

Universidade Federal da Paraíba  
Universidade Federal de Campina Grande  
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática  
Doutorado em Matemática

Soluções nodais para problemas  
elípticos semilineares com crescimento  
crítico exponencial

por

Denilson da Silva Pereira

João Pessoa - PB

Dezembro/2014

# Soluções nodais para problemas elípticos semilineares com crescimento crítico exponencial

por

Denilson da Silva Pereira

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa  
Associado de Pós-Graduação em Matemática -  
UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do  
título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Dezembro/2014

P436s Pereira, Denilson da Silva.  
Soluções nodais para problemas elípticos semilineares com  
crescimento crítico exponencial / Denilson da Silva Pereira.-  
João Pessoa, 2014.  
148f. : il.  
Orientador: Claudianor Oliveira Alves  
Tese (Doutorado) - UFPB-UFCG  
1. Matemática. 2. Equação de Schrödinger. 3. Crescimento  
crítico exponencial. 4. Soluções nodais. 5. Métodos variacionais.  
6. Desigualdade de Trudinger-Moser.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba  
Universidade Federal de Campina Grande  
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática  
Doutorado em Matemática

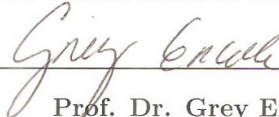
Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 05/12/2014



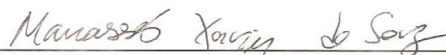
---

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos



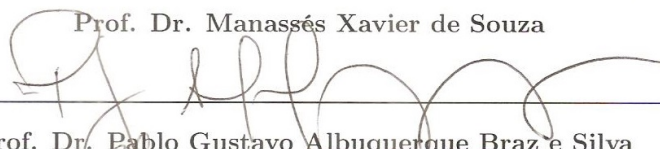
---

Prof. Dr. Grey Ercole



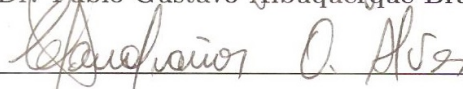
---

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza



---

Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva



---

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Dezembro/2014

# Resumo

Neste trabalho, estudamos resultados de existência, não existência e multiplicidade de soluções nodais para a equação de Schrödinger não-linear

$$(P) \quad -\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em } \Omega,$$

onde  $\Omega$  é um domínio suave em  $\mathbb{R}^2$  não necessariamente limitado,  $f$  é uma função que possui crescimento crítico exponencial e  $V$  é um potencial contínuo e não-negativo. Na primeira parte, mostramos a existência de soluções nodais de energia mínima em ambos os casos, domínio limitado e ilimitado. Mostramos ainda um resultado de não existência de solução nodal de energia mínima para o caso autônomo em todo o  $\mathbb{R}^2$ . Na segunda parte, estabelecemos a multiplicidade de soluções do tipo multi-bump nodal. Finalmente, para  $V \equiv 0$ , mostramos um resultado de existência de infinitas soluções nodais em uma bola. As principais ferramentas utilizadas são Métodos Variacionais, Lema de Deformação, Lema de Lions, Método de penalização e um processo de continuação anti-simétrica.

**Palavras-chave:** Equação de Schrödinger, Crescimento crítico exponencial, Soluções nodais, Métodos variacionais, Desigualdade de Trudinger-Moser.

# Abstract

In this work, we study existence, non-existence and multiplicity results of nodal solutions for the nonlinear Schrödinger equation

$$(P) \quad -\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \Omega,$$

where  $\Omega$  is a smooth domain in  $\mathbb{R}^2$  which is not necessarily bounded,  $f$  is a continuous function which has exponential critical growth and  $V$  is a continuous and nonnegative potential. In the first part, we prove the existence of least energy nodal solution in both cases, bounded and unbounded domain. Moreover, we also prove a nonexistence result of least energy nodal solution for the autonomous case in whole  $\mathbb{R}^2$ . In the second part, we establish multiplicity of multi-bump type nodal solutions. Finally, for  $V \equiv 0$ , we prove a result of infinitely many nodal solutions on a ball. The main tools used are Variational methods, Lions's Lemma, Penalization methods and a process of anti-symmetric continuation.

**Keywords:** Schrödinger equation, Exponential critical growth, Nodal solutions, Variational Methods, Trudinger-Moser inequality.

# Agradecimentos

À minha mãe Zulmira Pereira, a quem devo todas as minhas vitórias. Ao meu pai, por ter me dado a vida e pelos ensinamentos.

Aos meus irmãos Dennys, Dayane e Dani pelo amor e carinho que sempre me deram.

À minha esposa Elaine, pelo amor e companheirismo.

Ao prof. Claudianor, pela excelente orientação, disponibilidade, paciência e amizade.

Ao prof. Giovany, por iniciar meus estudos em EDP's Elípticas, quando eu ainda era um aluno de graduação.

Aos meus amigos Ailton, Amanda, Cláudia Aline, Kelmem, João Rodrigues e Rafael Abreu.

Aos professores da UAMat-UFCG, em especial aos profs. Alciônio, Brandão, Daniel Cordeiro, Fernando, Henrique, Joseilson, Lindomberg, Marcelo e Marco Aurélio, por estarem sempre a disposição quando precisamos de alguma ajuda e também pelos ensinamentos.

Aos Professores Carlos Alberto, Grey Ercole, Manassés Xavier e Pablo Braz e Silva por aceitarem compor a banca julgadora deste trabalho e pelas sugestões dadas.

À extinta Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística da UFCG, por ter concedido minha liberação para capacitação. Meu muito obrigado a todos os professores e funcionários!

*“Sem dedicação, não há vitória, sem sacrifício, não há recompensa. A Dor é passageira, mas a Glória é eterna!”*

*Guilherme Antunes de Souza*



# Dedicatória

À minha mãe Zulmira.

# Sumário

Notação e terminologia . . . . .	1
Introdução . . . . .	1
<b>1 Solução nodal minimal em um domínio limitado</b>	<b>11</b>
1.1 Problema de Dirichlet . . . . .	11
<b>2 Solução nodal minimal em <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>29</b>
2.1 Existência de solução nodal de energia mínima para o problema não-autônomo. . . . .	29
2.2 Demonstração do Teorema 2.1.1 . . . . .	48
2.3 Existência de solução nodal radial minimal para o problema autônomo.	51
2.4 Não existência de soluções nodais de energia mínima para o problema autônomo. . . . .	58
<b>3 Soluções do tipo multi-bump nodal para uma classe de problemas elípticos em <math>\mathbb{R}^2</math> envolvendo crescimento crítico exponencial</b>	<b>62</b>
3.1 Introdução . . . . .	62
3.2 Notações e resultados preliminares . . . . .	64
3.2.1 Problemas de Dirichlet e Neumann . . . . .	66
3.3 Um problema auxiliar . . . . .	67
3.4 Um valor crítico especial de $\Phi_\lambda$ . . . . .	89
3.5 Uma família especial de soluções nodais para $(A)_\lambda$ . . . . .	94
3.6 Demonstração do Teorema 3.1.1 . . . . .	102
<b>4 Infinitas soluções nodais em bolas</b>	<b>105</b>

4.1	Demonstração do Teorema 4.0.3. . . . .	107
4.2	Demonstração do Teorema 4.0.2. . . . .	120
<b>A</b>	<b>Resultados gerais</b>	<b>125</b>
	<b>Referências</b>	<b>131</b>

# Lista de Figuras

4.1	Setor angular $A_m$ . . . . .	106
4.2	Reflexão de A em relação ao eixo $x_2$ . . . . .	121
4.3	Sinal das soluções . . . . .	124
4.4	Caso $m = 2$ . . . . .	124

# Notação e terminologia

- Se  $f$  é uma função integrável, denotaremos por  $\int_{\Omega} f$  a seguinte integral  $\int_{\Omega} f(x)dx$ .
- Denotaremos por  $H^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); \quad i = 1, 2 \right\}$$

e por

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2},$$

a norma usual em  $H^1(\Omega)$ .

- Denotaremos por  $C_0^\infty(\Omega)$  o espaço de todas as funções  $u \in C^\infty(\Omega)$  com suporte,  $\text{supp } u$ , compactamente contido em  $\Omega$ , por  $H_0^1(\Omega)$  o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  na norma de  $H^1(\Omega)$  e por

$$\|u\|_{\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2},$$

a norma usual em  $H_0^1(\Omega)$ .

- Para um subconjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , os símbolos  $|u|_{q,\Omega}$  ( $q > 1$ ) e  $|u|_{\infty,\Omega}$  denotam as normas usuais nos espaços  $L^q(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$ , respectivamente.
- O símbolos  $\|u\|_1$ ,  $|u|_q$  ( $q > 1$ ) e  $|u|_\infty$  denotam as normas usuais nos espaços  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $L^q(\mathbb{R}^2)$  e  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , respectivamente.
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$  e  $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$ .

- Denotaremos por

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s > 0, \\ 0, & \text{se } s = 0, \\ -1, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

- Para um intervalo  $(a,b)$  e  $l \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $(a,b)^l$  o produto cartesiano

$$\underbrace{(a,b) \times (a,b) \times \cdots \times (a,b)}_{l \text{ vezes}}$$

- Para um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^N$ , denotamos por  $\partial A$ ,  $\bar{A}$ ,  $|A|$  e  $A^c$ , a fronteira, o fecho, a medida de Lebesgue e o complementar de  $A$  em  $\mathbb{R}^N$ , respectivamente.
- A abreviação q.t.p. significa quase todo ponto, ou seja, a menos de um conjunto com medida de nula.
- A notação  $(PS)_c$ , significa sequência de Palais-Smale no nível  $c$ .
- $o_n(1)$  denota uma sequência de números reais convergindo para 0, quando  $n \rightarrow \infty$ .
- As setas  $\rightarrow$  e  $\rightharpoonup$ , denotam convergência forte e convergência fraca em espaços de Banach, respectivamente.

# Introdução

A proposta deste trabalho é estudar resultados de existência, não existência e multiplicidade de soluções nodais, ou seja, soluções que mudam de sinal, para a equação de Schrödinger não-linear

$$(P) \quad -\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em } \Omega,$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio suave e não necessariamente limitado,  $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é um potencial contínuo e a não-linearidade  $f$  é uma função contínua tendo *crescimento crítico exponencial*, o qual definimos a seguir: Dizemos que  $f$  tem crescimento crítico exponencial em  $\pm\infty$  quando existe  $\alpha_0 > 0$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Uma vez que iremos trabalhar com o crescimento crítico exponencial, algumas versões da Desigualdade de Trudinger-Moser são cruciais em nossos argumentos. A primeira versão que gostaríamos de lembrar é a versão devida a Trudinger e Moser, ver [55] e [45], a qual diz que se  $\Omega$  é um domínio limitado em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\partial\Omega$  suave, então para qualquer  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tem-se

$$\int_{\Omega} e^{\alpha|u|^2} < +\infty, \quad \text{para todo } \alpha > 0. \quad (1)$$

Além disso, existe uma constante  $C = C(\alpha, |\Omega|) > 0$  tal que

$$\sup_{\|u\|_{\Omega} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha|u|^2} \leq C, \quad \forall \alpha \leq 4\pi. \quad (2)$$

Uma versão em  $H^1(\Omega)$  foi provada por Adimurthi e Yadava [3], e diz que se  $\Omega$  é novamente um domínio limitado com fronteira suave, então para qualquer  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} e^{\alpha u^2} < +\infty, \quad \text{para todo } \alpha > 0. \quad (3)$$

Além disso, existe uma constante positiva  $C = C(\alpha, |\Omega|)$  tal que

$$\sup_{\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha u^2} \leq C, \quad \forall \alpha \leq 2\pi. \quad (4)$$

A terceira versão que usaremos é devida a Cao [26], a qual é uma versão da Desigualdade de Trudinger-Moser em todo o espaço  $\mathbb{R}^2$  e tem o seguinte enunciado:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha |u|^2} - 1) < +\infty, \quad \text{para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ e } \alpha > 0. \quad (5)$$

Além disso, se  $\alpha < 4\pi$  e  $\|u\|_2 \leq M$ , então existe uma constante  $C_1 = C_1(M, \alpha) > 0$  tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha |u|^2} - 1) \leq C_1. \quad (6)$$

Nos últimos anos, observamos um crescente interesse no estudo da existência e multiplicidade de soluções nodais para problemas elípticos. Em [29], Cerami, Solimini e Struwe mostraram a existência de múltiplas soluções nodais para a seguinte classe de problemas elípticos com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = |u|^{2^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_1)$$

onde  $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 7$ ,  $2^* = \frac{2N}{N-2}$  e  $\lambda \in [0, \lambda_1]$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ . Em Bartsch e Willem [21], os autores estabeleceram a existência de infinitas soluções nodais radiais para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(|x|, u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (P_2)$$

onde  $f$  é uma função contínua com crescimento subcrítico do tipo Sobolev:  $|u|^{p-2}u$  com  $2 < p < 2^*$ . Em [27], Cao e Noussair relacionaram o número de soluções positivas e nodais da seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + u = Q(x)|u|^{p-2}u, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (P_3)$$



onde  $2 < p < 2^*$ , com o número de pontos de máximo da função  $Q$ .

Em [28], Castro, Cossio e Neuberger consideraram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_4)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio suave e  $f \in C^1$  tem um crescimento superlinear e subcrítico com  $f'(0) < \lambda_1$ . Os autores estabeleceram a existência de uma solução  $w$  que muda de sinal apenas uma vez, i.e.,  $w^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  possui exatamente duas componentes.

Em Noussai e Wei [46, 47], foi provada a existência e concentração de soluções nodais para o problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ Bu = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_5)$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , onde  $\Omega$  é um domínio limitado e suave, com condição de fronteira  $Bu = u$  em [46] e  $Bu = \frac{\partial u}{\partial \eta}$  em [47].

Em [23], Bartsch e Wang consideraram a existência e concentração de soluções nodais para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (P_6)$$

quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , supondo que  $f$  tem crescimento subcrítico e  $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e não negativa com  $a^{-1}(\{0\})$  sendo não vazio e verificando

$$|\{x \in \mathbb{R}^N ; a(x) \leq M_0\}| < +\infty \quad \text{para algum } M_0 > 0.$$

Em [16], Bartsch, Liu e Weth mostraram a existência de solução nodal com exatamente duas regiões nodais para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (P_7)$$

onde  $a$  é uma função não negativa verificando:

$$|\{x \in B_r(y) : a(x) \leq M\}| \rightarrow 0 \quad \text{quando } |y| \rightarrow +\infty \quad \text{para qualquer } M, r > 0.$$

O leitor pode encontrar mais resultados envolvendo soluções nodais nos artigos de Bartsch, Weth and Willem [18], Bartsch e Weth [19], Alves e Soares [8], Bartsch, Clapp e Weth [24], Zou [57] e em referências contidas em todos os trabalhos citados acima.

Depois de uma revisão na literatura, observamos que existem poucos trabalhos onde a existência de solução nodal tem sido considerada para o caso em que a não-linearidade  $f$  tem um crescimento crítico exponencial. Conhecemos apenas os trabalhos de Adimurthi e Yadava [4], Alves [6] e Alves e Soares [10]. Em [4], os autores provaram a existência de infinitas soluções radiais para o problema  $(P_4)$  quando  $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ . Em [6], o autor mostrou a existência de solução nodal para uma classe de problemas em domínio exterior com condição de fronteira de Neumann, e em [10], a existência de solução nodal foi estabelecida para problemas do tipo

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

para  $\epsilon$  suficientemente pequeno e  $V$  verificando algumas condições técnicas. Motivados por este fato, nosso objetivo na presente tese é, a partir de um conjunto específico de hipóteses sobre  $V$ ,  $f$  e  $\Omega$ , analisar as questões de existência, não existência e multiplicidade de soluções nodais para o problema  $(P)$ .

No Capítulo 1, estudamos a existência de soluções nodais de energia mínima para o problema  $(P)$ , ou seja, soluções que atingem o nível de menor energia dentre todas soluções que mudam de sinal, no caso em que  $\Omega$  é um domínio limitado,  $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é um potencial contínuo e não-negativo e  $f$  satisfaz as seguintes hipóteses:

$(f_1)$  (Crescimento crítico exponencial)

Existe  $C > 0$  tal que

$$|f(s)| \leq Ce^{4\pi|s|^2} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

$(f_2)$  (Comportamento próximo da origem)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 0;$$

$(f_3)$  (Condição de Ambrosetti-Rabinowitz)

Existe  $\theta > 2$  tal que

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

( $f_4$ ) A função  $s \rightarrow \frac{f(s)}{|s|}$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

( $f_5$ ) Existem constantes  $p > 2$  e  $C_p > 0$  tais que

$$\text{sgn}(s)f(s) \geq C_p |s|^{p-1}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Como sabemos, a aplicabilidade do método variacional depende da geometria do funcional associado ao problema e de alguma condição de compacidade, por exemplo, a condição de Palais-Smale. No caso de problemas com crescimento crítico exponencial, o funcional energia não satisfaz, em geral, a condição de Palais Smale. A constante  $C_p$  da hipótese ( $f_5$ ) desempenha um papel importante para contornar a falta de compacidade. Neste capítulo, mostramos que o conjunto de hipóteses dado acima e uma limitação inferior adequada para a constante  $C_p$  são suficientes para garantir a existência de solução nodal de energia mínima para o problema ( $P$ ) com condição de fronteira  $Bu = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , para os dois casos seguintes:

- $Bu = u, \quad u \in H_0^1(\Omega)$  (Condição de Dirichlet);
- $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad u \in H^1(\Omega)$  (Condição de Neumann).

Este capítulo complementa o estudo feito em [29], pois estamos considerando o caso em que a não-linearidade  $f$  tem crescimento crítico exponencial. Além disso, nos nossos argumentos não necessitamos supor que  $f$  é ímpar, fato que desempenhou um papel fundamental nos argumentos usados em [29] para garantir a existência de solução nodal de energia mínima para ( $P_1$ ). A hipótese ( $f_5$ ) é uma generalização natural, para o contexto de funções que mudam de sinal, da hipótese inicialmente considerada em Cao [26], a qual foi posteriormente utilizada em outros trabalhos envolvendo crescimento crítico exponencial (ver [11] e [6]).

No Capítulo 2, consideramos o problema ( $P$ ) no caso em que  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Obtemos dois resultados para o problema autônomo ( $V \equiv \text{constante}$ ): o primeiro é um resultado de não existência de solução nodal de energia mínima e o segundo é um resultado

de existência de solução nodal radial de energia mínima, i.e., solução de menor energia dentre todas as soluções nodais radiais. Posteriormente, mostramos a existência de solução nodal de energia mínima para um problema não autônomo. Neste caso, assumimos as seguintes hipóteses sobre o potencial  $V$ :

(V<sub>1</sub>) Existe uma constante  $V_0 > 0$  tal que  $V_0 \leq V(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ ;

(V<sub>2</sub>) Existe uma função contínua e  $\mathbb{Z}^2$ -periódica  $V_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$V(x) \leq V_\infty(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x) - V_\infty(x)| = 0.$$

(V<sub>3</sub>) Existem  $\mu < 1/2$  e  $C > 0$  tais que

$$V(x) \leq V_\infty(x) - Ce^{-\mu|x|}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Assumiremos que  $f$  é uma função ímpar verificando as mesmas hipóteses  $(f_1) - (f_5)$  utilizadas no primeiro capítulo. Em todos os resultados deste capítulo, assim como no Capítulo 1, vamos precisar de uma limitação inferior adequada para a constante  $C_p$  dada na hipótese  $(f_5)$ .

Os resultados obtidos nos Capítulos 1 e 2 fazem parte do artigo Alves e Pereira [7], o qual foi aceito para publicação na revista *Topological Methods in Nonlinear Analysis* (TMNA).

No Capítulo 3, consideramos a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (P)_\lambda$$

onde  $\lambda \in (0, \infty)$ ,  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua com  $V(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Existem diversos artigos relacionados com a existência e multiplicidade de soluções positivas para  $(P)_\lambda$  em  $\mathbb{R}^N$ , onde o comportamento da função  $V$  desempenha um papel importante no estudo das soluções. Para o caso  $N \geq 3$ , ver por exemplo, os artigos de Bartsch e Wang [22], Clapp e Ding [30], Bartsch, Pankov e Wang [15], Gui [37], Ding e Tanaka [33] e Alves, de Morais Filho e Souto [14].

Em [33], Ding e Tanaka consideraram o problema  $(P)_\lambda$  assumindo que o conjunto  $\Omega = \text{int } V^{-1}(\{0\})$  tem  $k$  componentes conexas e  $f(s) = |s|^{q-2}s$  com  $2 < q < 2^*$ , eles mostraram que  $(P)_\lambda$  tem pelo menos  $2^k - 1$  soluções multi-bump positivas para valores grandes de  $\lambda$ , que são essencialmente funções que tem uma quantidade finita de máximos locais, levando em consideração a quantidade de componentes conexas do conjunto  $\Omega$ . Alguns argumentos explorados em [33] foram adaptados de argumentos encontrados nos trabalhos de del Pino e Felmer [49] e Séré [53]. O mesmo tipo de resultado foi obtido por Alves, de Moraes Filho e Souto em [14] e Alves e Souto [13], assumindo que  $f$  tem crescimento crítico para o caso  $N \geq 3$  e crítico exponencial para o caso  $N = 2$ , respectivamente.

Em [5], Alves motivado por [30] e [33] considerou a existência e multiplicidade de soluções do tipo multi-bump nodal para  $(P)_\lambda$  explorando também o número de componentes conexas do conjunto  $\Omega := \text{int } V^{-1}\{0\}$ , assumindo que a não-linearidade  $f$  tem crescimento subcrítico.

Motivados por [13] e [5], mostramos a existência e multiplicidade de soluções do tipo multi-bump nodal para  $(P)_\lambda$  quando  $f$  tem crescimento crítico exponencial em  $\mathbb{R}^2$ . O principal resultado deste capítulo completa os estudos feitos em [13] e [5] nos seguintes pontos:

- Em [13], apesar do crescimento da não-linearidade ser o mesmo assumido aqui, as soluções encontradas são positivas;
- Em [5], as soluções encontradas são do tipo multi-bump nodal, mas a não linearidade tem um crescimento subcrítico.
- A construção minimax é diferente do caso das soluções multi-bump positivas.

No Capítulo 4, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } B, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (P)$$

onde  $B$  é uma bola em  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  é uma função ímpar satisfazendo as condições  $(f_1) - (f_2)$ , e as seguintes hipóteses adicionais:

( $H_1$ ) Existem  $s_0 > 0$  e  $M > 0$  tais que

$$0 < F(s) := \int_0^s f(t)dt \leq M|f(s)|, \text{ para todo } |s| \geq s_0.$$

( $H_2$ )  $0 < F(s) \leq \frac{1}{2}f(s)s$ , para todo  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

( $H_3$ )  $\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)e^{-4\pi s^2} = +\infty$

Dividindo  $B$  em setores angulares e usando o Teorema do Passo da Montanha, mostramos a existência de uma solução positiva em um dos setores de  $B$ . A partir desta solução e de um processo de continuação anti-simétrica mostramos a existência de infinitas soluções nodais em  $B$ . Estas soluções diferem-se umas das outras pelo número de regiões em que elas mudam de sinal.

A hipótese ( $H_3$ ) foi inicialmente considerada em Adimurthi [2], ver também [34]. Esta hipótese será fundamental para garantirmos não só a existência, mas também a infinidade de soluções nodais.

Citamos a seguir dois artigos que nos motivaram a estudar o problema ( $P$ ).

Em [31], Comte e Knaap desenvolveram um processo de continuação anti-simétrica para provar a existência de infinitas soluções nodais para o problema com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-1}u, & \text{em } B, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (P_*)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $B \subset \mathbb{R}^N$  é uma bola, com  $N \geq 3$ .

Este resultado foi estendido ou complementado por de Morais Filho, Miyagaki e Faria em [44], onde os autores mostraram que o sistema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta U = \nabla \left( \frac{1}{2}(AU, U)_{\mathbb{R}^2} + F(U) \right), & \text{em } B, \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (S_*)$$

onde  $B \subset \mathbb{R}^N$  é uma bola,  $U = (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ ,  $\Delta U = (\Delta u, \Delta v)$ ,  $\nabla$  é o operador gradiente,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

$(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^2}$  é o produto interno canônico e

$$F(u, v) = \frac{2}{2^*} (|u|^\alpha |v|^\beta + |u|^{2^*} + |v|^{2^*})$$

com  $\alpha, \beta > 1$  tais que  $\alpha + \beta = 2^*$ , possui infinitas soluções nodais, desde que  $b \geq 0$ .

Nosso principal resultado neste capítulo complementa os estudos feitos em [31] e [44], pois extendemos o processo de continuação anti-simétrica de Comte e Knaap para não-linearidades  $f$  sendo apenas contínua e ímpar, e por considerarmos o caso em que  $f$  tem crescimento crítico exponencial. É importante observar que em ambos os trabalhos citados acima, foi considerada a condição de fronteira de Neumann, tendo em vista que a Identidade de Pohozaev [48] garante que o problema  $(P_*)$ , com condição de fronteira de Dirichlet, não possui soluções para  $\lambda < 0$  e  $N \geq 3$ .

# Capítulo 1

## Solução nodal minimal em um domínio limitado

Neste capítulo, estudamos a existência de soluções nodais de energia mínima para o problema  $(P)$  quando  $\Omega$  é um domínio limitado em  $\mathbb{R}^2$  com condição de Dirichlet e de Neumann sobre a fronteira. Nossa motivação vem do trabalho de Cerami, Solimini e Struwe [29], no entanto, desenvolvemos aqui um novo método para obter uma sequência de Palais-Smale de funções nodais associada com o nível nodal de energia mínima.

### 1.1 Problema de Dirichlet

Nesta seção, consideramos a existência de solução nodal de energia mínima para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (D)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio limitado com fronteira suave,  $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é um potencial contínuo e não negativo e  $f$  é uma função contínua verificando as seguintes condições:

$(f_1)$  Existe  $C > 0$  tal que

$$|f(s)| \leq Ce^{4\pi|s|^2} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

$$(f_2) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 0;$$



(f<sub>3</sub>) Existe  $\theta > 2$  tal que

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

(f<sub>4</sub>) A função  $s \rightarrow \frac{f(s)}{|s|}$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

(f<sub>5</sub>) Existem constantes  $p > 2$  e  $C_p > 0$  tais que

$$\text{sgn}(s)f(s) \geq C_p|s|^{p-1} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

O principal resultado nesta seção é o seguinte.

**Teorema 1.1.1** *Seja  $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial contínuo e não-negativo e suponha que (f<sub>1</sub>) – (f<sub>5</sub>) são válidas. Então, o problema (D) possui uma solução nodal de energia mínima, desde que a constante  $C_p$  verifique*

$$C_p > \left[ \frac{2\theta\beta_p}{\theta - 2} \right]^{(p-2)/2}, \quad \text{onde } \beta_p = \inf_{\mathcal{M}_p} I_p, \quad (1.1)$$

$$I_p(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p$$

e

$$\mathcal{M}_p = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : u^{\pm} \neq 0 \text{ e } \int_{\Omega} |\nabla u^{\pm}|^2 + V(x)|u^{\pm}|^2 = \int_{\Omega} |u^{\pm}|^p \right\}.$$

No que segue, denotamos por  $E$  o espaço de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  munido da norma

$$\|u\|_V^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2).$$

Tem-se que  $E$  é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + V(x)uv).$$

Além disso, a norma  $\|\cdot\|_V$  é equivalente a norma usual  $\|\cdot\|_{\Omega}$  de  $H_0^1(\Omega)$  definida por

$$\|u\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

pois

$$\|u\|_{\Omega}^2 \leq \|u\|_V^2 \leq (1 + V_1/\lambda_1) \|u\|_{\Omega}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (1.2)$$

onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  e  $V_1 = \max_{x \in \bar{\Omega}} V(x)$ .

Segue das hipóteses  $(f_1)$  e  $(f_2)$  que, dados  $\epsilon > 0$ ,  $q \geq 1$  e  $\alpha > 4\pi$ , existe uma constante  $C = C(\epsilon, q, \alpha) > 0$  tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon|s| + C|s|^{q-1}e^{\alpha s^2}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Conseqüentemente,

$$|F(s)| \leq \epsilon \frac{s^2}{2} + C|s|^q e^{\alpha s^2}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Assim, pela Desigualdade de Trudinger-Moser (2),  $F(u) \in L^1(\Omega)$  para todo  $u \in E$ . Usando argumentos padrão, mostra-se que o funcional energia  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  associado com (D), dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_V^2 - \int_{\Omega} F(u),$$

está bem definido sendo de classe  $C^1(E; \mathbb{R})$  com

$$I'(u)v = \langle u, v \rangle_V - \int_{\Omega} f(u)v, \quad \forall u, v \in E.$$

Portanto, pontos críticos de  $I$  são soluções fracas do problema (D). Sabemos que todo ponto crítico não trivial de  $I$  pertence a variedade de Nehari

$$\mathcal{N} = \{u \in E \setminus \{0\} : I'(u)u = 0\}.$$

Como estamos interessados em solução nodal de energia mínima, definimos o conjunto

$$\mathcal{M} = \{u \in E : u^{\pm} \neq 0, I'(u^{\pm})u^{\pm} = 0\},$$

e o número real

$$c^* = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u).$$

Interpretamos uma solução nodal de energia mínima, como sendo uma função  $u \in \mathcal{M}$  satisfazendo

$$I(u) = c^* \quad \text{e} \quad I'(u) = 0.$$

No que segue, estabelecemos alguns resultados necessários para demonstrar o Teorema 1.1.1. O primeiro deles, já é clássico na literatura, e sua demonstração pode ser encontrada em Willem [56, Lema 4.1].

**Lema 1.1.2** *Sob as condições  $(f_1) - (f_4)$ , para qualquer  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ , existe um único  $t = t(u) > 0$  tal que  $t(u)u \in \mathcal{N}$ . Além disso,*

$$\max_{s \geq 0} I(su) = I(t(u)u).$$

**Observação 1.1.3** O leitor pode perceber que no Lema 4.1 de [56] a não-linearidade tem um crescimento subcrítico, no entanto, a demonstração do Lema 1.1.2 (onde a não-linearidade tem crescimento crítico exponencial) é essencialmente a mesma.

**Corolário 1.1.4** Sob as condições  $(f_1) - (f_4)$ , para qualquer  $u \in H_0^1(\Omega)$  verificando  $u^\pm \neq 0$ , existem únicos  $s = s(u) > 0$  e  $t = t(u) > 0$  tais que  $s(u)u^+ + t(u)u^- \in \mathcal{M}$ .

O próximo resultado estabelece uma limitação superior para a constante  $c^*$  que será explorada ao longo do trabalho.

**Lema 1.1.5** Seja  $\theta$  o número definido pela condição  $(f_3)$ . Tem-se

$$c^* < \frac{\theta - 2}{2\theta}.$$

**Demonstração.** Seja  $\tilde{u} \in \mathcal{M}_p$  verificando

$$I_p(\tilde{u}) = \beta_p \text{ e } I'_p(\tilde{u}) = 0. \quad (1.5)$$

O leitor pode encontrar a demonstração da existência de  $\tilde{u}$  em Bartsch and Weth [20]. Segue de (1.5) que

$$\beta_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \tilde{u}|^2 + V(x)|\tilde{u}|^2) - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\tilde{u}|^p, \quad (1.6)$$

$$\int_{\Omega} (|\nabla \tilde{u}|^2 + V(x)|\tilde{u}|^2) = \int_{\Omega} |\tilde{u}|^p \quad (1.7)$$

e

$$\int_{\Omega} (|\nabla \tilde{u}^\pm|^2 + V(x)|\tilde{u}^\pm|^2) = \int_{\Omega} |\tilde{u}^\pm|^p. \quad (1.8)$$

Substituindo (1.7) em (1.6), obtemos

$$\beta_p = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} |\tilde{u}|^p. \quad (1.9)$$

Sendo  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  com  $\tilde{u}^\pm \neq 0$ , pelo Corolário 1.1.4, existem únicos  $s, t > 0$  tais que  $s\tilde{u}^+ + t\tilde{u}^- \in \mathcal{M}$ . Logo,

$$c^* \leq I(s\tilde{u}^+ + t\tilde{u}^-) = I(s\tilde{u}^+) + I(t\tilde{u}^-),$$

o que implica em

$$c^* \leq \frac{s^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \tilde{u}^+|^2 + V(x)|\tilde{u}^+|^2) - \int_{\Omega} F(s\tilde{u}^+)$$

$$+\frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \tilde{u}^-|^2 + V(x)|\tilde{u}^-|^2) - \int_{\Omega} F(t\tilde{u}^-).$$

Usando a hipótese  $(f_5)$  e (1.8) ficamos com

$$c^* \leq \left( \frac{s^2}{2} - \frac{C_p s^p}{p} \right) \int_{\Omega} |\tilde{u}^+|^p + \left( \frac{t^2}{2} - \frac{C_p t^p}{p} \right) \int_{\Omega} |\tilde{u}^-|^p,$$

de onde segue que

$$c^* \leq \max_{r \geq 0} \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{C_p r^p}{p} \right\} \int_{\Omega} |\tilde{u}|^p.$$

Um cálculo simples mostra que

$$\max_{r \geq 0} \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{C_p r^p}{p} \right\} = C_p^{\frac{2}{2-p}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right),$$

e portanto por (1.9)

$$c^* \leq C_p^{\frac{2}{2-p}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} |\tilde{u}|^p = C_p^{\frac{2}{2-p}} \beta_p. \quad (1.10)$$

A desigualdade em (1.10), juntamente com (1.1), implica em

$$c^* < \frac{\theta - 2}{2\theta},$$

como queríamos demonstrar. ■

O próximo lema estabelece dois importantes limites envolvendo a função  $f$ .

**Lema 1.1.6** *Seja  $(u_n)$  uma sequência em  $E$  satisfazendo*

- (1)  $b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_V^2 < 1$ ;
- (2)  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H_0^1(\Omega)$  e;
- (3)  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Então,

$$\lim_n \int_{\Omega} f(u_n)u_n = \int_{\Omega} f(u)u \quad (1.11)$$

e

$$\lim_n \int_{\Omega} f(u_n)v = \int_{\Omega} f(u)v, \quad (1.12)$$

para qualquer  $v \in E$ .

**Demonstração.** Segue da hipótese  $(f_1)$  que

$$|f(u_n)u_n| \leq C|u_n|e^{4\pi|u_n|^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que

$$|u_n|e^{4\pi|u_n|^2} \rightarrow |u|e^{4\pi|u|^2} \quad \text{em } L^1(\Omega), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

De fato, desde que  $\|u_n\|_\Omega^2 \leq \|u_n\|_V^2 \leq b$ , para  $t > 1$  temos

$$\int_\Omega \left( e^{4\pi|u_n|^2} \right)^t = \int_\Omega e^{4\pi t \|u_n\|_\Omega^2 \left( \frac{|u_n|}{\|u_n\|_\Omega} \right)^2} \leq \int_\Omega e^{4\pi t b \left( \frac{|u_n|}{\|u_n\|_\Omega} \right)^2}.$$

Sendo  $b < 1$ , podemos fixar  $t > 1$  com  $t \approx 1$  de tal modo que  $tb < 1$ . Sendo assim, pela Desigualdade de Trudinger-Moser (2),

$$\sup_n \int_\Omega \left( e^{4\pi|u_n|^2} \right)^t \leq \sup_{\|v\|_\Omega \leq 1} \int_\Omega e^{4\pi t b |v|^2} < \infty.$$

Logo, a sequência  $(e^{4\pi|u_n|^2})$  é limitada em  $L^t(\Omega)$  e

$$e^{4\pi|u_n(x)|^2} \rightarrow e^{4\pi|u(x)|^2} \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, pelo Lema A.9 do Apêndice A,

$$e^{4\pi|u_n|^2} \rightharpoonup e^{4\pi|u|^2} \quad \text{em } L^t(\Omega). \quad (1.14)$$

Por outro lado, usando a compacidade da imersão  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{t'}(\Omega)$ ,

$$|u_n| \rightarrow |u| \quad \text{em } L^{t'}(\Omega), \quad \text{onde } 1/t + 1/t' = 1. \quad (1.15)$$

Segue de (1.14), (1.15) e do Lema A.8 do Apêndice A, que o limite em (1.13) ocorre. Portanto, a demonstração do limite em (1.11) é obtida usando o Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue (Teorema A.12 do Apêndice A). A demonstração de (1.12) segue usando o mesmo argumento.  $\blacksquare$

O resultado abaixo é bem conhecido para problemas em  $\mathbb{R}^N$  com  $N \geq 3$ . Aqui, decidimos escrever sua demonstração porque estamos trabalhando com crescimento crítico exponencial.

**Lema 1.1.7** *Existe uma constante  $m_0 > 0$  tal que*

$$0 < m_0 \leq \|u\|_V^2, \quad \forall u \in \mathcal{N}.$$

**Demonstração.** Começamos fixando  $q > 2$  em (1.3). Suponha por contradição que a desigualdade acima não ocorra. Sendo assim, existe uma sequência  $(u_n) \subset \mathcal{N}$  tal que  $\|u_n\|_V^2 \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Sendo  $u_n \in \mathcal{N}$ , temos

$$\|u_n\|_V^2 = \int_{\Omega} f(u_n)u_n,$$

o que implica por (1.3) em

$$\|u_n\|_V^2 \leq \epsilon |u_n|_{2,\Omega}^2 + C \int_{\Omega} |u_n|^q e^{\alpha|u_n|^2}.$$

Pelas imersões de Sobolev e desigualdade de Hölder,

$$\|u_n\|_V^2 \leq C_1 \epsilon \|u_n\|_V^2 + C |u_n|_{2q,\Omega}^q \left( \int_{\Omega} e^{2\alpha|u_n|^2} \right)^{1/2}.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev,

$$(1 - C_1 \epsilon) \|u_n\|_V^2 \leq C_2 \|u_n\|_V^q \left( \int_{\Omega} e^{2\alpha|u_n|^2} \right)^{1/2}.$$

Escolhendo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, de modo que  $C_3 := \frac{1 - C_1 \epsilon}{C_2} > 0$ , encontramos

$$0 < C_3 \leq \|u_n\|_V^{q-2} \left( \int_{\Omega} e^{2\alpha|u_n|^2} \right)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Sendo  $\|u_n\|^2 \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$2\alpha \|u_n\|^2 \leq 4\pi, \quad \forall n \geq n_0.$$

Usando novamente a Desigualdade de Trudinger-Moser (2),

$$\int_{\Omega} e^{2\alpha|u_n|^2} = \int_{\Omega} e^{2\alpha \|u_n\|_{\Omega}^2 \left( \frac{|u_n|}{\|u_n\|_{\Omega}} \right)^2} \leq \int_{\Omega} e^{4\pi \left( \frac{|u_n|}{\|u_n\|_{\Omega}} \right)^2} \leq C, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo, por (1.16),

$$0 < \left( \frac{C_3}{\sqrt{C}} \right)^{1/(q-2)} \leq \|u_n\|_V, \quad \forall n \geq n_0,$$

o que contradiz o fato que  $\|u_n\|_V \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . ■

Como uma consequência do Lema 1.1.7, temos os seguintes resultados.

**Corolário 1.1.8** *Para todo  $u \in \mathcal{M}$ ,*

$$0 < m_0 \leq \|u^{\pm}\|_V^2 \leq \|u\|_V^2.$$

**Corolário 1.1.9** *Existe  $\delta_2 > 0$  tal que*

$$I(u), I(u^\pm) \geq 2\delta_2 \quad \forall u \in \mathcal{M}.$$

**Demonstração.** Note que se  $v \in \mathcal{N}$ , então

$$I(v) = I(v) - \frac{1}{\theta} I'(v)v = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|v\|_V^2 - \int_{\Omega} \left( F(v) - \frac{1}{\theta} f(v)v \right).$$

Logo, de  $(f_3)$  e do Lema 1.1.7,

$$I(v) \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|v\|_V^2 \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) m_0 := 2\delta_2, \quad \forall v \in \mathcal{N}.$$

O resultado segue observando que se  $u \in \mathcal{M}$ , então  $u, u^\pm \in \mathcal{N}$ . ■

No que segue, mostraremos alguns resultados relacionados com o conjunto

$$\tilde{S}_\lambda := \{u \in \mathcal{M} : I(u) < c^* + \lambda\},$$

onde  $\lambda > 0$  é uma constante a ser fixada convenientemente.

**Lema 1.1.10** *Para todo  $u \in \tilde{S}_\lambda$ , tem-se*

$$0 < m_0 \leq \|u^\pm\|_V^2 \leq \|u\|_V^2 \leq m_\lambda,$$

para alguma constante  $m_\lambda \in (0, 1)$  e  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno.

**Demonstração.** Sendo  $\tilde{S}_\lambda \subset \mathcal{M}$ , em vista do Corolário 1.1.8, precisamos apenas mostrar que existe  $m_\lambda > 0$  tal que

$$\|u\|_V^2 \leq m_\lambda < 1, \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Para tal fim, note que se  $u \in \tilde{S}_\lambda$ ,

$$c^* + \lambda \geq I(u) = I(u) - \frac{1}{\theta} I'(u)u = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u\|_V^2 - \int_{\Omega} \left( F(u) - \frac{1}{\theta} f(u)u \right).$$

Logo, pela condição de Ambrosetti-Rabinowitz  $(f_3)$ ,

$$c^* + \lambda \geq \left( \frac{\theta - 2}{2\theta} \right) \|u\|_V^2.$$

Tendo em vista o Lema 1.1.5, podemos fixar  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno de tal modo que

$$c^* + \lambda < \left( \frac{\theta - 2}{2\theta} \right),$$

e portanto

$$\|u\|_V^2 \leq \frac{2\theta(c^* + \lambda)}{\theta - 2} := m_\lambda < 1, \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Assim completamos a prova do lema. ■

O próximo lema é fundamental para garantir que o limite fraco de uma sequência de Palais-Smale em  $\tilde{S}_\lambda$  é uma função nodal.

**Lema 1.1.11** *Para cada  $q > 2$ , existe  $\delta_q > 0$  tal que*

$$0 < \delta_q \leq \int_\Omega |u^\pm|^q \leq \int_\Omega |u|^q, \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda.$$

**Demonstração.** Sendo  $u \in \tilde{S}_\lambda \subset \mathcal{M}$ ,

$$\|u^\pm\|_V^2 = \int_\Omega f(u^\pm)u^\pm,$$

e por  $(f_1)$ ,

$$\|u^\pm\|_V^2 \leq C \int_\Omega |u^\pm| e^{4\pi|u^\pm|^2}.$$

Usando imersões contínuas de Sobolev e a Desigualdade de Hölder,

$$\|u^\pm\|_V^2 \leq C |u^\pm|_{t_1, \Omega} \left( \int_\Omega e^{4\pi t_2 |u^\pm|^2} \right)^{1/t_2},$$

onde  $1/t_1 + 1/t_2 = 1$ . Pelo Corolário 1.1.8,

$$m_0 \leq C |u^\pm|_{t_1, \Omega} \left( \int_\Omega e^{4\pi t_2 \|u^\pm\|_\Omega^2 \left( \frac{|u^\pm|}{\|u^\pm\|_\Omega} \right)^2} \right)^{1/t_2},$$

e pelo Lema 1.1.10,

$$m_0 \leq C |u^\pm|_{t_1, \Omega} \left( \int_\Omega e^{4\pi t_2 m_\lambda \left( \frac{|u^\pm|}{\|u^\pm\|_\Omega} \right)^2} \right)^{1/t_2}.$$

Sendo  $m_\lambda < 1$ , podemos fixar  $1 < t_2$  próximo de 1 de tal modo que  $t_2 m_\lambda < 1$  e  $t_1 > 2$ .

Pela Desigualdade de Trudinger-Moser (2), existe uma constante  $\tilde{C} > 0$  tal que

$$\int_\Omega e^{4\pi t_2 m_\lambda \left( \frac{|u^\pm|}{\|u^\pm\|_\Omega} \right)^2} \leq \tilde{C}, \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Logo, para alguma constante  $C_1 > 0$ ,

$$C_1 \leq |u^\pm|_{t_1, \Omega}, \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda. \quad (1.17)$$



Agora, suponha por contradição que existe  $q_0 > 2$  e uma sequência  $(u_n) \subset \tilde{S}_\lambda$  tal que

$$|u_n^\pm|_{q_0, \Omega} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Pelo Lema 1.1.10 e por imersões contínuas de Sobolev,  $(u_n^\pm)$  é limitada em  $L^s(\Omega)$ , para cada  $s > 2$ . Logo, pelo Lema A.7 do Apêndice A,

$$|u_n|_{s, \Omega} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo  $s > 2$ , o que contradiz (1.17). Portanto, o Lema 1.1.11 ocorre. ■

No que segue, para um conjunto  $\Theta \subset E$  e  $r > 0$ , denotamos por

$$\Theta_r := \{u \in E : \text{dist}(u, \Theta) < r\}.$$

O próximo lema será crucial para garantirmos que, para uma escolha adequada de um número real  $R > 1$ , o conjunto

$$S := \left\{ sRu^+ + tRu^- : u \in \tilde{S}_\lambda \text{ e } s, t \in \left[ \frac{1}{R^2}, 1 \right] \right\},$$

tem uma sequência  $(PS)_{c^*}$  de funções nodais para o funcional  $I$ .

**Lema 1.1.12** *Existe  $R > 0$  tal que*

$$I(R^{-1}u^\pm), I(Ru^\pm) < \frac{1}{2}I(u^\pm), \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda.$$

**Demonstração.** Sejam  $u \in \tilde{S}_\lambda$  e  $R > 0$ . Pela definição de  $I$  e por  $(f_3)$ ,

$$I(R^{-1}u^\pm) = \frac{1}{2R^2}\|u^\pm\|_V^2 - \int_\Omega F(R^{-1}u^\pm) \leq \frac{1}{2R^2}\|u^\pm\|_V^2.$$

Usando o Lema 1.1.10,

$$I(R^{-1}u^\pm) \leq \frac{m_\lambda}{2R^2} < \delta_2,$$

para  $R > 0$  suficientemente grande. Assim, pelo Corolário 1.1.9,

$$I(R^{-1}u^\pm) < \delta_2 \leq \frac{1}{2}I(u^\pm), \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda.$$

Segue da condição de Ambrosetti-Rabinowitz  $(f_3)$ , que existem constantes  $b_1, b_2 > 0$  tais que

$$F(t) \geq b_1|t|^\theta - b_2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de onde segue que

$$I(Ru^\pm) = \frac{R^2}{2} \|u^\pm\|_V^2 - \int_\Omega F(Ru^\pm) \leq \frac{R^2 m_\lambda}{2} - b_1 R^\theta \int_\Omega |u^\pm|^\theta + b_2 |\Omega|.$$

Pelo Lema 1.1.11, existe  $\delta_\theta > 0$  tal que

$$\int_\Omega |u^\pm|^\theta \geq \delta_\theta.$$

Logo,

$$I(Ru^\pm) = \frac{R^2}{2} \|u^\pm\|_V^2 - \int_\Omega F(Ru^\pm) \leq \frac{R^2 m_\lambda}{2} - b_1 R^\theta \delta_\theta + b_2 |\Omega|.$$

Sendo  $\theta > 2$ , concluímos que

$$I(Ru^\pm) < 0 < \delta_2 \leq \frac{1}{2} I(u^\pm), \quad \forall u \in \tilde{S}_\lambda,$$

para  $R > 0$  suficientemente grande. ■

Seja  $P$  o cone das funções não-negativas definido por

$$P = \{u \in E : u \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

e considere o conjunto

$$\Lambda = P \cup (-P),$$

formados pelas funções com sinal definido.

O resultado seguinte garante que a distância entre os conjunto  $\Lambda$  e  $S$  é positiva.

**Lema 1.1.13**

$$d_0 := \text{dist}(S, \Lambda) > 0.$$

**Demonstração.** Suponha por contradição que  $\text{dist}(S, \Lambda) = 0$ . Então, existem sequências  $(v_n) \subset S$  e  $w_n \subset \Lambda$  tais que

$$\|v_n - w_n\|_\Omega \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Podemos supor sem perda de generalidades que  $w_n(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \Omega$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sendo  $v_n \in S$ , existem  $u_n \in \tilde{S}_\lambda$  e  $s_n, t_n \in \left[\frac{1}{R^2}, 1\right]$  tais que  $v_n = s_n Ru_n^+ + t_n Ru_n^-$ . Pelo Lema 1.1.10,  $u_n$  é limitada em  $E$ . Logo, podemos assumir que

$$v_n(x) \rightarrow s_0 Ru_0^+(x) + t_0 Ru_0^-(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

para algum  $u_0 \in E$  e  $s_0, t_0 \in \left[ \frac{1}{R^2}, 1 \right]$ . Por outro lado, por (1.18) e pelo fato que  $(v_n)$  é limitada em  $E$ , tem-se que  $(w_n)$  é também limitada em  $E$ . Por unicidade de limite, temos

$$w_n(x) \rightarrow s_0 R u_0^+(x) + t_0 R u_0^-(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Mas pelo Lema 1.1.11 e por imersões compacta de Sobolev,  $u_0^\pm \neq 0$ . O que contradiz o fato que  $w_n(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \Omega$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\blacksquare$

A próxima proposição garante a existência de uma sequência  $(PS)_{c^*}$  de funções nodais para o funcional  $I$ . No que segue, para  $r > 0$ , denotamos

$$S_r := \{u \in E : \text{dist}(u, S) \leq r\}$$

**Proposição 1.1.14** *Dados  $\epsilon, \delta > 0$ , existe  $u \in I^{-1}([c^* - 2\epsilon, c^* + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$  verificando*

$$\|I'(u)\| < \frac{4\epsilon}{\delta}.$$

**Demonstração.** De fato, caso contrário, existem  $\epsilon_o, \delta_o > 0$  tais que

$$\|I'(u)\| \geq \frac{4\epsilon_o}{\delta_o}, \quad \forall u \in I^{-1}([c^* - 2\epsilon_o, c^* + 2\epsilon_o]) \cap S_{2\delta_o}.$$

Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|I'(u)\| \geq \frac{4\epsilon_o/n}{\delta_o/n}, \quad \forall u \in I^{-1}([c^* - 2\epsilon_o, c^* + 2\epsilon_o]) \cap S_{2\delta_o}.$$

Sendo

$$I^{-1}([c^* - 2\epsilon_o/n, c^* + 2\epsilon_o/n]) \cap S_{2\delta_o/n} \subset I^{-1}([c^* - 2\epsilon_o, c^* + 2\epsilon_o]) \cap S_{2\delta_o},$$

tem-se

$$\|I'(u)\| \geq \frac{4\epsilon_o/n}{\delta_o/n}, \quad \forall u \in I^{-1}([c^* - 2\epsilon_o/n, c^* + 2\epsilon_o/n]) \cap S_{2\delta_o/n}.$$

Logo, podemos fixar  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de tal modo que

$$\bar{\epsilon} := \frac{\epsilon_o}{n} < \min \left\{ \frac{2\delta_2}{5}, \lambda \right\}, \quad \bar{\delta} := \frac{\delta_o}{n} < \frac{d_0}{2} \quad (1.19)$$

e

$$\|I'(u)\| \geq \frac{4\bar{\epsilon}}{\bar{\delta}}, \quad \forall u \in I^{-1}([c^* - 2\bar{\epsilon}, c^* + 2\bar{\epsilon}]) \cap S_{2\bar{\delta}}.$$

Logo, pelo Teorema de Deformação (Teorema A.16 do Apêndice A), existe uma aplicação contínua  $\eta : E \rightarrow E$  satisfazendo:

- (i)  $\eta(u) = u, \quad \forall u \notin I^{-1}([c^* - 2\bar{\epsilon}, c^* + 2\bar{\epsilon}]) \cap S_{2\bar{\delta}};$
- (ii)  $\|\eta(u) - u\|_{\Omega} \leq \bar{\delta} \quad \forall u \in E;$
- (iii)  $\eta(I^{c^* + \bar{\epsilon}} \cap S) \subset I^{c^* - \bar{\epsilon}} \cap S_{\bar{\delta}};$
- (iv)  $\eta$  é um homeomorfismo.

Pela definição de  $c^*$ , para tal  $\bar{\epsilon} > 0$ , existe  $u_* \in \mathcal{M}$  verificando

$$I(u_*) < c^* + \frac{\bar{\epsilon}}{2}. \quad (1.20)$$

Agora, defina  $Q = \left(\frac{1}{R^2}, 1\right)^2$  e considere  $\gamma : \bar{Q} \rightarrow E$  definida por

$$\gamma(s, t) = \eta(sRu_*^+ + tRu_*^-).$$

Uma vez que  $u_*^{\pm} \in \mathcal{N}$ , temos

$$I(sRu_*^+ + tRu_*^-) = I(sRu_*^+) + I(tRu_*^-) \leq I(u_*^+) + I(u_*^-) = I(u_*).$$

Logo, pela escolha de  $\bar{\epsilon}$  feita em (1.19) e por (1.20),

$$I(sRu_*^+ + tRu_*^-) \leq I(u_*) < c^* + \frac{\bar{\epsilon}}{2} < c^* + \bar{\epsilon} < c^* + \lambda,$$

para todo  $(s, t) \in \bar{Q}$ . Assim,  $u_* \in \tilde{S}_{\lambda}$ , e pela definição de  $S$ ,

$$sRu_*^+ + tRu_*^- \in I^{c^* + \bar{\epsilon}} \cap S,$$

e pelo item (iii),

$$I(\gamma(s, t)) = I(\eta(sRu_*^+ + tRu_*^-)) < c^* - \bar{\epsilon}, \quad \forall (s, t) \in \bar{Q}. \quad (1.21)$$

Segue do item (ii) que

$$\|\gamma(s, t) - (sRu_*^+ + tRu_*^-)\|_{\Omega} \leq \bar{\delta},$$

e pela escolha de  $\bar{\delta}$  feita em (1.19), para  $v \in \Lambda$ , temos

$$\begin{aligned} \|\gamma(s, t) - v\|_{\Omega} &= \|\gamma(s, t) - (sRu_*^+ + tRu_*^-) + (sRu_*^+ + tRu_*^-) - v\|_{\Omega} \\ &\geq \|(sRu_*^+ + tRu_*^-) - v\|_{\Omega} - \|\gamma(s, t) - (sRu_*^+ + tRu_*^-)\|_{\Omega} \\ &\geq d_0 - \bar{\delta} > d_0 - \frac{d_0}{2} = \frac{d_0}{2} > 0, \end{aligned}$$

para todo  $(s, t) \in \overline{Q}$ . Portanto,

$$\gamma(s, t)^\pm \neq 0, \quad \forall (s, t) \in \overline{Q}. \quad (1.22)$$

**Afirmação 1.1.15** *Existem  $(s_0, t_0) \in \overline{Q}$  tal que*

$$I'(\gamma(s_0, t_0)^\pm)(\gamma(s_0, t_0)^\pm) = 0.$$

Suponha, por um momento, que a Afirmação 1.1.15 seja verdadeira. Por (1.22),  $\gamma(s_0, t_0)^\pm \neq 0$ . Logo,  $\gamma(s_0, t_0) \in \mathcal{M}$ , de onde segue que

$$I(\gamma(s_0, t_0)) \geq c^*,$$

o que contradiz (1.21), demonstrando a Proposição 1.1.14.

Para demonstrar que a Afirmação 1.1.15 é verdadeira, usaremos a Teoria do Grau de Brouwer (ver [38, Capítulo 2]). Defina as funções  $H, G : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$H(s, t) := (I'(\gamma(s, t)^+))(\gamma(s, t)^+), I'(\gamma(s, t)^-))(\gamma(s, t)^-))$$

e

$$G(s, t) := (I'(sRu_*^+)(sRu_*^+), I'(tRu_*^-)(tRu_*^-)).$$

Desde que as aplicações  $g_1, g_2 : \left[ \frac{1}{R^2}, 1 \right] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$g_1(s) = I'(sRu_*^+)(sRu_*^+) \quad \text{e} \quad g_2(t) = I'(tRu_*^-)(tRu_*^-)$$

são contínuas, pela *Fórmula Produto* para o Grau de Brouwer em dimensão dois, temos

$$d(G, Q, (0, 0)) = d\left(g_1, \left(\frac{1}{R^2}, 1\right), 0\right) \cdot d\left(g_2, \left(\frac{1}{R^2}, 1\right), 0\right).$$

Agora, vamos calcular  $d\left(g_1, \left(\frac{1}{R^2}, 1\right), 0\right)$ . Para isto, relembremos a definição do Grau Topológico em dimensão um:

Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $g(a) \neq y$  e  $g(b) \neq y$ . Definimos

$$d(g, (a, b), y) := \frac{1}{2} [\text{sgn}(g(b) - y) - \text{sgn}(g(a) - y)].$$

Assim,

$$d(g_1, (1/R^2, 1), 0) := \frac{1}{2} [\text{sgn}(g_1(1)) - \text{sgn}(g_1(1/R^2))].$$

Segue da condição  $(f_4)$  que o máximo

$$\max_{s \geq 0} I(sRu_*^+)$$

é atingido em  $s = 1/R$ . Sendo  $0 < 1/R^2 < 1/R < 1$ , pela geometria do funcional  $I$ , temos

$$g_1(1/R^2) = I'(\frac{1}{R}u_*^+) \frac{1}{R}u_*^+ > 0$$

e

$$g_1(1) = I'(Ru_*^+)Ru_*^+ < 0.$$

Logo,

$$d(g_1, (1/R^2, 1), 0) = \frac{1}{2}[-1 - 1] = -1$$

Analogamente, mostra-se que

$$d(g_2, (1/R^2, 1), 0) = \text{sgn}(-g_2(1/R^2)) = -1.$$

Portanto,

$$d(G, Q, (0, 0)) = (-1).(-1) = 1.$$

Agora, observe que

$$\gamma(s, t) = \eta(sRu_*^+ + tRu_*^-) = sRu_*^+ + tRu_*^-, \quad \forall (s, t) \in \partial Q. \quad (1.23)$$

De fato, sejam  $s = 1/R^2$  e  $t \in \left[ \frac{1}{R^2}, 1 \right]$ . Pelo Lema 1.1.12,

$$\begin{aligned} I(sRu_*^+ + tRu_*^-) &= I\left(\frac{1}{R}u_*^+\right) + I(tRu_*^-) \\ &< \frac{I(u_*^+)}{2} + I(u_*^-) = I(u_*) - \frac{I(u_*^+)}{2}. \end{aligned}$$

Por (1.20), Corolário 1.1.9 e pela escolha de  $\bar{\epsilon} > 0$  feita em (1.19),

$$I(sRu_*^+ + tRu_*^-) < c^* + \frac{\bar{\epsilon}}{2} - \delta_2 < c^* - 2\bar{\epsilon},$$

ou seja,

$$\frac{1}{R}u_*^+ + tRu_*^- \notin I^{-1}([c^* - 2\bar{\epsilon}, c^* + 2\bar{\epsilon}]) \cap S_{2\bar{\delta}},$$

para todo  $t \in \left[ \frac{1}{R^2}, 1 \right]$ . Logo, pelo item (i),

$$\gamma\left(\frac{1}{R^2}, t\right) = \eta\left(\frac{1}{R}u_*^+ + tRu_*^-\right) = \frac{1}{R}u_*^+ + tRu_*^-.$$

Os outros casos são similares. Assim,

$$\gamma(s, t)^+ = sRu_*^+ \quad \text{e} \quad \gamma(s, t)^- = tRu_*^-, \quad \forall (s, t) \in \partial Q,$$

e portanto  $H \equiv G$  sobre  $\partial Q$ . Consequentemente, pela *Propriedade de dependência na fronteira* do Grau de Brouwer,

$$d(H, Q, (0, 0)) = d(G, Q, (0, 0)) = 1 \neq 0$$

Sendo assim, da *Propriedade de existência de solução*, existe  $(s_0, t_0) \in Q$  tal que  $H(s_0, t_0) = (0, 0)$ , ou seja,

$$I'(\gamma^+(s_0, t_0))\gamma^+(s_0, t_0) = 0 \quad \text{e} \quad I'(\gamma^-(s_0, t_0))\gamma^-(s_0, t_0) = 0.$$

Portanto,

$$\gamma(s_0, t_0) \in \eta(g(Q)) \cap \mathcal{M},$$

concluindo a demonstração da Afirmação 1.1.15. ■

### Demonstração do Teorema 1.1.1.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $\epsilon = \frac{1}{4n}$  e  $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Pela Proposição 1.1.14, existe  $u_n \in S_{2/\sqrt{n}}$  verificando

$$u_n \in I^{-1}([c^* - 1/2n, c^* + 1/2n])$$

e

$$\|I'(u_n)\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Sendo  $u_n \in S_{2/\sqrt{n}}$ , por continuidade, existe  $(v_n) \subset S$  satisfazendo

$$I(v_n) \rightarrow c^* \quad \text{e} \quad I'(v_n) \rightarrow 0,$$

em outras palavras,  $(v_n)$  é uma sequência  $(PS)_{c^*}$  de funções nodais para  $I$ .

**Afirmação 1.1.16** *A sequência  $(v_n)$  é limitada em  $E$  e, para uma subsequência de  $(v_n)$ , ainda denotada por  $(v_n)$ ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_V^2 < 1.$$

De fato, sendo  $(v_n) \subset S$ , é simples ver que  $(v_n)$  é limitada em  $E$ . Logo,

$$I'(v_n)v_n = o_n(1)$$

e

$$c^* + o_n(1) = I(v_n) - \frac{1}{\theta}I'(v_n)v_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|v_n\|_V^2 - \int_{\Omega} [F(v_n) - \frac{1}{\theta}f(v_n)v_n].$$

A igualdade acima, junto com  $(f_3)$  e o Lema 1.1.5, implica em

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_V \leq \frac{2\theta c^*}{\theta - 2} < 1.$$

Agora, seja  $v_0 \in E$  o limite fraco de  $(v_n)$  em  $E$ . Combinando a Afirmação 1.1.16 com o Lema 1.1.6, deduzimos que  $v_0$  é uma solução fraca do problema  $(D)$ . Finalmente, para concluir a demonstração, devemos mostrar que  $v_0^{\pm} \neq 0$ . Sabemos que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } E;$$

$$v_n(x) \rightarrow v_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega; \text{ e}$$

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ em } L^q(\Omega).$$

Por outro lado, sendo  $v_n \in S$ , existem constantes  $s_n, t_n \in \left[\frac{1}{R^2}, 1\right]$  e  $u_n \in \tilde{S}_{\lambda}$ , tais que  $v_n = s_n R u_n^+ + t_n R u_n^-$ . Logo, a menos de subsequência,

$$v_n(x) = s_n R u_n^+(x) + t_n R u_n^-(x) \rightarrow s_0 R u_0^+(x) + t_0 R u_0^-(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

para algum par  $s_0, t_0 \in \left[\frac{1}{R^2}, 1\right]$ , onde  $u_0 \in E$  é o limite fraco da sequência  $(u_n) \subset \tilde{S}_{\lambda}$ . Por unicidade do limite,

$$v_0(x) = s_0 R u_0^+(x) + t_0 R u_0^-(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Usando o Lema 1.1.11, para  $q > 2$  escolhido arbitrariamente, existe  $\delta_q > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |u_n^{\pm}|^q \geq \delta_q$$

Passando ao limite de  $n \rightarrow \infty$  na desigualdade acima e usando a compacidade da imersão  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , deduzimos que

$$\int_{\Omega} |u_0^{\pm}|^q \geq \delta_q > 0,$$

mostrando que  $u_0^{\pm} \neq 0$ . Portanto,

$$v_0^+ = s_0 R u_0^+ \neq 0 \text{ e } v_0^- = t_0 R u_0^- \neq 0,$$

completando a demonstração do Teorema 1.1.1.



**Observação 1.1.17** Usando os mesmos argumanetos da Seção 1.1, trabalhando agora com a Desigualdade de Trudinger-Moser dada em (3) e (4), é possível mostrar a existência de solução nodal de energia mínima para a equação de Schrödinger com condição de fronteira de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u & = & f(u), \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (N)$$

onde  $\Omega$  é um domínio em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira suave, e  $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é um potencial contínuo verificando  $V(x) \geq V_0 > 0$ , para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.18** Suponha que as hipóteses  $(f_1) - (f_5)$  são válidas. Então, o problema (N) possui uma solução nodal de energia mínima, desde que a constante  $C_p$  verifique

$$C_p > \left[ \frac{4\theta\beta_p}{V_0^*(\theta - 2)} \right]^{(p-2)/2}, \text{ onde } V_0^* = \min\{1, V_0\}.$$

# Capítulo 2

## Solução nodal minimal em $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo, mostramos que o caso autônomo ( $V \equiv V_0 > 0$ ) do problema  $(P)$ , quando  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , não possui solução nodal de energia mínima. Mostramos ainda que é possível obter a existência de solução nodal de energia mínima para o problema não-autônomo  $(P)$  em  $\mathbb{R}^2$ , no caso em que  $V$  é limitado inferiormente por uma constante positiva e que no infinito se aproxima de um potencial  $\mathbb{Z}^2$ -periódico. Ainda sobre o problema autônomo, mostramos um resultado de existência de solução nodal radial minimal, i.e., solução nodal radialmente simétrica e de menor energia dentre todas as soluções radiais.

### 2.1 Existência de solução nodal de energia mínima para o problema não-autônomo.

Nesta seção, mostramos um resultado de existência de solução nodal de energia mínima para o problema não-autônomo:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases} \quad (P)$$

onde  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é um potencial contínuo satisfazendo

$(V_1)$  Existe uma constante  $V_0 > 0$  tal que  $V_0 \leq V(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ ;

(V<sub>2</sub>) Existe uma função contínua e  $\mathbb{Z}^2$ -periódica  $V_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$V(x) \leq V_\infty(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x) - V_\infty(x)| = 0.$$

(V<sub>3</sub>) Existem  $\mu < 1/2$  e  $C > 0$  tais que

$$V(x) \leq V_\infty(x) - Ce^{-\mu|x|}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos supor que a não-linearidade  $f$  seja uma função contínua e ímpar, satisfazendo as mesmas hipóteses  $(f_1) - (f_5)$ , enunciadas no Capítulo 1.

O nosso principal resultado para o problema não-autônomo é o seguinte.

**Teorema 2.1.1** *Suponha que as hipóteses  $(V_1) - (V_3)$  são válidas e que  $f$  seja uma função ímpar satisfazendo as hipóteses  $(f_1) - (f_5)$ . Então, o problema elíptico*

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

possui uma solução nodal de energia mínima, desde que a constante  $C_p$  verifique

$$C_p > \left[ \frac{2\theta\gamma_p}{V_0^*(\theta - 2)} \right]^{(p-2)/2}, \quad (2.1)$$

onde

$$V_0^* = \min\{1, V_0\}, \quad \gamma_p = \inf_{\mathcal{M}_{B_1(0)}} J_p,$$

$$J_p(u) = \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} (|\nabla u|^2 + V_1|u|^2) - \frac{1}{p} \int_{B_1(0)} |u|^p, \quad V_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^2} V_\infty(x)$$

e

$$\mathcal{M}_{B_1(0)}^p = \{u \in H_0^1(B_1(0)) : u^\pm \neq 0 \quad e \quad J_p'(u^\pm)u^\pm = 0\}.$$

A idéia para demonstrar o Teorema 2.1.1 foi inspirada em Alves, Soares e Souto [9] e consiste no seguinte: Usaremos o Teorema 1.1.1 para obter uma solução nodal de energia mínima  $u_n \in H_0^1(B_n(0))$ , para o problema de Dirichlet quando  $\Omega = B_n(0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Em seguida, mostramos que a sequência  $(u_n)$  é fracamente convergente em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  e que o seu limite fraco é uma solução nodal de energia mínima para o problema  $(P)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

No que segue, vamos considerar a seguinte norma em  $H^1(\Omega)$ :

$$\|u\| = \left( \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) \right)^{1/2}$$

Por  $(V_1)$  e  $(V_2)$ , tem-se que  $\|\cdot\|$  é equivalente a norma usual em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ :

$$\|u\|_1 = \left( \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \right)^{1/2},$$

pois

$$V_0^* \|u\|_1^2 \leq \|u\|^2 \leq V_1^* \|u\|_1^2, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad (2.2)$$

onde  $V_1^* = \max\{1, V_1\}$ .

Daqui em diante, denotamos por  $E$  o espaço  $H^1(\mathbb{R}^2)$  munido com a norma  $\|\cdot\|$ .

Usando as hipóteses  $(f_1)$  e  $(f_2)$ , mostra-se que para cada  $\epsilon > 0$ ,  $q \geq 1$  e  $\beta \geq 4$ , existe uma constante  $C = C(\epsilon, q, \beta) > 0$  tal que

$$f(s) \leq \epsilon |s| + C |s|^{q-1} (e^{\beta\pi s^2} - 1), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

o que implica em

$$sf(s), \quad F(s) \leq \epsilon s^2 + C |s|^q (e^{\beta\pi s^2} - 1), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Assim, pela Desigualdade de Trudinger-Moser devida a Cao (6), temos  $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^2)$  para todo  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ . Portanto, o funcional energia associado com  $(P)$ , dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u), \quad u \in E,$$

está bem definido. Além disso, mostra-se que  $I$  é um funcional de classe  $C^1$  sobre  $E$  com

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + V(x)uv] - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v, \quad \forall u, v \in E.$$

Conseqüentemente, pontos críticos de  $I$  são precisamente as soluções fracas de  $(P)$ .

Sabemos que toda solução não trivial de  $I$  pertence a variedade de Nehari

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : I'(u)u = 0\}.$$

Dizemos que uma função  $u \in \mathcal{N}$  é uma solução de energia mínima de  $(P)$  quando

$$I(u) = c_1 \quad \text{e} \quad I'(u) = 0,$$

onde

$$c_1 = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u).$$

Como estamos interessados em solução nodal de energia mínima, definimos o conjunto:

$$\mathcal{M} = \{u \in E : u^\pm \neq 0, I'(u^\pm)u^\pm = 0\},$$

e o número real

$$c^* = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u).$$

Note que toda solução nodal de  $(P)$  pertence a  $\mathcal{M}$ . Dizemos que  $u \in \mathcal{M}$  é uma solução nodal de energia mínima de  $(P)$  quando

$$I(u) = c^* \quad \text{e} \quad I'(u) = 0.$$

**Lema 2.1.2** *O número  $c^*$  verifica*

$$c^* < \frac{V_0^*(\theta - 2)}{2\theta}.$$

**Demonstração** Ver Lema 1.1.5 do Capítulo 1.

No que segue, enunciamos alguns resultados já obtidos na literatura, os quais serão necessários para demonstrar o Teorema 2.1.1.

O primeiro pode ser encontrado em Alves, Carrião e Medeiros [12].

**Lema 2.1.3** *Seja  $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  uma função convexa e par tal que  $F(0) = 0$  e  $f(s) = F'(s) \geq 0, \forall s \in [0, +\infty)$ . Então, para todo  $t, s \geq 0$ ,*

$$|F(t - s) - F(t) - F(s)| \leq 2(f(t)s + f(s)t).$$

Os dois resultados seguintes são devido a Alves, do Ó e Miyagaki [11]. O primeiro resultado está relacionado com a existência de solução positiva do problema  $(P)$  para potenciais  $\mathbb{Z}^2$ -periódicos.

**Teorema 2.1.4** *Suponha que as hipóteses  $(V_1) - (V_2)$ ,  $(f_1) - (f_5)$  e (2.1) são válidas. Então*

$$(P_\infty) \quad \begin{cases} -\Delta u + V_\infty(x)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

possui uma solução positiva de energia mínima, isto é, existe  $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\bar{u} > 0$ ,  $I_\infty(\bar{u}) = c_\infty$  e  $I'_\infty(\bar{u}) = 0$ , onde

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V_\infty(x)u^2) - \int_{\mathbb{R}^2} F(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2),$$

$$c_\infty = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u)$$

e  $\mathcal{N}_\infty$  denota a variedade de Nehari

$$\mathcal{N}_\infty = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} : I'_\infty(u)u = 0\}.$$

O segundo resultado está relacionado com o caso assintoticamente periódico.

**Teorema 2.1.5** *Suponha que as hipóteses  $(V_1) - (V_2)$ ,  $(f_1) - (f_5)$  e (2.1) são válidas. Então, o problema (P) possui uma solução positiva de energia mínima, ou seja, existe  $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tal que  $u_1 > 0$ ,  $I(u_1) = c_1$  e  $I'(u_1) = 0$ .*

Além disso, temos o seguinte resultado devido a Alves [6].

**Teorema 2.1.6** *Assuma que  $(f_1)$  e  $(f_2)$  são válidas. Então, qualquer solução positiva  $\bar{u}$  do problema  $(P_\infty)$  satisfaz*

$$(I) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x) = 0$$

e

$$(II) \quad C_1 e^{-a|x|} \leq \bar{u} \leq C_2 e^{-b|x|} \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes positivas e  $0 < b < 1 < a$ . Além disso, podemos escolher  $a = 1 + \delta$ ,  $b = 1 - \delta$ , para  $\delta > 0$ . O mesmo resultado vale para a função  $u_1$  dada no Teorema 2.1.5.

**Demonstração.** Usando o crescimento de  $f$  dado em (2.3), temos

$$|f(\bar{u})| \leq \epsilon |\bar{u}| + C \left( e^{\beta\pi\bar{u}^2} - 1 \right).$$

Logo, definindo  $h(x) := f(\bar{u}(x))$  e usando o Lema A.1 do Apêndice A, para  $q > 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |h(x)|^q &\leq (2\epsilon)^q \int_{\mathbb{R}^2} |\bar{u}|^q + (2C)^q \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\beta\pi\bar{u}^2} - 1 \right)^q. \\ &\leq (2\epsilon)^q \int_{\mathbb{R}^2} |\bar{u}|^q + C \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\beta\pi q \bar{u}^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Logo, pela Desigualdade de Trudinger-Moser (5), temos  $h \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)$  para todo  $q \geq 1$ .

Por argumentos Bootstrap, para  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $R > 0$ , tem-se  $\bar{u} \in W^{2,q}(B_R(x))$  com

$$\|\bar{u}\|_{W^{2,q}(B_R(x))} \leq C \left( \|h\|_{L^q(B_{2R}(x))} + \|\bar{u}\|_{L^q(B_{2R}(x))} \right)$$

o que implica em

$$\|\bar{u}\|_{W^{2,q}(B_R(x))} \leq C \left( |h|_{L^q(B_{2R}(x))} + |\bar{u}|_{L^2(B_{2R}(x))} \right).$$

Usando a imersão contínua  $W^{2,q}(B_R(x)) \hookrightarrow C(\bar{B}_R(x))$ , obtemos

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty(B_R(x))} \leq C \left( |h|_{L^q(B_{2R}(x))} + |\bar{u}|_{L^2(B_{2R}(x))} \right).$$

A última desigualdade implica que  $\bar{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x) = 0$ .

As desigualdades em (II) envolvendo as funções exponenciais seguem usando o mesmo argumento de Li e Yan [39]. ■

A próxima proposição é um ponto importante em nosso argumento para obter solução nodal de energia mínima, uma vez que estabelece uma importante estimativa superior para o nível  $c^*$ .

**Proposição 2.1.7** *Suponha que  $f$  é uma função ímpar satisfazendo  $(f_1) - (f_5)$  e que as hipóteses  $(V_1) - (V_3)$  são válidas. Então,*

$$c^* < c_1 + c_\infty.$$

**Demonstração.** Sejam  $\bar{u}$  uma solução positiva de energia mínima de  $(P_\infty)$  e  $u_1$  uma solução positiva de energia mínima de  $(P)$  dadas no Teorema 2.1.4 e Teorema 2.1.5, respectivamente. Vamos definir  $\bar{u}_n(x) = \bar{u}(x - x_n)$ , onde  $x_n = (0, n)$  e para  $\alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} h_n^\pm(\alpha, \beta) &= \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^\pm|^2 + V(x)|(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^\pm|^2) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} f((\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^\pm)(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^\pm. \end{aligned}$$

Usando o fato que  $I'(u_1)u_1 = 0$  e a hipótese  $(f_4)$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(u_1/2)|^2 + V(x)(u_1/2)^2) - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_1/2)(u_1/2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_1/2)}{(u_1/2)} \right) \left( \frac{u_1}{2} \right)^2 > 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (|2\nabla(u_1)|^2 + V(x)|2u_1|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} f(2u_1)(2u_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(2u_1)}{2u_1} \right) (2u_1)^2 < 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora, observe que por uma mudança de variáveis, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}_n/2)|^2 + V(x)(\bar{u}_n/2)^2) = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}/2)|^2 + V(x+x_n)(\bar{u}/2)^2) \quad (2.7)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{u}_n/2)(\bar{u}_n/2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{u}/2)(\bar{u}/2). \quad (2.8)$$

Segue de (V<sub>2</sub>) que

$$V(x+x_n)(\bar{u}(x)/2)^2 \rightarrow V_\infty(x)(\bar{u}(x)/2)^2 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , e

$$V(x+x_n)(\bar{u}/2)^2 \leq V_\infty(x)(\bar{u}/2)^2 \in L^1(\mathbb{R}^2), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}/2)|^2 + V(x+x_n)(\bar{u}/2)^2) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}/2)|^2 + V_\infty(x)(\bar{u}/2)^2). \quad (2.9)$$

Segue de (2.9) e (2.7) que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}_n/2)|^2 + V(x)(\bar{u}_n/2)^2) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}/2)|^2 + V_\infty(x)(\bar{u}/2)^2). \quad (2.10)$$

Usando a hipótese (f<sub>4</sub>), obtemos

$$I_\infty(\bar{u}/2)(\bar{u}/2) = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}/2)|^2 + V_\infty(x)(\bar{u}/2)^2) - \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{u}/2)(\bar{u}/2) > 0.$$

Logo, por (2.8) e (2.10), existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\bar{u}_n/2)|^2 + V(x)(\bar{u}_n/2)^2) - \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{u}_n/2)(\bar{u}_n/2) > 0, \quad (2.11)$$

para todo  $n \geq n_0$ . Analogamente, mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(2\bar{u}_n)|^2 + V(x)(2\bar{u}_n)^2) - \int_{\mathbb{R}^2} f(2\bar{u}_n)(2\bar{u}_n) < 0. \quad (2.12)$$

para todo  $n \geq n_0$ .

**Afirmção 2.1.8** *Existe  $n_0 > 0$  tal que*

$$\begin{cases} h_n^+(1/2, \beta) > 0, \\ h_n^+(2, \beta) < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

para todo  $n \geq n_0$ , uniformemente em  $\beta \in [1/2, 2]$ . Analogamente,

$$\begin{cases} h_n^-(\alpha, 1/2) > 0, \\ h_n^-(\alpha, 2) < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

para todo  $n \geq n_0$ , uniformemente em  $\alpha \in [1/2, 2]$ .



**Demonstração da Afirmação 2.1.8.** Vamos demonstrar apenas que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $h_n^+(1/2, \beta) > 0$  para todo  $n \geq n_0$ , uniformemente em  $\beta \in [1/2, 2]$ , pois os demais casos seguem usando o mesmo argumento. Note que pelo item (I) do Teorema 2.1.6, temos  $\bar{u}_n(x) := \bar{u}(x - x_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , pois  $|x - x_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, a idéia é mostrar que

$$h_n^+(1/2, \beta) := I'((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+) \rightarrow I'(u_1/2)(u_1/2) > 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente em  $\beta \in [1/2, 2]$ . Para isto, basta mostrar que os seguintes limites ocorrem:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)|^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(u_1/2)|^2; \\ \text{(b)} \quad & \int_{\mathbb{R}^2} V(x)((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u_1/2)^2; \\ \text{(c)} \quad & \int_{\mathbb{R}^2} f((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+ \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_1/2)u_1/2, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente em  $\beta \in [1/2, 2]$ .

**Demonstração de (a):** Observe primeiro que, para  $\beta \in [1/2, 2]$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n |\nabla((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n |\nabla(u_1/2)|^2 - \beta \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n \nabla u_1 \nabla \bar{u}_n \\ &\quad + \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n |\nabla \bar{u}_n|^2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde  $\chi_n(x) = \chi_{[u_1/2 - \beta\bar{u}_n > 0]}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Desde que

$$\|\chi_n \bar{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|\bar{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \|\bar{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$$

e

$$\chi_n(x)\bar{u}_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

temos,

$$\chi_n \bar{u}_n \rightharpoonup 0 \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^2),$$

de onde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n \nabla u_1 \nabla(\bar{u}_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_1 \nabla(\chi_n \bar{u}_n) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \tag{2.16}$$

Sendo

$$\chi_n |\nabla(u_1(x)/2)|^2 \rightarrow |\nabla u_1(x)/2| \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$\chi_n |\nabla(u_1/2)| \leq |\nabla(u_1/2)|^2 \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n(x) |\nabla(u_1/2)|^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(u_1/2)|^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Agora, fazendo uma mudança de variável,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n |\nabla \bar{u}_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{u}|^2 \chi_{[u_1(x+x_n)/2 - \beta \bar{u}(x) > 0]}.$$

Desde que  $u_1(x+x_n) \rightarrow 0$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$|\nabla \bar{u}(x)|^2 \chi_{[u_1(x+x_n)/2 - \beta \bar{u}(x) > 0]} \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Sendo

$$|\nabla \bar{u}|^2 \chi_{[u_1(x+x_n)/2 - \beta \bar{u}(x) > 0]} \leq |\nabla \bar{u}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n |\nabla \bar{u}_n|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Usando os limites em (2.16), (2.17) e (2.18), juntamente com o fato de que  $\beta \in [1/2, 2]$ , concluímos que o limite em (a) ocorre.

**Demonstração de (b):** Para  $\beta \in [1/2, 2]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$u_1/2 - 2\bar{u}_n \leq u_1/2 - \beta \bar{u}_n \leq u_1/2 - \bar{u}_n/2, \quad (2.19)$$

o que implica em

$$[u_1/2 - 2\bar{u}_n \geq 0] \subset [u_1/2 - \beta \bar{u}_n \geq 0] \subset [u_1/2 - \bar{u}_n/2 \geq 0].$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{[u_1/2 - 2\bar{u}_n \geq 0]} V(x)(u_1/2 - \beta \bar{u}_n)^2 &\leq \int_{[u_1/2 - \beta \bar{u}_n \geq 0]} V(x)(u_1/2 - \beta \bar{u}_n)^2 \\ &\leq \int_{[u_1/2 - \bar{u}_n/2 \geq 0]} V(x)(u_1/2 - \beta \bar{u}_n), \end{aligned}$$

e por (2.19),

$$\begin{aligned} \int_{[u_1/2-2\bar{u}_n \geq 0]} V(x)(u_1/2 - 2\bar{u}_n)^2 &\leq \int_{[u_1/2-\beta\bar{u}_n \geq 0]} V(x)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^2 \\ &\leq \int_{[u_1/2-\bar{u}_n/2 \geq 0]} V(x)(u_1/2 - \bar{u}_n/2)^2 \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \chi'_n V(x)(u_1/2 - 2\bar{u}_n)^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} V(x)((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \chi''_n V(x)(u_1/2 - \bar{u}_n/2)^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde  $\chi'_n = \chi_{[u_1/2-2\bar{u}_n \geq 0]}$  e  $\chi''_n = \chi_{[u_1/2-\bar{u}_n/2 \geq 0]}$ .

Desde que  $\bar{u}_n(x) \rightarrow 0$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^2$  e  $u_1 > 0$ , temos

$$\chi'_n(x), \chi''_n(x) \rightarrow 1 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$\chi'_n V(x)(u_1/2 - 2\bar{u}_n)^2 \leq V(x)(u_1/2)^2 \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

$$\chi'_n(x) V(x)(u_1(x)/2 - 2\bar{u}_n(x))^2 \rightarrow V(x)(u_1(x)/2)^2 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

e

$$\chi''_n V(x)(u_1/2 - \bar{u}_n/2)^2 \leq V(x)(u_1/2)^2 \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

$$\chi''_n(x) V(x)(u_1(x)/2 - \bar{u}_n(x)/2)^2 \rightarrow V(x)(u_1(x)/2)^2 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi'_n V(x)(u_1/2 - 2\bar{u}_n)^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u_1/2)^2 \quad (2.21)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi''_n V(x)(u_1/2 - \bar{u}_n/2)^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u_1/2)^2. \quad (2.22)$$

Passando ao limite de  $n \rightarrow \infty$  em (2.20) e usando (2.21) e (2.22), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u_1/2)^2$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , mostrando que o limite em (b) ocorre.

**Demonstração de (c):** Para  $\beta \in [1/2, 2]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$u_1/2 - 2\bar{u}_n \leq u_1/2 - \beta\bar{u}_n \leq u_1/2 - \bar{u}_n/2$$

o que implica em

$$[u_1/2 - 2\bar{u}_n \geq 0] \subset [u_1/2 - \beta\bar{u}_n \geq 0] \subset [u_1/2 - \bar{u}_n/2 \geq 0].$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{[u_1/2 - 2\bar{u}_n \geq 0]} f(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n) &\leq \int_{[u_1/2 - \beta\bar{u}_n \geq 0]} f(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n) \\ &\leq \int_{[u_1/2 - \bar{u}_n/2 \geq 0]} f(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n). \end{aligned}$$

Por  $(f_4)$ , a função  $t \mapsto f(t)t$  é crescente em  $t \in [0, +\infty]$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{[u_1/2 - 2\bar{u}_n \geq 0]} f(u_1/2 - 2\bar{u}_n)(u_1/2 - 2\bar{u}_n) &\leq \int_{[u_1/2 - \beta\bar{u}_n \geq 0]} f(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n) \\ &\leq \int_{[u_1/2 - \bar{u}_n/2 \geq 0]} f(u_1/2 - \bar{u}_n/2)(u_1/2 - \bar{u}_n/2), \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \chi'_n f(u_1/2 - 2\bar{u}_n)(u_1/2 - 2\bar{u}_n) &\leq \int_{\mathbb{R}^2} f((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+ \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \chi''_n f(u_1/2 - \bar{u}_n/2)(u_1/2 - \bar{u}_n/2), \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $\chi'_n = \chi_{[u_1/2 - 2\bar{u}_n \geq 0]}$  e  $\chi''_n = \chi_{[u_1/2 - \bar{u}_n/2 \geq 0]}$ .

Usando novamente que  $t \mapsto f(t)t$  é crescente em  $t \in [0, +\infty]$  e o fato que

$$\bar{u}_n(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

obtemos

$$\chi'_n f(u_1/2 - 2\bar{u}_n)(u_1/2 - 2\bar{u}_n) \leq f(u_1/2)(u_1/2) \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

$$\chi'_n(x) f(u_1(x)/2 - 2\bar{u}_n(x))(u_1(x)/2 - 2\bar{u}_n(x)) \rightarrow f(u_1(x)/2)(u_1(x)/2) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

e

$$\chi''_n f(u_1/2 - \bar{u}_n/2)(u_1/2 - \bar{u}_n/2) \leq f(u_1/2)(u_1/2) \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

$$\chi''_n(x) f(u_1(x)/2 - \bar{u}_n(x)/2)(u_1(x)/2 - \bar{u}_n(x)/2) \rightarrow f(u_1(x)/2)(u_1(x)/2) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi'_n f(u_1/2 - 2\bar{u}_n)(u_1/2 - 2\bar{u}_n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_1/2)(u_1/2) \quad (2.24)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi''_n f(u_1/2 - \bar{u}_n/2)(u_1/2 - \bar{u}_n/2) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_1/2)(u_1/2). \quad (2.25)$$

Passando ao limite de  $n \rightarrow \infty$  em (2.23) e usando (2.24) e (2.25), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f((u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+)(u_1/2 - \beta\bar{u}_n)^+ \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_1/2)(u_1/2)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , mostrando que o limite em (c) ocorre.

Sendo a Afirmação 2.1.8 verdadeira, podemos aplicar a variante do Teorema do valor médio devido a Miranda [41], para obter  $\alpha^*, \beta^* \in [1/2, 2]$  tal que  $h_n^\pm(\alpha^*, \beta^*) = 0$ , para qualquer  $n \geq n_0$ . Logo,

$$\alpha^* u_1 - \beta^* \bar{u}_n \in \mathcal{M}, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Assim, tendo em vista a definição de  $c^*$ , para demonstrar a Proposição 2.1.7 é suficiente mostrar que

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq \alpha, \beta \leq 2} I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) < c_1 + c_\infty \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Para isto, primeiro usamos o Lema 2.1.3 para obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(\alpha u_1)|^2 + |\nabla(\beta \bar{u}_n)|^2) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)(|\alpha u_1|^2 + |\beta \bar{u}_n|^2) \\ &\quad - \alpha \beta \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_1 \nabla \bar{u}_n + V(x) u_1 \bar{u}_n) - A_1, \end{aligned}$$

onde

$$A_1 = \int_{\mathbb{R}^2} F(\alpha u_1) + \int_{\mathbb{R}^2} F(\beta \bar{u}_n) - 2 \int_{\mathbb{R}^2} [f(\alpha u_1) \beta \bar{u}_n + f(\beta \bar{u}_n) \alpha u_1].$$

Sendo  $u_1$  uma solução positiva de (P),

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_1 \nabla \bar{u}_n + V(x) u_1 \bar{u}_n) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_1) \bar{u}_n \geq 0,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) &\leq I(\alpha u_1) + I_\infty(\beta \bar{u}_n) + 2\alpha \int_{\mathbb{R}^2} f(\beta \bar{u}_n) u_1 + 2\beta \int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha u_1) \bar{u}_n \quad (2.26) \\ &\quad + \frac{\beta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (V(x) - V_\infty(x)) \bar{u}_n^2. \end{aligned}$$

Pela hipótese (V<sub>3</sub>),

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V(x) - V_\infty(x)) \bar{u}_n^2 \leq -C \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mu|x|} \bar{u}_n^2.$$

Usando a invariância de  $\mathbb{R}^2$  por translação e fazendo uma mudança de variável na última integral da desigualdade acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V(x) - V_\infty(x)) \bar{u}_n^2 \leq -C \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mu|x+x_n|} |\bar{u}|^2,$$

e como  $|x + x_n| \leq |x| + |x_n| = |x| + n$ ,

$$e^{-\mu|x+x_n|} \geq e^{-\mu|x|-\mu n},$$

o que implica em

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V(x) - V_\infty(x)) \bar{u}_n^2 \leq -C e^{-\mu n} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mu|x|} \bar{u}^2.$$

Sendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mu|x|} \bar{u}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u}^2 < \infty,$$

deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V(x) - V_\infty(x)) \bar{u}_n^2 \leq -C e^{-\mu n}. \quad (2.27)$$

Usando o crescimento de  $f$  dado em (2.3),

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha u_1) \bar{u}_n \leq \epsilon \alpha \int_{\mathbb{R}^2} u_1 \bar{u}_n + C \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi\alpha^2 u_1^2} - 1 \right) u_1 \bar{u}_n. \quad (2.28)$$

Note que pelo Teorema 2.1.6,

$$\int_{B_{n/2}} u_1 \bar{u}_n \leq C_2 \int_{B_{n/2}(0)} u_1 e^{-b|x-x_n|}.$$

Uma vez que  $|x - x_n| \geq |x_n| - |x| = n - |x|$  e  $|x| \leq n/2$ , encontramos  $|x - x_n| \geq n/2$ , de onde segue que

$$\int_{B_{n/2}} u_1 \bar{u}_n \leq C_2 \int_{B_{n/2}} u_1 e^{-bn/2} \leq C e^{-bn/2} \quad (2.29)$$

e como o Teorema 2.1.6 é também válido para  $u_1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{n/2}} u_1 \bar{u}_n \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{n/2}} e^{-b|x|} \bar{u}_n \leq C_2 e^{-bn/2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u}_n \leq C_2 e^{-bn/2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u}. \quad (2.30)$$

De (2.29) e (2.30),

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_1 \bar{u}_n \leq C e^{-bn/2}. \quad (2.31)$$

Por outro lado, sendo  $u_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi\alpha^2 u_1^2} - 1 \right) u_1 \bar{u}_n \leq C \int_{\mathbb{R}^2} u_1 \bar{u}_n \leq C e^{-bn/2}. \quad (2.32)$$

Usando as desigualdades (2.31) e (2.32) em (2.28),

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha u_1) \bar{u}_n \leq C e^{-bn/2}. \quad (2.33)$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\beta \bar{u}_n) u_1 \leq C e^{-bn/2}. \quad (2.34)$$

Usando (2.33), (2.34) e (2.27) em (2.26), obtemos

$$I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) \leq \sup_{\alpha \geq 0} I(\alpha u_1) + \sup_{\beta \geq 0} I_\infty(\beta \bar{u}_n) + C(e^{-bn/2} - e^{-\mu n}).$$

Sendo  $\mu < 1/2$ , para  $n$  suficientemente grande,

$$e^{-bn/2} - e^{-\mu n} < 0,$$

o que implica em

$$\sup_{1/2 \leq \alpha, \beta \leq 2} I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) < c_1 + c_\infty.$$

Consequentemente

$$c^* < c_1 + c_\infty,$$

finalizando a demonstração da proposição. ■

O próximo resultado é uma versão do Lema de Lions (ver [56, Lema 1.21]) para crescimento crítico exponencial em  $\mathbb{R}^2$  devido a Alves, do Ó e Miyagaki [11].

**Lema 2.1.9** *Seja  $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$  uma sequência verificando  $u_n \rightharpoonup 0$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_1^2 \leq m < 1$ . Se existe  $R > 0$  tal que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 = 0$$

e  $(f_1) - (f_3)$  são válidas, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u_n), \quad \int_{\mathbb{R}^2} u_n f(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Usaremos a versão do Lema de Lions para crescimento crítico exponencial em  $\mathbb{R}^2$ , para demonstrar o próximo resultado.

**Lema 2.1.10** *Assuma que  $(V_1) - (V_3)$  e  $(f_1) - (f_5)$  valem. Se  $(u_n) \subset E$  é tal que  $I(u_n) \rightarrow \sigma$ ,  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $I'(u_n)u_n \rightarrow 0$  e*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_n > 0,$$

então  $u \neq 0$ , sempre que  $0 < \sigma < c_\infty$ .

**Demonstração.** Suponha por contradição que  $u \equiv 0$ . Por  $(V_2)$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $R = R(\epsilon) > 0$  tal que

$$|V(x) - V_\infty(x)| < \epsilon, \quad \text{para } |x| \geq R.$$

Como uma consequência de  $u \equiv 0$ , temos

$$\int_{B_R} |V(x) - V_\infty(x)| |u_n|^2 \rightarrow 0.$$

A desigualdade abaixo

$$\int_{\mathbb{R}^2} |V(x) - V_\infty(x)| |u_n|^2 \leq \int_{B_R} |V(x) - V_\infty(x)| |u_n|^2 + \epsilon \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R} |u_n|^2,$$

juntamente com a limitação de  $(u_n)$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  implica em

$$|I(u_n) - I_\infty(u_n)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Um argumento similar mostra que

$$|I'(u_n)u_n - I'_\infty(u_n)u_n| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente,

$$I_\infty(u_n) = \sigma + o_n(1) \quad \text{e} \quad I'_\infty(u_n)u_n = o_n(1). \quad (2.35)$$

No que segue, fixamos  $s_n > 0$  verificando

$$s_n u_n \in \mathcal{N}_\infty.$$

Afirmamos que, a menos de subsequência,  $(s_n)$  converge para 1 quando  $n \rightarrow \infty$ . De fato, vamos primeiro mostrar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 1. \quad (2.36)$$

Suponha por contradição que existe uma subsequência de  $(s_n)$ , ainda denotada por  $(s_n)$ , tal que  $s_n \geq 1 + \delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e algum  $\delta > 0$ . Segue de (2.35) que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + V_\infty(x)|u_n|^2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n + o_n(1). \quad (2.37)$$

Por outro lado, sendo  $s_n u_n \in \mathcal{N}_\infty$ ,

$$s_n \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + V_\infty(x)|u_n|^2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s_n u_n)u_n,$$



de onde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{f(s_n u_n)}{s_n u_n} - \frac{f(u_n)}{u_n} \right) |u_n|^2 = o_n(1). \quad (2.38)$$

Afirmamos que existe  $(y_n) \subset \mathbb{Z}^2$  com  $|y_n| \rightarrow \infty$ ,  $r > 0$  e  $\beta > 0$  tais que

$$\int_{B_r(y_n)} u_n^2 \geq \beta > 0.$$

De fato, caso contrário, usando a versão do Lema de Lions para crescimento crítico em  $\mathbb{R}^2$  enunciado no Lema 2.1.9, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_n = 0,$$

o que é contrário a nossa hipótese.

Agora, seja  $v_n(x) := u_n(x + y_n)$ . Uma vez que  $(u_n)$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , tem-se que  $(v_n)$  é também limitada em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Assim, para alguma subsequência, podemos assumir que  $(v_n)$  é fracamente convergente, e vamos denotar por  $\tilde{v}$  seu limite fraco em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Observando que

$$\int_{B_r(0)} |v_n|^2 = \int_{B_r(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0,$$

deduzimos que  $\tilde{v} \neq 0$  in  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Agora, de (2.38),  $(f_4)$  e do Lema de Fatou, temos

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{f((1+\delta)\tilde{v})}{(1+\delta)\tilde{v}} - \frac{f(\tilde{v})}{\tilde{v}} \right) \tilde{v}^2 \leq 0,$$

o que é impossível. Logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 1.$$

Se  $s_o = \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n < 1$ , podemos assumir que  $s_n < 1$  para  $n$  suficientemente grande. Assim, aplicando novamente o Lema de Fatou, obtemos

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{f(\tilde{v})}{\tilde{v}} - \frac{f(s_o \tilde{v})}{s_o \tilde{v}} \right) \tilde{v}^2 \leq 0 \quad \text{se } s_o > 0$$

e

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2} f(\tilde{v}) \tilde{v} \leq 0 \quad \text{se } s_o = 0,$$

o que é impossível, mostrando que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ . Assim, para alguma subsequência de  $(s_n)$ , ainda denotada por  $(s_n)$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1. \quad (2.39)$$

Como uma consequência de (2.39), temos

**Afirmação 2.1.11**

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(s_n u_n) - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) = o_n(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(s_n u_n) s_n u_n - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_n = o_n(1).$$

De fato, pelo Teorema do Valor médio, existe  $\theta_n(x) \in [0, 1]$  tal que

$$|F(s_n u_n(x)) - F(u_n(x))| = f((\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)u_n(x)) |(s_n - 1)u_n(x)|.$$

Logo, usando o crescimento de  $f$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} F(s_n u_n) - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |F(s_n u_n) - F(u_n)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} f((\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)u_n(x)) |(s_n - 1)u_n(x)| \\ &\leq \epsilon (s_n - 1) [\theta_n(x)(s_n - 1) + 1] \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^2 \\ &\quad + C_\epsilon (s_n - 1) \int_{\mathbb{R}^2} u_n \left( e^{4\pi(\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)^2 u_n^2} - 1 \right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Vamos estimar a última integral acima. Usando a desigualdade de Hölder e o Lema A.1 do Apêndice A, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_n \left( e^{4\pi(\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)^2 u_n^2} - 1 \right) \leq C \|u_n\|_{q'} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi q(\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)^2 u_n^2} - 1 \right) \right)^{1/q}, \tag{2.41}$$

onde  $1/q + 1/q' = 1$ . Desde que  $\|u_n\|^2 \leq m < 1$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi q(\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)^2 u_n^2} - 1 \right) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\alpha_n v_n^2} - 1 \right), \tag{2.42}$$

onde  $\alpha_n = 4\pi m q (\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)^2$  e  $v_n = u_n / \|u_n\|^2$ . Note que sendo  $s_n \rightarrow 1$ ,  $\theta_n(x) \in [0, 1]$  e  $m < 1$ , podemos fixar  $q > 1$  suficientemente próximo de 1 e  $n_0 \in \mathbb{N}$ , de tal modo que  $\alpha_n < 4\pi$ , para todo  $n \geq n_0$ . Assim, pela Desigualdade de Trudinger-Moser devida a Cao (6), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\alpha_n v_n^2} - 1 \right) \leq C, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo, por (2.42),

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi q(\theta_n(x)(s_n - 1) + 1)^2 u_n^2} - 1 \right) \leq C, \quad \forall n \geq n_0, \tag{2.43}$$

com  $1 < q \approx 1$ . Assim, de (2.41) e (2.43),

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_n \left( e^{4\pi(\theta_n(x)(s_n-1)+1)^2 u_n^2} - 1 \right) \leq C|u_n|_{q'}. \quad (2.44)$$

Usando (2.44) em (2.40),

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} F(s_n u_n) - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) \right| \leq \epsilon(s_n - 1)[\theta_n(x)(s_n - 1) + 1]|u_n|_2^2 + C(s_n - 1)|u_n|_{q'}.$$

Sendo  $(u_n)$  limitada em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , por imersões contínua de Sobolev,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} F(s_n u_n) - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) \right| \leq C\epsilon(s_n - 1)[\theta_n(x)(s_n - 1) + 1] + C(s_n - 1),$$

sendo  $s_n \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} F(s_n u_n) - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) \right| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

demonstrando a primeira igualdade da Afirmação 2.1.11. A demonstração da segunda igualdade   obtida usando um argumento similar, concluindo a demonstração da Afirmação 2.1.11.

Agora, observe que sendo  $I'_\infty(s_n u_n)s_n u_n = 0$  e  $I'_\infty(u_n)u_n = o_n(1)$ , temos

$$I'_\infty(s_n u_n)s_n u_n - I'_\infty(u_n)u_n = o_n(1),$$

ou seja,

$$(s_n^2 - 1) \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + V_\infty(x)|u_n|^2) = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^2} f(s_n u_n)s_n u_n - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n,$$

o que implica, pela Afirmação 2.1.11, em

$$(s_n^2 - 1) \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + V_\infty(x)|u_n|^2) = o_n(1). \quad (2.45)$$

Usando (2.45) e a Afirmação 2.1.11, obtemos

$$I_\infty(s_n u_n) = I_\infty(u_n) + o_n(1).$$

Logo

$$c_\infty \leq I_\infty(s_n u_n) = \sigma + o_n(1).$$

Passando ao limite de  $n \rightarrow +\infty$ , encontramos  $c_\infty \leq \sigma$ , o que   impossível, pois  $\sigma < c_\infty$ .

Esta contradição ocorreu pelo fato de assumirmos que  $u \equiv 0$ . Portanto,  $u \neq 0$ .  $\blacksquare$

O próximo lema mostra uma importante propriedade da Variedade de Nehari  $\mathcal{N}$ .

**Lema 2.1.12** *Existe uma constante  $\eta > 0$  tal que*

$$\|u\|^2 \geq \eta > 0,$$

para todo  $u \in \mathcal{N}$ .

**Demonstração.** De fato, caso contrário, existe uma sequência  $(u_n) \subset E$  tal que  $\|u_n\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Sendo  $u_n \in \mathcal{N}$ , temos

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n$$

o que implica, por (2.4),

$$\|u_n\|^2 \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^2 + C \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^q \left( e^{\beta\pi|u_n|^2} - 1 \right).$$

Usando as imersões de Sobolev e a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|u_n\|^2 \leq \epsilon \|u_n\|^2 + C \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{2q} \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\beta\pi|u_n|^2} - 1 \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Usando novamente as imersões de Sobolev e o Lema A.1 do Apêndice A,

$$\|u_n\|^2 \leq \epsilon \|u_n\|^2 + C \|u_n\|^q \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{2\beta\pi|u_n|^2} - 1 \right) \right)^{1/2}.$$

Fixando  $\epsilon < 1$  e  $q > 2$ , obtemos

$$C \leq \|u_n\|^{q-2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{2\beta\pi|u_n|^2} - 1 \right) \right)^{1/2}. \quad (2.46)$$

Agora, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{2\beta\pi|u_n|^2} - 1 \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{2\beta\pi\|u_n\|^2 \left( \frac{|u_n|}{\|u_n\|} \right)^2} - 1 \right)$$

e pela hipótese de contradição feita no início da demonstração,

$$2\beta\pi\|u_n\|^2 \leq 4\pi, \quad \forall n \geq n_0,$$

para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Assim, definindo  $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$ , temos  $|\nabla v_n|_2 \leq \|v_n\| = 1$ . Assim, pela desigualdade de Trudinger-Moser devida a Cao (6), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{2\beta\pi|u_n|^2} - 1 \right) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi v_n^2} - 1 \right) \leq \sup_{|\nabla v|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi v^2} - 1 \right) \leq C_2 \quad (2.47)$$

Usando (2.47) em (2.46), deduzimos

$$\|u_n\| \geq C > 0,$$

o que é uma contradição, pois estamos supondo que  $\|u_n\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , mostrando que o lema ocorre. ■

## 2.2 Demonstração do Teorema 2.1.1

Aplicando o Teorema 1.1.1 do Capítulo 1 com  $\Omega = B_n(0)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma solução nodal  $u_n \in H_0^1(B_n(0))$  para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), & \text{em } B_n(0), \\ u = 0, & \text{sobre } \partial B_n(0), \end{cases} \quad (P)_n$$

no nível

$$c_n^* = \inf_{\mathcal{M}_n} I,$$

onde

$$\mathcal{M}_n = \{u \in H_0^1(B_n(0)) : u^\pm \neq 0 \text{ e } I'(u^\pm)u^\pm = 0\}.$$

Aqui, também denotamos por  $I$  o funcional energia associado com  $(P)_n$ , pois a restrição de  $I$  ao espaço  $H_0^1(B_n(0))$  coincide com o funcional energia associado com  $(P)_n$ .

**Afirmção 2.2.1** *O limite abaixo ocorre*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^* = c^*.$$

De fato, claramente  $(c_n^*)$  é uma sequência não crescente e limitada inferiormente por  $c^*$ . Suponha por contradição que  $\lim c_n^* = \hat{c} > c^*$ . Pela definição de ínfimo, existe  $\phi \in \mathcal{M}$  tal que  $I(\phi) < \hat{c}$ . Sendo  $\phi^\pm \neq 0$ , por densidade, existe uma sequência  $(\omega_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  tal que

$$\omega_n^\pm \neq 0, \quad \omega_n \rightarrow \phi \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Observe que

$$I(\omega_n) = I(\omega_n^+) + I(\omega_n^-) \rightarrow I(\phi) \geq c^* > 0,$$

$$I(\omega_n^\pm) \rightarrow I(\phi^\pm),$$

e

$$I'(\omega_n^\pm)\omega_n^\pm \rightarrow I'(\phi^\pm)\phi^\pm = 0.$$

Agora, considere  $t_n^\pm > 0$  os únicos números reais, dados pelo Corolário 1.1.4 do Capítulo 1, verificando  $t_n^\pm \omega_n^\pm \in \mathcal{N}$  e defina  $\phi_n := t_n^+ \omega_n^+ + t_n^- \omega_n^- \in \mathcal{M}$ . Usando argumentos similares aos da demonstração do Lema 2.1.10, mostrar-se que

$$t_n^\pm \rightarrow 1 \text{ e } I(t_n^\pm \omega_n^\pm) \rightarrow I(\phi^\pm),$$

o que implica em,

$$I(\phi_n) \rightarrow I(\phi).$$

Logo, podemos fixar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $I(\phi_{n_0}) < \hat{c}$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Por outro lado, fixando  $n_1 \in \mathbb{N}$  de tal modo que  $\phi_{n_0} \in \mathcal{M}_{n_1}$ , tem-se

$$c_{n_1} \leq I(\phi_{n_0}) < \hat{c},$$

contradizendo a definição de  $\hat{c}$ , demonstrando a Afirmação 2.2.1. ■

Afirmamos que  $(u_n)$  é uma sequência limitada em  $E$ . De fato, pela condição de Ambrosetti-Rabinowitz  $(f_3)$  e a Afirmação 2.2.1, temos

$$\begin{aligned} c^* + o_n(1) = I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)u_n &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|^2, \end{aligned}$$

de onde segue que  $(u_n)$  é limitada em  $E$ . Além disso, usando a hipótese  $(f_5)$  juntamente com a condição (2.1) e um argumento similar ao usado no Lema 1.1.5 do Capítulo 1, deduzimos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \leq \frac{2c^*\theta}{\theta - 2}. \quad (2.48)$$

No que segue, denotamos também por  $u_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$  a extensão nula de  $u_n \in H_0^1(B_n)$ .

Note que de (2.48), (2.2) e do Lema 2.1.2,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_1^2 \leq \frac{2c^*\theta}{V_0^*(\theta - 2)} < 1. \quad (2.49)$$

Sendo  $H^1(\mathbb{R}^2)$  um espaço de Banach reflexivo, para algum  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2),$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Afirmação 2.2.2** *O limite fraco  $u$  é uma solução fraca de  $(P)$ .*

De fato, seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  e considere  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{supp } \varphi \subset B_n(0), \quad \forall n \geq n_0.$$

Sendo  $u_n$  uma solução fraca de  $(P)_n$  e  $\varphi \in H_0^1(B_n)$  para  $n \geq n_0$ ,

$$\int_{B_n} \nabla u_n \nabla \varphi + V(x)u_n \varphi = \int_{B_n} f(u_n)\varphi, \quad \forall n \geq n_0,$$

ou ainda

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla \varphi + V(x) u_n \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi, \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.50)$$

Tendo em vista (2.49), combinando a Desigualdade de Trudinger-Moser (6) com o Teorema da Convergência dominada generalizada de Lebesgue, mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u) \varphi, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

Por outro lado, da convergência fraca de  $u_n$  para  $u$  em  $E$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla \varphi + V(x) u_n \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla \varphi + V(x) u \varphi, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.52)$$

Passando ao limite em (2.50) e usando (2.51) e (2.52), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla \varphi + V(x) u \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} f(u) \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

e por densidade,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla v + V(x) uv = \int_{\mathbb{R}^2} f(u) v, \quad \forall v \in H_0^1(\mathbb{R}^2),$$

mostrando que  $u$  é uma solução fraca de (P).

Agora, nosso objetivo é mostrar que

$$u \in \mathcal{M} \text{ e } I(u) = c^*.$$

A menos de subsequência, podemos assumir que

$$I(u_n^\pm) \rightarrow \sigma^\pm, \quad \text{onde } c^* = \sigma^+ + \sigma^-.$$

Usando o fato que  $u_n^+, u_n^- \in \mathcal{N}$ , obtemos  $\sigma^\pm \geq c_1 > 0$ . Esta última desigualdade, junto com a Proposição 2.1.7, implica que  $\sigma^\pm < c_\infty$ . Sendo

$$\|u_n^\pm\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n^\pm) u_n^\pm,$$

pelo Lema 2.1.12, temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n^\pm) u_n^\pm \geq \eta > 0,$$

o que implica, pelo Lema 2.1.10, em  $u^\pm \neq 0$ . Logo,  $u \in \mathcal{M}$  e  $I(u) \geq c^*$ .

Para completar a demonstração, basta notar que o Lema de Fatou conduz às desigualdades

$$\begin{aligned} 2c^* &= \liminf_{n \rightarrow \infty} [2I(u_n) - I'(u_n)u_n] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} (f(u_n)u_n - 2F(u_n)) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} (f(u)u - 2F(u)) = 2I(u) - I'(u)u = 2I(u) \geq 2c^*. \end{aligned}$$

Portanto  $I(u) = c^*$ , mostrando que (P) tem uma solução nodal. ■

## 2.3 Existência de solução nodal radial minimal para o problema autônomo.

Nesta seção, combinamos o método desenvolvido no Capítulo 1 com o Princípio de Criticalidade de Palais para demonstrar a existência de solução nodal radial de energia mínima para uma classe de problemas elípticos autônomos envolvendo não-linearidade com crescimento crítico exponencial.

Vamos começar fazendo algumas definições e enunciando alguns resultados que serão utilizados ao longo desta seção.

Definimos a ação de um grupo topológico  $G$  sobre um espaço vetorial normado  $X$ , como sendo uma aplicação contínua  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, u) \mapsto g \cdot u$  tal que

- (1)  $1 \cdot u = u$ ,  $\forall u \in X$ ;
- (2)  $(gh) \cdot u = g \cdot (h \cdot u)$ ,  $\forall g, h \in G$ ,  $u \in X$ ;
- (3)  $u \mapsto g \cdot u$  é linear.

Dizemos que a ação é isométrica quando

$$\|g \cdot u\| = \|u\|.$$

O espaço de pontos invariantes é o subespaço fechado de  $X$  definido por

$$\text{Fix}(G) = \{u \in X : g \cdot u = u, \forall g \in G\}.$$

- Um conjunto  $A \subset X$  é invariante se  $g \cdot A = A$  para cada  $g \in G$ ;
- Um funcional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  é invariante se  $J \circ g = J$  para cada  $g \in G$ ;
- Uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  é equivariante se  $g \circ f = f \circ g$  para cada  $g \in G$ .

O próximo resultado nos dá condições para garantir que pontos críticos de um funcional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  restrito ao  $\text{Fix}(G)$ , são pontos críticos do funcional no espaço  $X$ , ver Willem [56].

**Teorema 2.3.1 (Princípio de Criticalidade de Palais)** *Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $G$  um grupo topológico que age isometricamente em  $X$ . Se  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$  é um funcional invariante e  $u$  é um ponto crítico de  $J$  restrito ao  $\text{Fix}(G)$ , então  $u$  é ponto crítico de  $J$  em  $X$ .*



No que segue, vamos denotar por  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  o seguinte subespaço de  $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$H_r^1(\mathbb{R}^2) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) : u(x) = u(y), \text{ sempre que } |x| = |y|\},$$

formado pelas funções radialmente simétricas de  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Sabemos que

$$H_r^1(\mathbb{R}^2) = \text{Fix}(O(2))$$

segundo a ação isométrica  $* : O(2) \times H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$  definida por

$$(g * u)(x) = u(g \cdot x),$$

onde  $O(2)$  é o grupo das transformações ortogonais em  $\mathbb{R}^2$ .

O próximo resultado é fundamental para que possamos usar o método desenvolvido no Capítulo 1, sua demonstração pode ser encontrada em Kavian [38].

**Lema 2.3.2 (Strauss)** *As seguintes imersões são compactas*

$$H_r^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2),$$

para todo  $s > 2$ .

O principal resultado nesta seção é o seguinte.

**Teorema 2.3.3** *Suponha que as hipóteses  $(f_1) - (f_5)$  sejam válidas. Então, o problema autônomo*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u), & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases} \quad (Q)$$

possui uma solução nodal radialmente simétrica, desde que a constante  $C_p$  verifique

$$C_p > \left[ \frac{2\theta\kappa_p}{\theta - 2} \right]^{(p-2)/2}, \quad \text{onde } \kappa_p = \inf_{\mathcal{M}_1^p} I_p, \quad (2.53)$$

$$I_p(u) = \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) - \frac{1}{p} \int_{B_1(0)} |u|^p.$$

e

$$\mathcal{M}_1^p = \{u \in H_0^1(B_1(0)) : u^\pm \neq 0 \text{ e } I_p'(u^\pm)u^\pm = 0\}$$

**Demonstração.** Considere o funcional energia

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |u|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)$$

restrito ao subespaço  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  e o nível  $c_r^*$  definido por

$$c_r^* := \inf_{u \in \mathcal{M}_r} J(u),$$

onde

$$\mathcal{M}_r = \{u \in H_r^1(\mathbb{R}^2) : u^\pm \neq 0 \text{ e } J'(u^\pm)u^\pm = 0\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que o nível  $c_r^*$  é atingido por um ponto crítico de  $J$ . Para cumprir tal objetivo, como no Capítulo 1, precisamos antes de alguns resultados preliminares.

**Lema 2.3.4** *O número  $c_r^*$  verifica*

$$c_r^* < \frac{\theta - 2}{2\theta}.$$

**Demonstração.** Considere  $w_p \in \mathcal{M}_1^p$  radialmente simétrica tal que  $I_p(w_p) = \kappa_p$  e  $I_p'(w_p) = 0$ . Tem-se

$$\kappa_p = \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} (|\nabla w_p|^2 + |w_p|^2) - \frac{1}{p} \int_{B_1(0)} |w_p|^p, \quad (2.54)$$

$$\int_{B_1(0)} (|\nabla w_p|^2 + |w_p|^2) = \int_{B_1(0)} |w_p|^p \quad (2.55)$$

e

$$\int_{B_1(0)} (|\nabla w_p^\pm|^2 + |w_p^\pm|^2) = \int_{B_1(0)} |w_p^\pm|^p. \quad (2.56)$$

Substituindo (2.55) em (2.54), obtemos

$$\kappa_p = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_{B_1(0)} |w_p|^p. \quad (2.57)$$

Sendo  $w_p$  uma função nodal e radialmente simétrica, pela condição  $(f_4)$ , existem únicos  $s, t > 0$  tais que  $sw_p^+ + tw_p^- \in \mathcal{M}_r$ . Logo,

$$c_r^* \leq J(sw_p^+ + tw_p^-) = J(sw_p^+) + J(tw_p^-),$$

o que implica em

$$\begin{aligned} c_r^* &\leq \frac{s^2}{2} \int_{B_1(0)} (|\nabla w_p^+|^2 + |w_p^+|^2) - \int_{B_1(0)} F(sw_p^+) \\ &\quad + \frac{t^2}{2} \int_{B_1(0)} (|\nabla w_p^-|^2 + |w_p^-|^2) - \int_{B_1(0)} F(tw_p^-). \end{aligned}$$

Usando (2.56) e a hipótese  $(f_5)$ ,

$$c_r^* \leq \left( \frac{s^2}{2} - \frac{C_p s^p}{p} \right) \int_{B_1(0)} |w_p^+|^p + \left( \frac{t^2}{2} - \frac{C_p t^p}{p} \right) \int_{B_1(0)} |w_p^-|^p,$$

de onde segue que

$$c_r^* \leq \max_{r \geq 0} \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{C_p r^p}{p} \right\} \int_{B_1(0)} |w_p|^p.$$

Um cálculo simples mostra que

$$\max_{r \geq 0} \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{C_p r^p}{p} \right\} = C_p^{\frac{2}{2-p}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right),$$

logo, por (2.57),

$$c_r^* \leq C_p^{\frac{2}{2-p}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{B_1(0)} |w_p|^p = C_p^{\frac{2}{2-p}} \kappa_p. \quad (2.58)$$

Combinando a desigualdade em (2.58) com (2.53), obtemos

$$c_r^* < \frac{\theta - 2}{2\theta},$$

como queríamos demonstrar. ■

O próximo lema mostra dois importantes limites envolvendo a função  $f$ .

**Lema 2.3.5** *Seja  $(u_n)$  uma sequência em  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  satisfazendo*

(i)  $b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_1^2 < 1;$

(ii)  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  e;

(iii)  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^2$ .

Então,

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_n = \int_{\mathbb{R}^2} f(u) u \quad (2.59)$$

e

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) v = \int_{\mathbb{R}^2} f(u) v, \quad (2.60)$$

para qualquer  $v \in H_r^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Demonstração.** Usando o crescimento de  $f$  dado em (2.4) com  $\epsilon > 0$ ,  $\beta = 4$  e  $q > 2$ , temos

$$f(s)s \leq \epsilon |s|^2 + C |s|^q \left( e^{4\pi s^2} - 1 \right), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sejam  $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$P(s) := f(s)s \quad \text{e} \quad Q(s) := \epsilon|s|^2 + C|s|^q \left( e^{4\pi s^2} - 1 \right).$$

Note que por  $(f_1)$

$$0 \leq \left| \frac{P(s)}{Q(s)} \right| \leq \frac{C e^{4\pi s^2}}{|s|^{q-1} (e^{4\pi s^2} - 1)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } |s| \rightarrow +\infty.$$

Além disso, por  $(f_2)$ ,

$$0 \leq \left| \frac{P(s)}{Q(s)} \right| \leq \frac{|f(s)|}{\epsilon|s|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow 0.$$

Agora, observe que sendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} |Q(u_n)| = \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^2 + C \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^q \left( e^{4\pi |u_n|^2} - 1 \right),$$

pela desigualdade de Hölder e as imersões contínuas de Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |Q(u_n)| \leq \epsilon \|u_n\|_1^2 + C |u_n|_{qt_1}^q \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi |u_n|^2} - 1 \right)^{t_2} \right)^{1/t_2},$$

onde  $1/t_1 + 1/t_2 = 1$ . Pelo Lema A.1 do Apêndice A e a hipótese (i), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |Q(u_n)| \leq \epsilon b + CC |u_n|_{qt_1}^q \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 |u_n|^2} - 1 \right). \quad (2.61)$$

Desde que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 |u_n|^2} - 1 \right) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 \|u_n\|_1^2 \left( \frac{u_n}{\|u_n\|_1} \right)^2} - 1 \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 b \left( \frac{u_n}{\|u_n\|_1} \right)^2} - 1 \right) \\ &\leq \sup_{\|v\|_1 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 b v^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

e como  $b < 1$ , podemos fixar  $t_2 > 1$  suficientemente próximo de 1 de tal modo que  $\alpha := 4\pi t_2 b < 4\pi$ . Logo, por (2.62) e pela Desigualde de Trudinger Moser (6), existe uma constante  $C > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 |u_n|^2} - 1 \right) \leq \sup_{\|v\|_1 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\alpha v^2} - 1 \right) \leq C, \quad (2.63)$$

para algum  $t_2 > 1$ , suficientemente próximo de 1. Logo, usando (2.63) em (2.61), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |Q(u_n)| \leq \epsilon b + C |u_n|_{qt_1}^q, \quad (2.64)$$

pelas imersões contínuas de Sobolev e a hipótese (i),

$$\int_{\mathbb{R}^2} |Q(u_n)| \leq \epsilon b + C \|u_n\|_1^q \leq \epsilon b + C b^q,$$

mostrando que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} |Q(u_n)| < \infty.$$

Pela Desigualdade de Strauss (Lema A.6 do Apêndice A) e a hipótese (i), temos

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq (2\pi)^{-1/2} |x|^{-1/2} \cdot \|u_n\|_1 \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} |x|^{-1/2} b^{1/2}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$u_n(x) \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty,$$

uniformemente em  $n \in \mathbb{N}$ .

Segue de (iii) que

$$P(u_n(x)) \rightarrow v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

onde  $v(x) := f(u(x))u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . Pelo Teorema A.13 do Apêndice A, concluímos que  $P(u_n)$  converge para  $v$  em  $L^1(\mathbb{R}^2)$ , ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u)u, \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

mostrando que o limite em (2.59) ocorre. A demonstração de (2.60) é obtida usando o mesmo argumento. ■

Agora, estabelecemos alguns resultados relacionados com o conjunto:

$$\tilde{S}_\tau := \{u \in \mathcal{M}_r : J(u) < c_r^* + \tau\},$$

onde  $\tau > 0$  é uma constante a ser fixada convenientemente.

**Lema 2.3.6** *Para todo  $u \in \tilde{S}_\tau$ , tem-se*

$$0 < r_0 \leq \|u^\pm\|_1^2 \leq \|u\|_1^2 \leq m_\tau < 1,$$

para  $\tau > 0$  suficientemente pequeno.

**Demonstração.** A demonstração é uma adaptação dos argumentos usados na demonstração do Lema 1.1.10, usando agora a Desigualdade de Trudinger-Moser devida a Cao (6). ■

**Lema 2.3.7** *Para cada  $q > 1$ , existe  $\delta_q > 0$  tal que*

$$0 < \delta_q \leq \int_{\mathbb{R}^2} |u^\pm|^q \leq \int_{\mathbb{R}^2} |u|^q, \quad \forall u \in \tilde{S}_\tau.$$

**Demonstração.** Ver Lema 1.1.11. ■

Usando o Lema 2.3.7, podemos fixar  $R > 0$  tal que

$$J\left(\frac{1}{R}u^\pm\right), \quad J(Ru^\pm) < \frac{1}{2}J(u^\pm), \quad \forall u \in \tilde{S}_\tau.$$

Definimos

$$S = \left\{ sRu^+ + tRu^- : u \in \tilde{S}_\tau \text{ e } s, t \in \left[ \frac{1}{R^2}, 1 \right] \right\}.$$

A próxima proposição mostra a existência de uma sequência  $(PS)_{c_r^*}$  de funções nodais para o funcional  $J$ .

**Proposição 2.3.8** *Dados  $\epsilon, \delta > 0$ , existe  $u \in J^{-1}([c_r^* - 2\epsilon, c_r^* + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$  verificando*

$$\|J'(u)\| < \frac{4\epsilon}{\delta}.$$

De fato, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $\epsilon = \frac{1}{4n}$  e  $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Pela Proposição 2.3.8, existe  $u_n \in S_{2/\sqrt{n}}$  com

$$u_n \in J^{-1}([c_r^* - 1/2n, c_r^* + 1/2n])$$

e

$$\|J'(u_n)\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Assim, existe  $(v_n) \subset S$  satisfazendo

$$J(v_n) \rightarrow c_r^* \text{ e } J'(v_n) \rightarrow 0,$$

com

$$\|u_n - v_n\| \leq 2/\sqrt{n}.$$

É fácil ver que  $(v_n)$  é limitada em  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  com

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_1^2 < 1. \tag{2.65}$$

Agora, seja  $v_0 \in H$  o limite fraco de  $(v_n)$  em  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$ . Combinando (2.65) com o Lema 2.3.5, deduz-se que  $v_0$  é um ponto crítico do funcional  $J$  restrito ao subespaço  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$ . No que segue, vamos mostrar que  $v_0^\pm \neq 0$ . Sabemos que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H_r^1(\mathbb{R}^2);$$

$$v_n(x) \rightarrow v_0(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ em } L^q(\mathbb{R}^2), \quad \forall q > 2.$$

Por outro lado, usando o fato que  $v_n \in S$ , existem  $s_n, t_n \in \left[\frac{1}{R^2}, 1\right]$  e  $u_n \in \mathcal{M}_r$ , tal que

$$v_n = s_n R u_n^+ + t_n R u_n^- \rightharpoonup s_0 R u_0^+ + t_0 R u_0^- \text{ em } H_r^1(\mathbb{R}^2)$$

e

$$v_n(x) = s_n R u_n^+(x) + t_n R u_n^-(x) \rightarrow s_0 R u_0^+(x) + t_0 R u_0^-(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

para algum  $s_0, t_0 \in \left[\frac{1}{R^2}, 1\right]$ , onde  $u_0 \in H_r^1(\mathbb{R}^2)$  é o limite fraco da sequência  $(u_n) \subset \mathcal{M}_r$ . Pela unicidade do limite, tem-se  $v_0 = s_0 R u_0^+ + t_0 R u_0^-$ . Pelo Lema 2.3.7, obtemos  $u_0^\pm \neq 0$ , o que implica em  $v_0^+ = s_0 R u_0^+ \neq 0$  e  $v_0^- = t_0 R u_0^- \neq 0$ . Finalmente, sendo o funcional  $J : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante sob o grupo das rotações, a demonstração do Teorema 2.3.3 segue usando o Princípio de Criticalidade de Palais.

## 2.4 Não existência de soluções nodais de energia mínima para o problema autônomo.

Nesta seção, demonstramos um resultado de não existência de solução nodal de energia mínima para o problema autônomo  $(Q)$ , isto é, demonstramos que o nível

$$\hat{c} := \inf_{\mathcal{M}} J$$

não é atingido, onde  $J$  é o funcional energia associado ao Problema  $(Q)$  e  $\mathcal{M}$  é o conjunto de Nehari nodal

$$\mathcal{M} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) : u^\pm \neq 0 \text{ and } J'(u^\pm)u^\pm = 0\}.$$

O nosso principal resultado nesta seção é o seguinte

**Teorema 2.4.1** *Suponha que  $f$  satisfaz  $(f_1) - (f_5)$  e que a desigualdade em (2.53) ocorre. Então, o problema autônomo  $(Q)$  não possui solução nodal de energia mínima.*

Antes de demonstrar o Teorema 2.4.1, fixamos algumas notações e demonstramos uma proposição. No que segue, denotamos por

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

e o funcional  $J_+$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  por

$$J_+(u) := \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |u|^2) - \int_{\mathbb{R}^2} F_+(u),$$

onde  $F_+$  é a primitiva de  $f_+$  com  $F_+(0) = 0$ . Segue de [11, Theorem 1.1], que o número

$$c_+ = \inf_{\mathcal{N}_+} J_+$$

onde

$$\mathcal{N}_+ := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} : J'_+(u)u = 0\},$$

é um valor crítico de  $J_+$ . Seja  $v \in \mathcal{N}_+$  o ponto crítico correspondente. Mostra-se que  $v^- = 0$ . Logo  $v$  é não-negativa e, por princípio de máximo,  $v > 0$  sobre  $\mathbb{R}^2$ . Em particular,  $v$  é um ponto crítico positivo de  $J$ .

Analogamente, definindo

$$f_-(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ f(t), & t < 0, \end{cases}$$

denotando por  $J_-$  o funcional correspondente e por  $\mathcal{N}_-$  a variedade de Nehari, o número real

$$c_- := \inf_{\mathcal{N}_-} J_-$$

é um valor crítico de  $J_-$ .

A próxima proposição é um ponto importante no nosso argumento para mostrar o resultado de não existência, pois ela nos fornece uma estimativa exata para  $\hat{c}$ .

**Proposição 2.4.2** *Sob as hipóteses  $(f_1) - (f_5)$ , tem-se*

$$\hat{c} = c_+ + c_-.$$



**Demonstração.** Seja  $v, w \in H^1(\mathbb{R}^2)$  verificando

$$J_+(v) = c_+, \quad J'_+(v) = 0, \quad v(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$J_-(w) = c_-, \quad J'_-(w) = 0 \quad w(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

e considere as funções

$$v_R(x) := \varphi\left(\frac{x}{R}\right)v(x) \quad \text{e} \quad w_{R,n} := \varphi\left(\frac{x-x_n}{R}\right)w(x-x_n),$$

onde  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  é uma função satisfazendo

$$\text{supp } \varphi \subset B_2(0), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi = 1 \text{ sobre } B_1(0) \quad \text{e} \quad x_n = (n, 0).$$

Claramente, para  $n$  suficientemente grande,

$$\text{supp } v_R \cap \text{supp } w_{R,n} = \emptyset.$$

Sejam  $t_R, s_R > 0$  tais que

$$J'(t_R v_R) t_R v_R = 0 \quad \text{e} \quad J'(s_R w_{R,n}) s_R w_{R,n} = 0.$$

Sendo

$$t_R^2 \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_R|^2 + |v_R|^2) = \int_{\mathbb{R}^2} f_+(t_R v_R) t_R v_R$$

e  $v_R \rightarrow v$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , por argumentos similares aos da demonstração do Lema 2.1.10, mostra-se que  $t_R \rightarrow 1$ , quando  $R \rightarrow +\infty$ . Similarmente,

$$s_R^2 \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla w_{R,n}|^2 + |w_{R,n}|^2) = \int_{\mathbb{R}^2} f_+(s_R w_{R,n}) s_R w_{R,n}.$$

Sendo  $w_R \rightarrow w$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , temos  $s_R \rightarrow 1$ , quando  $R \rightarrow +\infty$ . Agora, note que  $u_R := t_R v_R + s_R w_{R,n} \in \mathcal{M}$  com

$$u_R^+ = t_R v_R \quad \text{e} \quad u_R^- = s_R w_{R,n}$$

para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Logo,

$$\hat{c} \leq J(t_R v_R + s_R w_{R,n}) = J(t_R v_R) + J(s_R w_{R,n}).$$

Usando a invariância de  $\mathbb{R}^2$  por translações, e passando ao limite de  $R \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\hat{c} \leq J(v) + J(w).$$

Sendo  $J(v) = J_+(v) = c_+$  e  $J(w) = J_-(w) = c_-$ ,

$$\hat{c} \leq c_+ + c_-.$$

Por outro lado, é claro que  $\hat{c} \geq c_+ + c_-$ . Portanto, pode-se concluir que  $\hat{c} = c_+ + c_-$ . ■

**Demonstração do Teorema 2.4.1.** Suponha por contradição que existe  $u \in \mathcal{M}$  tal que  $J(u) = \hat{c}$ . Sendo assim,

$$u^+ \in \mathcal{N}_+, \quad u^- \in \mathcal{N}_-$$

e

$$c_+ + c_- \leq J_+(u^+) + J_-(u^-) = J(u) = \hat{c} = c_+ + c_-.$$

Logo,

$$J_+(u^+) = c_+ \quad \text{e} \quad J_-(u^-) = c_-.$$

Assim,  $u^+$  e  $u^-$  são pontos críticos dos funcionais  $J_+$  e  $J_-$ , respectivamente. Logo, pelo princípio do máximo, devemos ter

$$u^+(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2$$

e

$$u^-(x) < 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2,$$

o que é impossível. ■

Gostariamos de finalizar este Capítulo fazendo algumas observações importantes acerca dos resultados obtidos.

**Observação 2.4.3** *Vimos que na Seção 2.3, existe um minimizante  $u \in \mathcal{M}_r$  o qual é um ponto crítico de  $J$  sobre  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Desde que  $\hat{c} \leq c_r^*$ , o Teorema 2.4.1 implica que*

$$\hat{c} < c_r^*.$$

*Uma desigualdade estrita similar em um domínio limitado tal como um anel em  $\mathbb{R}^N$ , para  $N \geq 3$ , pode ser vista em [18].*

**Observação 2.4.4** *O resultado de existência de solução nodal de energia mínima para o caso não-autônomo, nos diz que apesar do problema autônomo não possuir solução nodal de energia mínima, é possível impor condições sobre  $V$  de modo que o problema (P), para  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , possua solução nodal de energia mínima.*

**Observação 2.4.5** *Uma versão do Teorema 2.4.1 pode ser feita para  $N \geq 3$ , supondo que  $f$  tem crescimento subcrítico, ou até mesmo crítico com hipóteses adequadas sob a não-linearidade.*

# Capítulo 3

## Soluções do tipo multi-bump nodal para uma classe de problemas elípticos em $\mathbb{R}^2$ envolvendo crescimento crítico exponencial

Neste capítulo, motivados por [5] e [13], mostramos a existência de solução do tipo multi-bump nodal para uma classe de problemas elípticos em  $\mathbb{R}^2$  com a não-linearidade tendo um crescimento crítico exponencial.

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, consideramos a existência e multiplicidade de soluções do tipo multi-bump nodal para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases} \quad (P)_\lambda$$

onde  $\lambda \in (0, \infty)$ , o potencial  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e não negativa tal que o conjunto  $\Omega := \text{int } V^{-1}(\{0\})$  satisfaz

(H1)  $\Omega$  é não-vazio, limitado, com fronteira  $\partial\Omega$  suave e  $V^{-1}(\{0\}) = \overline{\Omega}$ ;

(H2)  $\Omega$  tem  $k$  componentes conexas denotadas por  $\Omega_j$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ , as quais verificam  $\text{dist}(\Omega_j, \Omega_i) > 0$ , para  $i \neq j$ .

Para a função  $f$  admitimos as seguintes hipóteses.

(f<sub>1</sub>) Existe  $C > 0$  tal que

$$|f(s)| \leq Ce^{4\pi|s|^2} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

$$(f_2) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 0;$$

(f<sub>3</sub>) Existe  $\theta > 2$  tal que

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(f<sub>4</sub>) A função  $s \rightarrow \frac{f(s)}{|s|}$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(f<sub>5</sub>) Existem constantes  $p > 2$  e  $C_p > 0$  tais que

$$\text{sgn}(s)f(s) \geq C_p|s|^{p-1} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R},$$

com

$$C_p > \left[ \frac{4k\theta}{\theta - 2} \cdot S_p \right]^{(p-2)/2}, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} S_p &= \max_{1 \leq j \leq k} \gamma_j, & \gamma_j &= \inf_{u \in \mathcal{M}_{\Omega_j}} \phi_j(u), \\ \mathcal{M}_{\Omega_j} &= \{u \in H_0^1(\Omega_j) : u^\pm \neq 0 \text{ e } \phi_j'(u^\pm)u^\pm = 0\}, \\ \phi_j(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} (|\nabla u|^2 + |u|^2) - \frac{1}{p} \int_{\Omega_j} |u|^p. \end{aligned}$$

O principal resultado demonstrado é o seguinte:

**Teorema 3.1.1** *Suponha que as hipóteses (H<sub>1</sub>) – (H<sub>2</sub>) e (f<sub>1</sub>) – (f<sub>5</sub>) sejam válidas. Então, para qualquer subconjunto não-vazio  $\Gamma$  de  $\{1, \dots, k\}$ , existe  $\lambda^* > 0$  tal que, para  $\lambda \geq \lambda^*$ , o problema  $(P)_\lambda$  tem uma solução nodal  $u_\lambda$ . Além disso, a família  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda^*}$  tem a seguinte propriedade: Para qualquer subsequência  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , podemos extrair uma subsequência  $\lambda_{n_i}$  tal que  $u_{\lambda_{n_i}}$  converge forte em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  para uma função  $u$  a qual satisfaz  $u(x) = 0$  para  $x \notin \Omega_\Gamma := \cup_{j \in \Gamma} \Omega_j$ , e a restrição  $u|_{\Omega_j}$  é uma solução nodal com energia mínima de*

$$-\Delta u + u = f(u), \quad \text{em } \Omega_j, \quad u|_{\partial\Omega_j} = 0 \quad \text{para } j \in \Gamma.$$

## 3.2 Notações e resultados preliminares

Nesta seção, fixamos algumas notações e apresentamos alguns funcionais que serão usados ao longo deste capítulo.

Sabemos que as soluções de  $(P)_\lambda$  podem ser caracterizadas como sendo pontos críticos do funcional  $J : \mathcal{H}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + 1)|u|^2] - \int_{\mathbb{R}^2} F(u),$$

onde  $\mathcal{H}_\lambda$  é o espaço de funções definido por

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 < \infty \right\}$$

munido com a seguinte norma

$$\|u\|_\lambda = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + 1)u^2] \right\}^{1/2},$$

a qual está associada ao produto interno

$$\langle u, v \rangle_\lambda := \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv).$$

Mostra-se que  $(\mathcal{H}_\lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$  é um espaço de Hilbert, para todo  $\lambda \geq 1$ .

Para um subconjunto aberto  $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ , definimos

$$\mathcal{H}(\Theta) = \left\{ u \in H^1(\Theta) : \int_{\Theta} V(x)u^2 < \infty \right\}$$

e

$$\|u\|_{\lambda, \Theta} = \left[ \int_{\Theta} (|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + 1)u^2) \right]^{1/2}.$$

Como consequência das considerações acima, temos o seguinte lema

**Lema 3.2.1** *Existem  $\nu_0, \delta_0 > 0$  com  $1 \approx \delta_0 < 1$  e  $\nu_0 \approx 0$  tal que para todo subconjunto aberto  $\Theta \subset \mathbb{R}^2$*

$$\delta_0 \|u\|_{\lambda, \Theta}^2 \leq \|u\|_{\lambda, \Theta}^2 - \nu_0 |u|_{2, \Theta}^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_\lambda(\Theta) \text{ e } \lambda \geq 1.$$

**Demonstração.** Note que

$$|u|_{2, \Theta}^2 \leq \int_{\Theta} (\lambda V(x) + 1) |u|^2 \leq \|u\|_{\lambda, \Theta}^2.$$

Assim, para  $\delta_0 < 1$ , temos

$$(1 - \delta_0)|u|_{2,\Theta}^2 \leq (1 - \delta_0)\|u\|_{\lambda,\Theta}^2.$$

Logo, para qualquer  $0 < \nu_0 \leq (1 - \delta_0)$ ,

$$\nu_0|u|_{2,\Theta}^2 \leq (1 - \delta_0)\|u\|_{\lambda,\Theta}^2,$$

ou equivalentemente

$$\delta_0\|u\|_{\lambda,\Theta}^2 \leq \|u\|_{\lambda,\Theta}^2 - \nu_0|u|_{2,\Theta}^2.$$

■

Ao longo deste capítulo, denotamos por  $b_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função real definida por

$$b_\tau(s) := \left( e^{4\pi\tau s^2} - 1 \right).$$

Segue das hipóteses  $(f_1)$  e  $(f_2)$  que para cada  $\epsilon > 0$ ,  $q \geq 1$  e  $\tau > 1$ , existe uma constante  $C = C(\epsilon, q, \alpha) > 0$  tal que

$$|sf(s)|, \quad |F(s)| \leq \epsilon s^2 + C|s|^q b_\tau(s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

O resultado seguinte é uma consequência da Desigualdade de Trudinger-Moser devida a Cao (6).

**Corolário 3.2.2** *Seja  $(u_\lambda)$  uma família em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  verificando  $\sup_{\lambda \geq 1} \|u_\lambda\|^2 \leq m < 1$ . Então, para cada  $\tau, q > 1$  satisfazendo  $\tau q m < 1$ , existe  $C = C(\tau, q, m) > 0$  tal que  $b_\tau(u_\lambda) \in L^q(\mathbb{R}^2)$  e*

$$\sup_{\lambda \geq 1} \{ |b_\tau(u_\lambda)|_q \} < \infty.$$

**Demonstração.** O Lema A.1 do Apêndice A, garante a existência de uma constante  $C > 0$  tal que

$$|b_\tau(u_\lambda)|_q^q := \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi\tau u_\lambda^2} - 1 \right)^q \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi\tau q u_\lambda^2} - 1 \right).$$

Desde que  $m\tau q < 1$ , temos  $4\pi\tau q m < 4\pi$ . Assim, podemos usar a Desigualdade de Trudinger Moser devida a Cao (6) para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi\tau q u_\lambda^2} - 1 \right) \leq C_1.$$

Portanto,

$$|b_\tau(u_\lambda)|_q \leq (CC_1)^{1/q},$$

como queríamos demonstrar. ■

### 3.2.1 Problemas de Dirichlet e Neumann

Nesta seção, denotamos por  $I_j : H_0^1(\Omega_j) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Phi_{\lambda,j} : H^1(\Omega'_j) \rightarrow \mathbb{R}$  os seguintes funcionais energia

$$I_j(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} (|\nabla u|^2 + u^2) - \int_{\Omega_j} F(u)$$

e

$$\Phi_{\lambda,j}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'_j} (|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + 1)u^2) - \int_{\Omega'_j} F(u).$$

Sabemos que  $I_j$  e  $\Phi_{\lambda,j}$  são de classe  $C^1$  e seus pontos críticos são soluções fracas dos problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u), & \text{em } \Omega_j, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_j \end{cases} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = f(u), & \text{em } \Omega'_j, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega'_j, \end{cases} \quad (3.4)$$

respectivamente. Denotaremos por  $\mathcal{M}_j$  e  $\mathcal{M}_{\lambda,j}$  os seguintes conjuntos

$$\mathcal{M}_j = \{u \in H_0^1(\Omega_j) : u^\pm \neq 0 \text{ e } I_j(u^\pm)u^\pm = 0\},$$

$$\mathcal{M}_{\lambda,j} = \{u \in H^1(\Omega'_j) : u^\pm \neq 0 \text{ e } \Phi_{\lambda,j}(u^\pm)u^\pm = 0\},$$

e por  $d_j$  e  $d_{\lambda,j}$  os números reais definidos por

$$d_j = \inf_{\mathcal{M}_j} I_j, \quad \text{e} \quad d_{\lambda,j} = \inf_{\mathcal{M}_{\lambda,j}} \Phi_{\lambda,j}.$$

Repetindo os mesmos argumentos do Capítulo 1, mostra-se que para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$  existem sequências  $(\varphi_{n,j}) \subset H_0^1(\Omega_j)$  e  $(\psi_{n,j}) \subset \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j)$  verificando

$$\int_{\Omega_j} |\varphi_{n,j}^\pm|^q, \quad \int_{\Omega'_j} |\psi_{n,j}^\pm|^q \geq \delta_q > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } q > 1, \quad (3.5)$$

$$I_j(\varphi_{n,j}) \rightarrow d_j \quad \text{e} \quad I'_j(\varphi_{n,j}) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$\Phi_{\lambda,j}(\psi_{n,j}) \rightarrow d_{\lambda,j} \quad \text{e} \quad \Phi'_{\lambda,j}(\psi_{n,j}) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, usando  $(f_1) - (f_5)$  é possível mostrar que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_{n,j}\|_{\Omega_j}^2, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_{n,j}\|_{\lambda, \Omega'_j}^2 < 1,$$

o que implica em

$$\varphi_{n,j} \rightarrow w_j \text{ em } H_0^1(\Omega_j)$$

e

$$\psi_{n,j} \rightarrow w_{\lambda,j} \text{ em } \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j).$$

Portanto  $w_j \in H_0^1(\Omega_j)$  e  $w_{\lambda,j} \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j)$  com

$$I_j(w_j) = d_j \quad \text{e} \quad I'_j(w_j) = 0, \quad (3.6)$$

e

$$\Phi_{\lambda,j}(w_{\lambda,j}) = d_{\lambda,j} \quad \text{e} \quad \Phi'_{\lambda,j}(w_{\lambda,j}) = 0. \quad (3.7)$$

Além disso, segue de (3.5) que  $w_j^\pm \neq 0$  e  $w_{\lambda,j}^\pm \neq 0$ , mostrando que o problema de Dirichlet (3.3) e o problema de Neumann (3.4) possuem soluções nodais de energia mínima.

### 3.3 Um problema auxiliar

Nesta seção, como em Alves [5], modificamos convenientemente a função  $f$ . Sejam  $\nu_0$  a constante dada no Lema 3.2.1,  $a > 0$  verificando  $\max\{f(a)/a, f(-a)/(-a)\} < \nu_0$  e  $\tilde{f}, \tilde{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  as seguintes funções

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} \frac{-f(-a)}{a}s & \text{se } s < -a, \\ f(s) & \text{se } |s| \leq a, \\ \frac{f(a)}{a}s & \text{se } s > a, \end{cases}$$

e

$$\tilde{F}(s) = \int_0^s \tilde{f}(\tau) d\tau,$$

as quais verificam

$$\tilde{f}(s) \leq \nu_0 |s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

ou ainda,

$$\tilde{f}(s)s \leq \nu_0 |s|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

e

$$\tilde{F}(s) \leq \frac{\nu_0}{2} |s|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$



No que segue, para cada subconjunto  $\Gamma \subset \{1, \dots, k\}$  vamos considerar

$$\Omega'_\Gamma := \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega'_j, \quad \chi_\Gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in \Omega'_\Gamma, \\ 0, & \text{para } x \notin \Omega'_\Gamma \end{cases}$$

e as funções

$$g(x, s) = \chi_\Gamma(x)f(s) + (1 - \chi_\Gamma(x))\tilde{f}(s)$$

e

$$G(x, s) = \int_0^s g(x, t)dt = \chi_\Gamma(x)F(s) + (1 - \chi_\Gamma(x))\tilde{F}(s).$$

Como consequência das definições acima, temos o seguinte lema.

**Lema 3.3.1**

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\nu_0|s|^2, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração.** Vamos dividir a demonstração em três casos:

*1º Caso:*  $|s| \leq a$ . Para  $s = 0$  a desigualdade acima é óbvia. Se  $0 < |s| \leq a$ , usando a definição de  $\tilde{f}$  e  $\tilde{F}$  e a condição de Ambrosetti-Rabinowitz ( $f_3$ ), obtemos

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s = F(s) - \frac{1}{\theta}f(s)s \leq 0 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\nu_0|s|^2.$$

*2º Caso:*  $s > a$ . Neste caso,  $\tilde{f}(s) = \frac{f(a)}{a}s$  e

$$\tilde{F}(s) = F(a) + \int_a^s \frac{f(a)}{a}\tau d\tau = F(a) - \frac{1}{2}f(a)a + \frac{1}{2}\frac{f(a)}{a}s^2.$$

Pela condição de Ambrosetti-Rabinowitz ( $f_3$ ), temos

$$F(a) - \frac{1}{2}f(a)a \leq 0.$$

Logo,

$$\tilde{F}(s) \leq \frac{1}{2}\frac{f(a)}{a}s^2,$$

de onde segue que

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\frac{f(a)}{a}s^2.$$

Sendo  $\frac{f(a)}{a} < \nu_0$ , obtemos

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\nu_0s^2.$$

3º Caso:  $s < -a$ . Neste caso,  $\tilde{f}(s) = \frac{-f(-a)}{a}s$  e

$$\tilde{F}(s) = F(-a) + \int_s^{-a} \frac{f(-a)}{a} \tau d\tau = F(-a) + \frac{1}{2}f(-a)a - \frac{1}{2}\frac{f(-a)}{a}s^2.$$

Pela condição de Ambrosetti-Rabinowitz ( $f_3$ ), temos

$$F(-a) + \frac{1}{2}f(-a)a \leq 0.$$

Logo,

$$\tilde{F}(s) \leq -\frac{1}{2}\frac{f(-a)}{a}s^2,$$

de onde segue que

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \left(\frac{f(-a)}{-a}\right) s^2.$$

Sendo  $\frac{f(-a)}{-a} < \nu_0$ , obtemos

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \nu_0 s^2,$$

concluindo a demonstração do lema. ■

Agora, observe que pela definição de  $\tilde{f}$ , temos  $|\tilde{f}(s)| \leq |f(s)|$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Logo,  $|g(x, s)| \leq |f(s)|$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ , o que implica que  $g$  satisfaz as hipóteses ( $f_1$ ) – ( $f_2$ ) uniformemente em  $x \in \mathbb{R}^2$  e a desigualdade (3.2) uniformemente em  $x \in \mathbb{R}^2$ , ou seja,

$$|g(x, s)s| \leq \epsilon|s|^2 + C|s|^q b_\tau(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.11)$$

Assim, o funcional  $\Phi_\lambda : \mathcal{H}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + 1)u^2) - \int_{\mathbb{R}^2} G(x, u)$$

pertence a  $C^1(\mathcal{H}_\lambda, \mathbb{R})$  e seus pontos críticos são as soluções fracas de

$$-\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = g(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (A)_\lambda$$

**Observação 3.3.2** *Note que as soluções nodais da última equação estão relacionadas com as soluções nodais de  $(P)_\lambda$  no seguinte sentido, se  $u_\lambda$  é uma solução nodal de  $(A)_\lambda$  verificando  $|u_\lambda(x)| \leq a$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma$ , então  $u_\lambda$  é uma solução nodal de  $(P)_\lambda$ .*

No que segue, vamos estudar a convergência das seqüências de Palais-Smale para o funcional  $\Phi_\lambda$ , ou seja, de seqüências  $(u_n) \subset \mathcal{H}_\lambda$  verificando

$$\Phi_\lambda(u_n) \rightarrow c \text{ e } \Phi'_\lambda(u_n) \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

para algum  $c \in \mathbb{R}$  (abreviadamente  $(u_n)$  é uma seqüência  $(PS)_c$ ).

Vamos começar estudando a limitação destas seqüências.

**Lema 3.3.3** *Se  $(u_n)$  é uma seqüência  $(PS)_c$  para  $\Phi_\lambda$ , então*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{2\theta c}{\delta_0(\theta - 2)},$$

onde  $\delta_0$  é dado no Lema 3.2.1.

**Demonstração.** Pela definição de seqüência de Palais-Smale,

$$\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} \Phi'_\lambda(u_n)u_n = c + o_n(1) + \epsilon_n \|u_n\|_\lambda,$$

onde  $\epsilon_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Usando a condição  $(f_3)$ , obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_T} \left(\tilde{F}(u_n) - \frac{1}{\theta} \tilde{f}(u_n)u_n\right) \leq c + o_n(1) + \epsilon_n \|u_n\|_\lambda. \quad (3.13)$$

Portanto, pelo Lema 3.3.1,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) (\|u_n\|_\lambda^2 - \nu_0 |u_n|_2^2) \leq c + o_n(1) + \epsilon_n \|u_n\|_\lambda.$$

Agora, do Lema 3.2.1, ficamos com

$$\frac{\delta_0(\theta - 2)}{2\theta} \|u_n\|_\lambda^2 \leq c + o_n(1) + \epsilon_n \|u_n\|_\lambda.$$

Logo,  $(u_n)$  é limitada e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{2\theta c}{\delta_0(\theta - 2)},$$

como queríamos demonstrar. ■

No que segue, denotamos por  $D$  o seguinte número real

$$D = \sum_{j=1}^k d_j.$$

**Lema 3.3.4** *Se  $(f_1) - (f_5)$  são válidas, então  $0 < D < \frac{\delta_0(\theta - 2)}{4\theta}$ .*

**Demonstração.** Para demonstrar esta desigualdade, para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ , fixamos uma função nodal  $v_j \in H_0^1(\Omega_j)$  tal que  $v_j \in \mathcal{M}_{\Omega_j}$  e

$$\phi_j(v_j) = \gamma_j \quad \text{e} \quad \phi_j(v_j)' = 0. \quad (3.14)$$

O leitor pode encontrar a existência de tais funções em Bartsch e Weth [20]. Desde que  $v_j^\pm \neq 0$ , existem  $s_j, t_j > 0$  tais que  $s_j v_j^+ + t_j v_j^- \in \mathcal{M}_j$ . Então,

$$d_j \leq I_j(s_j v_j^+ + t_j v_j^-) = I_j(s_j v_j^+) + I_j(t_j v_j^-),$$

implicando em

$$\begin{aligned} d_j &\leq \frac{s_j^2}{2} \int_{\Omega_j} (|\nabla v_j^+|^2 + |v_j^+|^2) - \int_{\Omega_j} F(s_j v_j^+) \\ &\quad + \frac{t_j^2}{2} \int_{\Omega_j} (|\nabla v_j^-|^2 + |v_j^-|^2) - \int_{\Omega_j} F(t_j v_j^-). \end{aligned}$$

Usando o fato que  $v_j^\pm \in \mathcal{M}_{\Omega_j}$  e a hipótese  $(f_4)$ , obtemos

$$d_j \leq \left\{ \frac{s_j^2}{2} - \frac{C_p s_j^p}{p} \right\} \int_{\Omega_j} |v_j^+|^p + \left\{ \frac{t_j^2}{2} - \frac{C_p t_j^p}{p} \right\} \int_{\Omega_j} |v_j^-|^p.$$

Logo,

$$d_j \leq \max_{r \geq 0} \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{C_p r^p}{p} \right\} \int_{\Omega_j} |v_j|^p$$

e sendo

$$\max_{r \geq 0} \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{C_p r^p}{p} \right\} = C_p^{\frac{2}{2-p}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right),$$

segue de (3.14),

$$d_j \leq C_p^{\frac{2}{2-p}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} |v_j|^p = C_p^{\frac{2}{2-p}} \gamma_j.$$

Logo, de (3.1),

$$D = \sum_{j=1}^k d_j \leq k S_p \cdot C_p^{\frac{2}{2-p}} < \frac{\theta - 2}{4\theta}.$$

Escolhendo  $\delta_0$  suficientemente próximo de 1, a última desigualdade implica em

$$D < \frac{\delta_0(\theta - 2)}{4\theta}.$$

■

**Proposição 3.3.5** *Para  $\lambda \geq 1$ , o funcional  $\Phi_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_c$ , para todo  $c \in (0, D]$ . Mais precisamente, qualquer sequência  $(u_n) \subset \mathcal{H}_\lambda$ ,  $(PS)_c$  para  $\Phi_\lambda$ , tem uma subsequência fortemente convergente em  $\mathcal{H}_\lambda$ .*

**Demonstração.** Seja  $(u_n) \subset \mathcal{H}_\lambda$  uma sequência  $(PS)_c$  para  $\Phi_\lambda$  com  $c \in (0, D]$ . Pelo Lema 3.3.3,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{2\theta c}{\delta_0(\theta - 2)}.$$

Sendo  $c \in (0, D]$ , temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{2\theta D}{\delta_0(\theta - 2)},$$

o que implica, pelo Lema 3.3.4,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 < \frac{1}{2},$$

mostrando que  $(u_n)$  é limitada em  $\mathcal{H}_\lambda$ . Como  $\mathcal{H}_\lambda$  é um espaço de Banach reflexivo, existe  $u \in \mathcal{H}_\lambda$  tal que, a menos de subsequência,  $u_n \rightharpoonup u$  em  $\mathcal{H}_\lambda$ . Além disso, utilizando a imersão contínua  $\mathcal{H}_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$  e as imersões compactas de Sobolev, obtemos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow u \text{ em } L_{loc}^s(\mathbb{R}^2), \quad \forall s \geq 1.$$

**Afirmção 3.3.6** *Para qualquer  $\epsilon > 0$  dado, existe  $R > 0$  tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + 1)|u_n|^2) \leq \epsilon, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

De fato, seja  $R > 0$  suficientemente grande de tal modo que  $\Omega'_R \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$  e considere  $\eta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  satisfazendo

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R(0) \end{cases},$$

$0 \leq \eta_R \leq 1$  e  $|\nabla \eta_R| \leq \frac{C}{R}$ , onde  $C > 0$  independe de  $R$ . Tem-se

$$\begin{aligned} L_n &:= \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + 1)|u_n|^2) \eta_R \\ &= \Phi'_\lambda(u_n)(u_n \eta_R) - \int_{\mathbb{R}^2} u_n \nabla u_n \nabla \eta_R + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\frac{R}{2}}(0)} \tilde{f}(x, u_n) u_n \eta_R. \end{aligned}$$

De (3.10) e da desigualdade de Schwarz,

$$L_n \leq \Phi'_\lambda(u_n)(u_n \eta_R) + \frac{C}{R} \int_{\mathbb{R}^2} |u_n| |\nabla u_n| + \nu_0 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\frac{R}{2}}(0)} |u_n|^2 \eta_R.$$

Pela desigualdade de Hölder e a limitação das sequências  $(u_n)$  e  $(|\nabla u_n|)$  em  $L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$L_n \leq o_n(1) + \frac{C}{R} + \nu_0 L_n,$$

e como podemos escolher  $\nu_0 < 1$ ,

$$L_n \leq o_n(1) + \frac{C}{R(1-\nu_0)}.$$

Em consequência

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + 1)|u_n|^2) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} L_n \leq \frac{C}{R(1-\nu_0)}.$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , escolhendo se necessário um  $R > 0$  ainda maior, obtemos  $\frac{C}{R(1-\nu_0)} < \epsilon$ , o que demonstra a afirmação.

**Afirmção 3.3.7** *Os seguintes limites são válidos*

$$(a) \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u)u;$$

$$(b) \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)v \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u)v, \quad \forall v \in \mathcal{H}_\lambda.$$

De fato, dado  $\epsilon > 0$ , considere  $R > 0$  como na Afirmção 3.3.6 e

$$L_{n,1} := \left| \int_{B_R(0)} g(x, u_n)u_n - \int_{B_R(0)} g(x, u)u \right|$$

e

$$L_{n,2} := \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |g(x, u_n)u_n - g(x, u)u|.$$

Segue de (3.11) que

$$|g(x, u_n)u_n| \leq \eta|u_n|^2 + C_\eta|u_n|b_\tau(u_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}.$$

Considere  $h_n, h \in H^1(B_R(0))$  definidas por

$$h_n := \eta|u_n|^2 + C_\eta|u_n|b_\tau(u_n) \quad \text{e} \quad h := \eta|u|^2 + C_\eta|u|b_\tau(u).$$

Assim,  $|g(x, u_n)u_n| \leq h_n(x)$ , e como  $u_n \rightarrow u$  em  $L^s_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\forall s \geq 1$ , temos

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } B_R(0).$$

Consequentemente,

$$g(x, u_n(x))u_n(x) \rightarrow g(x, u(x))u(x) \quad \text{q.t.p. em } B_R(0),$$

$$h_n(x) \rightarrow h(x) \quad \text{q.t.p. em } B_R(0), \text{ com } h \in L^1(B_R(0)).$$

Afirmamos que

$$h_n \rightarrow h \quad \text{em } L^1(B_R(0)).$$

Com efeito, sendo  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 < 1/2$ , para  $m \in (1/2, 1)$  e uma subsequência ainda denotada por  $(u_n)$ , temos

$$\sup_{n \geq 1} \|u_n\|^2 \leq m < 1,$$

fixando  $q, \tau > 1$  suficientemente próximos de 1, de tal modo que  $\tau q m < 1$ , pelo Corolário 3.2.2 existe  $C > 0$  tal que  $b_\tau(u_n) \in L^q(\mathbb{R}^2)$  com

$$|b_\tau(u_n)|_q \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a sequência  $(b_\tau(u_n))_n$  é limitada em  $L^q(B_R(0))$ . Como consequência, usando o Lema A.9 do Apêndice A,

$$b_\tau(u_n) \rightharpoonup b_\tau(u) \quad \text{em } L^q(B_R(0)),$$

e como

$$|u_n| \rightarrow |u| \quad \text{em } L^{q'}(B_R(0)), \quad \text{onde } 1/q + 1/q' = 1,$$

o Lema A.8 do Apêndice A implica que

$$|u_n| b_\tau(u_n) \rightarrow |u| b_\tau(u) \quad \text{em } L^1(B_R(0)).$$

Portanto  $h_n \rightarrow h$  em  $L^1(B_R(0))$ . Usando o Teorema da convergência dominada generalizado de Lebesgue (Teorema A.12 do Apêndice A), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,1} = 0.$$

Por outro lado, como  $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_r$ , de (3.10) deduzimos

$$|g(x, t)t| = \tilde{f}(t)t \leq \nu_0 |t|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} L_{n,2} &\leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} \nu_0 |u_n|^2 + \nu_0 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |u|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + 1)|u_n|^2) + \nu_0 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |u|^2. \end{aligned}$$

Como  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , aumentando  $R$  caso seja necessário, podemos admitir

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |u|^2 \leq \frac{\epsilon}{\nu_0}.$$

Consequentemente, pela Afirmação 3.3.6, após passagem ao limite superior, obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} L_{n,2} \leq 2\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

implicando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,2} = 0.$$

Deste modo, temos (a). A demonstração de (b) segue usando o mesmo raciocínio.

Agora, note que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \|u_n\|_{\lambda_n}^2 - 2\langle u_n, u \rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2$$

e como  $\Phi'_\lambda(u_n)u_n = o_n(1)$  e  $\Phi'_\lambda(u_n)u = o_n(1)$ , ou seja,

$$\|u_n\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u_n + o_n(1) \quad \text{e} \quad \langle u_n, u \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u + o_n(1),$$

temos

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u + o_n(1) + \|u\|_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda. \quad (3.16)$$

Por outro lado,

$$\|u\|_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla u + \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1)u(u - u_n), \quad (3.17)$$

Agora, observamos que o funcional linear  $\psi_\lambda : \mathcal{H}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\psi_\lambda(w) := \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1)uw,$$

satisfaz, pela desigualdade de Hölder,

$$\psi_\lambda(w) \leq \left[ \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1)u^2 \right]^{1/2} \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1)w^2 \right]^{1/2}.$$

Desta maneira, se  $\|w\|_\lambda \leq 1$ , então

$$\left[ \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1)w^2 \right]^{1/2} \leq \|w\|_\lambda \leq 1,$$

implicando que

$$\psi_\lambda(w) \leq \left[ \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1)u^2 \right]^{1/2}, \quad \forall w \in \mathcal{H}_\lambda, \quad \|w\|_\lambda \leq 1,$$



ou seja,  $\psi_\lambda$  é um funcional limitado. Assim, pela convergência fraca de  $u_n$  para  $u$  em  $\mathcal{H}_\lambda$ ,  $\psi_\lambda(u_n) \rightarrow \psi_\lambda(u)$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ou equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1)u(u - u_n) = o_n(1),$$

o que implica, por (3.17),

$$\|u\|_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda = o_n(1). \quad (3.18)$$

Usando (3.18) em (3.16), deduzimos que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n)u + o_n(1),$$

o que juntamente com a Afirmação 3.3.7, implica em

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } \mathcal{H}_\lambda \text{ e } H^1(\mathbb{R}^2),$$

mostrando que o funcional  $\Phi_\lambda$  satisfaz a condição  $(PS)_c$ , para  $c \in (0, D]$ . ■

Nosso próximo objetivo é estudar o comportamento de uma sequência de Palais-Smale generalizada correspondente a uma sequência de funcionais. No que segue, dizemos que uma sequência  $(u_n)$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  é dita uma sequência  $(PS)_{\infty, c}$  para a família de funcionais  $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$  se existe uma sequência  $\lambda_n \subset [1, +\infty)$  com  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , tal que

$$u_n \in \mathcal{H}_{\lambda_n}, \quad \Phi_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}^* \rightarrow 0.$$

**Proposição 3.3.8** *Seja  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_{\infty, c}$  com  $c \in (0, D]$ . Então, para alguma subsequência, ainda denotada por  $(u_n)$ , existe  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tal que*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso,

(i)  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma$  e  $u|_{\Omega_j}$  é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u), & \text{em } \Omega_j, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_j \end{cases} \quad (P)_j$$

para cada  $j \in \Gamma$ ;

(ii)  $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \rightarrow 0$ ;

(iii) A sequência  $(u_n)$  também satisfaz

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_n|^2 \rightarrow 0, \quad \|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma}^2 \rightarrow 0$$

e

$$\|u_n\|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_j}^2 \rightarrow \int_{\Omega_j} (|\nabla u|^2 + u^2) \quad \text{para todo } j \in \Gamma.$$

**Demonstração.** Como na demonstração da Proposição 3.3.5, mostra-se que, a menos de subsequência,

$$\sup_{n \geq 1} \|u_n\|^2 < 1. \quad (3.19)$$

Sendo assim, podemos assumir que, para algum  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^2) \quad (3.20)$$

e

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

No que segue, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $C_m$  o conjunto dado por

$$C_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Assim,

$$\int_{C_m} |u_n|^2 \leq \frac{m}{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_n V(x) |u_n|^2 \leq \frac{m}{\lambda_n} \|u_n\|_{\lambda_n}^2.$$

A desigualdade acima combinada com o Lema de Fatou implica em

$$\int_{C_m} |u|^2 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$u(x) = 0 \quad \text{sobre } \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\Gamma,$$

o que implica em

$$u|_{\Omega_j} \in H_0^1(\Omega_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}.$$

Uma vez que  $\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_j)$ , segue de (3.19) e (3.20) que

$$\int_{\Omega_j} \nabla u \nabla \varphi + u \varphi - \int_{\Omega_j} g(x, u) \varphi = 0, \quad (3.21)$$

de onde segue que  $u|_{\Omega_j}$  é uma solução de  $(P)_j$ , para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Além disso, para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ , usando  $\varphi = u|_{\Omega_j}$  em (3.21), obtém-se

$$\int_{\Omega_j} (|\nabla u|^2 + |u|^2) - \int_{\Omega_j} \tilde{f}(u)u = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\|u\|_{\lambda, \Omega_j}^2 = \int_{\Omega_j} \tilde{f}(u)u.$$

Sendo

$$\tilde{f}(s)s \leq \nu_0 |s|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

pelo Lema 3.2.1,

$$\delta_0 \|u\|_{\lambda, \Omega_j}^2 \leq \|u\|_{\lambda, \Omega_j}^2 - \nu_0 \|u\|_{2, \Omega_j}^2 \leq \|u\|_{\lambda, \Omega_j}^2 - \int_{\Omega_j} \tilde{f}(u)u = 0.$$

Portanto,  $u = 0$  em  $\Omega_j$ , para  $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \Gamma$ , e a demonstração de (i) está completa.

(ii) Repetindo o argumento utilizado na Proposição 3.3.5,

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda_n V(x) + 1)(u_n - u)u + o_n(1)$$

e como  $u = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma$ ,

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Para demonstrar (iii), observe que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_n V(x) |u_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_n V(x) |u_n - u|^2 \leq C \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2,$$

o que implica, pelo item (ii), em

$$\int_{\mathbb{R}^2} \lambda_n V(x) |u_n|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Os outros limites também seguem imediatamente do limite em (ii). ■

Na próxima proposição, usamos o método de Iteração de Moser [43] e adaptamos as idéias contidas em Li Gongbao [36], ver também Alves e Souto [13]. Este resultado será fundamental para mostrarmos que as soluções nodais que encontramos para  $(A)_\lambda$  são também soluções nodais de  $(P)_\lambda$ , para  $\lambda$  suficientemente grande.

**Proposição 3.3.9** *Seja  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$  uma família de soluções nodais de  $(A)_\lambda$  verificando  $\|u_\lambda\|^2 \leq m < 1$ , para todo  $\lambda \geq 1$ . Então, existe  $K > 0$  tal que*

$$|u_\lambda|_\infty \leq K, \quad \forall \lambda \geq 1.$$

**Demonstração.** Para cada  $\lambda \geq 1$ ,  $L > 0$  e  $\beta > 1$ , definimos

$$u_{L,\lambda}^+ := \begin{cases} u_\lambda^+, & \text{se } u_\lambda \leq L, \\ L, & \text{se } u_\lambda \geq L, \end{cases}$$

$$z_{L,\lambda}^+ := (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} u_\lambda^+ \quad \text{e} \quad w_{L,\lambda}^+ := u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1}.$$

Usando  $z_{L,\lambda}^+$  como função teste na definição de solução fraca,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\lambda \nabla z_{L,\lambda}^+ + \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1) u_\lambda z_{L,\lambda}^+ = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_\lambda) z_{L,\lambda}^+ \quad (3.22)$$

o que implica

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 &= -2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^2} u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_\lambda^+) u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1) |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ = \int_{[u_\lambda \leq L]} |u_\lambda^+|^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \geq 0$$

e  $\lambda V(x) + 1 \geq 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_\lambda^+) u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} - \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}. \quad (3.23)$$

Agora, vamos precisar da seguinte estimativa envolvendo  $g$ :

$$g(x, u_\lambda^+) \leq \epsilon u_\lambda^+ + C_\epsilon b_\tau(u_\lambda^+) u_\lambda^+, \quad (3.24)$$

onde  $b_\tau(u_\lambda^+) \in L^q(\mathbb{R}^2)$  para algum  $q > 1$ ,  $q \approx 1$  e

$$|b_\tau(u_\lambda^+)|_q \leq C, \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (3.25)$$

Usando (3.24) em (3.23), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^2} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \leq (\epsilon - 1) \int_{\mathbb{R}^2} u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^2} b_\tau(u_\lambda^+) |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}. \quad (3.26)$$

Por outro lado, das imersões contínuas de Sobolev,

$$|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 \leq C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla w_{L,\lambda}^+|^2 + |w_{L,\lambda}^+|^2), \quad (3.27)$$

para qualquer  $\gamma \geq 2$ . Desde que

$$\begin{aligned}\nabla w_{L,\lambda}^+ &= \nabla (u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1}) \\ &= (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1} \nabla u_\lambda^+ + (\beta-1) u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-2} \nabla u_{L,\lambda}^+, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}|\nabla w_{L,\lambda}^+|^2 &= (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 + 2(\beta-1) u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ \\ &\quad + (\beta-1)^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-2)} |\nabla u_{L,\lambda}^+|^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Usando (3.28) em (3.27),

$$\begin{aligned}|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 &\leq C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &\quad + 2(\beta-1) C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ \\ &\quad + (\beta-1)^2 C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-2)} |\nabla u_{L,\lambda}^+|^2 \\ &\quad + C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+| (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ &= \int_{[u_\lambda \leq L]} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-2)} |\nabla u_{L,\lambda}^+|^2 &= \int_{[u_\lambda \leq L]} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Usando (3.30) e (3.31) em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 &\leq C_\gamma \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &\quad + C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+| (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo (3.26) em (3.32), ficamos com

$$\begin{aligned}|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 &\leq [(\epsilon-1)\beta^2 + 1] C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+| (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &\quad + C\beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} b_\tau(u_\lambda^+) |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Fixando  $0 < \epsilon < 1 - 1/\beta^2$ , temos  $(\epsilon - 1)\beta^2 + 1 < 0$ . Portanto,

$$|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 \leq C\beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} b_\tau(u_\lambda^+) |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)},$$

ou equivalentemente,

$$|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 \leq C\beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} b_\tau(u_\lambda^+) |w_{L,\lambda}^+|^2.$$

Da Desigualdade de Hölder,

$$|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 \leq C\beta^2 \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |b_\tau(u_\lambda^+)|^q \right]^{1/q} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |w_{L,\lambda}^+|^{2q'} \right]^{1/q'},$$

onde  $1/q + 1/q' = 1$ . Logo, por (3.25)

$$|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 \leq C\beta^2 \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |w_{L,\lambda}^+|^{2q'} \right]^{1/q'},$$

ou ainda,

$$|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 \leq C\beta^2 |w_{L,\lambda}^+|_{2q'}^2, \quad \forall \lambda \geq 1$$

para qualquer  $L > 0$ ,  $\beta > 1$  e  $\gamma \geq 2$ , onde a constante  $C > 0$  depende somente de  $\gamma$ .

Observe que por imersões contínua de Sobolev  $|u_\lambda^+|^\beta \in L^{2q'}(\mathbb{R}^2)$ . Logo,

$$|w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 \leq C\beta^2 \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1}|^{2q'} \right)^{1/q'} \leq C\beta^2 \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^{2q'\beta} \right)^{1/q'} < +\infty.$$

Aplicando o Lema de Fatou na variável  $L$ , deduzimos que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^{\gamma\beta} \right)^{2q'/\gamma} \leq C^{2q'} \beta^{2q'} \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^{2q'\beta},$$

de onde segue que

$$|u_\lambda^+|_{\beta\gamma} \leq C^{1/\beta} \beta^{1/\beta} |u_\lambda^+|_{\beta 2q'}. \quad (3.33)$$

Agora, fixe  $\gamma > 2q'$  e considere  $\chi = \frac{\gamma}{2q'}$ . Note que  $\gamma = \chi 2q'$  e  $\beta \chi 2q' = \beta\gamma$ , para todo  $\beta > 1$ .

**1º Passo:** Considere  $\beta = \frac{\gamma}{2q'} > 1$  e observe que  $|u_\lambda^+|^\beta \in L^{2q'}(\mathbb{R}^2)$ . Portanto, por (3.33)

$$|u_\lambda^+|_{\gamma^2/2q'} \leq C^{1/\beta} \beta^{1/\beta} |u_\lambda^+|_\gamma,$$

o que implica

$$|u_\lambda^+|_{(\chi 2q')^2/2q'} \leq C^{1/\beta} \beta^{1/\beta} |u_\lambda^+|_\gamma,$$

ou ainda,

$$|u_\lambda^+|_{\chi^2 2q'} \leq C^{1/\chi} \chi^{1/\chi} |u_\lambda^+|_\gamma \quad (3.34)$$

mostrando que

$$|u_\lambda^+|^{(\gamma/2q')^2} \in L^{2q'}(\mathbb{R}^2). \quad (3.35)$$

**2º Passo:** Considerando  $\beta = \left(\frac{\gamma}{2q'}\right)^2 > 1$ , por (3.35)

$$|u_\lambda^+|^\beta \in L^{2q'}(\mathbb{R}^2).$$

Portanto, por (3.33)

$$|u_\lambda^+|_{\gamma^3/(2q')^2} \leq C^{1/\beta} \beta^{1/\beta} |u_\lambda^+|_{\gamma^2/2q'},$$

o que implica

$$|u_\lambda^+|_{(\chi 2q')^3/(2q')^2} \leq C^{1/\chi^2} (\chi^2)^{1/\chi^2} |u_\lambda^+|_{\chi^2 2q'}, \quad \forall \lambda \geq 1,$$

ou seja,

$$|u_\lambda^+|_{\chi^3 2q'} \leq C^{1/\chi^2} (\chi^2)^{1/\chi^2} |u_\lambda^+|_{\chi^2 2q'}. \quad (3.36)$$

Usando (3.34) em (3.36)

$$|u_\lambda^+|_{\chi^2 2q'} \leq C^{1/\chi^2} (\chi^2)^{1/\chi^2} C^{1/\chi} \chi^{1/\chi} K, \quad \forall \lambda \geq 1,$$

ou equivalentemente,

$$|u_\lambda^+|_{\chi^2 2q'} \leq C^{1/\chi+1/\chi^2} \chi^{1/\chi+2/\chi^2} K, \quad \forall \lambda \geq 1,$$

com

$$|u_\lambda^+|^{(\gamma/2q')^3} \in L^{2q'}(\mathbb{R}^2),$$

por (3.35) e (3.36).

Pelo princípio de indução finita,

$$|u_\lambda^+|_{\chi^{(n+1)} 2q'} \leq C \sum_{i=1}^n \chi^{-i} \sum_{j=1}^n i \chi^{-j} K, \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (3.37)$$

Desde que as séries que aparecem em (3.37) são convergentes com

$$\sum_{i=1}^n \chi^{-i} = \frac{1}{\chi-1} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i \chi^{-i} = \frac{\chi^2}{(\chi-1)^2},$$

pelo Lema A.4 do Apêndice A,

$$|u_\lambda^+|_\infty \leq \bar{K}, \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (3.38)$$

Analogamente, se para cada  $\lambda \geq 1$ ,  $L > 0$  e  $\beta > 1$ , definimos  $u_\lambda^- = \max\{-u_\lambda, 0\}$ ,

$$u_{L,\lambda}^- := \begin{cases} u_\lambda^-, & \text{se } u_\lambda \geq -L, \\ L, & \text{se } u_\lambda \leq -L, \end{cases}$$

$$z_{L,\lambda}^- := u_\lambda^-(u_{L,\lambda}^-)^{2(\beta-1)} \quad \text{e} \quad w_{L,\lambda,i}^- := u_\lambda^-(u_{L,\lambda}^-)^{\beta-1},$$

podemos mostrar que

$$|u_\lambda^-|_\infty \leq K \quad \text{para todo } \lambda \geq 1. \quad (3.39)$$

Portanto, de (3.38) e (3.39),

$$|u_\lambda|_\infty \leq K \quad \text{para todo } \lambda \geq 1, \quad (3.40)$$

concluindo a demonstrando da proposição.  $\blacksquare$

A próxima proposição nos garante que toda solução nodal de  $(A)_\lambda$  é uma solução nodal de  $(P)_\lambda$ , para  $\lambda$  suficientemente grande.

**Proposição 3.3.10** *Seja  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$  uma família de soluções nodais do problema  $(A)_\lambda$  com  $\|u_\lambda\|^2 \leq m < 1$  e  $u_\lambda \rightarrow 0$  em  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Então, existe  $\lambda^* \geq 1$  tal que*

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} \leq a, \quad \forall \lambda \geq \lambda^*,$$

e portanto,  $u_\lambda$  é uma solução nodal de  $(P)_\lambda$ , para todo  $\lambda \geq \lambda^*$ .

**Demonstração.** Sejam  $x_1, \dots, x_l \in \partial\Omega'_\Gamma$ ,  $R > 0$  e  $0 < r < R/2$  tais que

$$\partial\Omega'_\Gamma \subset \mathcal{N}(\partial\Omega'_\Gamma) := \bigcup_{i=1}^l B_{R+r}(x_i)$$

e

$$B_{R+r}(x_i) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Usaremos argumentos similares aos utilizados na demonstração da Proposição 3.3.9 para demonstrar que

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathcal{N}(\partial\Omega'_\Gamma)} < a, \quad \forall \lambda \geq \lambda^*, \quad (3.41)$$

para algum  $\lambda^* \geq 1$ .

Considere  $\eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $0 \leq \eta_i \leq 1$  com

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x - x_i| \leq R \\ 0, & \text{se } |x - x_i| \geq R + r \end{cases}$$



e  $|\nabla\eta_i| \leq 2/r$ , para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$ .

Agora, para cada  $\lambda \geq 1$ ,  $L > 0$  e  $\beta > 1$ , definimos

$$u_{L,\lambda}^+ := \begin{cases} u_\lambda^+, & \text{se } u_\lambda \leq L, \\ L, & \text{se } u_\lambda \geq L, \end{cases}$$

$$z_{L,\lambda,i}^+ := \eta_i^2 u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \quad \text{e} \quad w_{L,\lambda,i}^+ := \eta_i u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1}.$$

Usando o fato que  $u_\lambda$  é uma solução nodal para  $(A_\lambda)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\lambda \nabla z_{L,\lambda,i}^+ + \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1) u_\lambda z_{L,\lambda,i}^+ = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_\lambda) z_{L,\lambda,i}^+. \quad (3.42)$$

Note que

$$\begin{aligned} \nabla z_{L,\lambda,i}^+ &= \nabla (\eta_i^2 u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}) \\ &= 2\eta_i u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla \eta_i + \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_\lambda^+ \\ &\quad + 2(\beta-1)\eta_i^2 u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_{L,\lambda}^+, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \nabla u_\lambda \nabla z_{L,\lambda,i}^+ &= 2\eta_i u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_\lambda^+ \nabla \eta_i + \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &\quad + 2(\beta-1)\eta_i^2 u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando (3.43) em (3.42), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 &= -2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_\lambda^+) \eta_i^2 u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1) \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_\lambda^+ \nabla \eta_i \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Vamos estimar cada uma das integrais acima separadamente.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 u_\lambda^+(u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ = \int_{[u_\lambda^+ \leq L]} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \geq 0; \quad (3.45)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda V(x) + 1) \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \leq - \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}; \quad (3.46)$$

usando a desigualdade de Schwarz,

$$-2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_\lambda^+ \nabla \eta_i \leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+| |\nabla \eta_i|,$$

e pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+| |\nabla \eta_i| &\leq \delta \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &+ C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2, \end{aligned}$$

para qualquer  $\delta > 0$ . Logo

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_\lambda^+ \nabla \eta_i &\leq \delta \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &+ C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Usando a estimativa de  $g$  dada em (3.24) e as desigualdades (3.45), (3.46) e (3.47) na igualdade em (3.44), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 &\leq (\epsilon - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &+ C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} b_\tau(u_\lambda^+) \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &+ (\delta - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &+ C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Fixando  $\delta < 1$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 &\leq (\epsilon - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &+ C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} b_\tau(u_\lambda^+) \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \\ &+ C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por outro lado, das imersões contínuas de Sobolev,

$$|w_{L,\lambda,i}^+|_\gamma \leq C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla w_{L,\lambda,i}^+|^2 + |w_{L,\lambda,i}^+|^2), \quad (3.50)$$

para qualquer  $\gamma \geq 2$ . Desde que

$$\begin{aligned} \nabla w_{L,\lambda,i}^+ &= \nabla (\eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1}) \\ &= u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1} \nabla \eta_i + \eta_i (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-1} \nabla u_\lambda^+ + (\beta - 1) \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{\beta-2} \nabla u_{L,\lambda}^+, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
|\nabla w_{L,\lambda,i}^+|^2 &= |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2 + \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\
&\quad + (\beta-1)^2 \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-2)} |\nabla u_{L,\lambda}^+|^2 \\
&\quad + 2(\beta-1) \eta_i |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_{L,\lambda}^+ \nabla \eta_i \\
&\quad + 2(\beta-1) \eta_i^2 u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ \\
&\quad + 2\eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_\lambda^+ \nabla \eta_i.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Usando (3.51) em (3.50),

$$\begin{aligned}
|w_{L,\lambda,i}^+|_\gamma^2 &= C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2 + C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\
&\quad + (\beta-1)^2 C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-2)} |\nabla u_{L,\lambda}^+|^2 \\
&\quad + 2(\beta-1) C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_{L,\lambda}^+ \nabla \eta_i \\
&\quad + 2(\beta-1) C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ \\
&\quad + 2C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_\lambda^+ \nabla \eta_i \\
&\quad + C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-2)} |\nabla u_{L,\lambda}^+|^2 &= \int_{[u_\lambda \leq L]} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-2)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_\lambda^+ \nabla u_{L,\lambda}^+ &= \int_{[u_\lambda \leq L]} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \eta_i |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_{L,\lambda}^+ \nabla \eta_i &= \int_{[u_\lambda^+ \leq L]} \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \nabla u_{L,\lambda}^+ \nabla \eta_i \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i u_\lambda^+ (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_{L,\lambda}^+| |\nabla \eta_i|
\end{aligned} \tag{3.55}$$

e usando a desigualdade de Young em (3.55),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2\beta-3} \nabla u_{L,\lambda}^+ \nabla \eta_i &\leq \delta \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &+ C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Usando (3.53) – (3.56) em (3.52),

$$\begin{aligned} |w_{L,\lambda}^+|_\gamma^2 &\leq C_\gamma (1 + \beta^2 C_\delta) \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2 \\ &+ C_\gamma (1 + \delta) \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla u_\lambda^+|^2 \\ &+ C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Usando (3.49) em (3.57) e fixando  $\epsilon < 1 - 1/\beta^2$ ,

$$|w_{L,\lambda,i}^+|_\gamma^2 \leq C\beta^2 \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_i|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} b_\tau (u_\lambda^+) \eta_i^2 |u_\lambda^+|^2 (u_{L,\lambda}^+)^{2(\beta-1)} \right]. \quad (3.58)$$

Usando a Proposição 3.3.9, temos  $|b_\tau(u_\lambda^+)|_\infty \leq C$ , para todo  $\lambda \geq 1$  e alguma constante  $C > 0$ . Sendo assim, da denição de  $\eta_i$  e de (3.58),

$$\left( \int_{B_R(x_i)} |u_\lambda^+|^\gamma (u_{L,\lambda}^+)^{\gamma(\beta-1)} \right)^{2/\gamma} \leq C\beta^2 \int_{B_{R+r}(x_i)} |u_\lambda^+|^{2\beta}.$$

Passando ao limite de  $L \rightarrow \infty$  na desigualdade anterior e usando o Lema de Fatou,

$$\left( \int_{B_R(x_i)} |u_\lambda^+|^{\gamma\beta} \right)^{2/\gamma} \leq C\beta^2 \int_{B_{R+r}(x_i)} |u_\lambda^+|^{2\beta}. \quad (3.59)$$

Agora, note que se  $\beta = \frac{\gamma(t-1)}{2t}$  com  $t = \frac{\gamma^2}{2(\gamma-2)}$ , então  $\beta > 1$ ,  $\frac{2t}{t-1} < \gamma$  e  $u_\lambda^+ \in L^{\beta 2t/(t-1)}(B_{R+r}(x_i))$ . Segue de (3.60) e da desigualdade de Hölder com expoentes  $t/(t-1)$  e  $t$  que

$$\left( \int_{B_R(x_i)} |u_\lambda^+|^{\gamma\beta} \right)^{2/\gamma} \leq C\beta^2 \left[ \int_{B_{R+r}(x_i)} |u_\lambda^+|^{2\beta t/(t-1)} \right]^{(t-1)/t} \left[ \int_{B_{R+r}(x_i)} 1 \right]^{1/t},$$

ou equivalentemente,

$$|u_\lambda^+|_{L^{\gamma\beta}(B_R(x_i))}^{2\beta} \leq C\beta^2 |u_\lambda^+|_{L^{2\beta t/(t-1)}(B_{R+r}(x_i))}^{2\beta}, \quad (3.60)$$

de onde segue que

$$|u_\lambda^+|_{L^{\gamma\beta}(B_R(x_i))} \leq C^{1/\beta} \beta^{1/\beta} |u_\lambda^+|_{L^{2\beta t/(t-1)}(B_{R+r}(x_i))}. \quad (3.61)$$

Considerando  $\chi = \frac{\gamma(t-1)}{2t}$ ,  $s = \frac{2t}{t-1}$  e a desigualdade em (3.61), aplicando o método de Iteração de Moser, obtemos

$$|u_\lambda^+|_{L^{\lambda^{n+1}s}(B_R(x_i))} \leq C^{\sum_{i=1}^n \chi^{-i}} \chi^{\sum_{i=1}^n i \chi^{-i}} |u_\lambda^+|_{L^\gamma(B_{R+r}(x_i))}, \quad (3.62)$$

o que implica  $|u_\lambda^+|_{L^\infty(B_R(x_i))} \leq C|u_\lambda^+|_{L^\gamma(B_{R+r}(x_i))}$ . Desde que  $u_\lambda^+ \rightarrow 0$  em  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$  e  $B_{R+r}(x_i) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma$ , por (3.62) e as imersão compacta de Sobolev, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\lambda_{\epsilon,i} \geq 1$  tal que

$$|u_\lambda^+|_{L^\infty(B_R(x_i))} \leq \epsilon, \quad \forall \lambda \geq \lambda_{\epsilon,i},$$

em particular, considerando  $\epsilon = a$  e tomando  $\lambda_* = \max_{1 \leq i \leq l} \{\lambda_{a,i}\}$ , deduzimos que

$$|u_\lambda^+|_{\infty, \mathcal{N}(\partial\Omega'_\Gamma)} \leq a \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda^*. \quad (3.63)$$

Analogamente, se para cada  $\lambda \geq 1$ ,  $L > 0$  e  $\beta > 1$ , definimos  $u_\lambda^- = \max\{-u_\lambda, 0\}$ ,

$$u_{L,\lambda}^- := \begin{cases} u_\lambda^-, & \text{se } u_\lambda \geq -L, \\ L, & \text{se } u_\lambda \leq -L, \end{cases}$$

$$z_{L,\lambda,i}^- := \eta_i^2 u_\lambda^- (u_{L,\lambda}^-)^{2(\beta-1)} \quad \text{e} \quad w_{L,\lambda,i}^- := \eta_i u_\lambda^- (u_{L,\lambda}^-)^{\beta-1},$$

podemos mostrar que

$$|u_\lambda^-|_{\infty, \mathcal{N}(\partial\Omega'_\Gamma)} \leq a \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda^*. \quad (3.64)$$

Portanto, de (3.63) e (3.64),

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathcal{N}(\partial\Omega'_\Gamma)} \leq a \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda^*, \quad (3.65)$$

mostrando a afirmação feita em (3.41).

Agora, para  $\lambda \geq \lambda^*$ , definimos  $v_\lambda : \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v_\lambda(x) = (u_\lambda(x) - a)^+.$$

De (3.63), tem-se  $v_\lambda \in H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)$ . Nosso próximo objetivo é mostrar que  $v_\lambda = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma$ . Isto implica em

$$u_\lambda \leq a.$$

Prolongando a função  $v_\lambda = 0$  em  $\Omega'_\Gamma$  e tomando  $v_\lambda$  como função teste, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} \nabla u_\lambda \nabla v_\lambda + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} (\lambda V(x) + 1) u_\lambda v_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} g(x, u_\lambda) v_\lambda.$$

Sendo

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} \nabla u_\lambda \nabla v_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} |\nabla v_\lambda|^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} (\lambda V(x) + 1) u_\lambda v_\lambda = \int_{(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)_+} (\lambda V(x) + 1) (v_\lambda + a) v_\lambda$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} g(x, u_\lambda) v_\lambda = \int_{(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)_+} \frac{g(x, u_\lambda)}{u_\lambda} (v_\lambda + a) v_\lambda,$$

onde

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma : u_\lambda(x) > a\},$$

tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} |\nabla v_\lambda|^2 + \int_{(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)_+} \left[ (\lambda V(x) + 1) - \frac{g(x, u_\lambda)}{u_\lambda} \right] (v_\lambda + a) v_\lambda = 0.$$

Sendo

$$(\lambda V(x) + 1) - \frac{g(x, u_\lambda)}{u_\lambda} > \nu_0 - \frac{\tilde{f}(u_\lambda)}{u_\lambda} \geq 0 \quad \text{em } (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)_+,$$

deduzimos que  $v_\lambda = 0$  em  $(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)_+$ . Obviamente,  $v_\lambda = 0$  nos pontos onde  $u_\lambda = 0$ . Conseqüentemente,  $v_\lambda := (u_\lambda - a)^+ = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma$ . Trabalhando com a função  $(u_\lambda + a)^-$ , é possível demonstrar que  $u_\lambda(x) \geq -a$  para  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma$ . Logo,  $|u_\lambda(x)| \leq a$  para  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma$ . Portanto, pela Observação 3.3.2, a proposição está demonstrada. ■

### 3.4 Um valor crítico especial de $\Phi_\lambda$ .

No que segue, vamos fixar  $\epsilon > 0$  e  $\zeta = \zeta(\epsilon) > 0$  tais que

$$I_j((1 - \epsilon)w_j^\pm), I_j((1 + \epsilon)w_j^\pm) < I_j(w_j^\pm) - \zeta, \quad \forall j \in \Gamma. \quad (3.66)$$

Além disso, sem perda de generalidade, vamos assumir que  $\Gamma = \{1, \dots, l\}$  ( $l \leq k$ ).

Denotaremos por  $Q = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)^{2l}$  e definimos  $\gamma_0 : \overline{Q} \rightarrow \mathcal{H}_\lambda$  por

$$\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})(x) = (\vec{s}, \vec{t}) \cdot (\vec{w}^+(x), \vec{w}^-(x)) \quad (3.67)$$

onde  $(\vec{s}, \vec{t}) = (s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_l)$  e

$$(\vec{w}^+(x), \vec{w}^-(x)) = (w_1^+(x), \dots, w_l^+(x), w_1^-(x), \dots, w_l^-(x)),$$

e o número

$$S_{\lambda, \Gamma} = \inf_{\gamma \in \Sigma_\lambda} \max_{(\vec{s}, \vec{t}) \in \bar{Q}} \Phi_\lambda(\gamma(\vec{s}, \vec{t}))$$

onde

$$\Sigma_\lambda = \left\{ \gamma \in C(\bar{Q}, \mathcal{H}_\lambda) : \gamma^\pm|_{\Omega_j} \neq 0, \forall j \in \Gamma \text{ e } (\vec{s}, \vec{t}) \in \bar{Q}, \gamma = \gamma_0 \text{ sobre } \partial Q \right\}.$$

Como  $\gamma_0 \in \Sigma_\lambda$ , então  $\Sigma_\lambda \neq \emptyset$  e  $S_{\lambda, \Gamma}$  está bem definido.

**Lema 3.4.1** *Para qualquer  $\gamma \in \Sigma_\lambda$  existe  $(\vec{s}_*, \vec{t}_*) \in \bar{Q}$  tal que*

$$\Phi'_{\lambda, j}(\gamma^\pm(\vec{s}_*, \vec{t}_*))(\gamma^\pm(\vec{s}_*, \vec{t}_*)) = 0$$

para todo  $j \in \{1, \dots, l\}$ .

**Demonstração.** Basta usar os mesmos argumentos desenvolvidos na demonstração da Afirmação 1.1.15, feita no Capítulo 1. Para isto, para cada  $\gamma \in \Sigma_\lambda$ , definimos agora as funções  $H, H_0 : Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$H = (\Phi'_{\lambda, 1}(\gamma^+) \gamma^+, \dots, \Phi'_{\lambda, l}(\gamma^+) \gamma^+, \Phi'_{\lambda, 1}(\gamma^-) \gamma^-, \dots, \Phi'_{\lambda, l}(\gamma^-) \gamma^-)$$

e

$$H_0 = (\Phi'_{\lambda, 1}(\gamma_0^+) \gamma_0^+, \dots, \Phi'_{\lambda, l}(\gamma_0^+) \gamma_0^+, \Phi'_{\lambda, 1}(\gamma_0^-) \gamma_0^-, \dots, \Phi'_{\lambda, l}(\gamma_0^-) \gamma_0^-).$$

Por  $(f_4)$  e pela Teoria do Grau de Brouwer, temos  $d(H_0, Q, 0) = 1$ . Sendo

$$H = H_0 \quad \text{sobre} \quad \partial Q,$$

usando o grau topológico, obtemos  $d(H, Q, 0) = 1$ , e portanto o Lema 3.4.1 ocorre. ■

No que segue, denotamos por  $D_\Gamma$  o número  $D_\Gamma = \sum_{j=1}^l d_j$ .

**Proposição 3.4.2** *Os números  $D_\Gamma$  e  $S_{\lambda, \Gamma}$  verificam as seguintes relações*

$$(a) \quad \sum_{j=1}^l d_{\lambda, j} \leq S_{\lambda, \Gamma} \leq D_\Gamma \text{ para todo } \lambda \geq 1 \text{ e;}$$

$$(b) \quad S_{\lambda, \Gamma} \rightarrow D_\Gamma \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

**Demonstração.** (a) Sendo  $\gamma_0$  definido em (3.67) pertencente a  $\Sigma_\lambda$ , temos

$$\begin{aligned} S_{\lambda,\Gamma} &\leq \max_{(\vec{s}, \vec{t}) \in \bar{Q}} \Phi_\lambda(\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})) \\ &\leq \max_{\vec{s} \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]^l} \sum_{j=1}^l I_j(s_j w_j^+) + \max_{\vec{t} \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]^l} \sum_{j=1}^l I_j(t_j w_j^-). \end{aligned}$$

Da definição de  $w_j$ , sabemos que

$$\max_{z \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]} I_j(z w_j^\pm) = I_j(w_j^\pm), \quad \text{para cada } j \in \Gamma, \quad (3.68)$$

logo,

$$S_{\lambda,\Gamma} \leq \sum_{j=1}^l d_j = D_\Gamma.$$

Agora, para  $\gamma \in \Sigma_\lambda$ , seja  $(\vec{s}_*, \vec{t}_*) \in \bar{Q}$  dado no Lema 3.4.1, temos

$$\Phi_{\lambda,j}(\gamma(\vec{s}_*, \vec{t}_*)) \geq d_{\lambda,j}, \quad \forall j \in \Gamma.$$

Por outro lado,

$$\Phi_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma}^2 - \int_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma} \tilde{F}(u),$$

e sendo  $\tilde{F}(s) \leq \frac{1}{2} \nu_0 |s|^2$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , temos pelo Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma}(u) &\geq \frac{1}{2} \left( \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma}^2 - \nu_0 |u|_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma}^2 \right) \\ &\geq \frac{\delta_0}{2} \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma}^2, \end{aligned}$$

de onde segue que  $\Phi_{\lambda, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma}(u) \geq 0$ , para todo  $u \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'_\Gamma)$ . Logo,

$$\Phi_\lambda(\gamma(\vec{s}_*, \vec{t}_*)) \geq \sum_{j=1}^l \Phi_{\lambda,j}(\gamma(\vec{s}_*, \vec{t}_*))$$

o que implica em

$$\max_{(\vec{s}, \vec{t}) \in \bar{Q}} \Phi_\lambda(\gamma(\vec{s}, \vec{t})) \geq \Phi_\lambda(\gamma(\vec{s}_*, \vec{t}_*)) \geq \sum_{j=1}^l d_{\lambda,j}.$$

Da definição de  $S_{\lambda,\Gamma}$ , podemos concluir que

$$S_{\lambda,\Gamma} \geq \sum_{j=1}^l d_{\lambda,j},$$

finalizando a demonstração de (a).



(b) Observe que se, para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,

$$d_{\lambda,j} \rightarrow d_j \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.69)$$

então

$$\sum_{j=1}^l d_{\lambda,j} \rightarrow D_\Gamma, \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

O último limite junto com (a) implica que (b) ocorre. Sendo assim, resta mostrar que o limite em (3.69) é válido.

Observe que para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$  fixado, a aplicação  $\lambda \mapsto d_{\lambda,j}$  é estritamente crescente e limitada superiormente por  $d_j$ . De fato, considere a aplicação  $w_j \in H^1(\Omega'_j)$  (extensão nula de  $w_j \in H_0^1(\Omega_j)$  dada em (3.6)) e observe que

$$\Phi'_{\lambda,j}(w_j^\pm)w_j^\pm = I'_j(w_j^\pm)w_j^\pm = 0.$$

Logo,  $w_j \in \mathcal{M}_{\lambda,j}$  para todo  $\lambda \geq 1$ , o que implica

$$d_{\lambda,j} = \inf_{\mathcal{M}_{\lambda,j}} \Phi_{\lambda,j} \leq \Phi_{\lambda,j}(w_j) = I_j(w_j) = d_j, \quad \forall \lambda \geq 1,$$

mostrando a limitação superior da aplicação  $\lambda \mapsto d_{\lambda,j}$  por  $d_j$ . Para demonstrar a monotonicidade estrita, considere  $\lambda_1 < \lambda_2$  e  $w_{\lambda_2,j} \in H^1(\Omega'_j)$  satisfazendo (3.7) com  $\lambda = \lambda_2$ . Sejam  $s, t \in (0, +\infty)$  tais que  $sw_{\lambda_2,j}^+ + tw_{\lambda_2,j}^- \in \mathcal{M}_{\lambda_1,j}$ . Sendo  $\lambda_1 < \lambda_2$ , temos

$$\begin{aligned} d_{\lambda_1,j} &= \inf_{\mathcal{M}_{\lambda_1,j}} \Phi_{\lambda_1,j} \leq \Phi_{\lambda_1,j}(sw_{\lambda_2,j}^+ + tw_{\lambda_2,j}^-) \\ &< \Phi_{\lambda_2,j}(sw_{\lambda_2,j}^+ + tw_{\lambda_2,j}^-) = \Phi_{\lambda_2,j}(sw_{\lambda_2,j}^+) + \Phi_{\lambda_2,j}(tw_{\lambda_2,j}^-). \end{aligned}$$

Desde que  $\Phi'_{\lambda_2,j}(w_{\lambda_2,j}^\pm)w_{\lambda_2,j}^\pm = 0$ , temos as seguintes caracterizações

$$\Phi_{\lambda_2,j}(w_{\lambda_2,j}^\pm) = \max_{r>0} \Phi_{\lambda_2,j}(rw_{\lambda_2,j}^\pm).$$

Logo,

$$d_{\lambda_1,j} < \Phi_{\lambda_2,j}(w_{\lambda_2,j}^+) + \Phi_{\lambda_2,j}(w_{\lambda_2,j}^-) = \Phi_{\lambda_2,j}(w_{\lambda_2,j}) = d_{\lambda_2,j},$$

mostrando a monotonicidade estrita.

Seja  $(\lambda_n)$  uma sequência estritamente crescente tal que  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Pelo que vimos no início da demonstração, temos

$$d_{\lambda_1,j} < d_{\lambda_2,j} < \dots < d_{\lambda_n,j} < \dots \leq d_j,$$

de onde segue que  $d := \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\lambda_n, j} \leq d_j$ .

Para cada  $\lambda_n \geq 1$ , considere a solução  $w_{\lambda_n, j} \in \mathcal{H}_{\lambda_n}(\Omega'_j)$  do problema de Neumann em (3.3) com  $\lambda = \lambda_n$ . Observe que

$$\Phi_{\lambda_n, j}(w_{\lambda_n, j}) = d_{\lambda_n, j} \rightarrow d \quad \text{e} \quad \|\Phi'_{\lambda_n, j}(w_{\lambda_n, j})\|_{\lambda_n}^* = 0,$$

de onde segue que  $(w_{\lambda_n, j})_n$  é uma sequência  $(PS)_{\infty, d}$  para a sequência de funcionais  $(\Phi_{\lambda_n, j})$ , com  $d \in (0, D]$ .

**Afirmção 3.4.3** *A sequência  $(w_{\lambda_n, j})_n$  é limitada em  $H^1(\Omega'_j)$  com*

$$\|w_{\lambda_n, j}\|_{H^1(\Omega'_j)}^2 \leq \frac{1}{\xi^2} < 1.$$

De fato, usando a Condição de Ambrosetti-Rabinowitz  $(f_3)$ , obtemos

$$\begin{aligned} d_{\lambda_n, j} &= \Phi_{\lambda_n, j}(w_{\lambda_n, j}) - \frac{1}{\theta} \Phi'_{\lambda_n, j}(w_{\lambda_n, j}) w_{\lambda_n, j} \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|w_{\lambda_n, j}\|_{\lambda_n, \Omega'_j}^2 - \int_{\Omega'_j} \left( F(w_{\lambda_n, j}) - \frac{1}{\theta} f(w_{\lambda_n, j}) w_{\lambda_n, j} \right) \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|w_{\lambda_n, j}\|_{\lambda_n, \Omega'_j}^2 \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_{\lambda_n, j}\|_{\lambda_n, \Omega'_j}^2 \leq \frac{2d\theta}{\theta - 2} \leq \frac{2d_j\theta}{\theta - 2} < \frac{1}{\xi^2} < 1.$$

A afirmação segue observando que  $\|w_{\lambda_n, j}\|_{H^1(\Omega'_j)}^2 \leq \|w_{\lambda_n, j}\|_{\lambda_n, \Omega'_j}^2$ , para todo  $n \geq 1$ .

Assim, podemos assumir que para algum  $w_0 \in H^1(\Omega'_j)$ ,

$$w_{\lambda_n, j} \rightharpoonup w_0 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega'_j),$$

$$w_{\lambda_n, j} \rightarrow w_0 \quad \text{em} \quad L^s(\Omega'_j), \quad \text{para} \quad s \geq 1$$

e

$$w_{\lambda_n, j}(x) \rightarrow w_0(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega'_j.$$

Seguindo os mesmos argumentos utilizados na demonstração da Proposição 3.3.8, mostra-se que

$$w_{\lambda_n, j} \rightarrow w_0 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega'_j),$$

$w_0 \equiv 0$  em  $\Omega'_j \setminus \Omega_j$  e  $w_0|_{\Omega_j}$  é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u), & \text{em } \Omega_j \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_j. \end{cases}$$

Para mostrar que  $w_0^\pm \neq 0$ , basta observar que

$$\|w_{\lambda_n, j}^\pm\|_{H^1(\Omega'_j)}^2 \leq \|w_{\lambda_n, j}^\pm\|_{\lambda_n, j}^2 = \int_{\Omega'_j} f(w_{\lambda_n, j}^\pm) w_{\lambda_n, j}^\pm.$$

Agora, é só usar argumentos similares aos do Lema 1.1.11 do Capítulo 1, para mostrar que

$$\int_{\Omega'_j} |w_{\lambda_n, j}^\pm|^q \geq \delta_q > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Passando ao limite de  $n \rightarrow \infty$  na última desigualdade, obtemos

$$\int_{\Omega_j} |w_0^\pm|^q \geq \delta_q > 0,$$

de onde segue que  $w_0^\pm \neq 0$ . Portanto,  $w_0 \in \mathcal{M}_j$  e

$$d_j \geq \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\lambda_n, j} \geq \Phi_{\lambda_n, j}(w_0) = I_j(w_0) \geq d_j$$

mostrando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\lambda_n, j} = d_j$ . ■

### 3.5 Uma família especial de soluções nodais para $(A)_\lambda$

Nesta seção, mostramos a existência de uma família especial de soluções nodais para  $(A)_\lambda$ , para  $\lambda$  suficientemente grande. Estas soluções nodais são exatamente as soluções enunciadas no Teorema 3.1.1.

No que segue,  $E_{\lambda, j}^+$  e  $E_{\lambda, j}^-$  denotam o cone das funções não negativas e não positivas pertencentes a  $\mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j)$ , respectivamente, isto é,

$$E_{\lambda, j}^+ = \{ u \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j) : u(x) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega'_j \},$$

$$E_{\lambda, j}^- = \{ u \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j) : u(x) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega'_j \}.$$

Segue da definição de  $\gamma_0$  e das imersões compactas de Sobolev que existem constantes positivas  $\tau$  e  $\lambda^*$  tais que

$$\text{dist}_{\lambda, j}(\gamma_0(\vec{s}, \vec{t}), E_{\lambda, j}^\pm) > \tau \text{ para todo } (\vec{s}, \vec{t}) \in \overline{Q}, j \in \Gamma \text{ e } \lambda \geq \lambda^*,$$

onde  $dist_{\lambda,j}(K, F)$  denota a distância entre conjuntos em  $\mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j)$ . Considerando o número  $\tau$  obtido na última desigualdade, definimos

$$\Theta = \{u \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j) : dist_{\lambda,j}(u, E_{\lambda,j}^\pm) \geq \tau \quad \forall j \in \Gamma\}.$$

Além disso, para qualquer  $c, \mu > 0$  e  $0 < \delta < \min\{\zeta, \tau/2\}$ , consideramos os conjuntos

$$\Phi_\lambda^c = \{u \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j) : \Phi_\lambda(u) \leq c\} \quad \text{e} \quad B_{\lambda,\mu} = \{u \in \Theta_{2\delta} : |\Phi_\lambda(u) - S_{\lambda,\Gamma}| \leq \mu\},$$

onde  $\zeta$  é dado em (3.66) e, para  $r > 0$ ,  $\Theta_r$  denota o conjunto

$$\Theta_r = \{u \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega'_j) : dist_{\lambda,j}(u, \Theta) \leq r\}.$$

Note que para cada  $\mu > 0$ , existe  $\Lambda^* = \Lambda^*(\mu) > 0$  tal que

$$w = \sum_{j=1}^l w_j \in B_{\lambda,\mu}, \quad \text{para todo } \lambda \geq \Lambda^*,$$

pois  $w \in \Theta$ ,  $\Phi_\lambda(w) = D_\Gamma$  e  $S_{\lambda,\Gamma} \rightarrow D_\Gamma$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Logo,  $B_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$  para  $\lambda$  suficientemente grande.

Observe também que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos

$$\|\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})\|_\lambda^2 \leq (1 + \epsilon)^2 \left\| \sum_{j=1}^k w_j \right\|_\lambda^2 \leq M := \frac{2\theta D_\Gamma}{\theta - 2} (1 + \epsilon)^2 < 1,$$

com a constante  $M$  independente de  $\lambda$ .

No que segue, para  $r > 0$ , denotamos por

$$\overline{B}_r(0) := \{u \in \mathcal{H}_\lambda : \|u\|_\lambda \leq r\}$$

e por  $\mu^*$  o seguinte número real positivo

$$\mu^* = \min \left\{ \frac{M+1}{2}, \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (3.70)$$

**Proposição 3.5.1** *Para cada  $\mu > 0$  fixo, existem  $\sigma_o = \sigma_o(\mu) > 0$  e  $\Lambda_* = \Lambda_*(\mu) \geq 1$  independentes de  $\lambda$  tais que*

$$\|\Phi'_\lambda(u)\|_\lambda^* \geq \sigma_o \quad \text{para } \lambda \geq \Lambda_* \quad \text{e todo } u \in (B_{\lambda,2\mu} \setminus B_{\lambda,\mu}) \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0) \cap \Phi_\lambda^{D_\Gamma}.$$

**Demonstração.** Suponhamos, por contradição, que existe uma sequência  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $u_n \in (B_{\lambda_n,2\mu} \setminus B_{\lambda_n,\mu}) \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0) \cap \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma}$  tal que

$$\|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}^* \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Sendo  $u_n \in B_{\lambda_n, 2\mu}$  e  $S_{\lambda_n, \Gamma} \rightarrow D_\Gamma$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que a sequência  $(\Phi_{\lambda_n}(u_n))$  é também limitada. Assim, podemos assumir que

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow c \in (0, D_\Gamma],$$

após extrairmos uma subsequência se necessário. Aplicando a Proposição 3.3.8, podemos extrair uma subsequência  $u_n \rightarrow u$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , onde  $u \in H_0^1(\Omega_\Gamma)$  é uma solução de  $(P_j)$  com

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n} \rightarrow 0, \quad \lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_n|^2 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma} \rightarrow 0.$$

Uma vez que  $u_n \in \Theta_{2\delta}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|u_n^\pm\|_{\lambda_n, \Omega'_j} \rightarrow 0, \quad \text{para todo } j \in \Gamma.$$

De fato, sendo  $u_n^- \in E_{\lambda_n, j}^-$ , temos

$$\|u_n^+\|_{\lambda_n, \Omega'_j} = \|u_n - u_n^-\|_{\lambda_n, \Omega'_j} \geq \text{dist}_{\lambda_n, j}(u_n, E_{\lambda_n, j}^-), \quad \forall \lambda_n \geq \Lambda^*,$$

como  $u_{\lambda_n} \in \Theta_{2\delta}$ , temos

$$\text{dist}_{\lambda_n, j}(u_n, E_{\lambda_n, j}^-) \geq \tau - 2\delta > 0.$$

Logo

$$\|u_n^+\|_{\lambda_n, \Omega'_j} \geq \tau - 2\delta > 0, \quad \forall \lambda_n \geq \Lambda^*. \quad (3.71)$$

Analogamente,

$$\|u_n^-\|_{\lambda_n, \Omega'_j} \geq \tau - 2\delta > 0, \quad \forall \lambda_n \geq \Lambda^*.$$

Sendo assim,  $\|u^\pm\|_{\Omega_j} \neq 0$  para todo  $j \in \Gamma$ . Logo, para todo  $j \in \Gamma$ ,  $u$  é uma solução nodal de  $(P_j)$  e

$$\sum_{j=1}^l d_j \leq \sum_{j=1}^l I_j(u|_{\Omega_j}) \leq D_\Gamma.$$

Este fato implica em  $I_j(u|_{\Omega_j}) = d_j$  para todo  $j \in \Gamma$ , logo

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow D_\Gamma \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Usando novamente a convergência  $S_{\lambda_n, \Gamma} \rightarrow D_\Gamma$  quando  $n \rightarrow \infty$ , podemos concluir que

$$u_n \in B_{\lambda_n, \mu} \cap \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma},$$

para  $n$  suficientemente grande, o que é uma contradição. ■

**Proposição 3.5.2** Para cada  $\mu \in (0, \mu^*)$ , existe  $\Lambda^* = \Lambda^*(\mu) > 1$  tal que para todo  $\lambda \geq \Lambda^*$  o funcional  $\Phi_\lambda$  tem um ponto crítico em  $B_{\lambda, \mu} \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0) \cap \Phi_\lambda^{D_\Gamma}$ .

**Demonstração.** Suponhamos, por contradição, que existe  $\mu \in (0, \mu^*)$  e uma sequência  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , tal que  $\Phi_{\lambda_n}$  não tem pontos críticos em  $B_{\lambda_n, \mu} \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0) \cap \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma}$ . Pela Proposição 3.3.5 o funcional  $\Phi_{\lambda_n}$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  para todo  $c \in (-\infty, D]$ , logo existe uma constante  $d_{\lambda_n} > 0$  tal que

$$\|\Phi'_{\lambda_n}(u)\|_{\lambda_n}^* \geq d_{\lambda_n}, \quad \forall u \in B_{\lambda_n, \mu} \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0) \cap \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma}.$$

Além disso, pela Proposição 3.5.1, também temos

$$\|\Phi'_{\lambda_n}(u)\|_{\lambda_n}^* \geq \sigma_o, \quad \forall u \in (B_{\lambda_n, 2\mu} \setminus B_{\lambda_n, \mu}) \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0) \cap \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma},$$

onde  $\sigma_o > 0$  é independente de  $\lambda_n$  para  $n$  suficientemente grande. No que segue,

$$\Psi_n : \mathcal{H}_{\lambda_n} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad H_n : \Phi_{\lambda_n}^{c_\Gamma} \rightarrow \mathcal{H}_{\lambda_n}$$

são funções contínuas verificando

$$\Psi_n(u) = 1, \quad \text{para } u \in B_{\lambda_n, 3\mu/2} \cap \Theta_\delta \cap \overline{B}_{(M+1)/2}(0),$$

$$\Psi_n(u) = 0, \quad \text{para } u \notin B_{\lambda_n, 3\mu/2} \cap \Theta_\delta \cap \overline{B}_{(M+1)/2}(0),$$

$$0 \leq \Psi_n(u) \leq 1, \quad \text{para } u \in \mathcal{H}_{\lambda_n},$$

e

$$H_n(u) = \begin{cases} -\Psi_n(u) \|Y_n(u)\|^{-1} Y_n(u), & \text{para } u \in B_{\lambda_n, 2\mu} \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0), \\ 0, & \text{para } u \notin B_{\lambda_n, 2\mu} \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0), \end{cases}$$

onde  $Y_n$  é um campo pseudo-gradiente para  $\Psi_{\lambda_n}$  sobre  $\mathcal{M}_n = \{u \in \mathcal{H}_{\lambda_n} : \Phi'_{\lambda_n}(u) \neq 0\}$ .

Pela definição de  $H_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|H_n(u)\| \leq 1, \quad \text{para todo } u \in \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma},$$

consequentemente, existe uma deformação  $\eta_n : [0, \infty) \times \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma} \rightarrow \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma}$  definida por

$$\frac{d\eta_n}{dt} = H_n(\eta_n), \quad \eta_n(0, u) = u \in \Phi_{\lambda_n}^{D_\Gamma}.$$

Esta deformação satisfaz as seguintes propriedades básicas:

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\lambda_n}(\eta_n(t, u)) \leq -\Psi_n(\eta_n(t, u)) \|\Phi'_{\lambda_n}(\eta_n(t, u))\| \leq 0, \quad (3.72)$$

$$\left\| \frac{d\eta_n}{dt} \right\|_{\lambda_n} = \|H_n(\eta_n)\|_{\lambda_n} \leq 1 \quad (3.73)$$

e

$$\eta_n(t, u) = u, \quad \forall t \geq 0, \quad u \notin B_{\lambda_n, 2\mu} \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0). \quad (3.74)$$

- Os caminhos  $\gamma_n(\vec{s}, \vec{t}) := \eta_n(t, \gamma_0(\vec{s}, \vec{t}))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

Segue da definição do caminho  $\gamma_0$  que

$$\gamma_0(\vec{s}, \vec{t}) \notin B_{\lambda_n, 2\mu}, \quad \text{para todo } (\vec{s}, \vec{t}) \in \partial Q.$$

Portanto,

$$\eta_n(t, \gamma_0(\vec{s}, \vec{t})) = \gamma_0(\vec{s}, \vec{t}), \quad \text{para todo } (\vec{s}, \vec{t}) \in \partial Q.$$

Vamos mostrar que as aplicações  $\gamma_n : \overline{Q} \rightarrow \mathcal{H}_{\lambda_n}$  pertencem a classe  $\Sigma_{\lambda_n}$  para  $n$  suficientemente grande. Para tal, começamos observando que  $\gamma_n$  é uma aplicação contínua em  $\overline{Q}$ . Uma vez que  $\mu \in (0, \mu^*)$ , (3.66), (3.68), e (3.70) implicam em

$$|\Phi_{\lambda_n}(\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})) - D_\Gamma| > \zeta \geq \delta \geq 2\mu^*, \quad \forall (\vec{s}, \vec{t}) \in \partial Q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, usando novamente o fato que  $S_{\lambda, \Gamma} \rightarrow D_\Gamma$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , existe  $n_o > 0$  tal que

$$|\Phi_{\lambda_n}(\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})) - S_{\lambda_n, \Gamma}| > 2\mu, \quad \forall (\vec{s}, \vec{t}) \in \partial Q, \quad n \geq n_o,$$

o que implica em  $\gamma_0(\vec{s}, \vec{t}) \notin B_{\lambda_n, 2\mu}$  para todo  $(\vec{s}, \vec{t}) \in \partial Q$  e  $n \geq n_o$ . Logo,

$$\gamma_n = \gamma_0, \quad \text{sobre } \partial Q, \quad \forall n \geq n_o.$$

Assim, resta mostrar que

$$\gamma_n(\vec{s}, \vec{t})^\pm \in H^1(\Omega'_j) \setminus \{0\},$$

para todo  $j \in \Gamma$  e todo  $(\vec{s}, \vec{t}) \in Q$ .

Sendo  $\gamma_n(\vec{s}, \vec{t}) = \eta_n(T_n, \gamma_0(\vec{s}, \vec{t})) \in \Theta_{2\delta}$  para todo  $n$ , tem-se

$$\text{dist}_{\lambda_n, j}(\gamma_n(\vec{s}, \vec{t}), E_{\lambda_n, j}^\pm) \geq \tau - 2\delta > 0.$$

Assim,  $\gamma_n^\pm|_{\Omega_j} \neq 0$  para todo  $j \in \Gamma$ , e podemos concluir que  $\gamma_n \in \Sigma_{\lambda_n}$  para  $n$  suficientemente grande

- O caminho  $\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})$ :

Note que  $\text{supt } \gamma_0(\vec{s}, \vec{t}) \subset \overline{\Omega}_\Gamma$  para todo  $(\vec{s}, \vec{t}) \in \overline{Q}$  e que  $\Phi_\lambda(\gamma_0(\vec{s}, \vec{t}))$  não depende de  $\lambda \geq 1$ . Além disso, observe que

$$\Phi_\lambda(\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})) \leq D_\Gamma, \quad \text{para todo } (\vec{s}, \vec{t}) \in \overline{Q}$$

e

$$\Phi_\lambda(\gamma_0(\vec{s}, \vec{t})) = D_\Gamma, \quad \text{se, e somente se } s_j = t_j = 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}.$$

Portanto, o número real

$$m_0^n := \sup\{\Phi_{\lambda_n}(u) : u \in \gamma_0(Q) \setminus (B_{\lambda_n, \mu} \cap \overline{B}_{\frac{M+1}{2}}(0))\},$$

é independente de  $\lambda_n$  e verifica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} m_0^n < D_\Gamma.$$

De fato, caso contrário, existe uma subsequência  $(n_j) \subset \mathbb{N}$  tal que  $m_0^{n_j} \rightarrow D_\Gamma$ , quando  $n_j \rightarrow \infty$  com

$$\begin{aligned} \gamma_0(\vec{s}_{n_j}, \vec{t}_{n_j}) &\notin B_{\lambda_{n_j}, \mu} \cap \overline{B}_{\frac{M+1}{2}}(0), \\ m_0^{n_j} - \frac{1}{n_j} &\leq \Phi_{\lambda_{n_j}}(\gamma_0(\vec{s}_{n_j}, \vec{t}_{n_j})) \leq D_\Gamma \end{aligned} \quad (3.75)$$

e

$$\Phi_{\lambda_{n_j}}(\gamma_0(\vec{s}_{n_j}, \vec{t}_{n_j})) \rightarrow D_\Gamma, \quad \text{quando } n_j \rightarrow \infty.$$

Desde que  $\gamma_0(\overline{Q}) \subset \overline{B}_{\frac{M+1}{2}}(0)$ , devemos ter

$$\gamma_0(\vec{s}_{n_j}, \vec{t}_{n_j}) \notin B_{\lambda_{n_j}, \mu},$$

ou seja,

$$|\Phi_{\lambda_{n_j}}(\gamma_0(\vec{s}_{n_j}, \vec{t}_{n_j})) - S_{\lambda_{n_j}, \Gamma}| > \mu > 0, \quad \forall n_j \in \mathbb{N}. \quad (3.76)$$

Mas pelo item (b) da Proposição 3.4.2 e por (3.75),

$$|\Phi_{\lambda_{n_j}}(\gamma_0(\vec{s}_{n_j}, \vec{t}_{n_j})) - S_{\lambda_{n_j}, \Gamma}| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n_j \rightarrow \infty,$$

o que contradiz (3.76).



**Afirmação 3.5.3** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma constante  $K_n > 0$  verificando

$$|\Phi_{\lambda_n}(u) - \Phi_{\lambda_n}(v)| \leq K_n \|u - v\|_{\lambda_n},$$

para todo  $u, v \in \overline{B}_{(M+3)/4}(0)$ .

De fato, Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$|\Phi_{\lambda_n}(u) - \Phi_{\lambda_n}(v)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|\Phi'_{\lambda_n}(tu + (1-t)v)\|_{\lambda_n}^* \|u - v\|_{\lambda_n},$$

onde

$$\|\Phi'_{\lambda_n}(tu + (1-t)v)\|_{\lambda_n}^* = \sup_{w \in \mathcal{H}_{\lambda_n}, \|w\|_{\lambda_n} \leq 1} |\langle \Phi'_{\lambda_n}(tu + (1-t)v), w \rangle|.$$

Assim, basta mostrar que existe  $K_n > 0$  tal que

$$|\langle \Phi'_{\lambda_n}(tu + (1-t)v), w \rangle| \leq K_n, \quad \forall w \in \mathcal{H}_{\lambda_n}, \|w\|_{\lambda_n} \leq 1, \forall u, v \in \overline{B}_{(M+3)/4}(0).$$

Ora,

$$|\langle \Phi'_{\lambda_n}(tu + (1-t)v), w \rangle| \leq \frac{M+3}{2} + \int_{\mathbb{R}^2} |f(tu + (1-t)v)w|.$$

Sendo assim, resta mostrar a limitação da integral acima. Usando o crescimento de  $f$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(tu + (1-t)v)w| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |tu + (1-t)v||w| + C \int_{\mathbb{R}^2} |w| \left( e^{4\pi\tau|tu+(1-t)v|^2} - 1 \right). \quad (3.77)$$

Usando a desigualdade de Hölder e o Lema A.1 do Apêndice A, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |w| \left( e^{4\pi\tau|tu+(1-t)v|^2} - 1 \right) \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 \tau |tu+(1-t)v|^2} - 1 \right). \quad (3.78)$$

Por outro lado, para  $u, v \in \overline{B}_{(M+3)/4}(0)$ , temos

$$\|tu + (1-t)v\|_{\lambda_n} \leq \frac{M+3}{4} < 1.$$

Sendo assim, podemos fixar  $t_2 > 1$  suficientemente próximo de 1 de tal modo que  $4\pi t_2 \tau \|tu + (1-t)v\|_{\lambda_n}^2 < 1$ . Logo, usando a Desigualdade de Trudinger-Moser devida a Cao (6),

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{4\pi t_2 \tau |tu+(1-t)v|^2} - 1 \right) \leq C_2, \quad \forall u, v \in \overline{B}_{(M+3)/4}(0), \forall t \in [0, 1]. \quad (3.79)$$

Portanto, de (3.77), (3.78) e (3.79), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(tu + (1-t)v)w| \leq C, \quad \forall u, v \in \overline{B}_{(M+3)/4}(0), \forall t \in [0, 1],$$

concluindo a demonstração da Afirmação 3.5.3.

Usando as informações apresentadas até o presente momento, podemos afirmar o seguinte.

**Afirmação 3.5.4** *Existe  $T_n = T(\lambda_n) > 0$  e  $\epsilon^* > 0$  independente de  $n$  tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{(\vec{s}, \vec{t}) \in Q} \Phi_{\lambda_n}(\eta_n(T_n, \gamma_0(\vec{s}, \vec{t}))) \right\} < D_\Gamma - \epsilon^*.$$

De fato, defina  $u := \gamma_0(\vec{s}, \vec{t})$ ,  $\tilde{d}_{\lambda_n} = \min\{d_{\lambda_n}, \sigma_o\}$ ,  $T_n = \mu\sigma_o/2\tilde{d}_{\lambda_n}$  e  $\tilde{\eta}(t) := \eta_n(t, u)$ .

Se  $u \notin B_{\lambda_n, \mu} \cap \overline{B}_{(M+1)/2}(0) \cap \Theta_\delta$ , pela definição de  $m_0^n$  temos

$$\Phi_{\lambda_n}(\eta_n(t, u)) \leq \Phi_{\lambda_n}(u) \leq m_0^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Por outro lado, se  $u \in B_{\lambda_n, \mu} \cap \overline{B}_{(M+1)/2}(0) \cap \Theta_\delta$ , devemos analisar os seguintes casos:

Caso 1.  $\tilde{\eta}_n(t) \in B_{\lambda_n, 3\mu/2} \cap \overline{B}_{(M+1)/2}(0) \cap \Theta_\delta$ , para todo  $t \in [0, T_n]$ ;

Caso 2.  $\tilde{\eta}_n(t_o) \notin B_{\lambda_n, 3\mu/2} \cap \overline{B}_{(M+1)/2}(0) \cap \Theta_\delta$ , para algum  $t_o \in [0, T_n]$ .

**Análise do caso 1:**

Neste caso, temos  $\Psi_n(\tilde{\eta}_n(t)) \equiv 1$  e  $\|\Phi'_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(t))\| \geq \tilde{d}_{\lambda_n}$  para todo  $t \in [0, T_n]$ .

Portanto por (3.72),

$$\Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(T_n)) = \Phi_{\lambda_n}(u) + \int_0^{T_n} \frac{d}{ds} \Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(s)) ds \leq D_\Gamma - \int_0^{T_n} \tilde{d}_{\lambda_n} ds,$$

ou seja,

$$\Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(T_n)) \leq D_\Gamma - \tilde{d}_{\lambda_n} T_n = D_\Gamma - \frac{1}{2} \sigma_o \mu,$$

de onde segue a afirmação.

**Análise do caso 2:**

Para este caso, temos as seguintes situações

(a) Existe  $t_2 \in [0, T_n]$  tal que  $\tilde{\eta}_n(t_2) \notin \Theta_\delta$ ; note que para  $t_1 = 0$ ,

$$\|\tilde{\eta}_n(t_2) - \tilde{\eta}_n(t_1)\| \geq \delta > \mu,$$

pois  $\tilde{\eta}_n(0) = u \in \Theta$ .

(b) Existe  $t_2 \in [0, T_n]$  tal que  $\tilde{\eta}_n(t_2) \notin \overline{B}_{(M+1)/2}(0)$ ; neste caso, para  $t_1 = 0$ ,

$$\|\tilde{\eta}_n(t_2) - \tilde{\eta}_n(t_1)\| \geq \frac{M+1}{2} > \mu,$$

pois  $\tilde{\eta}_n(0) = u \in \overline{B}_{(M+1)/2}(0)$ .

(c)  $\tilde{\eta}_n(t) \in \Theta_\delta \cap \overline{B}_{(M+1)/2}(0)$  para todo  $t \in [0, T_n]$ , e existem  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T_n$  tal que  $\tilde{\eta}_n(t) \in B_{\lambda_n, 3\mu/2} \setminus B_{\lambda_n, \mu}$  para todo  $t \in [t_1, t_2]$  com

$$|\Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(t_1)) - S_{\lambda_n, \Gamma}| = \mu \quad \text{e} \quad |\Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(t_2)) - S_{\lambda_n, \Gamma}| = 3\mu/2.$$

Usando a definição de  $K_n$ , obtemos

$$\|\tilde{\eta}_n(t_2) - \tilde{\eta}_n(t_1)\| \geq \frac{\mu}{2K_n}.$$

As estimativas mostradas em (a) – (c) implicam na existência de uma constante  $C > 0$  tal que  $t_2 - t_1 \geq C\mu$ , e assim

$$\Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(T_n)) \leq \Phi_{\lambda_n}(u) - \int_0^{T_n} \Psi_n(\tilde{\eta}_n(s)) \|\Phi'_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(s))\| ds$$

implicando nas desigualdades

$$\Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(T_n)) \leq D_\Gamma - \int_{t_1}^{t_2} \sigma_o ds \leq D_\Gamma - \sigma_o(t_2 - t_1)$$

ou seja,

$$\Phi_{\lambda_n}(\tilde{\eta}_n(T_n)) \leq D_\Gamma - C\sigma_o\mu,$$

demonstrando que a afirmação ocorre.

Pelo estudo feito, fica estabelecida a desigualdade

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_{\lambda_n, \Gamma} \leq D_\Gamma - \epsilon^*,$$

o que contradiz a Proposição 3.4.2, concluindo a demonstração da Proposição 3.5.2. ■

## 3.6 Demonstração do Teorema 3.1.1

Pela Proposição 3.5.2, para cada  $\mu \in (0, \mu^*)$  fixo, existe  $\Lambda^* = \Lambda^*(\mu) > 1$  tal que o problema auxiliar  $(A)_\lambda$  tem uma solução nodal  $u_\lambda \in B_{\lambda, \mu} \cap \overline{B}_{(M+3)/4}(0)$  para  $\lambda \geq \Lambda^*$  com

$$\text{dist}_{\lambda, j}(u_\lambda, E_{\lambda, j}^\pm) \geq \tau - 2\delta > 0 \quad \forall j \in \Gamma. \quad (3.80)$$

Repetindo o mesmo argumento usado na demonstração da Proposição 3.3.8, obtemos

$$u_\lambda \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma) \quad \text{quando} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Esta convergência junto com a Proposição 3.3.9, implica que  $u_\lambda$  é uma solução nodal de  $(P)_\lambda$ , para  $\lambda$  suficientemente grande.

Fixando  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $\mu_n \rightarrow 0$ , a sequência  $(u_{\lambda_n})$  verifica

$$\Phi'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = S_{\lambda_n, \Gamma} + o_n(1).$$

Pela Proposição 3.4.2,

$$\Phi'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = D_\Gamma + o_n(1).$$

Portanto,  $(u_{\lambda_n})$  é uma sequência  $(PS)_{\infty, D_\Gamma}$  para  $(\Phi_{\lambda_n})$ . Sendo  $D_\Gamma \in (0, D]$ , pela Proposição 3.3.8 existe  $u \in H_0^1(\Omega_\Gamma)$  tal que, para alguma subsequência ainda denotada por  $(u_{\lambda_n})$ ,

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2), \quad \lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_{\lambda_n}|^2 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma}^2 \rightarrow 0.$$

De onde segue que

$$I'_j(u) = 0 \quad \text{para todo} \quad j \in \Gamma \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^l I_j(u) = D_\Gamma. \quad (3.81)$$

Como consequência, temos o seguinte resultado

**Afirmção 3.6.1** *Existe  $\kappa_o > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega_j} |u_{\lambda_n}^\pm|^{q'} \geq \kappa_o \quad \forall \lambda_n \geq \Lambda^*, \quad \forall j \in \Gamma, \quad (3.82)$$

para algum  $q' > 1$ .

De fato, fixe  $j \in \Gamma$  e considere  $\eta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  verificando

$$\eta_j \equiv 1 \quad \text{em} \quad \Omega'_j \quad \text{e} \quad \eta_j \equiv 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega'_j)_\delta \quad \text{e} \quad ((\Omega'_j)_\delta \setminus \Omega'_j) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\Gamma.$$

Tomando  $v_j = \eta_j u_{\lambda_n}^+$  como função teste, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_{\lambda_n} \nabla (\eta_j u_{\lambda_n}^+) + (\lambda_n V(x) + 1) u_{\lambda_n} \eta_j u_{\lambda_n}^+ = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_{\lambda_n}) \eta_j u_{\lambda_n}^+,$$

de onde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_{\lambda_n}^+|^2 \eta_j + (\lambda_n V(x) + 1) |u_{\lambda_n}^+| \eta_j = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_{\lambda_n}) \eta_j u_{\lambda_n}^+ + o_n(1). \quad (3.83)$$

Usando o crescimento de  $g$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_{\lambda_n}) \eta_j u_{\lambda_n}^+ \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |u_{\lambda_n}^+|^2 \eta_j + C \int_{\mathbb{R}^2} \eta_j u_{\lambda_n}^+ b_\tau(u_{\lambda_n}),$$

e pela Desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_{\lambda_n}) \eta_j u_{\lambda_n}^+ \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |u_{\lambda_n}^+|^2 \eta_j + C \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\eta_j u_{\lambda_n}^+|^{q'} \right)^{1/q'} |b_\tau(u_{\lambda_n})|_q$$

onde  $1/q + 1/q' = 1$ . Fixando  $q > 1$ , com  $q$  suficientemente próximo de 1 e usando o Corolário 3.2.2, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_{\lambda_n}) \eta_j u_{\lambda_n}^+ \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |u_{\lambda_n}^+|^2 \eta_j + C \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\eta_j u_{\lambda_n}^+|^{q'} \right)^{1/q'}. \quad (3.84)$$

De (3.83) e (3.84),

$$(1 - \epsilon) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_{\lambda_n}^+|^2 \eta_j + (\lambda_n V(x) + 1) |u_{\lambda_n}^+|^2 \eta_j \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\eta_j u_{\lambda_n}^+|^{q'} \right)^{1/q'} + o_n(1).$$

Logo, fixando  $\epsilon < 1$  e usando (3.71), obtemos

$$0 < (1 - \epsilon)(\tau - 2\delta) \leq (1 - \epsilon) \|u_{\lambda_n}^+\|_{\lambda_n, \Omega'_j}^2 \leq C \left( \int_{\Omega'_j} |u_{\lambda_n}^+|^{q'} \right)^{1/q'} + o_n(1),$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega'_j} |u_{\lambda_n}^+|^{q'} \geq \kappa_o > 0, \quad \forall \lambda_n \geq \Lambda^*,$$

para algum  $\kappa_o$  positivo. Analogamente, temos

$$\int_{\Omega'_j} |u_{\lambda_n}^-|^{q'} \geq \kappa_o > 0, \quad \forall \lambda_n \geq \Lambda^*,$$

mostrando que a afirmação é verdadeira.

Passando ao limite de  $n \rightarrow \infty$  em (3.82), obtemos

$$\int_{\Omega'_j} |u^\pm|^{q'} = \int_{\Omega_j} |u^\pm|^{q'} \geq \kappa_o, \quad \forall j \in \Gamma.$$

Assim,  $u$  muda de sinal em  $\Omega_j$  para todo  $j \in \Gamma$ , o que implica em

$$I_j(u) \geq d_j, \quad \forall j \in \Gamma. \quad (3.85)$$

Segue de (3.81) e (3.85) que  $I_j(u) = d_j$  para todo  $j \in \Gamma$ . Isto mostra que, para cada  $j \in \Gamma$ ,  $u|_{\Omega_j}$  é uma solução nodal de energia mínima para o problema (3.3), e a demonstração do Teorema 3.1.1 está completa.  $\blacksquare$

# Capítulo 4

## Infinitas soluções nodais em bolas

Neste capítulo, estabelecemos a existência de infinitas soluções nodais para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } B, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (P)$$

onde  $B$  é a bola unitária em  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  é uma função ímpar com crescimento crítico exponencial. Dividindo  $B$  em setores angulares e usando o Teorema do Passo da Montanha, mostramos a existência de uma solução positiva em um dos setores de  $B$ . A partir desta solução e de um processo de continuação anti-simétrica desenvolvido por Comte-Knaap [31] mostraremos a existência de infinitas soluções nodais em  $B$ . Aqui, vamos assumir as hipóteses:

( $f_1$ ) Existe  $C > 0$  tal que

$$|f(s)| \leq Ce^{4\pi|s|^2} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

( $f_2$ )  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 0$ ;

e as seguintes hipóteses adicionais

( $H_1$ ) Existem  $s_0 > 0$  e  $M > 0$  tais que

$$0 < F(s) := \int_0^s f(t)dt \leq M|f(s)| \quad \text{para todo } |s| \geq s_0.$$

$$(H_2) \quad 0 < F(s) \leq \frac{1}{2}f(s)s, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$(H_3) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)e^{-4\pi s^2} = +\infty$$

Nosso principal resultado é o seguinte:

**Teorema 4.0.2** *Seja  $f$  uma função ímpar satisfazendo  $(f_1) - (f_2)$  e  $(H_1) - (H_3)$ . Então, o problema  $(P)$  tem infinitas soluções nodais.*

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos o conjunto

$$A_m = \left\{ x = (x_1, x_2) \in B : \cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)|x_1| < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2m}\right)x_2 \right\},$$

ver figura 4.1. Assim,  $A_1$  é um semi-círculo;  $A_2$  é um quarto do círculo (setor angular de ângulo  $\pi/2$ );  $A_3$  é um quarto do círculo (setor angular de ângulo  $\pi/4$ ), e assim sucessivamente.

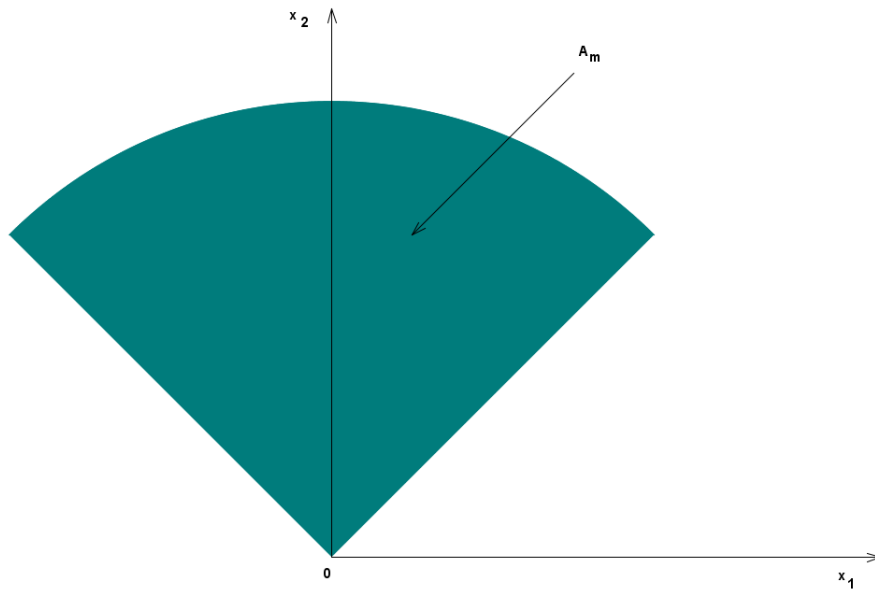


Figura 4.1: Setor angular  $A_m$ .

Primeiro consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } A_m, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial A_m. \end{cases} \quad (P)_m$$

Usaremos o Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.18 do Apêndice A) para obter uma solução positiva de  $(P)_m$  e a partir desta solução, vamos construir uma solução nodal para o problema  $(P)$ .

De acordo com Figueiredo, Miyagaki e Ruf [34], para obter uma solução positiva de  $(P)_m$  basta que o limite em  $(H_3)$  verifique

$$(H_3)' \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} sf(s)e^{-4\pi s^2} \geq \beta > \frac{1}{2\pi d_m^2},$$

onde  $d_m$  é o raio da maior bola contida em  $A_m$ . Conforme demonstramos a seguir, supondo  $(H_3)$  no lugar de  $(H_3)'$ , temos a existência de uma solução positiva de  $(P)_m$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Este é o conteúdo do nosso próximo resultado.

**Teorema 4.0.3** *Sob as hipóteses  $(f_1) - (f_2)$  e  $(H_1) - (H_3)$ , o problema  $(P)_m$  possui uma solução positiva, para cada  $m \in \mathbb{N}$ .*

## 4.1 Demonstração do Teorema 4.0.3.

Como estamos interessados em soluções positivas para o problema  $(P)_m$ , vamos supor ainda que

$$f(s) = 0, \quad \forall s \leq 0.$$

Associado ao problema  $(P)_m$ , temos o funcional energia  $I : H_0^1(A_m) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{A_m} |\nabla u|^2 - \int_{A_m} F(u).$$

No nosso caso,  $\partial A_m$  não é de classe  $C^1$ . No entanto, o funcional  $I$  está bem definido. De fato, para  $u \in H_0^1(A_m)$ , considere  $u^* \in H_0^1(B)$  a extensão nula de  $u$  em  $B$ , definida por

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in A_m \\ 0, & \text{se } x \in B \setminus A_m. \end{cases}$$

Claramente

$$\|u\|_{A_m} = \|u^*\|_B.$$

Logo, por  $(f_1)$  e pela Desigualdade de Trudinger-Moser (1)

$$\left| \int_{A_m} F(u) \right| = \left| \int_B F(u^*) \right| \leq \int_B |F(u^*)| \leq C \int_B e^{4\pi|u^*|^2} < \infty.$$

Além disso, mostra-se que o funcional  $I$  é de classe  $C^1$  com

$$I'(u)v = \int_{A_m} \nabla u \nabla v - \int_{A_m} f(u)v, \quad \forall u, v \in H_0^1(A_m).$$

O próximo lema garante que o funcional  $I$  tem a geometria do passo da montanha.



**Lema 4.1.1** (a) *Existem  $r, \rho > 0$  tais que*

$$I(u) \geq \rho > 0, \quad \text{para todo } \|u\|_{A_m} = r.$$

(b) *Existe  $e \in H_0^1(A_m)$  tal que*

$$\|e\|_{A_m} > r \quad e \quad I(e) < 0.$$

**Demonstração.** Usando a definição de  $I$  e o crescimento de  $f$ ,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \int_{A_m} |\nabla u|^2 - \frac{\epsilon}{2} \int_{A_m} |u|^2 - C \int_{A_m} |u|^q e^{\beta|u|^2},$$

ou ainda,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \int_B |\nabla u^*|^2 - \frac{\epsilon}{2} \int_B |u^*|^2 - C \int_B |u^*|^q e^{\beta|u^*|^2}.$$

Usando a Desigualdade de Poincaré,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \int_B |\nabla u^*|^2 - \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \int_B |\nabla u^*|^2 - C \int_B |u^*|^q e^{\beta|u^*|^2},$$

onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor de  $(-\Delta, H_0^1(B))$ . Fixando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos  $C_1 := \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2\lambda_1} > 0$ , de onde segue que

$$I(u) \geq C_1 \int_B |\nabla u^*|^2 - C \int_B |u^*|^q e^{\beta|u^*|^2}.$$

Note que, pela Desigualdade de Trudinger-Moser (2)

$$e^{\beta|u^*|^2} \in L^2(B)$$

e por imersão contínua

$$|u^*|^q \in L^2(B).$$

Logo, pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_B |u^*|^q e^{\beta|u^*|^2} &\leq \left( \int_B |u^*|^{2q} \right)^{1/2} \left( \int_B e^{2\beta|u^*|^2} \right)^{1/2} \\ &\leq |u^*|_{2q, B}^q \left( \int_B e^{2\beta|u^*|^2} \right)^{1/2} \\ &\leq C \|u^*\|_B^q \left( \int_B e^{2\beta|u^*|^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

pois  $H_0^1(B) \hookrightarrow L^{2q}(B)$ , para todo  $q \geq 1$ .

Afirmamos que para  $r > 0$  suficientemente pequeno, tem-se

$$\sup_{\|u^*\|_B=r} \int_B e^{2\beta|u^*|^2} < \infty.$$

De fato, note que

$$\int_B e^{2\beta|u^*|^2} = \int_B e^{2\beta\|u^*\|_B^2 \left(\frac{|u^*|}{\|u^*\|_B}\right)^2}.$$

Escolhendo  $0 < r \approx 0$  de maneira que  $\alpha := 2\beta r^2 < 4\pi$  e usando a Desigualdade de Trudinger-Moser (2), obtemos

$$\sup_{\|u^*\|_B=r} \int_B e^{2\beta|u^*|^2} \leq \sup_{\|v\|_B \leq 1} \int_B e^{\alpha|v|^2} < \infty.$$

Portanto,

$$I(u) \geq C_1\|u^*\|_B^2 - C_2\|u^*\|_B^q.$$

Fixando  $q > 2$ , obtemos

$$I(u) \geq C_1 r^2 - C_2 r^q := \rho > 0,$$

para  $r = \|u\|_{A_m} = \|u^*\|_B$  suficientemente pequeno, mostrando que a afirmação em (a) é verdadeira.

Para demonstrar a afirmação em (b), observe primeiro que

**Afirmção 1.** Para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\bar{s}_\epsilon > 0$  tal que

$$F(s) \leq \epsilon f(s)s, \quad \text{para todo } x \in A_m, |s| \geq \bar{s}_\epsilon.$$

De fato, basta ver que por  $(H_1)$

$$\left| \frac{F(s)}{sf(s)} \right| \leq \frac{M}{|s|}, \quad \forall |s| \geq s_0.$$

Para  $p > 2$ , a Afirmação 1 com  $\epsilon = 1/p > 0$ , garante a existência de  $\bar{s}_\epsilon > 0$  tal que

$$pF(s) \leq f(s)s, \quad \forall s \geq \bar{s}_\epsilon,$$

que por sua vez implica na existência de constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que

$$F(s) \geq C_1|s|^p - C_2, \quad \forall s \geq 0.$$

Sendo assim, fixando  $\varphi \in C_0^\infty(A_m)$  com  $\varphi \geq 0$  e  $\varphi \neq 0$ . Para  $t \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{A_m} F(t\varphi) &\geq \int_{A_m} (C_1|t\varphi|^p - C_2) \\ &\geq C_1|t|^p \int_{A_m} |\varphi| - C_2|A_m|, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\int_{A_m} F(t\varphi) \geq C_3|t|^p - C_4. \quad (4.1)$$

Por (4.1), se  $t \geq 0$ ,

$$I(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2} \|\varphi\|_{A_m}^2 - C_3|t|^p + C_4.$$

Sendo  $p > 2$ ,

$$I(t\varphi) \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Fixando  $t_0 \approx +\infty$  e definindo  $e = t_0\varphi$ , concluímos que

$$\|e\|_{A_m} \geq r \quad \text{e} \quad I(e) < 0. \quad \blacksquare$$

O próximo lema é crucial para mostrar que o funcional satisfaz a condição de Palais-Smale abaixo de um certo nível e sua demonstração pode ser encontrada em Figueiredo, Miyagaki e Ruf [34].

**Lema 4.1.2** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  limitado e  $(u_n)$  uma sequência em  $L^1(\Omega)$  tal que  $u_n$  converge para uma função  $u \in L^1(\Omega)$  em quase todo ponto de  $\Omega$ . Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f(u_n), f(u) \in L^1(\Omega)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se existe  $C > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega} |f(u_n)u_n| \leq C, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

então  $f(u_n)$  converge para  $f(u)$  em  $L^1(\Omega)$ .

**Lema 4.1.3** *O funcional  $I$  verifica a condição  $(PS)_d$ , para todo  $d \in (0, 1/2)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $d < 1/2$  e  $(u_n)$  uma sequência  $(PS)_d$  para o funcional  $I$ , isto é,

$$I(u_n) \rightarrow d \quad \text{e} \quad I'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Escrevendo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon_n = \sup_{\|v\| \geq 1} \{|I'(u_n)v|\}$ , temos

$$|I'(u_n)v| \leq \epsilon_n \|v\|_m,$$

para todo  $v \in H_0^1(A_m)$ , onde  $\epsilon_n = o_n(1)$ , ou ainda,

$$\frac{1}{2} \int_{A_m} |\nabla u_n|^2 - \int_{A_m} F(u_n) = d + o_n(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

e

$$\left| \int_{A_m} \nabla u_n \nabla v - \int_{A_m} f(u_n)v \right| \leq \|v\|_m \epsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v \in H_0^1(A_m). \quad (4.3)$$

Por (4.2) e pelo item (ii) da Afirmação 1, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_m^2 = \frac{1}{2} \int_{A_m} |\nabla u_n|^2 \leq \epsilon + d + \int_{A_m} F(u_n) \leq C_\epsilon + \epsilon \int_{A_m} f(u_n)u_n,$$

sempre que  $n \geq n_0$ , e usando (4.3) com  $v = u_n$ , obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \|u_n\|_m^2 \leq C_\epsilon + \epsilon \|u_n\|_m, \quad \forall n \geq n_0.$$

Portanto, a sequência  $(u_n)$  é limitada. Sendo  $H_0^1(A_m)$  um espaço de Banach reflexivo, existe  $u \in H_0^1(A_m)$  tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(A_m).$$

Além disso, pelas imersões compactas de Sobolev, temos

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^q(A_m), \quad q \geq 1$$

e

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad A_m.$$

Por outro lado, usando (4.3) com  $v = u_n$ , obtemos

$$-\epsilon_n \|u_n\|_m \leq \int_{A_m} |\nabla u_n|^2 - \int_{A_m} f(u_n)u_n$$

ou ainda

$$\int_{A_m} f(u_n)u_n \leq \|u_n\|_m^2 - \epsilon_n \|u_n\|_m \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo Lema 4.1.2, temos  $f(u_n) \rightarrow f(u)$  em  $L^1(A_m)$ . Assim, existe  $h \in L^1(A_m)$  tal que, a menos de subsequência, temos

$$|f(u_n(x))| \leq h(x), \quad \text{q.t.p. em} \quad A_m,$$

e por  $(H_1)$ , temos

$$|F(u_n)| \leq Mh(x), \quad \text{q.t.p. em} \quad A_m.$$

Além disso,

$$F(u_n(x)) \rightarrow F(u(x)) \quad \text{q.t.p. em} \quad A_m.$$

Sendo assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{A_m} F(u_n) - \int_{A_m} F(u) = o_n(1).$$

Logo, por (4.2),

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_m^2 - \int_{A_m} F(u) - d = o_n(1),$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_m^2 = 2 \left( d + \int_{A_m} F(u) \right). \quad (4.4)$$

Usando novamente (4.3) com  $v = u_n$ , obtemos

$$\left| \|u_n\|_m^2 - \int_{A_m} f(u_n)u_n \right| \leq o_n(1),$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_m} f(u_n)u_n - 2 \left( d + \int_{A_m} F(u) \right) \right| &\leq \left| \|u_n\|_m^2 - \int_{A_m} f(u_n)u_n \right| \\ &\quad + \left| \|u_n\|_m^2 - 2 \left( d + \int_{A_m} F(u) \right) \right|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_m} f(u_n)u_n = 2 \left( d + \int_{A_m} F(u) \right).$$

Além disso, por  $(H_2)$

$$\begin{aligned} 2 \int_{A_m} F(u) &\leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_m} F(u_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_m} f(u_n)u_n = 2d + 2 \int_{A_m} F(u), \end{aligned}$$

de onde segue que  $d \geq 0$ .

**Afirmação 2.** Para qualquer  $v \in H_0^1(A_m)$ , temos

$$\int_{A_m} \nabla u \nabla v = \int_{A_m} f(u)v.$$

De fato, fixe  $v \in H_0^1(A_m)$  e note que

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_m} \nabla u \nabla v - \int_{A_m} f(u)v \right| &\leq \left| \int_{A_m} \nabla u_n \nabla v - \int_{A_m} \nabla u \nabla v \right| + \left| \int_{A_m} f(u_n)v - \int_{A_m} f(u)v \right| \\ &\quad + \left| \int_{A_m} \nabla u_n \nabla v - \int_{A_m} f(u_n)v \right|. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.1.2, a convergência fraca  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H_0^1(A_m)$  e a estimativa em (4.3), obtemos

$$\left| \int_{A_m} \nabla u \nabla v - \int_{A_m} f(u)v \right| \leq o_n(1) + \|v\|o_n(1),$$

concluindo assim a demonstração da Afirmação 2.

Note que por  $(H_2)$  e a Afirmação 2,

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \int_{A_m} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \int_{A_m} f(u)u = 0.$$

Vamos dividir a demonstração em três casos:

**Caso 1.** O nível  $d = 0$ . Pela semicontinuidade inferior da norma, temos

$$\|u\|_m \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_m,$$

logo

$$\frac{1}{2} \|u\|_m^2 \leq \frac{1}{2} \|u_n\|_m^2.$$

Usando (4.4), obtemos

$$0 \leq I(u) \leq \frac{1}{2} \liminf \|u_n\|^2 - \int_{A_m} F(u),$$

o que implica em

$$0 \leq I(u) \leq \int_{A_m} F(u) - \int_{A_m} F(u) = 0,$$

de onde segue que  $I(u) = 0$ , ou seja,

$$\|u\|_m^2 = 2 \int_{A_m} F(u).$$

Usando novamente (4.4), concluímos que

$$\|u_n\|_m^2 - \|u\|_m^2 = o_n(1),$$

sendo  $H_0^1(A_m)$  um espaço de Hilbert, obtemos

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H_0^1(A_m).$$

Portanto,  $I$  verifica a condição de Palais-Smale no nível  $d = 0$ .

**Caso 2.** O nível  $d \neq 0$  e o limite fraco  $u \equiv 0$ .

O que faremos é mostrar que este fato não ocorre para sequências Palais-Smale do funcional  $I$ .

**Afirmação 3.** Existem  $q > 1$  e uma constante  $C > 0$  tais que

$$\int_{A_m} |f(u_n)|^q < C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, por (4.4), para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , de modo que

$$\|u_n\|_m^2 \leq 2d + \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Além disso, usando  $(f_1)$ , obtemos

$$\int_{A_m} |f(u_n)|^q \leq C \int_{A_m} e^{4\pi q u_n^2} = C \int_B e^{4\pi \|u_n^*\|^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n^*\|}\right)^2}$$

de onde concluímos pela Desigualdade de Trudinger-Moser (2), que a última integral na expressão acima é limitada, se  $4\pi q \|u_n^*\|^2 < 4\pi$  e isto de fato ocorre quando tomamos  $q > 1$  suficientemente próximo de 1 e  $\epsilon$  suficientemente pequeno, pois  $d < 1/2$ . Mostrando a afirmação.

Assim, usando (4.3) com  $v = u_n$ , obtemos

$$\left| \int_{A_m} |\nabla u_n|^2 - \int_{A_m} f(u_n)u_n \right| \leq \epsilon_n \|u_n\|_m \leq \epsilon_n C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\|u_n\|_m^2 \leq o_n(1) + \int_{A_m} f(u_n)u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Além disso, pela Desigualdade de Hölder, podemos estimar a segunda integral acima como segue abaixo

$$\int_{A_m} f(u_n)u_n \leq \left( \int_{A_m} |f(u_n)|^q \right)^{1/q} \left( \int_{A_m} |u_n|^{q'} \right)^{1/q'}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e como  $u_n \rightarrow 0$  em  $L^{q'}(A_m)$ , temos

$$\int_{A_m} f(u_n)u_n = o_n(1).$$

Portanto, por (4.5),

$$\|u_n\|_m^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

encontrando uma contradição com (4.4), pois

$$\|u_n\|_m^2 \rightarrow 2d \neq 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

mostrando que  $d \neq 0$  e  $u = 0$  não ocorre.

**Caso 3.** O nível  $d \neq 0$  e o limite fraco  $u \neq 0$ .

Primeiro, observe que  $I(u) \leq d$ , visto que

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|_m^2 - \int_{A_m} F(u) \leq \liminf_n \left( \frac{1}{2} \|u_n\|_m^2 - \int_{A_m} F(u_n) \right) = d.$$

**Afirmção 4.**  $I(u) = d$ .

De fato, suponha por contradição que  $I(u) < d$ , pela definição de  $I$ , temos

$$\|u\|_m^2 < 2 \left( d + \int_{A_m} F(u) \right). \quad (4.7)$$

Por outro lado, considerando as funções

$$v_n = \frac{u_n^*}{\|u_n^*\|}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$v = u^* \left[ 2 \left( d + \int_B F(u^*) \right) \right]^{-1/2},$$

tem-se  $\|v_n\|_B = 1$  e  $\|v\|_B < 1$ . Além disso,

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H_0^1(B),$$

pois, para cada  $\varphi \in C_0^\infty(B)$ ,

$$\int_B \nabla v_n \nabla \varphi = \|u_n\|^{-1} \int_{A_m} \nabla u_n \nabla \varphi \rightarrow \left[ 2 \left( d + \int_B F(u^*) \right) \right]^{-1/2} \int_B \nabla u \nabla \varphi = \int_B \nabla v \nabla \varphi,$$

ou seja,

$$\int_B \nabla v_n \nabla \varphi - \int_B \nabla v \nabla \varphi = o_n(1).$$

**Afirmção 4.1.4** *Existem  $q > 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que*

$$\int_{A_m} |f(u_n)|^q < C, \quad \forall n \geq n_0.$$

Para demonstrar esta afirmação, vamos precisar do seguinte resultado devido a P.L. Lions [40].

**Proposição 4.1.5** *Seja  $(u_n)$  uma sequência em  $H_0^1(\Omega)$  tal que  $|\nabla u_n|_2 = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, suponha que  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H_0^1(\Omega)$  com  $|\nabla u|_2 < 1$ . Se  $u \neq 0$ , então para cada  $1 < p < \frac{1}{1 - |\nabla u|_2^2}$ , temos*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} e^{4\pi p u_n^2} < \infty.$$

Da hipótese  $(f_1)$ ,

$$\int_{A_m} |f(u_n)|^q \leq C \int_{A_m} e^{4\pi q u_n^2} = C \int_B e^{4\pi q \|u_n^*\|^2 v_n^2}. \quad (4.8)$$

A última integral na expressão anterior é limitada. De fato, pelo Proposição 4.1.5, basta mostrar que existem  $q, p > 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que

$$q \|u_n^*\|^2 \leq p < \frac{1}{1 - \|v\|_2^2}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (4.9)$$



Para ver que (4.9) ocorre, observe que  $I(u) \geq 0$  e  $d < 1/2$ , implicando em

$$2 < \frac{1}{d - I(u)},$$

de onde segue que

$$2 \left( d + \int_B F(u^*) \right) < \frac{d + \int_B F(u^*)}{d - I(u)} = \frac{1}{1 - \|v\|_B^2}.$$

Sendo assim, para  $q > 1$  suficientemente próximo de 1, temos

$$2q \left( d + \int_B F(u) \right) < \frac{1}{1 - \|v\|_B^2},$$

o que implica, por (4.4), que existem  $p > 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que

$$q \|u_n^*\|^2 \leq p < \frac{1}{1 - \|v\|_B^2}, \quad \forall n \geq n_0,$$

mostrando que (4.9) ocorre. Portanto a Afirmação 4.1.4 é verdadeira.

Agora, vamos mostrar que  $u_n \rightarrow u$  em  $H_0^1(A_m)$ . Para isto, observe primeiro que pela desigualdade de Hölder e por (4.1.4),

$$\int_{A_m} f(u_n)(u_n - u) \leq \int_{A_m} (|f(u_n)|^q)^{1/q} \left( \int_{A_m} |u_n - u|^{q'} \right)^{1/q'} \leq C |u_n - u|_{q', A_m},$$

onde  $1/q + 1/q' = 1$ . Como  $u_n \rightarrow u$  em  $L^{q'}(A_m)$ , temos

$$\int_{A_m} f(u_n)(u_n - u) = o_n(1). \quad (4.10)$$

Usando (4.3) com  $v = u_n - u$  e (4.10), obtemos  $\langle u_n - u, u_n \rangle = o_n(1)$ , e como  $u_n \rightarrow u$  em  $H_0^1(A_m)$ , temos

$$\|u_n - u\|_m^2 = \langle u_n - u, u_n \rangle - \langle u_n - u, u \rangle = o_n(1).$$

O que implica em  $\|u_n\|_m^2 \rightarrow \|u\|_m^2$  e isto juntamente com (4.4) contradiz (4.7). Mostrando que  $I(u) = d$ , ou seja,

$$\|u\|_m^2 = 2 \left( d + \int_{A_m} F(u) \right).$$

Além disso, por (4.4), temos  $\|u_n\|_m \rightarrow \|u\|_m$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H_0^1(A_m). \blacksquare$$

Em vista do Lema 4.1.1 e do Teorema do Passo da Montanha sem condições de compacidade (Teorema A.18 do Apêndice A), existe uma sequência  $(PS)$  no nível do passo da montanha de  $I$ , ou seja, existe  $(u_n) \subset H_0^1(A_m)$  tal que

$$I(u_n) \rightarrow c_m \quad \text{e} \quad I'(u_n) \rightarrow 0,$$

onde

$$c_m = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(A_m)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Para concluir a demonstração da existência de solução positiva de  $(P)_m$ , resta mostrar que  $c_m \in (-\infty, 1/2)$ .

Para tal, consideramos as seguintes funções introduzidas em Moser [45]:

$$\bar{w}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\ln(n))^{1/2}, & 0 \leq |x| \leq 1/n \\ \frac{\ln \frac{1}{|x|}}{(\ln(n))^{1/2}}, & 1/n \leq |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Sejam  $d_m > 0$  e  $x_m \in A_m$  tais que  $B_{d_m}(x_m) \subset A_m$ . Definindo

$$w_n(x) = \bar{w}_n \left( \frac{x - x_m}{d_m} \right),$$

tem-se que  $w_n \in H_0^1(A_m)$ ,  $\|w_n\|_{A_m} = 1$  e  $\text{supp } w_n \subset B_{d_m}(x_m)$ .

Afirmamos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\max_{t \geq 0} I(tw_n) < \frac{1}{2}.$$

De fato, suponha por contradição que este máximo é maior do que ou igual a  $1/2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $t_n > 0$  tal que

$$\max_{t \geq 0} I(tw_n) = I(t_n w_n) \geq \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

Segue de (4.11) e  $(H_1)$  que

$$t_n^2 \geq 1. \quad (4.12)$$

Além disso,  $\frac{d}{dt}I(tw_n)|_{t=t_n} = 0$ , ou seja,

$$t_n^2 = \int_{A_m} f(t_n w_n) t_n w_n, \quad (4.13)$$

o que implica em

$$t_n^2 \geq \int_{B_{d_m/n}(x_m)} f(t_n w_n) t_n w_n. \quad (4.14)$$

No que segue, fixamos uma constante positiva  $\beta_m$  de tal modo que

$$\beta_m > \frac{1}{2\pi d_m^2}. \quad (4.15)$$

Segue da hipótese ( $H_3$ ) que existe  $s_m = s_m(\beta_m) > 0$  verificando

$$f(s)s \geq \beta_m e^{4\pi s^2}, \quad \forall s \geq s_m. \quad (4.16)$$

Usando (4.16) em (4.14) e a definição de  $w_n$  em  $B_{d_m/n}(0)$ , obtem-se

$$t_n^2 \geq \beta_m \pi \frac{d_m^2}{n^2} e^{2t_n^2 \ln(n)} \quad (4.17)$$

para  $n$  suficientemente grande, ou equivalentemente,

$$t_n^2 \geq \beta_m \pi d_m^2 e^{2\ln(n)(t_n^2-1)} \quad (4.18)$$

de onde segue que  $(t_n)$  é limitada. Além disso, de (4.18) e (4.12),

$$t_n^2 \rightarrow 1, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Agora, defina

$$C_n = \{x \in B_{d_m}(x_m) : t_n w_n(x) \geq s_m\}$$

e

$$D_n = B_{d_m}(x_m) \setminus C_n.$$

Com as notações acima e usando (4.13),

$$t_n^2 \geq \int_{B_{d_m/n}(x_m)} f(t_n w_n) t_n w_n = \int_{C_n} f(t_n w_n) t_n w_n + \int_{D_n} f(t_n w_n) t_n w_n$$

e por (4.16),

$$t_n^2 \geq \int_{D_n} f(t_n w_n) t_n w_n + \beta_m \int_{C_n} e^{4\pi t_n^2 w_n^2}$$

ou equivalentemente,

$$t_n^2 \geq \int_{D_n} f(t_n w_n) t_n w_n + \beta_m \int_{B_{d_m}(x_m)} e^{4\pi t_n^2 w_n^2} - \beta_m \int_{D_n} e^{4\pi t_n^2 w_n^2}. \quad (4.19)$$

Observe que

$$\begin{aligned} w_n(x) &\rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } B_{d_m}(x_m), \\ \chi_{D_n}(x) &\rightarrow 1 \quad \text{q.t.p. em } B_{d_m}(x_m) \end{aligned}$$

e

$$e^{4\pi t_n^2 w_n^2} \chi_{D_n} \leq e^{4\pi t_n^2 s_m^2} \in L^1(B_{d_m}(x_m)).$$

Logo, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\lim_n \int_{D_n} e^{4\pi t_n^2 w_n^2} = \lim_n \int_{B_{d_m}(x_m)} e^{4\pi t_n^2 w_n^2} \chi_{D_n} = \int_{B_{d_m}(x_m)} 1 = \pi d_m^2. \quad (4.20)$$

Além disso,

$$f(t_n w_n) t_n w_n \chi_{D_n} \leq C t_n w_n e^{4\pi t_n^2 w_n^2} \leq C s_m e^{4\pi s_m^2} \in L^1(B_{d_m}(x_m))$$

e

$$f(t_n w_n(x)) t_n w_n(x) \chi_{D_n}(x) \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } B_{d_m}(x_m).$$

Assim, usando novamente o Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\lim_n \int_{D_n} f(t_n w_n) t_n w_n = 0 \quad (4.21)$$

Passando ao limite de  $n \rightarrow \infty$  em (4.19) e usando (4.20) e (4.21),

$$1 \geq \beta_m \lim_n \int_{B_{d_m}(x_m)} e^{4\pi t_n^2 w_n^2} - \beta_m \pi d_m^2$$

Sendo  $t_n^2 \geq 1$ ,

$$1 \geq \beta_m \lim_n \left[ \int_{B_{d_m}(x_m)} e^{4\pi w_n^2} \right] - \beta_m \pi d_m^2. \quad (4.22)$$

Desde que

$$\int_{B_{d_m}(x_m)} e^{4\pi w_n^2} = d_m^2 \int_{B_1(0)} e^{4\pi \bar{w}_n^2} = d_m^2 \left\{ \frac{\pi}{n^2} e^{4\pi \frac{1}{2\pi} \ln(n)} + 2\pi \int_{1/n}^1 e^{4\pi \frac{1}{2\pi} \frac{[\ln(1/r)]^2}{\ln(n)}} r dr \right\},$$

fazendo a mudança de variáveis  $s = \ln(1/r)/\ln(n)$ ,

$$\int_{B_{d_m}(x_m)} e^{4\pi w_n^2} = \pi d_m^2 + 2\pi d_m^2 \ln(n) \int_0^1 e^{2s^2 \ln(n) - 2s \ln(n)},$$

e como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \ln(n) \int_0^1 e^{2 \ln(n)(s^2-s)} ds \right] = 2,$$

temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{d_m}(x_m)} e^{4\pi w_n^2} = \pi d_m^2 + 2\pi d_m^2 = 3\pi d_m^2.$$

Usando este último limite em (4.22), obtemos

$$1 \geq 3\beta_m \pi d_m^2 - \beta_m \pi d_m^2 = 2\beta_m \pi d_m^2,$$

o que implica em

$$\beta_m \leq \frac{1}{2\pi d_m^2},$$

contradizendo a escolha de  $\beta_m$  feita em (4.15). Portanto

$$\max_{t \geq 0} I(tw_n) < \frac{1}{2},$$

mostrando que  $c_m < 1/2$ , para qualquer  $m \in \mathbb{N}$  fixado arbitrariamente. ■

## 4.2 Demonstração do Teorema 4.0.2.

Para demonstrar o Teorema 4.0.2, vamos usar a seguinte proposição.

**Proposição 4.2.1** *Seja  $A$  um setor angular contido no semi-plano positivo de  $\mathbb{R}^2$  tal que uma de suas fronteiras retas está no eixo  $x_2$ , e denote tal fronteira de  $A$  por  $B_0 = \{x = (x_1, x_2) \in A : x_2 = 0\}$ . Considere  $A'$  a reflexão de  $A$  com respeito ao eixo  $x_2$  (ver figura 4.2). Suponha que  $u$  é uma solução do seguinte problema:*

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } A, \\ u = 0, & \text{sobre } B_0, \end{cases}$$

onde  $f$  é uma função contínua e ímpar. Então, a função  $\tilde{u}$  tal que  $\tilde{u} = u$  sobre  $A$  e  $\tilde{u}$  é antisimétrica com respeito ao eixo  $x_2$ ,

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \begin{cases} u(x_1, x_2), & \text{em } A \\ -u(x_1, -x_2), & \text{em } A' \\ 0, & \text{sobre } B_0 \end{cases}$$

satisfaz

$$-\Delta \tilde{u} = f(\tilde{u}) \quad \text{em } A \cup A'.$$

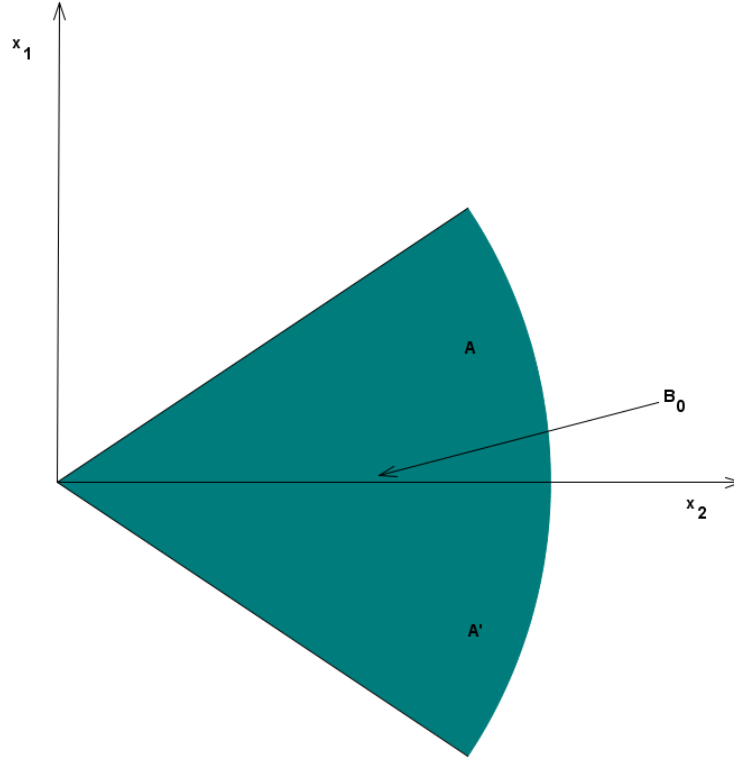


Figura 4.2: Reflexão de  $A$  em relação ao eixo  $x_2$ .

**Demonstração.** Sendo  $u$  uma solução de  $(P)$ , temos

$$\int_A \nabla u \nabla \varphi = \int_A f(u) \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(A).$$

Queremos demonstrar que

$$\int_{A \cup A'} \nabla \tilde{u} \nabla \phi = \int_{A \cup A'} f(\tilde{u}) \phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(A \cup A').$$

Para qualquer  $\phi \in C_0^\infty(A \cup A')$ ,

$$\int_{A \cup A'} f(\tilde{u}) \phi = \int_A f(u(x_1, x_2)) \phi(x_1, x_2) + \int_{A'} f(-u(x_1, -x_2)) \phi(x_1, x_2).$$

Sendo  $f$  ímpar, temos

$$\begin{aligned} \int_{A \cup A'} f(\tilde{u}) \phi &= \int_A f(u(x_1, x_2)) \phi(x_1, x_2) + \int_{A'} f(-u(x_1, -x_2)) \phi(x_1, x_2) \\ &= \int_A f(u(x_1, x_2)) \phi(x_1, x_2) - \int_{A'} f(u(x_1, -x_2)) \phi(x_1, x_2) \\ &= \int_A f(u(x_1, x_2)) \phi(x_1, x_2) - \int_A f(u(x_1, x_2)) \phi(x_1, -x_2). \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{A \cup A'} f(\tilde{u})\phi = \int_A f(u)\psi, \quad (4.23)$$

onde  $\psi(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2) - \phi(x_1, -x_2)$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{A \cup A'} \nabla \tilde{u} \nabla \phi &= \int_A \nabla u(x_1, x_2) \nabla \phi(x_1, x_2) - \int_{A'} \nabla u(x_1, -x_2) \nabla \phi(x_1, x_2) \\ &= \int_A \nabla u(x_1, x_2) \nabla \phi(x_1, x_2) - \int_A \nabla u(x_1, x_2) \nabla (\phi(x_1, -x_2)) \\ &= \int_A \nabla u(x_1, x_2) \nabla (\phi(x_1, x_2) - \phi(x_1, -x_2)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{A \cup A'} \nabla \tilde{u} \nabla \phi = \int_A \nabla u \nabla \psi. \quad (4.24)$$

A função  $\psi$  em geral não pertence ao espaço  $C_0^\infty(A)$ , e portanto não pode ser usada como função teste (na definição de solução fraca em  $H^1(A)$ ). No entanto, considerando a sequência de funções  $(\eta_k)$  em  $C^\infty(\mathbb{R})$ , definidas por

$$\eta_k(t) = \eta(kt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  é uma função tal que

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 1/2, \\ 1, & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Tem-se

$$\varphi_k(x_1, x_2) := \eta_k(x_2)\psi(x_1, x_2) \in C_0^\infty(A),$$

logo

$$\int_A \nabla u \nabla \varphi_k = \int_A f(u)\varphi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.25)$$

De (4.23), (4.24) e (4.25), podemos concluir a demonstração, visto que os seguintes limites

$$(I) \quad \int_A \nabla u \nabla \varphi_k \rightarrow \int_A \nabla u \nabla \psi$$

e

$$(II) \quad \int_A f(u)\varphi_k \rightarrow \int_A f(u)\psi,$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , são válidos. Para ver que (I) ocorre, note que

$$\int_A \nabla u \nabla \varphi_k = \int_A \eta_k \nabla u \nabla \psi + \int_A \frac{\partial u}{\partial x_2} k \eta'(kx_2) \psi.$$

Claramente,

$$\int_A \eta_k \nabla u \nabla \psi \rightarrow \int_A \nabla u \nabla \psi, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Assim, resta mostrar que

$$\int_A \frac{\partial u}{\partial x_2} k \eta'(kx_2) \psi \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Com efeito,

$$\left| \int_A \frac{\partial u}{\partial x_2} k \eta'(kx_2) \psi \right| \leq kMC \int_{0 < x_2 < 1/k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| x_2 \leq MC \int_{0 < x_2 < 1/k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|,$$

onde  $C = \sup_{t \in [0,1]} |\eta'(t)|$  e  $M > 0$  é tal que

$$|\psi(x_1, x_2)| \leq M|x_2|, \quad \forall (x_1, x_2) \in A \cup A',$$

e como

$$\int_{0 < x_2 < 1/k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

o limite em (4.26) ocorre. O item (II) é uma consequência imediata do Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Agora, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , aplicamos a Proposição 4.2.1 à solução  $u$  do problema  $(P)_m$ . Seja  $A'_m$  a reflexão de  $A_m$  em relação a uma de suas fronteiras retas. Sobre  $A_m \cup A'_m$ , podemos definir a função  $\tilde{u}$  tal que  $\tilde{u} = u$  sobre  $A_m$ , e  $\tilde{u}$  é antisimétrica com respeito a reta de reflexão. Agora, seja  $A''_m$  a reflexão de  $A_m \cup A'_m$  em uma de suas fronteiras retas e  $\tilde{\tilde{u}}$  a função definida sobre  $A_m \cup A'_m \cup A''_m$  tal que  $\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u}$  sobre  $A_m \cup A'_m$  e  $\tilde{\tilde{u}}$  é antisimétrica com respeito a reta de reflexão. Repetindo este procedimento, após um número finito de reflexões, finalmente obtemos uma função, denotada novamente por  $u$ , definida em toda a bola  $B$ . Claramente, ela satisfaz a condição de Dirichlet sobre a fronteira  $\partial B$ . Tem-se que  $u$  é positiva sobre  $m$  componentes conexas e negativas sobre  $m$  componentes conexas. Desde que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , o problema  $(P)_m$  admite uma solução positiva, podemos concluir que existem infinitas soluções nodais para o problema  $(P)$  e a demonstração do Teorema 4.0.2 está completa. ■



**Observação 4.2.2** Representamos na figura 4.3 o sinal de três soluções, correspondentes aos casos  $m = 1$ ,  $m = 2$  e  $m = 3$ , respectivamente. A cor azul representa a região onde a solução é negativa e a cor vermelha, a região onde a solução é positiva.

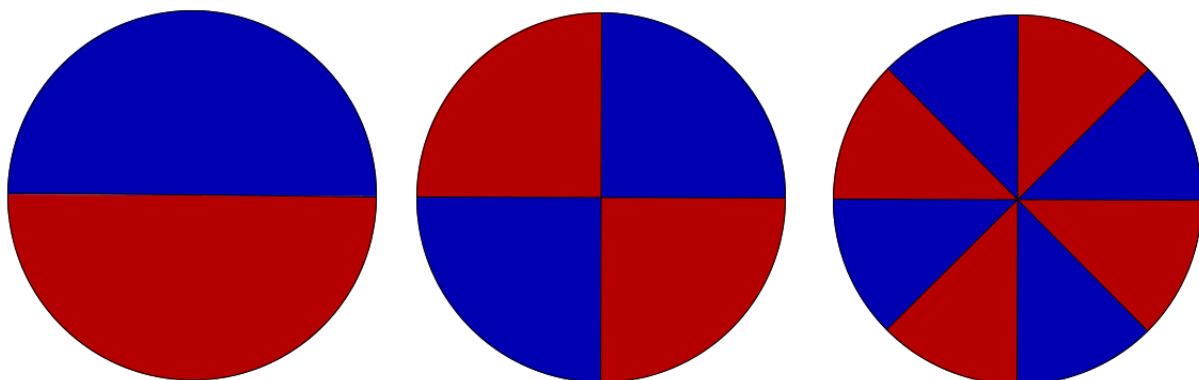


Figura 4.3: Sinal das soluções

Por fim, mostramos na Figura 4.4 o perfil da solução para o caso  $m = 2$ :

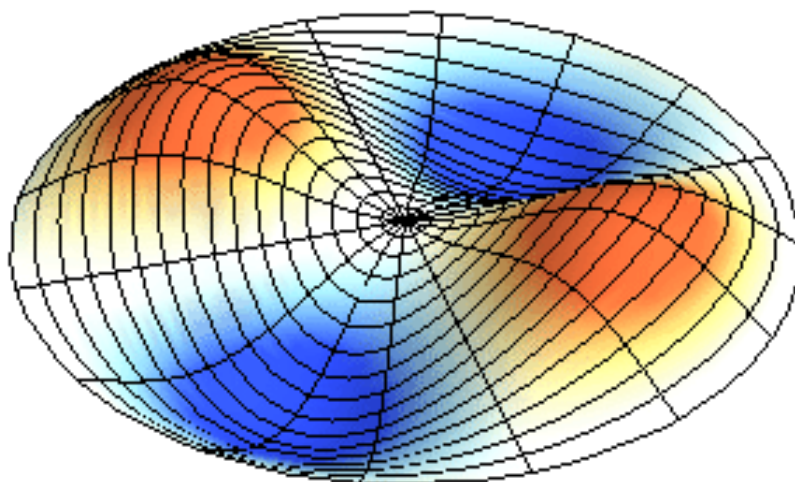


Figura 4.4: Caso  $m = 2$

# Apêndice A

## Resultados gerais

### 1. Desigualdades

**Lema A.1** *Sejam  $\alpha > 0$  e  $r > 1$ . Então, para cada  $\beta \geq r$ , existe uma constante  $C = C(\beta) > 0$  tal que*

$$\left(e^{\alpha|s|^2} - 1\right)^r \leq C \left(e^{\beta\alpha|s|^2} - 1\right),$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Note que para demonstrar o lema, é suficiente mostrar que a função  $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por

$$h(s) := \frac{\left(e^{\alpha|s|^2} - 1\right)^r}{e^{\beta\alpha|s|^2} - 1},$$

é limitada superiormente. Para isto, observe que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} h(s) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{r\alpha|s|^2} \left(1 - \frac{1}{e^{\alpha|s|^2}}\right)^r}{e^{\beta\alpha|s|^2} \left(1 - \frac{1}{e^{\beta\alpha|s|^2}}\right)} \right] = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\alpha(\beta-r)|s|^2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha|s|^2}}\right)^r}{\left(1 - \frac{1}{e^{\beta\alpha|s|^2}}\right)} < \infty,$$

pois  $\beta - r \geq 0$ . Por outro lado, usando a Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} h(s) = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{2\alpha sr \left(e^{\alpha|s|^2} - 1\right)^{r-1} e^{\alpha|s|^2}}{2\alpha s \beta e^{\beta\alpha|s|^2}} = \frac{r}{\beta} \lim_{|s| \rightarrow 0} \left(e^{\alpha|s|^2} - 1\right)^{r-1} e^{\alpha(1-\beta)|s|^2} = 0.$$

Pelo estudo feito acima, concluímos que  $h$  é limitada. ■

**Teorema A.2 (Desigualdade de Hölder, ver [25].)** *Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  com  $1 \leq p \leq \infty$  e  $1/p + 1/q = 1$ . Então,  $fg \in L^1(\Omega)$  com*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

**Teorema A.3 (Desigualdade de Interpolação, ver [25].)**

*Se  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  com  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , então  $f \in L^r(\Omega)$  para todo  $p \leq r \leq q$  com*

$$|f|_r \leq |f|_p^\alpha |f|_q^{1-\alpha},$$

onde  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Lema A.4** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto mensurável,  $p_0 \geq 1$  e  $u \in L^p(\Omega)$ , para todo  $p \geq p_0$ . Se existe  $K > 0$  tal que*

$$|u|_{p,\Omega} \leq K, \quad \forall p \geq p_0,$$

então  $u \in L^\infty(\Omega)$  com

$$|u|_{\infty,\Omega} \leq K.$$

**Demonstração.** De fato, fixe  $\epsilon > 0$  de forma arbitrária e considere o conjunto

$$E = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq K + \epsilon\}.$$

Devemos mostrar que a medida de Lebesgue de  $E$  é nula. Primeiramente, observe que a medida de Lebesgue de  $E$  é finita. De fato, sendo  $E \subset \Omega$ ,

$$(K + \epsilon)^p |E| \leq \int_E |u|^p \leq \int_\Omega |u|^p \leq K^p < +\infty,$$

de onde segue também que

$$(K + \epsilon)|E|^{1/p} \leq K.$$

Suponhamos por contradição que a medida de  $E$  é positiva. Passando ao limite de  $p \rightarrow \infty$  na desigualdade acima, obtemos

$$(K + \epsilon) = \lim_{p \rightarrow \infty} (K + \epsilon)|E|^{1/p} \leq K,$$

o que é um absurdo. Logo  $E$  tem medidad nula, e portanto

$$|u|_{\infty,\Omega} \leq K. \blacksquare$$

**Teorema A.5 (Desigualdade de Poincaré, ver [25].)** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado em relação a alguma direção do espaço  $\mathbb{R}^N$ . Então, existe  $C > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**Lema A.6 (Desigualdade de Strauss, ver [38].)** *Para cada  $u \in H_r^1(\mathbb{R}^2)$ ,*

$$|u(x)| \leq (2\pi)^{-1/2} |x|^{-1/2} \cdot \|u\|_1, \quad x \neq 0.$$

## 2. Resultados de convergência

**Lema A.7** *Seja  $(u_n)$  uma sequência de funções mensuráveis contida e limitada em  $L^s(\Omega)$ , para cada  $s > 2$ . Se existe  $s_0 > 2$  tal que*

$$|u_n|_{s_0} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

*Então,*

$$|u_n|_s \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

*para todo  $s > 2$ .*

**Demonstração.** De fato, primeiro considere o caso  $s > s_0 > 2$ . Fixando  $\tilde{t} > s$ , pela desigualdade de Interpolação com  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$|u_n|_{s,\Omega} \leq |u_n|_{s_0,\Omega}^\alpha |u_n|_{\tilde{t},\Omega}^{1-\alpha},$$

mas por hipótese, existe uma constante  $C_{\tilde{t}} > 0$  tal que

$$|u_n|_{\tilde{t},\Omega} \leq C_{\tilde{t}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$|u_n|_{s,\Omega} \leq |u_n|_{s_0,\Omega}^\alpha C_{\tilde{t}}^{1-\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Agora, considere o caso  $2 < s < s_0$ . Fixando  $2 < \bar{t} < s$  e usando novamente a desigualdade de Interpolação com  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$|u_n|_{s,\Omega} \leq |u_n|_{\bar{t},\Omega}^\alpha |u_n|_{s_0,\Omega}^{1-\alpha},$$

mas por hipótese, existe uma constante  $C_{\bar{t}} > 0$  tal que

$$|u_n|_{\bar{t},\Omega} \leq C_{\bar{t}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$|u_n|_{s,\Omega} \leq C_{\bar{t}}^\alpha |u_n|_{s_0,\Omega}^{1-\alpha} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Pelo estudo feito acima, concluímos que

$$|u_n|_{s,\Omega} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

para todo  $s > 2$ , concluindo a demonstração do lema. ■

**Lema A.8 (ver [38].)** *Sejam  $p > 1$ ,  $(f_n) \subset L^p(\Omega)$  e  $(g_n) \subset L^{p'}(\Omega)$ , onde  $p' > 1$  é tal que  $1/p + 1/p' = 1$ . Suponha que*

$$f_n \rightarrow f \text{ em } L^p(\Omega)$$

e

$$g_n \rightarrow g \text{ em } L^{p'}(\Omega),$$

para algum  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^{p'}(\Omega)$ . Então,

$$\int_{\Omega} f_n g_n \rightarrow \int_{\Omega} f g.$$

**Lema A.9 (ver [38].)** *Sejam  $p > 1$ ,  $(f_n) \subset L^p(\Omega)$  uma sequência limitada em  $L^p(\Omega)$  e convergente em quase todo ponto de  $\Omega$  para uma função  $f$ . Então,  $f_n \rightharpoonup f$  em  $L^p(\Omega)$ .*

**Lema A.10 (Fatou, ver [25].)** *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções de  $L^1(\Omega)$  tal que*

(i)  $f_n(x) \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;

(ii)  $\sup_n \int_{\Omega} f_n(x) < \infty$ .

Defina  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , para cada  $x \in \Omega$ . Então  $f \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x).$$

**Teorema A.11 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue, ver [25].)**

Suponha que  $(f_n) \subset L^1(\Omega)$  satisfaz

(i)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ;

(ii) existe uma função  $g \in L^1(\Omega)$  tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,  $f \in L^1(\Omega)$  e  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ .

**Teorema A.12 (Teorema da convergência dominada generalizada de Lebesgue, ver [52].)** *Sejam  $(f_n)$  uma sequência de funções mensuráveis e  $(g_n) \subset L^1(\Omega)$  satisfazendo*

- (i)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ;
- (ii)  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ , com  $g \in L^1(\Omega)$ ;
- (iii)  $|f_n(x)| \leq g_n(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- (iv)  $\|g_n - g\|_1 \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Então,  $f \in L^1(\Omega)$  e  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ .

**Teorema A.13 (Lema de compacidade de Strauss [54])** *Sejam  $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas satisfazendo*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \rightarrow 0 \text{ quando } |s| \rightarrow +\infty.$$

Seja  $(u_n)$  uma sequência de funções mensuráveis de  $\mathbb{R}^N$  em  $\mathbb{R}$  tal que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n)| < +\infty$$

e

$$P(u_n(x)) \rightarrow v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Então, para qualquer conjunto de Borel limitado  $B$ , temos

$$\int_B |P(u_n) - v| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Se além disso, assumirmos que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \rightarrow 0 \text{ quando } |s| \rightarrow 0$$

e

$$u_n(x) \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow +\infty,$$

uniformemente em  $n \in \mathbb{N}$ , então  $P(u_n)$  converge para  $v$  em  $L^1(\mathbb{R}^N)$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

### 3. Resultados de Imersão

**Lema A.14 (Imersão compacta, ver [25])** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado com fronteira suave. Então,  $H^1(\Omega)$  está imerso compactamente em  $L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [1, \infty)$ .*

**Lema A.15 (Imersão contínua, ver [25])** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio regular. Então,  $H^1(\Omega)$  está imerso continuamente em  $L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [2, \infty)$ .*

## 4. Teoria dos Pontos Críticos

**Teorema A.16 (Teorema de Deformação, ver [32].)** *Seja  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$  no espaço de Banach  $X$ . Suponha que  $S \subset X$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon, \delta > 0$  são tais que*

$$\|I'(u)\| \geq 4\epsilon/\delta$$

*para todo  $u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ . Então, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que para todo  $u \in X$  e  $t \in [0, 1]$ , tem-se:*

(i)  $\eta(0, u) = u,$

(ii)  $\eta(t, u) = u$  se  $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta},$

(iii)  $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subset I^{c-\epsilon} \cap S_\delta,$

(iv)  $\eta(t, \cdot) : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo.

**Definição A.17** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Diz-se que  $(u_n) \subset X$  é uma sequência de Palais-Smale para  $I$  no nível  $c$ , abreviadamente  $(PS)_c$ , quando*

$$I(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \rightarrow 0.$$

*Diz-se que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  quando toda sequência de Palais-Smale para  $I$  no nível  $c$  possui uma subsequência convergente em  $X$ .*

**Teorema A.18 (Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, ver [56].)** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  com  $I(0) = 0$ . Suponha que:*

(i) *Existem  $b, r > 0$  tais que*

$$I(u) \geq b, \quad \text{para} \quad \|u\| = r;$$

(ii) *Existe  $e \in X$  tal que  $\|e\| > \rho$  e  $I(e) < 0$ .*

*Então, existe uma sequência  $(PS)_c$  para o funcional  $I$ , onde*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = e\}.$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R.A. *Sobolev Space*, Academic Press. New York, 1975.
- [2] Adimurthi. *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the  $N$ -Laplacian*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 17 (1990) 393-413.
- [3] Adimurthi, A.; Yadava, S. L., *Critical exponent problem in  $\mathbb{R}^2$  with Neumann boundary condition*, Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990), 461-501.
- [4] Adimurthi, A.; Yadava, S.L. *Multiplicity results for semilinear elliptic equations in bounded domain of  $\mathbb{R}^2$  involving critical exponent*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 17 (1990) 481-504.
- [5] Alves, C. O. *Multiplicity of multi-bump type nodal solutions for a class of elliptic problems in  $\mathbb{R}^N$* , Topol. Methods Nonlinear Anal. 34 (2009), 231-250.
- [6] Alves, C. O. *Multiplicity of solutions for a class of elliptic problem in  $\mathbb{R}^2$  with Neumann conditions*, J. Differential Equations 219 (2005), 20-39.
- [7] Alves, C. O.; Pereira, D.S. *Existence and nonexistence of least energy nodal solutions for a class of elliptic problem in  $\mathbb{R}^2$* , to appear in Topol. Methods Nonlinear Anal.
- [8] Alves, C. O.; Soares, S. H. M. *On the location and profile of spike-layer nodal solutions to nonlinear Schrödinger equations*. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004), 563-577.
- [9] Alves, C. O.; Soares, S. H. M.; Souto, M. A. S. *Three solutions for a class of quasi-critical Schrödinger equations*. Preprint.



- [10] Alves, C. O.; Soares, S. H. M. *Nodal solutions for singularly perturbed equations with critical exponential growth.* J. Differential Equations 234 (2007), 464-484.
- [11] Alves, C. O.; do Ó, J. M.; Miyagaki, O. H. *On nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem in  $\mathbb{R}^2$  involving critical growth,* Nonlinear Anal. 56 (2004), 781-791.
- [12] Alves, C. O.; Carrião, P. C.; Medeiros, E. S. *Multiplicity of solution for a class of quasilinear problem in exterior domain with Neumann conditions,* Abstr. Appl. Anal. 3 (2004), 251-268.
- [13] Alves, C. O.; Souto, M. A. S. *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with exponential critical growth in  $\mathbb{R}^2$ ,* J. Differential Equations 244 (2008), 1502-1520.
- [14] Alves, C. O.; de Moraes Filho, D.C.; Souto, M. A. S. *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in  $\mathbb{R}^N$ ,* Proc. Edinb. Math. Soc., 52 (2009), 1-21.
- [15] Bartsch, T.; Pankov, A.; Wang, Z. Q. *Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well.* Comm. Contemp. Math. 4 (2001), 549-569.
- [16] Bartsch, T.; Liu, Z.; Weth, T. *Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations.* Comm. Partial Differential Equations 29 (2004), 25-42.
- [17] Bartsch, T. *Critical point theory on partially ordered Hilbert spaces.* J. Funct. Anal. 186 (2001), 117-152.
- [18] Bartsch, T.; Weth, T.; Willem, M. *Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems,* J. Anal. Math. 96 (2005), 1-18.
- [19] Bartsch, T.; Weth, T. *Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 22 (2005), 259-281.
- [20] Bartsch, T.; Weth, T. *A note on additional properties of sign changing solutions to superlinear elliptic equations,* Topol. Methods Nonlinear Anal. 22 (2003), 1-14.

- [21] Barstch, T.; Willem, M. *Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on  $\mathbb{R}^N$* , Arch. Ration. Mech. Anal. 124 (1993), 261-276.
- [22] Bartsch, T.; Wang, Z. Q. *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on  $\mathbb{R}^N$* . Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 1725-1741.
- [23] Bartsch, T.; Wang, Z. Q. *Sign changing solutions of nonlinear Schrödinger equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 13 (1999), 191-198.
- [24] Bartsch, T.; Clapp, M.; Weth, T. *Configuration spaces, transfer and 2-nodal solutions of a semiclassical nonlinear Schrödinger equation*, Math. Ann. 338(1) (2007), 147-185.
- [25] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer. New York, USA. 2010.
- [26] Cao, D. M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in  $\mathbb{R}^2$* , Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), 407-435.
- [27] Cao, D. M.; Noussair, E.S. *Multiplicity of positive and nodal solutions for a nonlinear elliptic problem in  $\mathbb{R}^N$* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 5 (1996), 567-588.
- [28] Castro, A.; Cossio, J.; Neuberger, J. *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*, Rocky Mountain J. Math. 27 (1997), 1041-1053.
- [29] Cerami, G.; Solimini, S.; Struwe, M. *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. 69 3 (1986), 289-306.
- [30] Clapp, M.; Ding, Y. H. *Minimal nodal solution of a Schrödinger equations with critical nonlinearity*, Differential Integral Equations 16 (2003), 981-992.
- [31] Comte, M.; Knaap, M. C. *Solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponents with Neumann boundary conditions*, Manuscripta Math. 69 (1990), 43-70.

- [32] Costa, D. G. *An Invitation to Variational Methods In Differential Equations*. Birkhäuser, 2006.
- [33] Ding, Y. H.; Tanaka, K. *Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, Manuscripta Math. 112 (2003), 109-135.
- [34] de Figueiredo, D.G.; Miyagaki, O.H.; Ruf, B. *Elliptic equations in  $\mathbb{R}^2$  with nonlinearity in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995), 139-153.
- [35] de Figueiredo, D.G.; do Ó, J. M. B.; Ruf, B. *On an Inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations*, Comm. Pure. Appl. Math. 55 (2002), 135-152.
- [36] Gongbao, L. *Some properties of weak solutions of nonlinear scalar field equation*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., series A, 14 (1989), 27-36.
- [37] Gui, C. *Existence of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational method*, Comm. Partial Differential Equations 21 (1996), 787-820.
- [38] Kavian, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques et applications aux Problèmes Elliptiques*. Springer Verlag, Nancy, 1993.
- [39] Li, G.; Yan, S. *Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^N$* , Comm. Partial Differential Equations (14) (1989), 1291-1314.
- [40] Lions, P.L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, parte 1*, Revista Matemática Iberoamericana. Vol. 1, n. 1 (1985), 145-201.
- [41] Miranda, C. *Un'osservazione sul teorema di Brouwer*, Boll. Un. Mat. Ital. Ser. II, Anno III n. 1 **19** (1940), 5-7.
- [42] Müller, E.; Pfeiffer. *On the number of nodal domain for elliptic differential operators*, J. London Math. Soc. (2) **31** (1985), 91-100.
- [43] Moser, J. *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Partial Differential Equations, 13 (1960), 457-468.

- [44] de Morais Filho, D.C; Miyagaki, O.H.; Faria, L.F.O. *Infinitely many sign-changing solutions for a class of critical elliptic systems with Neumann conditions*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 144 A (2014), 53-69.
- [45] Moser, J. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971), 1077-1092.
- [46] Noussair, E.S.; Wei, J. *On the effect of domain geometry on the existence of nodal solutions in singular perturbations problems*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 1255-1271.
- [47] Noussair, E.S.; Wei, J. *On the location of spikes and profile of nodal solutions for a singularly perturbed Neumann problem*, Comm. Partial Differential Equations 23 (1998), 793-816.
- [48] Pohozaev, S. *Eigenfunctions of the equations  $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* . Dokl. Math. 6 (1965), 1408-1411.
- [49] del Pino, M.; Felmer, P. L. *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations 4 (1996), 121-137.
- [50] Rabinowitz, P. H. *Minimax methods in critical point theory with application to differential equations*, CBMS. **65** (1984).
- [51] Rabinowitz, P.H. *On a class of nonlinear Schrödinger equations*. Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992), 1019-1029.
- [52] Royden, H.L. *Real Analysis*, 2 ed. The Macmillan Company, 1988.
- [53] Séré, E. *Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Z. 209 (1992), 27-42.
- [54] Strauss, W.A. *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Comm. Math. Phys. 55 (1977), 149-162.
- [55] Trudinger, N. *On imbedding into Orlicz space and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473-484.

- [56] Willem, M. *Minimax Theorems*, Progress in nonlinear differential equations and their applications; v. 24 Birkhäuser, 1996.
- [57] Zou, W. *Sign-Changing Critical Point Theory*. Springer, Berlin, 2008.