40), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla v \nabla w_m + V(|x|) v w_m] dx \leq \varepsilon \int_{B_1} Q(|x|) v w_m dx + \varepsilon \int_{B_1^c} Q(|x|) v w_m dx \\ + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) v^{p-1} w_m dx \end{aligned} \tag{3.41}$$

Pelas hipóteses (V_3) e (Q_3), existem $C_1, C_2 > 0$ tais que $Q(|x|) \leq C_1 |x|^b$ e $C_2|x|^a \leq V(|x|)$ sempre que $|x| > 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{B_1^c} Q(|x|) v w_m dx &\leq \varepsilon \int_{B_1^c} C_1 |x|^b v w_m dx \\ &= \varepsilon \frac{C_1}{C_2} \int_{B_1^c} C_2 |x|^a v w_m dx \\ &\leq \varepsilon \frac{C_1}{C_2} \int_{B_1^c} V(|x|) v w_m dx \\ &\leq \varepsilon \frac{C_1}{C_2} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) v w_m dx. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Daí, escolhendo $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon(C_1/C_2) < 1/2$ e retornando a (3.41) com a estimativa (3.42), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) v w_m dx \leq \varepsilon \int_{B_1} Q(|x|) v w_m dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) v^{p-1} w_m dx$$

e isto implica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) v w_m dx \leq 2\varepsilon \int_{B_1} Q(|x|) v w_m dx \\ + 2C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) v^{p-1} w_m dx.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Agora, definindo a função

$$z_m = \begin{cases} v^q; & \text{em} \quad A_m \\ mv; & \text{em} \quad D_m, \end{cases}$$

temos

$$\nabla z_m = \begin{cases} qv^{q-1}\nabla v; & \text{em} \quad A_m \\ m\nabla v; & \text{em} \quad D_m. \end{cases}$$

Daí, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^2 dx = q^2 \int_{A_m} v^{2(q-1)} |\nabla v|^2 dx + m^2 \int_{D_m} |\nabla v|^2 dx \quad \text{e}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx = (2q-1) \int_{A_m} v^{2(q-1)} |\nabla v|^2 dx + m^2 \int_{D_m} |\nabla v|^2 dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx = (q-1)^2 \int_{A_m} v^{2(q-1)} |\nabla v|^2 dx$$

De onde obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^2 dx = (q-1)^2 \int_{A_m} v^{2(q-1)} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx. \tag{3.44}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx \geq (2q-1) \int_{A_m} |v|^{2(q-1)} |\nabla v|^2 dx. \tag{3.45}$$

Das desigualdades (3.44) e (3.45), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_m|^2 dx \leq \frac{q^2}{2q-1} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx \leq q^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx. \tag{3.46}$$

Deste modo, usando as estimativas (3.43), (3.46) e observando que $z_m^2 = v w_m$, obtemos

$$\begin{aligned}\|z_m\|_X^2 &\leq q^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w_m dx + q^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) v w_m dx \\ &\leq 2\varepsilon q^2 \int_{B_1} Q(|x|) z_m^2 dx + 2C_\varepsilon q^2 \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|) |v|^{p-2} z_m^2 dx.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Seja $s := \tau/(p-2)$ então $(p-2)s = \tau \in (p,\beta)$ e, através de um cálculo simples observamos também que $1/s + 1/\sigma_1 = 1$. Logo,

$$\frac{p}{p-2} < s < \frac{\beta}{p-2} \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{\beta - p + 2} < \sigma_1 < \frac{p}{2}.$$

Então, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|z_m|^2|v|^{p-2}dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v|^{(p-2)s}dx\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|z_m|^{2\sigma_1}dx\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \\ &= \|v\|_{\tau,Q}^{p-2}\|z_m\|_{2\sigma_1,Q}^2.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Uma vez que $z_m \in X_{rad}$ e $2 < 2\sigma_1$, pelo Lema 1.3.6, temos

$$\int_{B_1} Q(|x|)z_m^2 dx \leq C\left(\int_{B_1} Q(|x|)z_m^{2\sigma_1}dx\right)^{\frac{2}{2\sigma_1}} = C\|z_m\|_{2\sigma_1,Q}^2. \tag{3.49}$$

A partir das estimativas (3.47), (3.48), (3.49) e da Proposição 3.1.5, obtemos

$$\left(\int_{A_m} Q(|x|)|z_m|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq CS_p q^2(1 + S_\tau\|v\|_X^{p-2})\|z_m\|_{2\sigma_1,Q}^2,$$

onde S_l é a constante da imersão contínua de X_{rad} em $L^l(\mathbb{R}^N, Q)$, para todo $2 \leq l \leq \beta$. Usando a definição de z_m na última desigualdade e notando que $z_m^2 \leq v^{2q}$, segue que

$$\left(\int_{A_m} Q(|x|)v^{pq}dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq CS_p q^2(1 + S_\tau\|v\|_X^{p-2})\|v\|_{2q\sigma_1,Q}^{2q}. \tag{3.50}$$

Fazendo $m \to \infty$ em (3.50), concluímos

$$\|v\|_{qp,Q} \leq (CS_p)^{\frac{1}{2q}} q^{\frac{1}{q}}(1 + S_\tau\|v\|_X^{p-2})^{\frac{1}{2q}}\|v\|_{2q\sigma_1,Q}. \tag{3.51}$$

Escolhendo $\sigma = p/2\sigma_1$ temos que $\sigma > 1$ e tomando $q = \sigma$ em (3.51) verificamos que

$$\|v\|_{p\sigma,Q} < (CS_p)^{\frac{1}{2\sigma}}(\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}(1 + S_\tau\|v\|_X^{p-2})^{\frac{1}{2\sigma}}\|v\|_{p,Q}. \tag{3.52}$$

Agora, escolhendo $q = \sigma^2$ em (3.51), pela desigualdade (3.52) temos

$$\begin{aligned}\|v\|_{p\sigma^2,Q} &< (CS_p)^{\frac{1}{2\sigma^2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{\sigma^2}}(1 + S_\tau\|v\|_X^{p-2})^{\frac{1}{2\sigma^2}}\|v\|_{2\sigma_1\sigma^2,Q} \\ &\leq (CS_p)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2})}(\sigma)^{(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2})}(1 + S_\tau\|v\|_X^{p-2})^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma})}\|v\|_{p,Q}.\end{aligned}$$

Continuando indutivamente com este procedimento, para cada $j \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|v\|_{p\sigma^j,Q} \leq (CS_p)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\ldots+\frac{1}{\sigma^j})}(\sigma)^{(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}+\ldots+\frac{j}{\sigma^j})}(1 + S_\tau\|v\|_X^{p-2})^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\ldots+\frac{1}{\sigma^j})}\|v\|_{p,Q}.$$

Desde que $\sigma^j \to \infty$ quando $j \to \infty$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^j} = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\sigma^j} = \frac{1}{(\sigma-1)^2},$$

usando interpolação, podemos concluir

$$\|v\|_{r,Q} \leq (CS_p)^{\frac{1}{2}(\frac{\sigma}{\sigma-1})} \sigma^{\frac{1}{(\sigma-1)^2}} (1 + S_\tau \|v\|_X^{p-2})^{\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}} \|v\|_{p,Q}, \tag{3.53}$$

para todo $r > \beta$. Sejam $r > \beta$ e $R_0 > 0$ dado pelo Lema 3.1.4. Pela hipótese (Q_1), existe $C_1 > 0$ tal que $C_1|x|^{b_0} \leq Q(|x|)$ para todo $x \in B_{R_0}$. Agora, considere $\lambda > \max\{1, (b_0 + N)/N\}$. Pela desigualdade de Hölder e (3.53), temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{R_0}} |v|^r dx &= \int_{B_{R_0}} \frac{|x|^{\frac{b_0}{\lambda}}}{|x|^{\frac{b_0}{\lambda}}} |v|^r dx \\
&\leq C \int_{B_{R_0}} |x|^{\frac{-b_0}{\lambda}} Q(|x|)^{\frac{1}{\lambda}} |v|^r dx \\
&\leq C \left(\int_{B_{R_0}} |x|^{\frac{-b_0}{\lambda-1}} dx \right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \left(\int_{B_R} Q(|x|) |v|^{r\lambda} dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
&= C_{R_0} \|v\|_{r\lambda,Q}^r \\
&\leq C_{R_0} (CS_p)^{\frac{1}{2}(\frac{r\sigma}{\sigma-1})} \sigma^{\frac{r}{(\sigma-1)^2}} (1 + S_\tau \|v\|_X^{p-2})^{\frac{r\sigma}{2(\sigma-1)}} \|v\|_{p,Q}^r,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|v\|_{L^r(B_{R_0})} \leq C_{R_0} (CS_p)^{\frac{1}{2}(\frac{\sigma}{\sigma-1})} \sigma^{\frac{1}{(\sigma-1)^2}} (1 + S_\tau \|v\|_X^{p-2})^{\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}} \|v\|_{p,Q}, \quad \forall\, r > \beta. \tag{3.54}$$

Fazendo $r \to \infty$ em (3.54) e usando a imersão contínua de X_{rad} em $L^p(\mathbb{R}^N, Q)$ mais uma vez, concluímos que

$$\|v\|_{L^\infty(B_{R_0})} \leq C_3 (1 + S_\tau \|v\|_X^{p-2})^{\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}} \|v\|_X,$$

onde $C_3 = C(R_0, p, \sigma)$. Além disso, usando o Lema 3.1.4, obtemos

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_{R_0})} \leq C \|v\|_X R_0^{-\frac{2(N-1)+a}{4}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|v\|_\infty &\leq [C R_0^{-\frac{2(N-1)+a}{4}} + C_3 (1 + S_\tau \|v\|_X^{p-2})^{\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}}] \|v\|_X \\
&\leq [C R_0^{-\frac{2(N-1)+a}{4}} + C_3 + C_3 (S_\tau \|v\|_X^{p-2})^{\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}}] \|v\|_X \\
&\leq [C_1 + C_2 \|v\|_X^{\frac{(p-2)\sigma}{2(\sigma-1)}}] \|v\|_X,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = C(R_0, p, \sigma, \sigma_1, a)$ e $C_2 = C(R_0, p, \sigma, \sigma_1, \tau)$. Assim como queríamos demonstrar. ■

Finalizando a prova do Teorema 3.0.8: Seja v_κ o ponto crítico não nulo e não negativo obtido pelo Teorema do Passo da Montanha. Pelo último resultado e pelo Lema 3.4.1, temos v_κ pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|v_\kappa\|_\infty \leq d_0, \ \forall \ \kappa > 0, \ \text{ onde } \ d_0 := C_1 d^{\frac{(p-2)\sigma}{2(\sigma-1)}} + C_2 d$$

Note que d_0 não depende de κ. Assim, para todo $\kappa > 0$, temos

$$\|u_\kappa\|_\infty = \|G^{-1}(v_\kappa)\|_\infty \leq \sqrt{6}\|v_\kappa\|_\infty \leq \sqrt{6}d_0.$$

Definindo $\kappa_0 = (18d_0)^{-1}$, temos que se $\kappa \in (0, \kappa_0]$ então

$$\|u_\kappa\|_\infty \leq \sqrt{6}d_0 = \frac{\sqrt{6}}{18\kappa_0} \leq \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}.$$

Portanto, pela Proposição 3.1.3, $u_\kappa = G^{-1}(v_\kappa)$ é uma solução fraca não nula e não negativa do problema (P_3), e isto conclui a demonstração do resultado principal deste capítulo.

Referências Bibliográficas

[1] Adimurthi and K. Sandeep, *A singular Moser-Trudinger embedding and its applications*. Nonlinear Differential Equations and Applications **13** (2007), 586-603.

[2] J. F. L. Aires, *Existência de soluções para equações de Schrödinger quasilineares com potencial se anulando no infinito*, Tese de Doutorado, UFPB/UFCG, (2014).

[3] J. F. L. Aires and M. A. S. Souto, *Existence of solutions for a quasilinear Schrödinger equation with vanishing potentials*. J. Math. Anal. Appl. **416** (2014), no. 2, 924-946.

[4] F. S. B. Albuquerque, C. O. Alves and E. S. Medeiros; *Nonlinear Schrödinger equation with unbounded or decaying radial potentials involving exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$. J. Math. Anal. Appl. **409** (2014), 1021-1031.

[5] C. O. Alves, M. A. S. Souto and M. Montenegro, *Existence of a ground state solution for a nonlinear scalar field equation with critical growth.* Calc. Var. Partial Differential Equations **43** (2012), 537–554.

[6] C. O. Alves Y. Wang and Y.Shen, *Soliton solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations with a parameter*. J. Differential Equations **259** (2015), no. 1, 318-343.

[7] A. Ambrosetti, V. Felli and A. Malchiodi, *Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005), 117–144.

[8] A. Ambrosetti and Z. Q.Wang, *Positive solutions to a class of quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}$, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), 55–68.

[9] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis. Pure and Applied Mathematics*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[10] M. Badiale and S. Rolando, A note on nonlinear elliptic problems with singular potentials. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl.* **17** (2006), 1–13.

[11] T. Bartsch and Z. Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 1725–1741.

[12] T. Bartsch and M. Willem, *Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on* $\mathbb{R}^N$. Arch. Rational Mech. Anal. **124** (1993), 261–276.

[13] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I: existence of a ground state.* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313–346.

[14] A. Borovskii and A. Galkin, *Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter.* JETP **77** (1983), 562–573.

[15] H. Brandi, C. Manus, G. Mainfray, T. Lehner and G. Bonnaud, *Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma.* Phys. Fluids **B5** (1993), 3539–3550.

[16] L. Brüll, H. Lange and E. de Jager, *Stationary, oscillatory and solitary waves type solutions of singular nonlinear Schrödinger equations,* Math. Methods Appl. Sci. **8** (1986), 559–575.

[17] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 407–435.

[18] G. Cerami, D. Passaseo and S. Solimini, *Infinitely many positive solutions to some scalar field equations with nonsymmetric coefficients.* Comm. Pure Appl. Math. **66** (2013), 372–413.

[19] J. Chen and B. Guo, *Multiple nodal bound states for a quasilinear Schrödinger equation.* J. Math. Phys. **46**, (2005), 123502 (11 pages).

[20] H. J. Choe, *A regularity theory for a general class of quasilinear elliptic partial differential equations and obstacle problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), 383–394.

[21] M. Colin and L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach.* Nonlinear Anal. **56** (2004), 213–226.

[22] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial differential Equations **3** (1995), 139–153.

[23] J. M. do Ó, O. H. Miyagaki and S.H. Soares, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: The critical exponential case* Nonlinear Anal. **67** (2007), 3357–3372.

[24] J. M. do Ó and A. Moameni, *Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations arising in plasma physics.* Adv. Nonlinear Stud. **9** (2009), 479–497.

[25] J. M. do Ó and U. B. Severo, *Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities.* Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009), 621–644.

[26] J. M. do Ó and U. B. Severo, *Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations in dimension two* Calc. Var. Partial differential Equations **38** (2010), 275–315.

[27] J. M. do Ó, A. Moameni and U. B. Severo, *Semi-classical states for quasilinear Schrödinger equations arising in plasma physics.* Commun. Contemp. Math. **11** (2009), 547–583.

[28] J. M. do Ó, E. Medeiros and U. B. Severo, *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 286–304.

[29] M. V. Goldman, Strong turbulence of plasma waves, Rev. Modern Phys. **56** (1984), 709–735.

[30] J. A. Hempel, G. R. Morris and N. S. Trundinger, *On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem.* Bull. Austral. Math. Soc. **3** (1970), 369–373.

[31] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques & Applications, 13. Springer-Verlag, Paris, 1993.

[32] S. Kurihara, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluids films.* J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3262–3267.

[33] E. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Math. **118** (1983), 349–374.

[34] A. G. Litvak and A. M. Sergeev, One dimensional collapse of plasma waves, JETP Lett. 27 (1978), 517–520.

[35] X. Q. Liu, J. Q. Liu and Z.-Q. Wang, *Quasilinear elliptic equations via perturbation method*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 253–263.

[36] J. Liu, Y. Wang and Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II.* J. Differential Equations **187** (2003), 473–493.

[37] J. Liu and Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations. I*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 441–448.

[38] A. Moameni, *On a class of periodic quasilinear Schrödinger equations involving critical growth in* $\mathbb{R}^2$. J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), 775–786.

[39] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger.* Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1077-1092.

[40] M. Poppenberg, K. Schmitt and Z.-Q. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial differential Equations **14** (2002), 329–344.

[41] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew Math. Phys. **43** (1992), 272–291.

[42] P. H. Rabinowitz *Minimax methods in critical poittheory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **65**. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[43] U. Severo, *Existence of weak solutions for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian*, Elec. J. Differential Equations **56** (2008), 1–16.

[44] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149–162.

[45] Y. T. Shen and Y. J. Wang, *Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. TMA, **80** (2013) 194–201.

[46] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[47] J. Su, Z.-Q. Wang and M. Willem, *Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potentials.* Commun. Contemp. Math. **9** (2007), 571–583.

[48] J. Su, Z.-Q. Wang and M. Willem, *Weighted Sobolev embedding with unbounded and decaying radial potentials.* J. Differential Equations **238** (2007), 201-219.

[49] Y. Wang, *A class of quasilinear Schrödinger equations with critical or supercritical exponents.* Comput. Math. Appl. **70** (2015), 562–572.

[50] Y. Wang, J. Yang and Y. Zhang, *Quasilinear elliptic equations involving the N-Laplacian with critical exponential growth in* $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Anal. **71** (2009), 6157–6169.