Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares em espaços de Orlicz-Sobolev

por

Ailton Rodrigues da Silva

Campina Grande - PB
fevereiro/2016

Existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares em espaços de Orlicz-Sobolev

por

Ailton Rodrigues da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

fevereiro/2016

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

D111e Da Silva, Ailton Rodrigues.
Existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares em espaços de Orlicz-Sobolev / Ailton Rodrigues da Silva.- João Pessoa, 2016.
223f.
Orientador: Claudianor Oliveira Alves
Tese (Doutorado) - UFPB-UFCG
1. Matemática. 2. N-função. 3. Espaços de Orlicz-Sobolev. 4. Métodos variacionais. 5.Categoria de Lusternik-Schnirelman. 6. Solução positiva.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 29/02/2016

Ederson Moreira dos Santos

Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos - USP - São Carlos

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Olivaine S. de Queiroz

Prof. Dr. Olivaine Santana de Queiroz - UNICAMP

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

fevereiro/2016

Dedicatória

A minha querida e amada mãe,
Geralda.

Agradecimentos

A Deus, pelo seu infinito amor. Minha fortaleza, fonte inesgotável de inspiração. Pai santo, Pai eterno, Pai amado toda a honra, toda a glória pertencem a Ti Senhor.

A minha mãe, que revestiu minha existência de amor e carinho. Levarei sempre comigo as lições e valores que me ensinou. Por todo investimento em minha vida, divido com a senhora os méritos desta conquista, porque ela também lhe pertence. Te Amo!

Aos meus irmãos, sobrinhos e sobrinhas pela torcida.

A meu orientador Claudianor por todos os ensinamentos. Obrigado pela oportunidade, por compartilhar com tamanha humildade sua experiência. Agradeço a confiança, paciência e palavras de incentivo. Muito obrigado!

Ao meu amigo Fernando pela presença constante e ajuda incondicional. Obrigado meu irmão, você sem dúvidas faz parte desta conquista em minha vida. Muito obrigado pelas palavras de apoio e incentivo. Agradeço também a sua família que sempre me acolheu com imenso carinho, em especial, a sua esposa Isolda pelo apoio e amizade.

Aos amigos e colegas da pós-graduação, Alânnio, Alciônio, Arlandson, Fábio, Jogli, Lindomberg, Luciano e Marcelo. Em especial, agradeço a Denilson, Geilson, Luando, Romildo e Ronaldo César pela ajuda, apoio, companheirismo e por compartilharem tantos momentos de alegria.

Aos professores da UAMat, em especial Angelo, Jefferson, Antônio Brandão, Aparecido Jesuíno, Braulio Maia, Daniel Cordeiro, Henrique Fernandes e Marco Aurélio.

Aos colegas e amigos de graduação da UFRN e do mestrado na UFCG.

Aos professores Ederson Moreira dos Santos, Marcelo Fernandes Furtado, Marco Aurélio Soares Souto e Olivaine Santana de Queiroz, membros da banca examinadora, pela disponibilidade, avaliação e contribuições para melhorar o conteúdo final deste trabalho.

A todos os funcionários da UAMat.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, Muito Obrigado!

“Sei que os que confiam no Senhor
Revigoram suas forças, suas forças se renovam
Posso até cair ou vacilar, mas consigo levantar
Pois recebo d’Ele asas
E como águia, me preparo pra voar
Eu posso ir muito além de onde estou
Vou nas asas do Senhor
O Teu amor é o que me conduz
Posso voar e subir sem me cansar
Ir pra frente sem me fatigar
Vou com asas, como águia
Pois confio no Senhor!
Que me dá forças pra ser um vencedor
Nas asas do Senhor
Vou voar! Voar!”

Eros Biondini, por Pe. Fábio de Melo.

Resumo

Neste trabalho estabelecemos resultados de existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas para a seguinte classe de problemas quasilineares

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(\epsilon^2\phi(\epsilon|\nabla u|)\nabla u\big) + V(x)\phi(|u|)u \;=\; f(u), \;\text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\; u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $N \geq 2$, ϵ é um parâmetro positivo, ϕ, V, f são funções satisfazendo condições técnicas que serão apresentadas ao longo da tese e $\Phi(t) = \int_0^{|t|}\phi(s)sds$. As principais ferramentas utilizadas são os Métodos Variacionais, Categoria de Lusternik-Schnirelman, Método de Penalização e propriedades dos espaços de Orlicz-Sobolev.

Palavras-Chave: N-função; Espaços de Orlicz-Sobolev; Métodos Variacionais; Categoria de Lusternik-Schnirelman; Solução Positiva.

Abstract

In this work we establish existence, multiplicity and concentration of positive solutions for the following class of problem

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(\epsilon^2\phi(\epsilon|\nabla u|)\nabla u\big) + V(x)\phi(|u|)u \ = \ f(u), \ \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \ u > 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $N \geq 2$, ϵ is a positive parameter, ϕ, V, f are functions satisfying technical conditions that will be presented throughout the thesis and $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)s ds$. The main tools used are Variational methods, Lusternik-Schnirelman of category, Penalization methods and properties of Orlicz-Sobolev spaces.

Keywords: N-function; Orlicz-Sobolev spaces; Variational methods; Lusternik-Schnirelman of category; Positive solution.

Conteúdos

Indíce de Notações 1

Introdução 3

1 Os espaços $L^{\Phi}(\mathcal{O})$ e $W^{1,\Phi}(\mathcal{O})$ **13**

1.1 Resultados básicos e definições 13

1.1.1 N-função 13

1.1.2 Espaços de Orlicz 16

1.1.3 Espaços de Orlicz-Sobolev 18

1.2 Um teorema do tipo Brezis-Lieb para espaços de Orlicz 22

2 Multiplicidade e concentração de soluções positivas com potencial satisfazendo a condição de Rabinowitz **29**

2.1 O problema Autônomo 31

2.1.1 Preliminares 32

2.1.2 Geometria do Passo da Montanha 33

2.1.3 Caracterização do nível do Passo da Montanha 35

2.1.4 A condição de Palais-Smale 38

2.1.5 Demonstração do Teorema 2.1.1 50

2.1.6 Limitação, regularidade e positividade das soluções de (P_{μ}) 52

2.2 O problema não-autônomo 62

2.2.1 Preliminares 63

2.2.2 A condição de Palais-Smale 65

2.2.3 Demonstração do Teorema 2.2.1 86
2.2.4 Limitação, regularidade e positividade das soluções de $(\widetilde{P}_\epsilon)$ 88
2.3 Multiplicidade de soluções para $(\widetilde{P}_\epsilon)$ 90
2.3.1 Resultados Preliminares 91
2.3.2 Demonstração do Teorema A 102

3 Multiplicidade e concentração de soluções positivas via método de penalização 113
3.1 Um problema auxiliar 114
3.1.1 Caracterização do nível do Passo da Montanha 117
3.1.2 A condição de Palais-Smale para J_ϵ 120
3.1.3 Multiplicidade de solução para (A_ϵ) 130
3.2 Multiplicidade de soluções para o problema original 134
3.2.1 Demonstração do Teorema B 139

4 Soluções do tipo *multi-peak* para uma classe de problemas quasilineares em $\mathbb{R}^N$ envolvendo espaços de Orlicz-Sobolev 143
4.1 Um problema auxiliar 144
4.1.1 O comportamento das sequências $(PS)_c^*$ 145
4.2 Existência de solução para $(\tilde{P}_\epsilon)$ 156
4.2.1 Alguns resultados envolvendo os níveis μ_i e $\widetilde{\mu}_{\epsilon,i}$ 157
4.2.2 Um valor crítico especial para J_ϵ 163
4.3 A existência de solução *multi-peak* 174
4.3.1 Demonstração do Teorema C 175

Apêndices

A Construção de uma função auxiliar 183

B Um resultado de imersão 189

C Um resultado do tipo Lions para espaços de Orlicz-Sobolev 193

Bibliografia 199

Indíce de Notações

- c_i, C_i denotam constantes positivas genéricas;
- A^c denota o complementar do conjunto A;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional;
- $B_\rho(x)$ é a bola aberta de centro x e raio $\rho > 0$;
- Se $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue, então $\big|\mathcal{O}\big|$ denota a medida de Lebesgue de $\mathcal{O}$;
- $cat_X(A)$ denota a categoria de A em X;
- A expressão *q.t.p.* é uma abreviação para *quase todo ponto*, ou seja, a menos de um conjunto com medida de nula;
- $\text{supp}u$ denota o suporte da função u;
- $x_n = o_n(1)$ se, e só se, $x_n \to 0$;
- $x_n \downarrow x$ significa que $x_n \to x$ e $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $x_n \uparrow x$ significa que $x_n \to x$ e $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- O símbolo $\to$ significa convergência forte em um espaço normado;
- O símbolo $\rightharpoonup$ significa convergência fraca em um espaço normado;
- $X \hookrightarrow Y$ denota que X está imerso continuamente em Y;
- Se $u\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ é mensurável, então u^+ e u^- denotam as partes positiva e negativa de u respectivamente, ou seja,

$$u^+(x) = \max\big\{u(x), 0\big\} \;\text{ e }\; u^-(x) = \min\big\{u(x), 0\big\}.$$

- $C\big(\mathcal{O}\big)$ denota o espaço das funções contínuas definidas em $\mathcal{O}$;

- $C^k\big(\mathcal{O}\big) = \big\{u \in C\big(\mathcal{O}\big)\,;\, u$ é k-vezes continuamente diferenciável$\big\}$;
- $C^\infty\big(\mathcal{O}\big) = \bigcap\limits_{k\geq 1} C^k\big(\mathcal{O}\big)$;
- $C_0^\infty\big(\mathcal{O}\big) = \big\{u \in C^\infty\big(\mathcal{O}\big)\,;\, \mathrm{supp}(u) \subset \mathcal{O}$ é compacto$\big\}$;
- $L^p\big(\mathcal{O}\big) = \left\{u\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R} \text{ mensurável}\,;\, \displaystyle\int_{\mathcal{O}} |u|^p dx < \infty\right\}$ munido da norma
$$|u|_p = \left(\int_{\mathcal{O}} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}};$$
- $L^\infty\big(\mathcal{O}\big) = \left\{u\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R} \text{ mensurável}\,;\, \sup\limits_{\mathcal{O}} \mathrm{ess}\, |u| < \infty\right\}$ munido da norma
$$|u|_\infty = \sup_{\mathcal{O}} \mathrm{ess}\, |u|.$$

Introdução

Na presente tese estamos interessados no estudo da existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(\epsilon^2\phi(\epsilon|\nabla u|)\nabla u\big) + V(x)\phi(|u|)u \;=\; f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

onde $N \geq 2$, ϵ é um parâmetro positivo, $\phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função de classe C^1 tal que $\Phi(t) = \int_0^{|t|}\phi(s)sds$ é uma N-função, $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua chamada potencial e a não-linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Ao longo do trabalho mencionaremos hipóteses adicionais sobre as funções ϕ, V e f.

Com o propósito de estudar o problema (P_ϵ), lançaremos mão dos métodos variacionais na obtenção de pontos críticos para o funcional energia associado a (P_ϵ).

Quando $\phi(t) \equiv 1$ o problema (P_ϵ) torna-se

$$\begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u), \quad \text{em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{S_ϵ}$$

o qual aparece quando se deseja encontrar uma onda viajante para a equação não-linear do tipo Schrödinger

$$i\epsilon\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\epsilon^2\Delta\Psi + (V(x)+E)\Psi - |\Psi|^{q-2}\Psi \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{NLS}$$

onde i é a unidade imaginária, ϵ é a constante de Planck, $q > 2$ se $N = 1; 2$ ou $2 < q \leq 2^*$ se $N \geq 3$. Uma onda viajante para a equação (NLS) é uma solução da forma

$$\Psi(t,x) = \exp\frac{-iEt}{\epsilon}u(x), \quad u\colon \mathbb{R}^N \to [0,+\infty).$$

O estudo da existência e concentração de soluções positivas para $(S)_\epsilon$ com $N \geq 3$, foram amplamente consideradas; ver por exemplo, Alves e Souto [9], Ambrosetti, Badiale e Cingolani [11], Ambrosetti, Malchiodi e Secchi [13], Bartsch e Wang [16], Cingolani e Lazzo [23, 24], del Pino e Felmer [28], Floer e Weinstein [36], Lazzo [51], Oh [61, 62, 63], Rabinowitz [66], Serrin e Tang [70], Wang [73] e suas referências.

Em [66], por um argumento via Passo da Montanha, Rabinowitz mostrou a existência de soluções positivas para (S_ϵ), quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno com o potencial V verificando

$$V_\infty = \liminf_{|z|\to\infty} V(z) > \inf_{z\in\mathbb{R}^N} V(z) = V_0 > 0. \tag{R}$$

Posteriormente, Wang [73] mostrou que essas soluções se concentram[3] no ponto de mínimo global de V quando ϵ tende a 0. Cingolani e Lazzo [24] exploraram a geometria do potencial V obtendo multiplicidade de soluções para $(S)_\epsilon$. Assumindo (R) e usando teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman as autoras relacionaram o número de soluções positivas com a categoria do conjunto

$$M = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ V(x) = V_0\}.$$

Em [28], del Pino e Felmer mostraram que as soluções de (S_ϵ) se concentram, quando $\epsilon \to 0$, em torno do mínimo local de V introduzindo um método de penalização. Mais precisamente, eles assumiram que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$V(x) \geq \inf_{z\in\mathbb{R}^N} V(z) = V_0 > 0 \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^N \tag{V_0}$$

e existe um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tal que

$$\inf_{z\in\Omega} V(z) < \min_{z\in\partial\Omega} V(z). \tag{V_1}$$

[3]Entedemos o fenômeno de concentração da seguinte maneira: se u_ϵ é uma solução de (P_ϵ) e z_ϵ denota um ponto de máximo global, então

$$\lim_{\epsilon\to 0} V(z_\epsilon) = V_0.$$

Para o caso em que $\phi(t) = |t|^{p-2}$, $2 \leq p < N$, o problema (P_ϵ) torna-se

$$\begin{cases} -\epsilon^p \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$\widetilde{S}_\epsilon$}$$

e foi estudado por Alves e Figueiredo em [5]. Os autores completaram o estudo feito por Cingolani e Lazzo, no sentido de que os mesmos resultados são obtidos considerando o operador p-Laplaciano.

Para o caso onde $\epsilon = 1$ e $\phi(t) = |t|^{p-2} + |t|^{q-2}$ para todo $t \geq 0$ com $1 < p < q < N$ e $q \in (p, p^*)$, o problema (P_ϵ) torna-se

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u + V(x)(|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u) = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$\overline{S}$}$$

que aparece em várias aplicações, ver por exemplo Chaves, Ercole e Miyagaki [22], Figueiredo [34], He e Li [48, 49], Li e Liang [54] e suas referências. Para problemas envolvendo o operador p-q-Laplaciano em domínios limitados citamos Barile e Figueiredo [15], Figueiredo [33] e suas referências.

A existência de soluções do tipo *multi-peak* tem sido considerada em alguns artigos. Por exemplo, Gui em [47] assumindo que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando

$$V(z) \geq V_0 > 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^N \tag{$\widetilde{V}_0$}$$

e que existem κ regiões limitadas disjuntas $\Omega_1, ..., \Omega_\kappa$ tais que

$$M_i = \min_{x \in \partial\Omega_i} V(x) > \alpha_i = \inf_{x \in \Omega_i} V(x) \;\; i = 1, ..., \kappa, \tag{$\widetilde{V}_1$}$$

mostrou a existência de uma família de soluções u_ϵ, ϵ suficientemente pequeno, para o problema $(S)_\epsilon$ com exatamente κ picos. Um resultado similar foi obtido por del Pino e Felmer em [29] usando uma metodologia diferente. Giacomini e Squassina [46] motivados pelo estudo feito por del Pino e Felmer mostraram a existência soluções que apresentam múltiplos picos para uma classe de operadores degenerados. Em [3], Alves generalizou o estudo feito por Gui mostrando a existência de solução *multi-peak* para problemas envolvendo o operador p-laplaciano. Mais recentemente, Zhang e Xu em [75], fazendo uma abordagem diferente daquela feita por Alves [3], também mostraram existência de solução *multi-peak* para problemas no $\mathbb{R}^N$ envolvendo o p-Laplaciano.

Motivados pelos trabalhos supracitados, mais precisamente pelos resultados encontrados em [3], [5], [6] e [7], uma questão natural é saber se os mesmos fenômenos de existência, multiplicidade e concentração bem como a existência de solução *multi-peak* são válidos se considerarmos uma grande classe de operadores quasilineares. Nesta tese, mostraremos que a resposta é positiva para o seguinte operador

$$\Delta_\Phi u := \operatorname{div}\big(\phi(|\nabla u|)\nabla u\big),$$

conhecido na literatura como operador Φ-Laplaciano, onde $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)s ds$ é uma N-função. Como visto acima, tal operador é uma generalização natural do operador p-Laplaciano, definido por $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, com $p > 1$ sendo uma constante real, quando consideramos $\phi(t) = t^{p-2}$.

Nos últimos anos tem sido dada uma atenção especial para problemas quasilineares envolvendo o operador Φ-laplaciano, tendo em vista que estes modelam vários problemas da Física-Matemática. Entre as diversas aplicações citamos a elasticidade não-linear (Fukagai, Ito e Narukawa [37], Fuchs e Gongbao [41]) quando

$$\Phi(t) = (1+t^2)^\alpha - 1, \alpha \in (1, \frac{N}{N-2}).$$

Outra aplicação encontra-se na plasticidade (Fukagai, Ito e Narukawa [38], Fuchs e Osmolovski [42]) quando

$$\Phi(t) = t^p \ln(1+t), 1 < \frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2} < p < N-1, N \geq 3.$$

Um modelo matemático para Fluido Newtoniano Generalizado (Fukagai, Ito e Narukawa [38]) é dado para problemas quando

$$\Phi(t) = \int_0^t s^{1-\alpha}(\sinh^{-1} s)^\beta ds, 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } \beta > 0.$$

Aplicações também aparecem em problemas de Biofísica e Física dos Plasmas (He e Li [49]) quando

$$\Phi(t) = \frac{1}{p}|t|^p + \frac{1}{q}|t|^q, \quad 1 < p < q < N, \text{ e } q \in (p, p^*).$$

Recentemente, com $\epsilon = 1$, houve um grande interesse no estudo de problemas como (P_ϵ) em domínios limitados e ilimitados de $\mathbb{R}^N$. Citamos, por exemplo, Alves, Figueiredo e Santos [8], Azzollini e Pomponio [14], Bonanno, Bisci e Radulescu [17, 18], Cerny [21], Clement, Garcia-Huidobro e Manasevich [25], Donaldson [31], Fuchs e Li [41], Fuchs e Osmolovski [42], Fukagai, Ito e Narukawa [37, 38, 39], Gossez [44, 45], Le, Motreanu e Motreanu [52], Le e Schmitt [53], Mihailescu e Radulescu [58, 57], Mihailescu e Repovs [59], Mihailescu, Radulescu e Repovs [60], Orlicz [64], Santos [67, 68], Santos e Soares [69] e suas referências.

Fazendo uma revisão bibliográfica não encontramos na literatura artigos que mostram a existência, multiplicidade e concentração de soluções para problemas quasilineares envolvendo o Φ-Laplaciano, relacionados com a geometria do potencial V, e acreditamos que esta tese mostra os primeiros resultados nesta linha.

A presente tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1, é apresentada uma breve introdução aos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev bem como as propriedades mais importantes envolvendo N-funções que serão usadas no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2, motivados por [5], [3] e [66], consideramos a classe de problemas

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(\epsilon^2\phi(\epsilon|\nabla u|)\nabla u\big) + V(x)\phi(|u|)u \;=\; f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\, u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

onde $N \geq 2$, ϵ é um parâmetro positivo e o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo a condição (R). Doravante, diremos apenas que o potencial V verifica ou não a condição de Rabinowitz, quando o potencial V verificar ou não a condição (R).

Neste capítulo, generalizamos os argumentos usados em [5], no sentido que, obtemos os mesmos tipos de resultados para uma classe mais ampla de operadores. Na demonstração dos nossos resultados, trabalhamos com a teoria de N-funções e os espaços de Orlicz-Sobolev. Nas referências acima citadas, a estimativa L^∞ de algumas sequências foram obtidas usando o método de interação de Moser o qual não é muito adequado quando se trabalha com uma classe mais geral de operadores quasilineares. Nesta tese, contornamos essa dificuldade adaptando os argumentos encontrados em [4], [43], [50] e [71].

A fim de enunciar o nosso principal resultado deste capítulo, apresentamos as hipóteses sobre as funções ϕ e f. A função $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é de classe C^1 e verifica:

(ϕ_1) $\phi(t)$, $(\phi(t)t)' > 0$ para todo $t > 0$;

(ϕ_2) existem $l, m \in (1, N)$, tais que $l \leq m < l^* = \frac{Nl}{N-l}$ e

$$l \leq \frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \leq m \quad \forall t \neq 0, \quad \text{onde } \Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)sds;$$

(ϕ_3) a função $\dfrac{\phi(t)}{t^{m-2}}$ é decrescente em $(0, +\infty)$;

(ϕ_4) a função ϕ é monótona;

(ϕ_5) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\phi'(t)t| \leq C\phi(t) \quad \forall\ t \in [0, +\infty).$$

No que segue, diremos que $\Phi \in \mathcal{C}_m$ se

$$(\mathcal{C}_m) \qquad \Phi(t) \geq |t|^m \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, denotamos por γ o seguinte número real

$$\gamma = \begin{cases} m, & \text{se } \Phi \in \mathcal{C}_m, \\ \\ l, & \text{se } \Phi \notin \mathcal{C}_m. \end{cases}$$

Assumimos que a não-linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que verifica:

(f_1) existem funções $r, b : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tais que

$$\limsup_{|t| \to 0} \frac{f'(t)}{(r(|t|)|t|)'} = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|t| \to +\infty} \frac{|f'(t)|}{(b(|t|)|t|)'} < +\infty;$$

(f_2) existe $\theta > m$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t \quad \forall t > 0, \quad \text{onde} \quad F(t) = \int_0^t f(s)ds;$$

(f_3) a função $\dfrac{f(t)}{t^{m-1}}$ é crescente para $t > 0$.

As funções r e b são de classe C^1 e satisfazem as seguintes condições:

(r_1) r é crescente;

(r_2) existe uma constante $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$|r'(t)t| \leq \widetilde{C} r(t), \quad \forall\ t \geq 0;$$

(r_3) existem constantes positivas r_1 e r_2 tais que

$$r_1 \leq \frac{r(t)t^2}{R(t)} \leq r_2 \quad \forall t \neq 0, \quad \text{onde} \quad R(t) = \int_0^{|t|} r(s)sds;$$

(r_4) a função R satisfaz

$$\limsup_{t\to 0} \frac{R(t)}{\Phi(t)} < +\infty \quad \text{e} \quad \limsup_{|t|\to+\infty} \frac{R(t)}{\Phi_*(t)} = 0.$$

(b_1) b é crescente;

(b_2) existe uma constante $\widehat{C} > 0$ tal que

$$|b'(t)t| \leq \widehat{C} b(t), \quad \forall t \geq 0;$$

(b_3) existem constantes $b_1, b_2 \in (1, \gamma^*)$ verificando

$$b_1 \leq \frac{b(t)t^2}{B(t)} \leq b_2 \ \ \forall t \neq 0, \ \ \text{onde} \ \ B(t) = \int_0^{|t|} b(s)sds \ \ \text{e} \ \ \gamma^* = \frac{N\gamma}{N-\gamma};$$

(b_4) A função B satisfaz

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\Phi(t)} < +\infty \quad \text{e} \quad \limsup_{|t|\to+\infty} \frac{B(t)}{\Phi_*(t)} = 0,$$

onde Φ_* é a função de crescimento crítico de Φ dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds.$$

Em [38], com o intuito de mostrar a existência de solução para problemas como (P_ϵ), Fukagai, Ito e Narukawa em [38] fizeram uma das primeiras aplicações de (ϕ_1) e (ϕ_2). Com tais hipóteses pode-se mostrar que a N-função Φ dada por $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)sds$ satisfaz uma importante propriedade, conhecida como condição Δ_2, que esta diretamente relacionada com a separabilidade e reflexibilidade dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev associados a Φ. A hipótese (ϕ_3) é essencial para mostrar a caracterização dos níveis minimax. A necessidade das hipóteses técnicas (ϕ_3)-(ϕ_5), (r_1)-(r_2), (b_1) e (b_2), além do crescimento assumido pela função f' ficarão evidenciadas ao longo do capítulo. Já as hipóteses (r_3)-(r_4), (b_3)-(b_4) estão relacionadas com às imersão de Orlicz-Sobolev.

O principal resultado do Capítulo 2 é o seguinte:

Teorema A. *Suponha que (ϕ_1)-(ϕ_5), (f_1)-(f_3), (b_1)-(b_4), (r_1)-(r_4) e (R) são válidas. Então, para qualquer $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\epsilon_\delta > 0$ tal que (P_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_\delta$, onde*

$$M_\delta = \big\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ dist(x, M) \leq \delta\big\}.$$

Além disso, se u_ϵ denota uma dessas soluções e $z_\epsilon \in \mathbb{R}^N$ é um ponto de máximo global de u_ϵ, temos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} V(z_\epsilon) = V_0.$$

A ferramenta essencial para a demonstração do resultado enunciado acima é a categoria de Lusternik-Schnirelman. Neste momento, faz-se apropriado recordar ao leitor que se A é um subconjunto fechado de um espaço topológico X, a categoria de Lusternik-Schnirelman $cat_X(A)$ é o menor número de fechados e contráteis em X que cobrem A. O leitor interessado em estudar a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman pode consultar o livro do Willem [74].

No Capítulo 3, aplicamos o Método de Penalização de del Pino e Felmer [28] para mostrar que são válidos, no contexto dos espaços de Orlicz, resultados análogos àqueles encontrados em Alves e Figueiredo [7]. De forma mais precisa, consideramos a seguinte classe de problemas (P_ϵ), onde o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo (V_0) e (V_1).

Na literatura, desconhecemos trabalhos que façam o uso do Método de Penalização para problemas envolvendo o operador Φ-Laplaciano. Além disso, diferentemente de [35], foi dada uma atenção especial, principalmente devido a dificuldade técnica, à construção de uma função auxiliar adequada para aplicação de tal método. Entretanto, com o propósito de facilitar a leitura um apêndice foi dedicado para mostrar como tal função é construída. Ainda no Capítulo 3, seguindo a mesma linha de raciocínio de [7] e [28], foi necessário modificar de forma conveniente a não-linearidade, de modo que o funcional energia associado satisfaça a condição de Palais-Smale.

O principal resultado do Capítulo 3 é enunciado como segue:

Teorema B. *Assuma que* (ϕ_1)-(ϕ_5), (r_1)-(r_4), (b_1)-(b_4), (f_1)-(f_3), (V_0)-(V_1) *valem. Então, dado* $\delta > 0$ *suficientemente pequeno, existe* $\epsilon_\delta > 0$ *tal que* (P_ϵ) *tem pelo menos* $cat_{M_\delta}(M)$ *soluções positivas, para todo* $0 < \epsilon < \epsilon_\delta$, *onde*

$$M = \{x \in \Omega \ : \ V(x) = V_0\}$$

e

$$M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ dist(x, M) \leq \delta\}.$$

Além disso, se u_ϵ *denota uma dessas soluções e* $z_\epsilon \in \mathbb{R}^N$ *é um ponto de máximo global, temos*

$$\lim_{\epsilon \to 0} V(z_\epsilon) = V_0.$$

No Capítulo 4, motivados por [3] e [47], consideramos a existência de soluções do tipo *multi-peak* para a classe de problemas (P_ϵ), onde o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo $(\widetilde{V}_0)$ e $(\widetilde{V}_1)$.

Nosso principal resultado do Capítulo 4 é o seguinte:

Teorema C. *Assuma* (ϕ_1)-(ϕ_5), (r_1)-(r_4), (b_1)-(b_4), (f_1)-(f_3), $(\widetilde{V}_0)$ *e* $(\widetilde{V}_1)$. *Então, para cada* $\Gamma \subset \{1, ..., \kappa\}$, $\kappa \in \mathbb{N}$, *existe* $\epsilon^* > 0$ *tal que, para* $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, (P_ϵ) *tem uma família* $\{u_\epsilon\}$ *de soluções positivas verificando a seguinte propriedade para* ϵ *suficientemente pequeno:*
Existe $\delta > 0$ *tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_\epsilon(x) \geq \delta.$$

Existe $P_{\epsilon,i} \in \Omega_i$ *para todo* $i \in \Gamma$ *tal que, para cada* $\eta > 0$, *existe* $\rho > 0$ *verificando*

$$\sup_{x \in B_{\epsilon\rho}(P_{\epsilon,i})} u_\epsilon(x) \geq \delta \ \text{ para todo } i \in \Gamma$$

e

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \cup_{i \in \Gamma} B_{\epsilon\rho}(P_{\epsilon,i})} u_\epsilon(x) < \eta.$$

No Teorema C, se Γ tem l elementos, dizemos que u_ϵ é uma solução l-peak. Ressaltamos que no contexto dos espaços de Orlicz, até onde sabemos, este é o primeiro estudo relacionado a soluções do tipo *multi-peak*.

Para finalizar a tese, no Apêndice A fazemos a construção de uma função crucial para aplicação do método de penalização no Capítulo 3. O Apêndice B é dedicado a um resultado de imersão que é crucial no Capítulo 4. Por fim, no Apêndice C generalizamos uma versão de um Teorema do tipo Lions devido a Alves, Figueiredo e Santos [8] que também será usado no Capítulo 4.

Capítulo 1

Os espaços $L^{\Phi}(\mathcal{O})$ e $W^{1,\Phi}(\mathcal{O})$

Nesta capítulo, apresentaremos os espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev que são generalização dos espaços de Lebesgue e Sobolev. Além disso, faremos um breve estudo das principais propriedades envolvendo tais espaços.

É importante ressaltar que as informações presentes neste capítulo constituem apenas a linguagem miníma necessária para o estudo que segue. O leitor interessado em um estudo mais completo sobre o assunto pode consultar [1], [2], [44] e [65]. A tese [68] é uma boa referência em português sobre o assunto.

1.1 Resultados básicos e definições

1.1.1 N-função

A seguir definimos uma classe especial de funções convexas, denominadas N-funções, que desempenham um papel fundamental na defínção dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev.

Definição 1.1.1. *Dizemos que* $\Phi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *é uma **N-função** se*

(i) Φ *é um função convexa e contínua.*

(ii) $\Phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

(iii) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$.

(iv) Φ *é par.*

Exemplo 1.1.2. *A seguir, apresentamos alguns exemplos de N-funções.*

1. $\Phi_1(t) = \frac{1}{p}|t|^p$, *onde* $p \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$*;*

2. $\Phi_2(t) = \frac{1}{p}|t|^p + \frac{1}{q}|t|^q$, *onde* $p, q \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$*;*

3. $\Phi_3(t) = (1 + t^2)^\alpha - 1$, *onde* $\alpha > 1$ *e* $t \in \mathbb{R}$*;*

4. $\Phi_4(t) = |t|^p \ln(1 + |t|)$, *onde* $p \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$*;*

5. $\Phi_5(t) = (1 + |t|) \ln(1 + |t|) - |t|$, $t \in \mathbb{R}$*;*

6. $\Phi_6(t) = e^{t^2} - 1$, $t \in \mathbb{R}$*;*

7. $\Phi_7(t) = e^{|t|} - |t| - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado mostra como as N-funções são caracterizadas.

Lema 1.1.3. *Seja* $\Phi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *uma função. Então,* Φ *é uma N-função se, e somente se,*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds, \ t \in \mathbb{R},$$

onde $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *é uma função satisfazendo*

(i) φ *é contínua a direita e não-decrescente em* $(0, +\infty)$*;*

(ii) $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$*;*

(iii) $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \varphi(t) = +\infty$*;*

(iv) $\varphi(t) > 0$ *para todo* $t > 0$.

Uma importante propriedade das N-funções que será frequentemente utilizada neste trabalho é dada no próximo lema.

Lema 1.1.4. *Seja* Φ *uma N-função. Então,* *(i)* $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *e* $t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\Phi(\beta t) \geq \beta\Phi(t)$, *para todo* $\beta \in (1,+\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$*;.*

A seguir, definimos uma classe especial de funções chamadas ***funções conjugadas***.

Definição 1.1.5 (Função Conjugada). *Seja* Φ *uma função. A função conjugada de* Φ*, denotada por* $\widetilde{\Phi}$*, é a função dada por*

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \big\{st - \Phi(s)\big\}.$$

Exemplo 1.1.6. 1. *A N-função* $\Phi_1(t) = \dfrac{|t|^p}{p}$ *com* $p \in (1,+\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$*, tem como função conjugada*

$$\widetilde{\Phi}_1(t) = \frac{|t|^q}{q}, \ t \in \mathbb{R},$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*;*

2. *A N-função* $\Phi_7(t) = e^{|t|} - |t| - 1$, $t \in \mathbb{R}$*, tem como função conjugada*

$$\widetilde{\Phi}_7(t) = (1+|t|)\ln(1+|t|) - |t| = \Phi_5(t).$$

A função conjugada $\widetilde{\Phi}$ de uma N-função Φ também é chamada de função complementar de Φ. Observando o Exemplo 1.1.6 1., vemos que tal conceito generaliza a definição de função conjugada para os espaços de Lebesgue. Com as definições acima temos o seguinte lema:

Lema 1.1.7. *Se* Φ *é uma N-função, então* $\widetilde{\Phi}$ *também é uma N-função.*

O primeiro resultado envolvendo Φ e $\widetilde{\Phi}$ é a seguinte generalização da desigualdade de Young.

Lema 1.1.8 (Desigualdade de Young). *Sejam* Φ *uma N-função e* $\widetilde{\Phi}$ *sua função conjugada. Então,*

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

O lema seguinte decorre diretamente da Desigualdade de Young.

Lema 1.1.9. *Sejam* Φ *e* $\widetilde{\Phi}$ *N-funções conjugadas. Então,*

$$t < \Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t) \leq 2t, \quad \textit{para todo} \quad t > 0.$$

1.1.2 Espaços de Orlicz

Nesta subseção, temos por objetivo apresentar os espaços de Orlicz. O leitor atento vai observar que as N-funções têm papel crucial na definição de tais espaços. De forma precisa, para cada N-função iremos associar um espaço de Orlicz. Um estudo mais detalhado sobre estes espaços podem ser encontradas nas referências citadas no início deste capítulo.

No que segue, seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Introduzimos agora os espaços de Orlicz.

Definição 1.1.10. *Para cada N-função, definimos* **o espaço de Orlicz** $L^{\Phi}(\mathcal{O})$ *como*

$$L^{\Phi}(\mathcal{O}) = \left\{ u\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_{\mathcal{O}} \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) dx < +\infty, \text{ para algum } \lambda > 0 \right\}.$$

Usando a convexidade da N-função Φ observamos que $L^{\Phi}(\mathcal{O})$ é um espaço vetorial. Além disso, o espaço $L^{\Phi}(\mathcal{O})$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|u\|_{\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathcal{O}} \Phi\Big(\frac{|u|}{\lambda}\Big) dx \leq 1 \right\},$$

chamada **norma de Luxemburg**.

Observação 1.1.11. *Note que a aplicação* $\|.\|_{\Phi}$ *é um funcional de Minkowsky associado ao conjunto convexo*

$$\Gamma = \left\{ u \in L^{\Phi}(\mathcal{O})\, ; \int_{\mathcal{O}} \Phi(u) dx < 1 \right\}.$$

Exemplo 1.1.12. *Considerando a N-função* $\Phi_1(t) = \dfrac{|t|^p}{p}$ *com* $p \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$, *temos*

$$L^{\Phi_1}(\mathcal{O}) = \left\{ u\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_{\mathcal{O}} \Big|\frac{u}{\lambda}\Big|^p dx < +\infty, \text{ para algum } \lambda > 0 \right\} = L^p(\mathcal{O}).$$

Por esse motivo, os espaços de Orlicz são generalizações naturais dos espaços de Lebesgue.

A próxima definição desempenha um papel fundamental ao longo do nosso trabalho. Uma das utilidades desta reside em obter informações sobre separabilidade e reflexibilidade dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev.

Definição 1.1.13. *Seja Φ uma N-função. Dizemos que Φ satisfaz a* **condição** Δ_2 *se existem $C_* > 0$ e $t_0 \geq 0$, tais que*

$$\Phi(2t) \leq C_*\Phi(t), \;\; t \geq t_0.$$

Neste caso, usamos a notação $\Phi \in \Delta_2$.

Observação 1.1.14. $|\mathcal{O}| = +\infty$, *$\Phi \in \Delta_2$ com $t_0 = 0$.*

Observação 1.1.15. *Essa condição pode ser reescrita da seguinte maneira: Para cada $s > 0$, existe $C_s > 0$ tal que*

$$\Phi(st) \leq C_s\Phi(t), \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

As N-funções Φ_1, Φ_2, Φ_3 para $\alpha \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right)$, Φ_4 e Φ_5 dadas no Exemplo 1.1.2, são exemplos de N-funções que verificam Δ_2. Entretanto, as N-funções Φ_6 e Φ_7 são exemplos de N-funções que não satisfazem a condição Δ_2.

O resultado abaixo tacitamente motiva as hipóteses (ϕ_2), (r_3) e (b_3) mencionadas na introdução.

Lema 1.1.16. *Seja Φ uma N-função dada por*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds.$$

Então, $\Phi \in \Delta_2$ se, e somente se, existem $\alpha > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} \leq \alpha, \;\; t \geq t_0.$$

Uma importante desigualdade que será bastante utilizada no decorrer da tese é dada no lema seguinte.

Lema 1.1.17. *Seja Φ uma N-função dada por*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds.$$

Então, as funções Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a desigualdade

$$\widetilde{\Phi}\big(\varphi(t)\big) \leq \Phi(2t) \;\; \textit{para todo}\; t \geq 0.$$

A seguir, apresentamos uma versão da desigualdade de Hölder para os espaços de Orlicz.

Proposição 1.1.18 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $u \in L^\Phi(\mathcal{O})$ e $v \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathcal{O})$. Então, $uv \in L^1(\mathcal{O})$ e*

$$\Big|\int_{\mathcal{O}} uvdx\Big| \leq 2\|u\|_\Phi\|v\|_{\widetilde{\Phi}}.$$

Conforme mencionado anteriormente fazendo uso da condição Δ_2 resulta o

Teorema 1.1.19. *Sejam Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2. Então, o espaço $L^\Phi(\mathcal{O})$ é separável. Além disso, $L^\Phi(\mathcal{O})$ é reflexivo se, e somente se, $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \Delta_2$.*

Ainda usando a condição Δ_2, mostra-se os seguintes resultados técnicos envolvendo sequências em espaços de Orlicz.

Proposição 1.1.20. *Sejam Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2 e $(u_n) \subset L^\Phi(\mathcal{O})$. Então,*

$$u_n \to 0 \ \text{ em } L^\Phi(\mathcal{O}) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathcal{O}} \Phi(|u_n|)dx \to 0.$$

Proposição 1.1.21. *Suponha $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Sejam Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2 e $(u_n) \subset L^\Phi(\mathcal{O})$ uma sequência tal que*

$$u_n \to u \quad \text{em } \ L^\Phi(\mathcal{O}).$$

Então, existem $h \in L^\Phi(\mathcal{O})$ e uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathcal{O} \qquad \text{e} \qquad |u_n(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathcal{O}.$$

1.1.3 Espaços de Orlicz-Sobolev

Nesta subseção, estudamos os espaços de Orlicz-Sobolev. Tais espaços são obtidos a partir dos espaços de Orlicz. Apresentamos algumas propriedades básicas bem como imersões dos espaços de Orlicz-Sobolev em espaços de Orlicz.

Definição 1.1.22. *Para uma N-função Φ, definimos o* **espaço de Orlicz-Sobolev** *$W^{1,\Phi}(\mathcal{O})$ como*

$$W^{1,\Phi}(\mathcal{O}) = \left\{u \in L^\Phi(\mathcal{O}) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^\Phi(\mathcal{O}), \quad i = 1, ..., N\right\}.$$

O espaço $W^{1,\Phi}(\mathcal{O})$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|u\|_{1,\Phi} = \|\nabla u\|_\Phi + \|u\|_\Phi,$$

Teorema 1.1.23. *O espaço $W^{1,\Phi}(\mathcal{O})$ é separável se $\Phi \in \Delta_2$. Além disso, $W^{1,\Phi}(\mathcal{O})$ é reflexivo se, e somente se, $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \Delta_2$.*

Antes de apresentarmos alguns resultados de imersões, iremos definir outra classe importante de N-funções denominadas funções de crescimento crítico. Para tanto, iremos precisar da seguinte definição:

Definição 1.1.24. *Sejam Φ_1 e Φ_2 N-funções. Dizemos que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1, quando para todo $k > 0$*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Neste caso, usamos a notação $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$.

A seguir apresentamos o primeiro resultado de imersão.

Lema 1.1.25. *Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ com $|\mathcal{O}| < +\infty$ e Φ um N-função. Então, a imersão*

$$L^{\Phi}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^1(\mathcal{O})$$

é contínua.

Teorema 1.1.26. *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ com $|\mathcal{O}| < +\infty$. Sejam Φ_1 e Φ_2 N-funções tais que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Então, vale a seguinte imersão contínua*

$$L^{\Phi_1}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{\Phi_2}(\mathcal{O}).$$

Lema 1.1.27. *Seja Φ uma N-fução satisfazendo*

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds < +\infty \quad e \quad \int_1^{+\infty} \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds = +\infty. \tag{1.1}$$

Então, a função $H\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por

$$H(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds$$

é bijetora e sua inversa, denotada por Φ_*, estendida em toda reta de forma que Φ_* seja uma função par, é uma N-função.

A N-função Φ_* é chamada **função de crescimento crítico**. A motivação de tal denominação é vista no exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.28 ([68, Observação 2.6.1]). *A N-função $\Phi(t) = |t|^p$, com $p \in [1, N)$, tem como função de crescimento crítico*

$$\Phi_*(t) = \frac{1}{p^*}|t|^{p^*}, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $p^* = \dfrac{N-p}{pN}$.

O principal resultado de imersão envolvendo tal função é devido a Dolnaldson e Trundinger [32] e tem o seguinte enunciado.

Teorema 1.1.29 ([32, Teorema 3.2]). *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ aberto e admissível*[1]*. Seja Φ uma N-função verificando* (1.1)*. Então, vale a imersão contínua*

$$W^{1,\Phi}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{\Phi_*}(\mathcal{O}).$$

Além disso, se $|\mathcal{O}| < +\infty$ e Ψ é uma N-função tal que $\Psi \prec\prec \Phi_*$, então a imersão

$$W^{1,\Phi}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{\Psi}(\mathcal{O}).$$

é compacta.

A seguir, apresentamos outro importante resultado de imersões em espaços de Orlicz-Sobolev o qual pode ser encontrado em [8].

Teorema 1.1.30. *Seja A uma N-função satisfazendo*

$$\limsup_{t\to 0} \frac{A(t)}{\Phi(t)} < +\infty \quad e \quad \limsup_{|t|\to+\infty} \frac{A(t)}{\Phi_*(t)} < +\infty.$$

Então, vale a seguinte imersão contínua

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^A(\mathbb{R}^N).$$

O teorema abaixo é uma resultado do tipo Lions para os espaços de Orlicz-Sobolev e desempenha um papel fundamental no nosso trabalho.

Teorema 1.1.31 ([8, Teorema 1.3]). *Assuma (ϕ_1)-(ϕ_2) e seja $(u_n) \subset W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\varrho(y)} \Phi(|u_n|)dx = 0,$$

[1] Por admissível, entendemos os domínios em que ocorrem as imersões de Sobolev $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \le q \le \frac{N}{N-1}$.

para algum $\rho > 0$. *Então, para qualquer N-função* B *verificando a condição* Δ_2 *com*

$$\lim_{t\to 0}\frac{B(t)}{\Phi(t)} = 0 \quad e \quad \lim_{|t|\to+\infty}\frac{B(t)}{\Phi_*(t)} = 0,$$

temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} B(|u_n|)dx = 0.$$

No que segue, Φ é uma N-função verificando (ϕ_1)-(ϕ_2) e $\widetilde{\Phi}$, Φ_* são as funções conjugada e de crescimento crítico de Φ, respectivamente.

Os próximos três lemas envolvem as funções Φ, $\widetilde{\Phi}$ e Φ_*. Tais resultados, apesar de técnicos, desempenham um papel crucial neste trabalho e a demonstração destes podem ser encontradas em [68].

Lema 1.1.32. *Considere as funções*

$$\xi_0(t) = \min\{t^l, t^m\} \quad e \quad \xi_1(t) = \max\{t^l, t^m\}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Então,

$$\xi_0(s)\Phi(t) \leq \Phi(st) \leq \xi_1(s)\Phi(t), \quad \forall s,t \geq 0$$

e

$$\xi_0(\|u\|_\Phi) \leq \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|u|)dx \leq \xi_1(\|u\|_\Phi), \quad \forall u \in L^\Phi(\mathbb{R}^N).$$

Lema 1.1.33. *Considere as funções*

$$\xi_2(t) = \min\{t^{l^*}, t^{m^*}\} \quad e \quad \xi_3(t) = \max\{t^{l^*}, t^{m^*}\}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Então,

$$\xi_2(s)\Phi_*(t) \leq \Phi_*(st) \leq \xi_1(s)\Phi_*(t), \quad \forall s,t \geq 0$$

e

$$\xi_2(\|u\|_{\Phi_*}) \leq \int_{\mathbb{R}^N}\Phi_*(|u|)dx \leq \xi_3(\|u\|_{\Phi_*}), \quad \forall u \in L^{\Phi_*}(\mathbb{R}^N).$$

Lema 1.1.34. *Considere as funções*

$$\xi_4(t) = \min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \quad e \quad \xi_5(t) = \max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \;\; \forall t \geq 0.$$

Então,

$$\frac{m}{m-1}\widetilde{\Phi}(t) \leq t\widetilde{\Phi}'(t) \leq \frac{l}{l-1}, \;\; \forall t \geq 0,$$

$$\xi_4(s)\widetilde{\Phi}(t) \leq \widetilde{\Phi}(st) \leq \xi_5(s)\widetilde{\Phi}(t), \quad \forall s,t \geq 0$$

e

$$\xi_4(\|u\|_{\widetilde{\Phi}}) \leq \int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{\Phi}(|u|)dx \leq \xi_5(\|u\|_{\widetilde{\Phi}}), \quad \forall u \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, sejam B uma N-função e $\widetilde{B}$ sua função conjugada. Se B satisfaz (b_1) e (b_3), podemos mostrar os dois lemas seguintes.

Lema 1.1.35. *Considere as funções*

$$\xi_{0,B}(t) = \min\{t^{b_1}, t^{b_2}\} \quad e \quad \xi_{1,B}(t) = \max\{t^{b_1}, t^{b_2}\}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Então,

$$\xi_{0,B}(s)B(t) \leq B(st) \leq \xi_{1,B}(s)B(t), \quad \forall s,t \geq 0$$

e

$$\xi_{0,B}(\|u\|_B) \leq \int_{\mathbb{R}^N} B(|u|)dx \leq \xi_{1,B}(\|u\|_B) \quad \forall u \in L^B(\mathbb{R}^N).$$

Lema 1.1.36. *Considere as funções*

$$\xi_{2,\widetilde{B}}(t) = \min\{t^{\frac{b_1}{b_1-1}}, t^{\frac{b_2}{b_2-1}}\} \quad e \quad \xi_{3,\widetilde{B}}(t) = \max\{t^{\frac{b_1}{b_1-1}}, t^{\frac{b_2}{b_2-1}}\}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Então,

$$\xi_{2,\widetilde{B}}(s)\widetilde{B}(t) \leq \widetilde{B}(st) \leq \xi_{3,\widetilde{B}}(s)\widetilde{B}(t), \quad \forall s,t \geq 0$$

e

$$\xi_{2,\widetilde{B}}(\|u\|_{\widetilde{B}}) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{B}(|u|)dx \leq \xi_{3,\widetilde{B}}(\|u\|_{\widetilde{B}}) \quad \forall u \in L^{\widetilde{B}}(\mathbb{R}^N).$$

1.2 Um teorema do tipo Brezis-Lieb para espaços de Orlicz

Nesta subseção apresentamos resultados que desempenham papel crucial neste trabalho. Uma versão deste resultado pode ser encontrada em [20, Lema 6.6.1]. No entanto, as hipóteses impostas aqui são mais fracas. Por exemplo, podemos aplicar o resultado para a função $\phi(t) = 2\alpha(1+t^2)^{\alpha-1}$, que não pode ser considerado em [20].

Proposição 1.2.1 (Lema de Brezis-Lieb). *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e suponha que (ϕ_1),(ϕ_2), (ϕ_4)-(ϕ_5) são válidas. Seja (η_n) uma sequência de vetores, $\eta_n : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo*

$$\eta_n \in L^{\Phi}(\mathcal{O}) \times \ldots \times L^{\Phi}(\mathcal{O}) \quad e \quad \eta_n(x) \to 0 \ q.t.p. \ x \in \mathcal{O}.$$

Se $(\|\eta_n\|_\Phi)$ *é limitada, então a função* $a(y) := \phi(|y|)y$ *para todo* $y \in \mathbb{R}^N$ *verifica o limite*

$$\int_{\mathcal{O}} \widetilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|)dx = o_n(1),$$

para cada $w \in L^\Phi(\mathcal{O}) \times \ldots \times L^\Phi(\mathcal{O})$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos

Caso: ϕ não-decrescente. Para cada $w \in L^\Phi(\mathcal{O}) \times \ldots \times L^\Phi(\mathcal{O})$ observe que

$$\frac{d}{dt}a_i\big((\eta_n + tw)\big) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\eta_n + tw)w_j$$

onde $a_i(y) := \phi(|y|)y_i$, $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ e $i = 1, \ldots, N$. Agora, note que

$$\begin{aligned} |a_i(\eta_n + w) - a_i(\eta_n)| &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}a_i\big((\eta_n + tw)\big)dt\Big| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N}\int_0^1 \Big|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\eta_n + tw)\Big||w_j|dt \\ &\overbrace{\leq}^{(\phi_5)} c_1|w|\int_0^1 \phi(|\eta_n + tw|)dt \end{aligned}$$

e sendo ϕ não-decrescente, temos

$$|a_i(\eta_n + w) - a_i(\eta_n)| \leq c_1|w|\phi(|\eta_n| + |w|). \tag{1.2}$$

A seguir, veremos que existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$c_1|w|\phi(|\eta_n| + |w|) \leq c_2\big(\phi(|\eta_n|)|w| + \phi(|w|)|w|\big). \tag{1.3}$$

Com efeito, por (ϕ_2), recorde que

$$l \leq \frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \leq m, \quad \text{para todo} \quad t > 0, \tag{1.4}$$

o que implica

$$\phi(|\eta_n| + |w|) \leq m\frac{\Phi\Big(|\eta_n| + |w|\Big)}{\big(|\eta_n| + |w|\big)^2}.$$

Por outro lado, usando a convexidade de Φ, obtemos

$$m\frac{\Phi\Big(|\eta_n| + |w|\Big)}{\big(|\eta_n| + |w|\big)^2} = m\frac{\Phi\Big(\frac{2(|\eta_n|+|w|)}{2}\Big)}{\big(|\eta_n| + |w|\big)^2} \leq m\Bigg(\frac{\frac{1}{2}\Phi(2|\eta_n|) + \frac{1}{2}\Phi(2|w|)}{\big(|\eta_n| + |w|\big)^2}\Bigg).$$

Combinando as desigualdades acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}\phi(|\eta_n|+|w|) &\leq m\left(\frac{\frac{1}{2}\Phi(2|\eta_n|)+\frac{1}{2}\Phi(2|w|)}{\big(|\eta_n|+|w|\big)^2}\right)\\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{\Phi(2|\eta_n|)}{|\eta_n|^2}+\frac{\Phi(2|w|)}{|w|^2}\right).\end{aligned}$$

Usando a condição Δ_2 existe uma constante $C_* > 0$ tal que

$$\phi(|\eta_n|+|w|) \leq \frac{mC_*}{2}\left(\frac{\Phi(|\eta_n|)}{|\eta_n|^2}+\frac{\Phi(|w|)}{|w|^2}\right)$$

Novamente, por (1.4),

$$\phi(|\eta_n|+|w|) \leq \frac{mC_*}{2l}\Big(\phi(|\eta_n|)+\phi(|w|)\Big)$$

e, consequentemente, existe uma constante $c_2 > 0$ satisfazendo

$$c_1|w|\phi(|\eta_n|+|w|) \leq c_2\big(\phi(|\eta_n|)|w|+\phi(|w|)|w|\big).$$

De (1.2) e (1.3) segue que

$$|a_i(\eta_n+w)-a_i(\eta_n)| \leq c_2\big(\phi(|\eta_n|)|w|+\phi(|w|)|w|\big) \tag{1.5}$$

Afirmação 1.2.2. *Dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $C > 0$, independente de ε, tal que*

$$\phi(|\eta_n|)|w| \leq C\Big(\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n|+c_\epsilon\phi(|w|)|w|\Big). \tag{1.6}$$

De fato, fixado $x \in \mathbb{R}^N$, consideramos os conjuntos

$$A_x = \{n \in \mathbb{N} :\ |w(x)| \leq |\eta_n(x)|\} \text{ e } B_x := \{n \in \mathbb{N} :\ |\eta_n(x)| \leq |w(x)|\}.$$

Se $n \in A_x$, usando a Desigualdade de Young[2] com o Lema 1.1.17, resulta que

$$\begin{aligned}
\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)||w(x)| &= \varepsilon\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)|\frac{1}{\varepsilon}|w(x)| \\
&\overbrace{\leq}^{\text{Young}} \widetilde{\Phi}(\varepsilon\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)|) + \Phi(\frac{1}{\varepsilon}|w(x)|) \\
&\overbrace{\leq}^{\Delta_2} \varepsilon\widetilde{\Phi}(\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)|) + C_\varepsilon\Phi(|w(x)|) \\
&\overbrace{\leq}^{\text{Lema}1.1.17} \varepsilon\Phi(2|\eta_n(x)|) + C_\varepsilon\Phi(|w(x)|) \\
&\overbrace{\leq}^{\Delta_2} C_*\varepsilon\Phi(|\eta_n(x)|) + C_\varepsilon\Phi(|w(x)|) \\
&\overbrace{\leq}^{(\phi_2)} \frac{c_3}{l}\big(\varepsilon\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)|^2 + \widetilde{C}_\varepsilon\phi(|w(x)|)|w(x)|^2\big),
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\phi(|\eta_n(x)|)|w(x)| \leq \frac{c_3}{l}\big(\varepsilon\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)| + \widetilde{C}_\varepsilon\phi(|w(x)|)|w(x)|\big).$$

Se $n \in B_x$, desde que ϕ é não-decrescente

$$\phi(|\eta_n(x)|)|w(x)| \leq \phi(|w(x)|)|w(x)| \leq \varepsilon\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)| + \phi(|w(x)|)|w(x)|.$$

Portanto, existe $C > 0$ tal que

$$\phi(|\eta_n(x)|)|w(x)| \leq C\Big(\varepsilon\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)| + c_\epsilon\phi(|w(x)|)|w(x)|\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e como $x \in \mathbb{R}^N$ foi arbitrário, concluímos que

$$\phi(|\eta_n|)|w| \leq C\Big(\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n| + c_\epsilon\phi(|w|)|w|\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o que prova a Afirmação 1.2.2. Agora, de (1.5)-(1.6), existe $C_1 > 0$ tal que

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)| \leq C_1\varepsilon\phi(|\eta_n(x)|)|\eta_n(x)| + c_{\varepsilon,1}\phi(|w(x)|)|w(x)|.$$

Definindo

$$G_n(x) = \max\big\{|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|(x) - C_1\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n|, 0\big\},$$

[2]ver Lema 1.1.8

observamos que

$$G_n(x) \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \ \mathcal{O}$$

e

$$\begin{aligned} G_n(x) &\leq |a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|(x) - C_1\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n| \\ &\leq C_1\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n| + c_{\varepsilon,1}\phi(|w|)|w| + |a(w)|(x) - C_1\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n| \\ &\leq (1 + c_{\varepsilon,1})\phi(|w|)|w| \in L_{\widetilde{\Phi}}(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\int_{\mathcal{O}} \widetilde{\Phi}(G_n)dx \to 0, \tag{1.7}$$

pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \widetilde{\Phi}\big((1 + c_{\varepsilon,1})\phi(|w|)|w|\big)dx \quad &\overbrace{\leq}^{\Delta_2} \quad c_4 \int_{\mathcal{O}} \widetilde{\Phi}\big(\phi(|w|)|w|\big)dx \\ &\overbrace{\leq}^{\text{Lema}1.1.17} \quad c_4 \int_{\mathcal{O}} \Phi\big(2|w|\big)dx \\ &\overbrace{\leq}^{\Delta_2} \quad c_5 \int_{\mathcal{O}} \Phi\big(|w|\big)dx < +\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $x \in \mathcal{O}$ satisfaz $G_n(x) = 0$ vem que

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|(x) - C_1\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n| \leq 0,$$

assim

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|(x) \leq C_1\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n| + G_n(x).$$

Agora, se $x \in \mathcal{O}$ verifica $G_n(x) > 0$, então

$$G_n(x) \leq |a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|(x) - C\epsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n|$$

de onde segue

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|(x) = C_1\varepsilon\phi(|\eta_n|)|\eta_n| + G_n(x).$$

Em qualquer caso,

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|(x) \leq C_1\varepsilon\phi(|\eta_n||\eta_n| + G_n(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{O}.$$

Usando a convexidade de Φ, a condição Δ_2 e o fato de $\widetilde{\Phi}(\phi(t)t) \leq \Phi(2t)$, deduzimos

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|) &\leq \widetilde{\Phi}(C_1 \varepsilon \phi(|\eta_n|)|\eta_n| + G_n) \\ &\leq \varepsilon c_6 \widetilde{\Phi}(\phi(|\eta_n|)|\eta_n|) + c_7 \widetilde{\Phi}(G_n) \\ &\leq \varepsilon c_6 \Phi(2|\eta_n|) + c_7 \widetilde{\Phi}(G_n) \\ &\leq \varepsilon c_8 \Phi(|\eta_n|) + c_7 \widetilde{\Phi}(G_n). \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Logo, por (1.8) e (1.7)

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathcal{O}} \widetilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|)dx \leq \varepsilon c_9.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{O}} \widetilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|)dx = o_n(1).$$

Caso: ϕ decrescente. A demonstração é feita como em [20, Lema 6.6.1].

■

O próxima proposição será usado em alguns resultados durante nosso trabalho. Uma demonstração para tal resultado pode ser encontrada em Gossez [44].

Proposição 1.2.3. *Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ uma aberto e $\Phi\colon \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2. Se $\widetilde{\Phi}$ também satisfaz a condição Δ_2 e (h_n) é uma sequência limitada em $L^{\Phi}(\mathcal{O})$ satisfazendo $h_n(x) \to h(x)$ q.t.p. em $\mathcal{O}$, então $h_n \rightharpoonup h$ em $L^{\Phi}(\mathcal{O})$, isto é,*

$$\int_{\mathcal{O}} h_n v dx \to \int_{\mathcal{O}} h v dx \qquad \textit{para todo } v \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathcal{O}).$$

Capítulo 2

Multiplicidade e concentração de soluções positivas com potencial satisfazendo a condição de Rabinowitz

Neste capítulo mostraremos a existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(\epsilon^2\phi(\epsilon|\nabla u|)\nabla u\big) + V(x)\phi(|u|)u \;=\; f(u), \;\text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \; u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

onde $N \geq 2$, ϵ é um parâmetro positivo e o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo a condição de Rabinowitz (R). As funções $\phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são de classe C^1 e verificam as hipóteses mencionadas na Introdução.

Conforme foi dito na Introdução faremos uso de métodos variacionais para obter pontos críticos para o funcional energia associado a (P_ϵ). Para isso, recordamos que por uma solução fraca do problema (P_ϵ), entendemos uma função $u \in X \setminus \{0\}$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^2\phi(\epsilon|\nabla u|)\nabla u \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\phi(|u|)uw dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)w dx, \quad \text{para todo} \quad w \in X,$$

onde X é um subespaço do espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X = \left\{ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) : \; \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\Phi(|u|)dx < +\infty \right\}.$$

Ao longo desta tese, afim de formulamos nosso problema em uma estrutura variacional mais adequada, iremos trabalhar com um problema equivalente a (P_ϵ). Verifica-se que $u \in X$ é uma solução fraca de (P_ϵ) se, e somente se, $v(x) = u(\epsilon x)$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|v|)vw dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)w dx, \quad \text{para todo} \quad w \in X_\epsilon,$$

onde X_ϵ denota o subespaço de $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X_\epsilon = \left\{ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \,:\, \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx < +\infty \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_\epsilon = \|\nabla u\|_\Phi + \|u\|_{\Phi,V_\epsilon}.$$

onde

$$\|\nabla u\|_\Phi := \inf\left\{ \lambda > 0; \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\nabla u|}{\lambda}\Big)dx \leq 1 \right\}$$

e

$$\|u\|_{\Phi,V_\epsilon} := \inf\left\{ \lambda > 0; \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi\Big(\frac{|u|}{\lambda}\Big)dx \leq 1 \right\}.$$

Neste caso, v é um ponto crítico do funcional $I_\epsilon \colon X_\epsilon \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\epsilon(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla v|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|v|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(v)dx$$

que é o funcional energia associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi v + V(\epsilon x)\phi(|v|)v \;=\; f(v), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \qquad (\widetilde{P}_\epsilon)$$

onde Δ_Φ é o operador Φ-Laplaciano dado por $\Delta_\Phi u = \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u)$.

A partir de agora, concentramos nosso estudo no problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$. As soluções que encontramos para $(\widetilde{P}_\epsilon)$ possui a propriedade descrita na próxima definição.

Definição 2.0.4. *Uma solução u de $(\widetilde{P}_\epsilon)$ é dita uma solução de energia mínima quando*

$$I_\epsilon(u) \leq I_\epsilon(v),$$

qualquer que seja v solução de $(\widetilde{P}_\epsilon)$.

2.1 O problema Autônomo

Nesta seção demonstramos a existência de uma solução positiva de energia mínima para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + \mu\phi(|u|)u \;=\; f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \, u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_μ}$$

onde μ é um parâmetro positivo. Neste momento, gostaríamos de destacar que esta classe de problemas foi considerada por Alves, Figueiredo e Santos em [8]. Os autores mostraram a existência de solução não-trivial para o problema (P_ϵ), com $\epsilon = 1$, assumindo V radial ou $\mathbb{Z}^N$-periódico. Entretanto, naquele artigo não foi estabelecida a caracterização do nível do passo da montanha como o mínimo do funcional energia na variedade de Nehari, existência de solução de energia mínima, regularidade e positividade das soluções. Esse estudo é crucial para o caso não-autônomo, em virtude de algumas estimativas dependerem de tais informações.

Desde que estamos interessados em soluções positivas, assumiremos em toda tese

$$f(t) = 0 \quad \text{para todo } (-\infty, 0]. \tag{2.1}$$

De agora em diante, Y_μ denota o espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ com a norma

$$\|u\|_{Y_\mu} = \|\nabla u\|_\Phi + \mu\|u\|_\Phi.$$

Dizemos que $u \in Y_\mu$ é uma solução de (P_μ) se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)uv dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx, \quad \forall v \in Y_\mu.$$

Além disso, denotamos por $E_\mu : Y_\mu \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (P_μ) dado por

$$E_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Usa-se argumentos padrões mostra-se que $E_\mu \in C^1\big(Y_\mu, \mathbb{R}\big)$[1] com

$$E'_\mu(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx, \quad \forall u, v \in Y_\mu.$$

[1] Ver por exemplo [68, Apêndice B].

Consequentemente, pontos críticos de E_μ são precisamente as soluções fracas para (P_μ).

O principal resultado desta subseção é o seguinte:

Teorema 2.1.1. *Suponha que (ϕ_1)-(ϕ_3), (r_1)-(r_4), (b_1)-(b_4) e (f_1)-(f_3) são válidas. Então, o problema (P_μ) possui uma solução não-negativa de energia mínima.*

2.1.1 Preliminares

Começamos observando que a hipótese (f_1) combinada com a regra de L' Hospital implicam que

$$\limsup_{|t|\to 0} \frac{f(t)}{r(|t|)|t|} = 0 \ \text{ e } \ \limsup_{|t|\to +\infty} \frac{f(t)}{b(|t|)|t|} < +\infty. \tag{2.2}$$

Além disso, usando (ϕ_2) e (r_3) Vê-se facilmente que

$$0 \leq \frac{f(t)}{\phi(|t|)|t|} \leq l r_2 \frac{f(t)}{r(|t|)|t|} \frac{R(t)}{\Phi(t)}.$$

Combinando a desigualdade acima com (2.2) e (r_4), obtemos

$$\limsup_{|t|\to 0} \frac{f(t)}{\phi(|t|)|t|} = 0 \ \text{ e } \ \limsup_{|t|\to +\infty} \frac{f(t)}{b(|t|)|t|} < +\infty. \tag{2.3}$$

Os limites obtidos acima serão usados no decorrer do nosso trabalho.

Antes de seguir em frente, convém apresentar ao leitor as principais imersões que serão usadas nesta tese. Segue-se do Teorema 1.1.30 e as hipóteses (r_4) e (b_4) que as imersões

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^R(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^B(\mathbb{R}^N)$$

são contínuas. Além disso, graças ao Teorema 1.1.29, vale a seguinte imersão contínua

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\Phi_*}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pela definição da norma de Y_μ, as imersões

$$Y_\mu \hookrightarrow W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\Phi}(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ Y_\mu \hookrightarrow W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\Phi_*}(\mathbb{R}^N) \tag{2.4}$$

também são contínuas. Além disso, dado $\rho > 0$ as imersões

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\Phi}(B_\rho(0)) \quad \text{e} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{B}(B_\rho(0)) \tag{2.5}$$

são compactas[2].

[2]ver Teorema 1.1.29.

2.1.2 Geometria do Passo da Montanha

A seguir, mostraremos que o funcional E_μ verifica as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.1.2. *O funcional E_μ satisfaz a geometria do passo da montanha, isto é,*

(i) Existem $\rho, \tau > 0$ tais que $E_\mu(u) \geq \tau$, se $\|u\|_{Y_\mu} = \rho$,

(ii) Existe $e \in Y_\mu \setminus \overline{B}_\rho(0)$ verificando $E_\mu(e) < 0$.

Demonstração. Por (2.3), dado $\eta > 0$, existe $c_{\eta,1} > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \eta\phi(|t|)|t| + c_{\eta,1}b(|t|)|t|, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

e consequentemente por (ϕ_2), (f_2), (b_3) segue que

$$|F(t)| \leq \frac{\eta m}{\theta}\Phi(|t|) + \frac{c_{\eta,1}b_2}{\theta}B(|t|), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, usando a hipótese (b_4), existe $c_{\eta,2} > 0$ tal que

$$B(|t|) \leq \eta\Phi(|t|) + c_{\eta,2}\Phi_*(|t|), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo, existe uma constante $c_\eta > 0$ satisfazendo

$$|F(t)| \leq \eta\Big(\frac{m+\theta}{\theta}\Big)\Phi(|t|) + c_\eta\Phi_*(|t|), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Da desigualdade acima resulta que

$$\begin{aligned} E_\mu(u) &= \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla u|)dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla u|)dx + \Big(\mu - \eta\Big(\frac{m+\theta}{\theta}\Big)\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|u|)dx - c_\eta\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_*(|u|)dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando os Lemas 1.1.32 e 1.1.33,

$$\xi_0(\|\nabla u\|_\Phi) \leq \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla u|)dx \leq \xi_1(\|\nabla u\|_\Phi), \tag{2.6}$$

$$\xi_0(\|u\|_\Phi) \leq \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|u|)dx \leq \xi_1(\|u\|_\Phi) \tag{2.7}$$

e

$$\xi_2(\|u\|_{\Phi_*}) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(|u|)dx \leq \xi_3(\|u\|_{\Phi_*}), \tag{2.8}$$

onde $\xi_0(t) = \min\{t^l, t^m\}$, $\xi_1(t) = \max\{t^l, t^m\}$, $\xi_2(t) = \min\{t^{l^*}, t^{m^*}\}$ e $\xi_3(t) = \max\{t^{l^*}, t^{m^*}\}$. Usando (2.6)-(2.8), ficamos com

$$E_\mu(u) \geq \xi_0(\|\nabla u\|_\Phi) + \Big(\mu - \eta\Big(\frac{m+\theta}{\theta}\Big)\Big)\xi_0(\|u\|_\Phi) - c_\eta \xi_3(\|u\|_{\Phi_*}).$$

Assim, fixando $\eta < \dfrac{\mu\theta}{2(m+\theta)}$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$E_\mu(u) \geq c_1\Big(\xi_0(\|\nabla u\|_\Phi) + \mu\xi_0(\|u\|_\Phi)\Big) - c_2\xi_3(\|u\|_{\Phi_*}),$$

De (2.4), existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\|u\|_{\Phi_*} \leq c_3\|u\|_{Y_\mu}.$$

Agora, escolhemos $\rho > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\|\nabla u\|_\Phi + \mu\|u\|_\Phi = \|u\|_{Y_\mu} = \rho < 1 \ \text{ e } \ \|u\|_{\Phi_*} \leq c_3\|u\|_{Y_\mu} < 1.$$

Uma vez que $m > l$, as desigualdades acima implicam que

$$\xi_0(\|\nabla u\|_\Phi) = \|\nabla u\|_\Phi^m \ \text{ e } \ \xi_3(\|u\|_{\Phi_*}) = \|u\|_{\Phi_*}^{l^*}.$$

Desse forma,

$$E_\mu(u) \geq c_1\Big(\|\nabla u\|_\Phi^m + \mu\|u\|_\Phi^m\Big) - c_2\|u\|_{\Phi_*}^{l^*},$$

o que implica

$$E_\mu(u) \geq c_4\|u\|_{Y_\mu}^m - c_5\|u\|_{Y_\mu}^{l^*}$$

onde $c_4 = \dfrac{c_1 \min\{1, \mu^{1-m}\}}{2^m}$ e $c_5 = c_2 c_3^{l^*}$. De (ϕ_2), recorde que $l^* > m$. Logo, existe $\tau > 0$ tal que

$$E_\mu(u) \geq \tau, \quad \forall u \in Y_\mu \quad \text{e} \quad \|u\|_{Y_\mu} = \rho,$$

mostrando a primeira geometria.

Além disso, por (f_2), existem $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(t) \geq d_1|t|^\theta - d_2, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Sejam $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ e $t > 0$. De (2.9),

$$\begin{aligned} E_\mu(t\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(t\varphi)|)dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|t\varphi|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(t\varphi)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(t\varphi)|)dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|t\varphi|)dx - d_1 t^\theta \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^\theta dx + d_2|\text{supp}\varphi|. \end{aligned}$$

Usando novamente (2.6) e (2.7),

$$\begin{aligned} E_\mu(t\varphi) &\leq \xi_1\big(t\|\nabla\varphi\|_\Phi\big) + \mu\xi_1\big(t\|\varphi\ \|_\Phi\ \big) - d_1 t^\theta |\varphi|_\theta^\theta + d_2|\text{supp}\varphi| \\ &\leq \xi_1(t)\xi_1\big(\|\nabla\varphi\|_\Phi\big) + \mu\xi_1\big(\|\varphi\ \|_\Phi\ \big) - d_1 t^\theta |\varphi|_\theta^\theta + d_2|\text{supp}\varphi|. \end{aligned}$$

Para t suficientemente grande, temos $\xi_1(t) = t^m$, de onde segue

$$E_\mu(t\varphi) \leq t^m\Big(\xi_1\big(\|\nabla\varphi\|_\Phi\big) + \mu\xi_1\big(\|\varphi\|_\Phi\big)\Big) - d_1 t^\theta |\varphi|_\theta^\theta + d_2|\text{supp}\varphi|.$$

Desde que $\theta > m$, existe $t_* > 0$ suficientemente grande tal que

$$E_\mu(t_*\varphi) < 0.$$

Definindo $e := t_*\varphi$ concluímos que

$$E_\mu(e) < 0,$$

mostrando a segunda geometria. ■

2.1.3 Caracterização do nível do Passo da Montanha

Em vista do Lema 2.1.2, podemos aplicar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS)[3] para encontrar uma sequência $(u_n) \subset W^{1,\Phi}\big(\mathbb{R}^N\big)$ verificando

$$E_\mu(u_n) \to d_\mu \ \text{ e } \ E'_\mu(u_n) \to 0, \tag{2.10}$$

onde

$$d_\mu = \inf_{\alpha\in\Gamma_\mu} \max_{t\in[0,1]} E_\mu\big(\alpha(t)\big),$$

com

$$\Gamma_\mu = \Big\{\alpha \in \mathcal{C}\Big([0,1], Y_\mu\big(\mathbb{R}^N\big)\Big);\ \alpha(0) = 0 \ \text{ e } \ E_\mu\big(\alpha(1)\big) \leq 0\Big\}.$$

[3]ver [74, Teorema 1.15].

Um ponto crucial para o estudo que segue é a caracterização do nível do passo da montanha d_μ como o mínimo do funcional energia na variedade de Nehari. Neste momento, é oportuno ressaltar que a hipótese (ϕ_3) é fundamental para demonstrar tal fato. Antes de seguir em frente, denotemos por $\mathcal{M}_\mu$ a variedade de Nehari associada a E_μ dada por

$$\mathcal{M}_\mu = \big\{ u \in Y_\mu \backslash \{0\} \ : \ E'_\mu(u)u = 0 \big\}.$$

Além disso, denotemos por $d_{\mu,1}$ e $d_{\mu,2}$ os seguintes números

$$d_{\mu,1} = \inf_{u \in \mathcal{M}_\mu} E_\mu(u) \quad \text{e} \quad d_{\mu,2} = \inf_{u \in Y_\mu \backslash \{0\}} \max_{t \geq 0} E_\mu(tu).$$

Com as notações acima estabelecemos o seguinte resultado:

Lema 2.1.3. *Assuma que (ϕ_1)-(ϕ_3), (r_3)-(r_4), (b_3)-(b_4) e (f_1)-(f_3) ocorrem. Então, para cada $u \in Y_\mu \backslash \{0\}$, existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{M}_\mu$ e $E_\mu(t_u u) = \max_{t \geq 0} E_\mu(tu)$. Além disso,*

$$d_\mu = d_{\mu,1} = d_{\mu,2}.$$

Demonstração. Pra cada $u \in Y_\mu \setminus \{0\}$ definimos $g(t) = E_\mu(tu)$, isto é,

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(tu)|)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|tu|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx.$$

Existência

Combinado os limites em (2.3) com as hipóteses (ϕ_2), (f_2) e (b_3), dado $\eta > 0$, existe $c_\eta > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq \eta \Phi(|t|) + c_\eta \Phi_*(|t|), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(tu)|)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|tu|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(tu)|)dx + (\mu - \eta) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|tu|)dx - c_\eta \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(|tu|)dx. \end{aligned}$$

Usando os argumentos do Lema 2.1.2, para η suficientemente pequeno e $t \in (0,1)$

$$g(t) \geq c_1 |t|^m \Big(\xi_0(\|\nabla u\|_\Phi) + \mu \xi_0(\|u\|_\Phi) \Big) - c_2 |t|^{l^*} \xi_3(\|u\|_{\Phi_*}),$$

e sendo $l \leq m < l^*$, concluímos que

$$g(t) > 0, \quad \forall\, t \approx 0^+. \tag{2.11}$$

Por outro lado, de (f_3) existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(t) \geq d_1|t|^\theta - d_2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

o que implica

$$F(t) \geq d_1|t|^\theta - d_2|t|^m, \quad \forall\, t > 1.$$

Logo, para todo $t > 1$,

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(tu)|)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|tu|)dx - d_1|t|^\theta|u|_\theta^\theta + d_2|t|^m|u|_m^m \\ &\leq c_1\Big(\xi_1\big(\|\nabla(tu)\|_\Phi\big) + \xi_1\big(\|tu\|_\Phi\big)\Big) - d_1|t|^\theta|u|_\theta^\theta + d_2|t|^m|u|_m^m \\ &\leq c_1 t^m\Big(\xi_1\big(\|\nabla u\|_\Phi\big) + \xi_1\big(\|u\|_\Phi\big)\Big) - d_3|t|^\theta + d_4|t|^m \end{aligned}$$

e sendo $\theta > m$, concluímos que

$$g(t) < 0, \quad \forall\, t \approx +\infty. \tag{2.12}$$

Desde que g é de classe C^1, segue de (2.11) e (2.12) que existe $t_u > 0$ tal que

$$g(t_u) = \max_{t \geq 0} g(t) = \max_{t \geq 0} E_\mu(tu),$$

implicando que $g'(t_u u) = 0$, isto é, $E'_\mu(t_u u)t_u u = 0$, mostrando que $t_u u \in \mathcal{M}_\mu$.

Unicidade

Primeiramente, observe que se $u \in \mathcal{M}_\mu$, então $u_+ = \max\{u, 0\} \neq 0$. Suponha que existem $t_1, t_2 > 0$ tais que $t_1 u, t_2 u \in \mathcal{M}_\mu$. Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla(t_1 u)|)|\nabla(t_1 u)|^2 dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|t_1 u|)|t_1 u|^2 dx = \int_{[u>0]} f(t_1 u)t_1 u dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla(t_2 u)|)|\nabla(t_2 u)|^2 dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|t_2 u|)|t_2 u|^2 dx = \int_{[u>0]} f(t_2 u)t_2 u dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(t_1|\nabla u|)}{(t_1|\nabla u|)^{m-2}}|\nabla u|^m dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(t_1|u|)}{(t_1|u|)^{m-2}}|u|^m dx = \int_{[u>0]} \frac{f(t_1 u)}{(t_1 u)^{m-1}} u^m dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(t_2|\nabla u|)}{(t_2|\nabla u|)^{m-2}}|\nabla u|^m dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(t_2|u|)}{(t_2|u|)^{m-2}}|u|^m dx = \int_{[u>0]} \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^{m-1}} u^m dx.$$

Então, subtraindo as desigualdades acima obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\phi(t_1|\nabla u|)}{(t_1|\nabla u|)^{m-2}} - \frac{\phi(t_2|\nabla u|)}{(t_2|\nabla u|)^{m-2}} \right) |\nabla u|^m dx \\ + \quad &\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\phi(t_1|u|)}{(t_1|u|)^{m-2}} - \frac{\phi(t_2|u|)}{(t_2|u|)^{m-2}} \right) |u|^m dx = \int_{[u>0]} \left(\frac{f(t_1 u)}{(t_1 u)^{m-1}} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^{m-1}} \right) u^m dx. \end{aligned}$$

Suponha, por absurdo, que $t_1 \neq t_2$. Sem perda de generalidade assuma que $t_1 < t_2$. Recorde que de (ϕ_3) a a função $\frac{\phi(s)}{s^{m-2}}$ é decrescente para $s > 0$, e daí segue que o lado esquerdo da igualdade acima é positivo. Contudo de (f_3) a função $\frac{f(s)}{s^{m-1}}$ é crescente para $s > 0$, logo o lado direito é negativo, o que é um absurdo. Se $t_1 > t_2$ chegamos de maneira análoga a um absurdo, e portanto $t_1 = t_2$.

Por fim, adaptando os argumentos encontrados em [74, Teorema 4.2], mostra-se que

$$d_\mu = d_{\mu,1} = d_{\mu,2}.$$

■

2.1.4 A condição de Palais-Smale

Nesta subseção, estabelecemos algumas propriedades envolvendo as sequências de Palais-Smale de E_μ. A primeira delas é obtida no próximo lema.

Lema 2.1.4. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para E_μ. Então, existe uma constante $C > 0$, independente de n, tal que*

$$\|u_n\|_{Y_\mu} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para E_μ. Por hipótese,

$$E_\mu(u_n) \to d \quad \text{e} \quad E'_\mu(u_n) \to 0.$$

Assim, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$E_\mu(u_n) - \frac{1}{\theta}E'_\mu(u_n)u_n \leq c_1(1 + \|v_n\|_{Y_\mu}). \tag{2.13}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E_\mu(u_n) - \frac{1}{\theta}E'_\mu(u_n)u_n &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \\ &\quad -\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2dx - \frac{\mu}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u_n|)|u_n|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)u_n}{\theta}dx. \end{aligned}$$

De (ϕ_2) e (f_2)

$$\phi(t)t^2 \leq m\Phi(t) \ \text{ e } \ \theta F(t) \leq f(t)t, \ \text{ para todo } t \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} E_\mu(u_n) - \frac{1}{\theta}E'_\mu(u_n)u_n &\geq \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_n|) + \mu\Phi(u_n)\Big)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{f(u_n)u_n}{\theta} - F(u_n)\Big)dx \\ &\geq c_2 \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_n|) + \mu\Phi(u_n)\Big)dx, \end{aligned}$$

onde $c_2 = \dfrac{\theta - m}{\theta}$. Recorde que, pelo Lema 1.1.32

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \geq \xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n|)dx \geq \xi_0(\|u_n\|_\Phi),$$

onde $\xi_0(t) = \min\{t^l, t^m\}$. Logo,

$$E_\mu(u_n) - \frac{1}{\theta}E'_\mu(u_n)u_n \geq c_2\Big(\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + \mu\xi_0(\|u_n\|_\Phi)\Big). \tag{2.14}$$

Agora, por (2.13) e (2.14), decorre que

$$c_2\Big(\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + \mu\xi_0(\|u_n\|_\Phi)\Big) \leq c_1(1 + \|u_n\|_{Y_\mu}). \tag{2.15}$$

Suponha, por contradição que

$$\|u_n\|_{Y_\mu} \to +\infty \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Então, os seguintes casos devem ser estudados:

(i) $\|\nabla u_n\|_\Phi \to +\infty$ e $\|u_n\|_\Phi \to +\infty$;

(ii) $\|\nabla u_n\|_\Phi \to +\infty$ e $(\|u_n\|_\Phi)$ limitada em $\mathbb{R}$;

(iii) $(\|\nabla u_n\|_\Phi)$ limitada em $\mathbb{R}$ e $\|u_n\|_\Phi \to +\infty$.

Caso *(i)*

Neste caso, sendo $m > l$, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande

$$\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) = \|\nabla u_n\|_\Phi^l \ \text{ e } \ \xi_0(\|u_n\|_\Phi) = \|u_n\|_\Phi^l.$$

A igualdade acima combinada com (2.15) implica

$$\begin{aligned} c_1(1 + \|u_n\|_{Y_\mu}) &\geq c_2\Big(\|\nabla u_n\|_\Phi^l + \mu\|u_n\|_\Phi^l\Big) \\ &\geq c_3\Big(\|\nabla u_n\|_\Phi^l + (\mu\|u_n\|_\Phi)^l\Big), \end{aligned}$$

de onde segue

$$c_1(1 + \|u_n\|_{Y_\mu}) \geq c_4\|u_n\|_{Y_\mu}^l.$$

Uma vez que $l > 1$, temos que $(\|u_n\|_{Y_\mu})$ é limitada em $\mathbb{R}$, o que é um absurdo.

Caso *(ii)*

Neste caso, como $m > l$, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande

$$\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) = \|\nabla u_n\|_\Phi^l \ \text{ e } \ \|u_n\|_\Phi \leq c_5,$$

e por (2.15) deduzimos que

$$c_6(1 + \|\nabla u_n\|_\Phi) \geq c_2\|\nabla u_n\|_\Phi^l,$$

implicando que $(\|\nabla u_n\|_\Phi)$ é limitada em $\mathbb{R}$, o que é um absurdo.

A análise do caso *(iii)* é feita de maneira análoga ao caso anterior. Em qualquer caso, temos um absurdo. Portanto, $(\|u_n\|_{Y_\mu})$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, mostrando o lema. ■

Nosso objetivo agora é verificar que se (u_n) é uma sequência $(PS)_d$ para E_μ, então a menos de subsequência

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N. \tag{2.16}$$

Para obter o limite acima, começamos observando que $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \Delta_2$[4], pois ϕ satisfaz as hipóteses (ϕ_1)-(ϕ_2). Logo, argumentando como no Teorema 1.1.23 segue que Y_μ é reflexivo. Pelo Lema 2.1.4 (u_n) é limitada em Y_μ, assim existe $u \in Y_\mu$ tal que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ Y_\mu. \tag{2.17}$$

Por (2.5), dado $\rho > 0$

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^\Phi(B_\rho(0)).$$

Uma vez que vale a imersão contínua

$$L^\Phi(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^1(B_\rho(0)),$$

temos

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^1(B_\rho(0)).$$

Portanto, para alguma subsequência ainda denotada por (u_n),

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \ B_\rho(0).$$

Sendo $\rho > 0$ arbitrário, concluímos a convergência em (2.16).

O resultado seguinte, dentre outros benefícios, se faz útil quando se necessita mostrar a existência de pontos críticos para o funcional E_μ.

Lema 2.1.5. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para E_μ. Então, (u_n) satisfaz o seguinte limite*

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Iniciamos a demonstração observando que

$$\big(Tx - Ty\big)(x-y) > 0, \quad \text{para todo } \ x, y \in \mathbb{R}^N \ \ x \neq y, \tag{2.18}$$

onde $T\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é dada por $Tx = \phi(|x|)x$. Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ com $x \neq y$. Se $\|x\| = \|x\|$, então $\phi(\|x\|) = \phi(\|y\|)$, e daí resulta que

$$\big(Tx - Ty\big)(x-y) = \phi(\|x\|)\|x-y\|^2 > 0.$$

[4]Ver [68, Lema 3.8].

Se $\|x\| < \|y\|$, recordando que $(\phi(t)t)' > 0$ para $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\big(Tx - Ty\big)(x-y) &= \phi(\|x\|)\|x\|(\|x\| - \|y\|) + \phi(\|y\|)\|y\|(\|y\| - \|x\|)\\ &> \phi(\|x\|)\|x\|(\|x\| - \|y\|) + \phi(\|x\|)\|x\|(\|y\| - \|x\|) = 0.\end{aligned}$$

Analogamente se $\|x\| > \|y\|$, então

$$\big(Tx - Ty\big)(x-y) > 0,$$

o que mostra (2.18).

Agora, dado $\rho > 0$ considere $\xi = \xi_\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$0 \le \xi \le 1, \quad \xi \equiv 1 \text{ em } B_\rho(0) \quad \text{e} \quad \text{supp}\xi \subset B_{2\rho}(0).$$

Usando as informações acima e (2.18), vem que

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_{B_\rho(0)} \big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big)(\nabla u_n - \nabla u)dx\\ &= \int_{B_\rho(0)} \big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big)(\nabla u_n - \nabla u)\xi dx\\ &\le \int_{B_{2\rho}(0)} \big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big)(\nabla u_n - \nabla u)\xi dx\\ &= \int_{B_{2\rho}(0)} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)\xi dx - \int_{B_{2\rho}(0)} \xi\phi(|\nabla u|)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx. \quad (2.19)\end{aligned}$$

Em primeiro lugar, mostraremos que

$$\int_{B_{2\rho}} \xi\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx \to 0. \tag{2.20}$$

Para tanto, recorde que (u_n) é uma sequência $(PS)_d$ para E_μ, isto é,

$$E_\mu(u_n) \to d \quad \text{e} \quad E'_\mu(u_n) = o_n(1).$$

Pelo Lema 2.1.4, existe $C_1 > 0$, independente de n, tal que

$$\|(u_n - u)\xi\|_{Y_\mu} \le C_1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$E'_\mu(u_n)(u_n - u)\xi = o_n(1).$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
E'_\mu(u_n)\big((u_n-u)\xi\big) &= \int_{B_{2\rho}} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\big((u_n-u)\xi\big)dx + \mu\int_{B_{2\rho}} \phi(|u_n|)u_n(u_n-u)\xi dx \\
&\quad - \int_{B_{2\rho}} f(u_n)(u_n-u)\xi dx,
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
o_n(1) &= \int_{B_{2\rho}} \xi\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla(u_n-u)dx + \int_{B_{2\rho}} (u_n-u)\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla\xi dx \\
&\quad + \mu\int_{B_{2\rho}} \phi(|u_n|)u_n(u_n-u)\xi dx - \int_{B_{2\rho}} f(u_n)(u_n-u)\xi dx. \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Afirmação 2.1.6. *As sequências* $\big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\big)$ *e* $\big(\phi(|u_n|)|u_n|\big)$ *são limitadas em* $L^{\widetilde{\Phi}}(B_{2\rho}(0))$.

De fato, usando a definição da norma de Y_μ combinada com o Lema 2.1.4,

$$
\|\nabla u_n\|_\Phi \leq \|u_n\|_{Y_\mu} \leq C, \quad \forall n\in\mathbb{N}.
$$

Aplicando o Lema 1.1.32,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \leq \max\Big\{\|\nabla u_n\|_\Phi^l, \|\nabla u_n\|_\Phi^m\Big\}.
$$

Então,

$$
\int_{B_{2\rho}(0)} \Phi(|\nabla u_n|)dx \leq C_2, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad (2.22)
$$

basta considerar $C_2 = C^l + C^m$. Por outro lado, o Lema 1.1.17 junto com a condição Δ_2 implicam que

$$
\widetilde{\Phi}\big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\big) \overbrace{\leq}^{\text{Lema}1.1.17} \Phi(2|\nabla u_n|) \overbrace{\leq}^{\Delta_2} C_*\Phi(|\nabla u_n|). \qquad (2.23)
$$

Decorre de (2.22) e (2.23),

$$
\int_{B_{2\rho}(0)} \widetilde{\Phi}\big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\big)dx \leq C_*C_2.
$$

Além disso, pelo Lema 1.1.34,

$$
\xi_4\big(\|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)}\big) \leq \int_{B_{2\rho}(0)} \widetilde{\Phi}\big(\phi(|u_n|)|u_n|\big)dx,
$$

onde $\xi_4(t) = \min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\}$. Desde que,

$$\|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)}^{\frac{m}{m-1}} - 1 \leq \xi_4\big(\|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)}\big),$$

pois $m \geq l > 1$, segue que

$$\|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)} \leq C_3, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

com $C_3 = \big(kC_2 + 1\big)^{\frac{m-1}{m}}$, mostrando a limitação de $\big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\big)$ em $L^{\widetilde{\Phi}}(B_{2\rho}(0))$. De maneira análoga, verifica-se que existe $C_4 > 0$ tal que

$$\|\phi(|u_n|)|u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)} \leq C_4,$$

o que prova a Afirmação 2.1.6.

Note que $\big(b(|u_n|)|u_n|\big)$ é limitada em $L^{\widetilde{B}}(B_{2\rho}(0))$. De fato, usando a imersão compacta $Y_\mu \hookrightarrow L^B(B_{2\rho}(0))$ dada em (2.5), existe uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$\|u_n\|_B \leq C_5, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Repetindo o argumento anterior junto com os Lemas 1.1.35 e 1.1.36, concluímos que existe $C_6 > 0$ tal que

$$\|b(|u_n|)|u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)} \leq C_6.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder para espaços de Orlicz[5], temos

$$\int_{B_{2\rho}} \phi(|u_n|)|u_n||u_n - u|dx \leq 2\|\phi(|u_n|)|u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)}\|u_n - u\|_{\Phi,B_{2\rho}(0)}$$

e

$$\int_{B_{2\rho}} b(|u_n|)|u_n||u_n - u|dx \leq 2\|b(|u_n|)|u_n|\|_{\widetilde{B},B_{2\rho}(0)}\|u_n - u\|_{B,B_{2\rho}(0)},$$

de onde segue

$$\int_{B_{2\rho}} \phi(|u_n|)|u_n||u_n - u|dx \leq 2C_4\|u_n - u\|_{\Phi,B_{2\rho}(0)}$$

e

$$\int_{B_{2\rho}} b(|u_n|)|u_n||u_n - u|dx \leq 2C_6\|u_n - u\|_{B,B_{2\rho}(0)}.$$

[5]ver Proposição 1.1.18.

Por (2.3), dado $\eta > 0$ existe $c_\eta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \eta\phi(|t|)|t| + c_\eta b(|t|)|t|.$$

Assim, pelas desigualdades acima, exitem constantes $C_7, C_8 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \Big|\int_{B_{2\rho}} f(u_n)(u_n - u)\xi\Big| &\leq \eta\int_{B_{2\rho}} \phi(|u_n|)|u_n||u_n - u|dx + c_\eta\int_{B_{2\rho}} b(|u_n|)|u_n||u_n - u|dx \\ &\leq C_7\|u_n - u\|_{\Phi,B_{2\rho}(0)} + C_8\|u_n - u\|_{B,B_{2\rho}(0)}. \end{aligned}$$

Uma vez que as imersões

$$Y_\mu \hookrightarrow L^\Phi(B_\rho(0)) \quad \text{e} \quad Y_\mu \hookrightarrow L^B(B_\rho(0))$$

são compactas e

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad Y_\mu$$

segue que

$$\|u_n - u\|_{\Phi,B_{2\rho}(0)} \to 0 \quad \text{e} \quad \|u_n - u\|_{B,B_{2\rho}(0)} \to 0,$$

isso nos permite concluir

$$\Big|\int_{B_{2\rho}} f(u_n)(u_n - u)\xi\Big| \to 0. \tag{2.24}$$

Desde que $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $C_9 > 0$ tal que

$$\Big|\int_{B_{2\rho}} (u_n - u)\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\xi dx\Big| \leq C_9\int_{B_{2\rho}} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||(u_n - u)|dx.$$

Ora, pela Desigualdade de Hölder

$$\Big|\int_{B_{2\rho}} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\xi(u_n - u)dx\Big| \leq 2C_9\|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\|_{\widetilde{\Phi},B_{2\rho}(0)}\|u_n - u\|_{\Phi,B_{2\rho}(0)},$$

e pela Afirmação 2.1.6

$$\Big|\int_{B_{2\rho}} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\xi(u_n - u)dx\Big| \leq C_{10}\|u_n - u\|_{\Phi,B_{2\rho}(0)},$$

o que implica

$$\Big|\int_{B_{2\rho}} (u_n - u)\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\xi dx\Big| \to 0. \tag{2.25}$$

De modo similar, mostra-se que

$$\Big|\mu\int_{B_{2\rho}}\phi(|u_n|)u_n(u_n-u)\xi dx\Big|\to 0. \tag{2.26}$$

Aplicando (2.21), (2.25) e (2.26) deduzimos o limite em (2.20).

Agora, mostraremos que

$$\int_{B_{2\rho}(0)}\xi\phi(|\nabla u|)\nabla u(\nabla u_n-\nabla u)dx\to 0. \tag{2.27}$$

Usando a limitação de (u_n) com a reflexibilidade de Y_μ obtemos, a menos de subsequência, os limites

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\rightharpoonup\frac{\partial u}{\partial x_i}\quad\text{em}\quad L^\Phi(B_{2\rho}(0)),\ \ i=1,...,N.$$

Observe que $\xi\phi(|\nabla u|)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L^{\widetilde{\Phi}}(B_{2\rho}(0))$, pois

$$\begin{aligned}\int_{B_{2\rho}(0)}\widetilde{\Phi}\Big(\xi\phi(|\nabla u|)\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\Big)dx &\le \int_{B_{2\rho}(0)}\widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\Big)dx\\ &\overbrace{\le}^{\text{Lema}1.1.17}\int_{B_{2\rho}(0)}\Phi(2|\nabla u|)dx\\ &\overbrace{\le}^{\Delta_2} k\int_{B_{2\rho}(0)}\Phi(|\nabla u|)dx<+\infty.\end{aligned}$$

Para cada $i=1,...,N$, consideramos

$$\begin{aligned}L_i\colon L^\Phi(B_{2\rho}(0)) &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto L_i(v)=\int_{B_{2\rho}(0)}\xi\phi(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx.\end{aligned}$$

Segue-se da Desigualdade de Hölder que L_i é um funcional linear limitado em $L^\Phi(B_{2\rho}(0))$. Então,

$$\int_{B_{2\rho}(0)}\xi\phi(|\nabla u|)\nabla u\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)dx\to 0,\ \ i=1,...,N,$$

de onde resulta (2.27). De (2.19)-(2.27),

$$\int_{B_\rho(0)}\big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n-\phi(|\nabla u|)\nabla u\big)(\nabla u_n-\nabla u)dx\to 0.$$

O último limite implica que para alguma subsequência, ainda denotada por (u_n),

$$\big(T\nabla u_n-T\nabla u\big)(\nabla u_n-\nabla u)\to 0\quad\text{q.t.p. em}\ \ B_\rho(0).$$

Aplicando um resultado encontrado em Dal Maso and Murat [27],

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. em } B_\rho(0).$$

Desde que ρ é arbitrário, a menos de subsequência,

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

finalizando a demonstração. ■

A lema seguinte constitui um ponto chave para mostrar o Teorema 2.1.1.

Lema 2.1.7. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para E_μ e u como no Lema 2.1.5. Então, u é um ponto crítico para E_μ, isto é, $E'_\mu(u) = 0$.*

Demonstração. Desde que (u_n) é uma sequência limitada em Y_μ, segue que $\Big(\phi(|\nabla u_n|)\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big)$ é limitada em $L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\rho}(0)} \widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u_n|)|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}|\Big)dx &\leq \int_{B_{2\rho}(0)} \widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\Big)dx \\
&\overbrace{\leq}^{\text{Lema}1.1.17} \int_{B_{2\rho}(0)} \Phi(2|\nabla u_n|)dx \\
&\overbrace{\leq}^{\Delta_2} k\int_{B_{2\rho}(0)} \Phi(|\nabla u_n|)dx < +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, pelo o Lema 2.1.5,

$$\phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Por sua vez, aplicando a Proposição 1.2.3, vem que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \quad \text{para toda } v \in Y_\mu.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n(x)|)\nabla u_n(x)\nabla v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u(x)|)\nabla u \nabla v dx \quad \text{para todo } v \in Y_\mu. \tag{2.28}$$

Recordando que $\Big(\phi(|u_n|)u_n\Big)$ e $\Big(b(|u_n|)u_n\Big)$ são também limitadas em $L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$ e $L^{\widetilde{B}}(\mathbb{R}^N)$, respectivamente, e usando que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

obtemos

$$\phi(|u_n(x)|)u_n(x) \to \phi(|u(x)|)u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$b(|u_n(x)|)u_n(x) \to b(|u(x)|)u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, usando novamente a Proposição 1.2.3 concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u_n|)u_n v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)uv dx. \tag{2.29}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(|u_n|)u_n v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} b(|u|)uv dx. \tag{2.30}$$

para todo $v \in Y_\mu$. Por outro lado, dado $v \in Y_\mu$

$$f(u_n(x))v \to f(u(x))v \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, dado $\eta > 0$, existe $c_\eta > 0$ tal que

$$|f(t)| \le \eta\phi(|t|)|t| + c_\eta b(|t|)|t|$$

o que implica

$$|f(u_n)v| \le \eta\phi(|(u_n)|)|(u_n)||v| + c_\eta b(|(u_n)|)|(u_n)||v| =: h_n.$$

Observando que

$$h(u_n(x)) \to h(u(x)) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

onde $h(x) = \eta\phi(|u|)uv + c_\eta b(|u|)uv$ e usando (2.29)-(2.30) resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} h dx,$$

Portanto, segue-se do Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx, \tag{2.31}$$

para todo $v \in Y_\mu$. Desde que

$$E'_\mu(u_n)v = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n(x)|)\nabla u_n(x)\nabla v dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u_n|)u_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v dx$$

juntando (2.28)-(2.31) com o limite $E'_\mu(u_n) \to 0$ concluímos, então, que $E'_\mu(u) = 0$. ■

Observação 2.1.8. *Qualquer sequência (PS) para E_μ pode ser considerada como uma sequência de funções não-negativas, pois podemos considerar a parte positiva da sequência. No seguinte sentido: Se (u_n) é uma sequência $(PS)_d$ para E_μ, então*

$$E_\mu(u_n) = E_\mu(u_n^+) + o_n(1) \qquad e \qquad E'_\mu(u_n) = E'_\mu(u_n^+) + o_n(1).$$

Em particular, se $E'_\mu(u) = 0$, então $u \geq 0$.

A seguir, apresentamos um resultado essencial para demonstração do Teorema 2.1.1, que permite concluir que o limite fraco u da sequência (u_n) é um ponto crítico não-trivial de E_μ.

Lema 2.1.9. *Seja $(v_n) \subset Y_\mu$ uma sequência $(PS)_d$ para E_μ com $v_n \rightharpoonup 0$ em Y_μ. Então,*

(a) $v_n \to 0$ em Y_μ, ou

(b) Existem ϱ, $\tau > 0$

$$\liminf_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\varrho(y)} \Phi(|v_n|)dx \geq \tau > 0.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que (b) não ocorre. Assim, para todo $\varrho > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\varrho(y)} \Phi(|v_n|)dx = 0.$$

Então, por (b_4), podemos aplicar o Teorema do tipo Lions[6] para espaço de Orlicz para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} B(|v_n|)dx = o_n(1).$$

De (2.3), dado $\eta > 0$ existe $c_\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)(v_n)dx\Big| &\leq \eta \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|v_n|)|v_n|^2dx + c_\eta \int_{\mathbb{R}^N} b(|v_n|)|v_n|^2dx \\ &\leq m \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|v_n|)dx + c_\eta b_2 \int_{\mathbb{R}^N} B(|v_n|)dx, \end{aligned}$$

onde na última estimativa, usamos as desigualdades $\phi(t)t^2 \leq m\Phi(t)$ e $b(t)t^2 \leq b_2 B(t)$. Sendo (v_n) limitada em Y_μ,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)(v_n)dx\Big| \leq \eta C_1 + C_2 o_n(1).$$

[6] Teorema 1.1.31.

Passando ao limite quando $n \to +\infty$ na desigualdade anterior, ficamos com

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)(v_n)dx\Big| \leq \eta C_1.$$

Como η é arbitrário concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)(v_n)dx = o_n(1).$$

Desde que (v_n) é uma sequência $(PS)_d$ para E_μ,

$$o_n(1) = E'_\mu(v_n)v_n = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v_n|)|\nabla v_n|^2dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|v_n|)|v_n|^2dx - o_n(1)$$

e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v_n|)|\nabla v_n|^2dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|v_n|)|v_n|^2dx \to 0.$$

Decorre de $l\Phi(t) \leq \phi(t)t^2$ e o limite acima que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \to 0 \quad \text{e} \quad \mu\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n|)dx \to 0.$$

Por conseguinte

$$u_n \to 0 \quad \text{em} \quad Y_\mu,$$

mostrando que (a) ocorre. ■

2.1.5 Demonstração do Teorema 2.1.1

Estamos, finalmente, em condições de demonstrar o Teorema 2.1.1. Em vista do Lema 2.1.2, podemos utilizar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS)[7], para concluir a existência de uma sequência $(u_n) \subset W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$E_\mu(u_n) \to d_\mu \ \text{ e } \ E'_\mu(u_n) \to 0,$$

onde

$$d_\mu = \inf_{\alpha\in\Gamma_\mu}\max_{t\in[0,1]} E_\mu\big(\alpha(t)\big),$$

[7] ver [74, Teorema 1.15].

é o nível do passo da montanha associado a E_μ. Agora, pelo Lema 2.1.4, a sequência (u_n) é limitada em E_μ. Sendo Y_μ reflexivo, existe $u \in Y_\mu$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em Y_μ. Além disso, pelos Lemas 2.1.5 e 2.1.7, segue que

$$E'_\mu(u) = 0 \text{ e } u \geq 0.$$

Se $u \not\equiv 0$, então u é solução não-negativa do problema (P_μ). Se $u = 0$, então $u_n \nrightarrow 0$ em Y_μ, pois $d_\mu > 0$. Assim, do Lema 2.1.9, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $\varrho, \tau > 0$ tais que

$$\int_{B_\varrho(y_n)} \Phi(u_n)dx \geq \tau > 0. \tag{2.32}$$

Considerando $v_n(x) = u_n(x + y_n)$, temos que (v_n) é limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe $v \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Uma vez que a imersão

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\Phi(B_\varrho(y_n))$$

é compacta, segue-se de (2.32) que

$$\int_{B_\varrho(0)} \Phi(v)dx \geq \tau > 0,$$

implicando que $v \neq 0$. Usando que $\mathbb{R}^N$ é invariante por translações, temos as igualdades

$$E_\mu(v_n) = E_\mu(u_n) = d_\mu + o_n(1) \text{ e } \|E'_\mu(v_n)\| = \|E'_\mu(u_n)\| = o_n(1).$$

Aplicando novamente os Lemas 2.1.5 e 2.1.7, para sequência (v_n), conclui-se que $E'_\mu(v) = 0$, mostrando que (P_μ) tem uma solução não-trivial e não-negativa.

Nosso objetivo agora é mostrar que a solução encontrada é de energia mínima. Para tanto, denote por u uma solução não-trivial de (P_μ). Sendo $u \in Y_\mu \setminus \{0\}$ uma solução de (P_μ), segue da caracterização do nível do passo da montanha (ver Lema 2.1.3),

$$\begin{aligned} d_\mu \leq E_\mu(u) &= E_\mu(u) - \frac{1}{m}E'_\mu(u)u \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Bigg[\Big(\Phi(|\nabla u|) - \frac{1}{m}\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2\Big) + \mu\Big(\Phi(|u|) - \frac{1}{m}\phi(|u|)|u|^2\Big) \\ &\quad + \Big(\frac{1}{m}f(u)u - F(u)\Big)\Bigg] dx. \end{aligned}$$

As hipóteses (ϕ_2) e (f_3) implicam

$$\Phi(|\nabla u|) - \frac{1}{m}\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{m}f(u)u - F(u) \geq 0.$$

Levando em consideração as desigualdades acima junto com o Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} d_\mu &\geq \liminf_{n\to+\infty}\Bigg[\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Phi(|\nabla u_n|) + \mu\Phi(|u_n|) - F(u_n)\Big)dx + \\ &\quad \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(-\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 - \mu\phi(|u_n|)|u_n|^2 + f(u_n)u_n\Big)dx\Bigg] \\ &= \liminf_{n\to+\infty} E_\mu(u_n) + \frac{1}{m}\lim_{n\to+\infty}\big(-E'_\mu(u_n)u_n\big) = d_\mu, \end{aligned}$$

mostrando que $E_\mu(v) = d_\mu$. Consequentemente, v é uma solução de energia mínima.

2.1.6 Limitação, regularidade e positividade das soluções de (P_μ)

Nesta subseção estudamos a limitação, comportamento assintótico, regularidade e a positividade das soluções para o problema autônomo.

Observamos que em [35], o método de iteração de Moser foi utilizado como uma ferramenta básica para obtenção de estimativas na norma L^∞. Todavia, não é claro que tal método seja uma boa ferramenta para obter as estimativas para a norma L^∞ para o problema (P_μ). Para contornar tal dificuldade, fazemos uma abordagem diferente de [35], adaptamos para nosso problema, os argumentos desenvolvidos [4], [43] e [71] e obtemos limitação L^∞, bem como regularidade e comportamento assintótico das soluções (P_μ). Para finalizar, fazendo uso de um resultado encontrado em [72], demonstramos a positividade das soluções.

Iniciamos apresentando um resultado técnico, porém crucial para o estudo que segue.

Lema 2.1.10. *Seja $u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ uma solução de (P_μ) e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Então,*

$$\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^\gamma dx \leq \overline{c}\left(\int_{A_{k,s}}\left|\frac{u-k}{s-t}\right|^{\gamma^*}dx + (k^{\gamma^*}+1)|A_{k,s}|\right),$$

onde $0 < t < s < 1$, $k > 0$, $\overline{c}$ é uma constante independente de k e $A_{k,\rho} = \{x \in B_\rho(x_0) : u(x) > k\}$ para $\rho > 0$.

Demonstração. Sejam u uma solução de (P_μ), $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $R_0 > 1$. Fixemos $0 < t < s < 1$ e $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \text{supp}\xi \subset B_s(x_0), \quad \xi \equiv 1 \text{ em } B_t(x_0) \quad \text{e} \quad |\nabla \xi| \leq \frac{2}{s-t}.$$

Para cada $k \geq 0$ considere a função teste $\psi = \xi^m(u-k)^+$. Pela a definição de solução para (P_μ), temos

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,s}} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 \xi^m dx + m\int_{A_{k,s}} \xi^{m-1}(u-k)^+\phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \xi dx \\ &+\mu \int_{A_{k,s}} \phi(|u|)|u||\xi^m(u-k)^+ dx = \int_{A_{k,s}} f(u)\xi^m(u-k)^+ dx.\end{aligned}$$

Definindo

$$J = \int_{A_{k,s}} \Phi(|\nabla u|)\xi^m dx$$

e usando que $l\Phi(t) \leq \phi(t)t^2$ resulta que

$$\begin{aligned} lJ \quad \leq \quad & m\int_{A_{k,s}} \xi^{m-1}(u-k)^+\phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla \xi| dx \\ & -\mu\int_{A_{k,s}} \phi(|u|)|u|\xi^m(u-k)^+ dx + \int_{A_{k,s}} f(u)\xi^m(u-k)^+ dx.\end{aligned}$$

Recorde que dado $\eta > 0$ existe $c_\eta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \eta\phi(|t|)|t| + c_\eta b(|t|)|t|.$$

Assim, fixando $\eta = \mu$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$lJ \quad \leq \quad m\int_{A_{k,s}} \xi^{m-1}(u-k)^+\phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla \xi| dx + C_1\int_{A_{k,s}} b(|u|)|u|\xi^m(u-k)^+ dx. \quad (2.33)$$

Considere $\tau \in (0,1)$ a ser escolhido, convenientemente, mais adiante. Uma vez que $u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, temos $\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\xi^{m-1}\tau \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\xi^{m-1}\tau\Big)dx \quad & \overbrace{\leq}^{\Delta_2} \quad C_2\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\Big)dx \\ & \overbrace{\leq}^{\text{Lema1.1.17}} \quad C_2\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(2|\nabla u|)dx \\ & \overbrace{\leq}^{\Delta_2} \quad C_3\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx < +\infty.\end{aligned}$$

Desde que $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, aplicando-se novamente a condição Δ_2, concluímos que

$$\frac{|\nabla \xi|}{\tau}(u-k)^+ \in L^\Phi(\mathbb{R}^N).$$

Em vista da Desigualdade de Young[8] para espaços de Orlicz, tem-se

$$\begin{aligned}\phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla \xi|\xi^{m-1}(u-k)^+ &\leq \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\xi^{m-1}\tau) + \Phi\Big(\frac{|\nabla \xi|}{\tau}(u-k)^+\Big)\\ &\leq \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\xi^{m-1}\tau) + C_4\Phi\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big).\end{aligned}$$

Por outro lado, do Lema 1.1.34,

$$\widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\xi^{m-1}\tau) \leq \xi_5(\tau\xi^{m-1})\widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|),$$

onde $\xi_5(t) = \max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\}$. Como $\tau\xi^{m-1} \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\xi^{m-1}\tau) &\leq \Big(\tau\xi^{m-1}\Big)^{\frac{m}{m-1}}\widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)\\ &\overbrace{\leq}^{\text{Lema1.1.17}} \Big(\tau\xi^{m-1}\Big)^{\frac{m}{m-1}}\Phi(2|\nabla u|)\\ &\overbrace{\leq}^{\Delta_2} C_5\Big(\tau\xi^{m-1}\Big)^{\frac{m}{m-1}}\Phi(|\nabla u|),\end{aligned}$$

e portanto

$$m\xi^{m-1}(u-k)^+\phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla \xi| \leq mC_5\Big(\tau\xi^{m-1}\Big)^{\frac{m}{m-1}}\Phi(|\nabla u|) + mC_4\Phi\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big). \quad (2.34)$$

Combinando (2.33) e (2.34), ficamos com

$$\begin{aligned}lJ \leq\ & mC_5\tau^{\frac{m}{m-1}}\int_{A_{k,s}}\Phi(|\nabla u|)\xi^m dx + mC_4\int_{A_{k,s}}\Phi\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big)dx\\ &+C_1\int_{A_{k,s}} b(|u|)|u|\xi^m(u-k)^+dx.\end{aligned}$$

Agora, escolhemos $\tau \in (0,1)$ de maneira que

$$0 < mC_5\tau^{\frac{m}{m-1}} < l.$$

Assim,

$$J \leq C_6\int_{A_{k,s}}\Phi\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big)dx + C_7\int_{A_{k,s}} b(|u|)|u|\xi^m(u-k)^+dx.$$

[8] ver Lema 1.1.8.

Argumentando como na prova da desigualdade em (2.34) e usando novamente a Desigualdade de Young, deduzimos

$$
\begin{aligned}
b(|u|)|u|\xi^m(u-k)^+ &\leq \widetilde{B}(b(|u|)|u|\xi^m) + B(|u-k|)\\
&\leq \widetilde{B}(b(|u|)|u|) + B\Big(|s-t|\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big)\\
&\leq B(2|u|) + B\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big)\\
&\leq C_8 B(|u|) + C_9 B\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big)\\
&\leq C_{10} B\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big) + C_{11}B(|k|),
\end{aligned}
$$

e consequentemente,

$$
J \leq C_6 \int_{A_{k,s}} \Phi\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big)dx + C_{12}\int_{A_{k,s}} B\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big)dx + C_{13}\int_{A_{k,s}} B(|k|)dx.
$$

Desde que $l \leq m < \gamma^*$, do Lema 1.1.32

$$
\Phi\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big) \leq \Phi(1)\max\Big\{\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|^l, \Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|^m\Big\} \leq \Phi(1)\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|^{\gamma^*}+1\Big),
$$

onde γ foi definido na Introdução. De maneira análoga, como $b_1 \leq b_2 < \gamma^*$, pelo o Lema 1.1.35, mostra-se que

$$
B\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|\Big) \leq B(1)\Big(\Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|^{\gamma^*}+1\Big) \quad \text{e} \quad B(|k|) \leq B(1)(k^{\gamma^*}+1).
$$

Logo,

$$
J \leq C_{14}\bigg(\int_{A_{k,s}} \Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|^{\gamma^*}dx + (k^{\gamma^*}+1)|A_{k,s}|\bigg). \tag{2.35}
$$

Se $\Phi \in \mathcal{C}_m$, então $\gamma = m$. Como $\xi \equiv 1$ em $B_t(x_0)$, obtemos

$$
\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^m dx \leq \int_{A_{k,t}} \Phi(|\nabla u|)dx \leq J,
$$

a desigualdade obtida combinada com (2.35) implica que

$$
\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^\gamma dx \leq C_{14}\bigg(\int_{A_{k,s}} \Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|^{\gamma^*}dx + (k^{\gamma^*}+1)|A_{k,s}|\bigg).
$$

Por outro lado, se $\Phi \notin \mathcal{C}_m$, então $\gamma = l$. Pelas desigualdades

$$
\Phi(1)\min\big\{t^l, t^m\big\} \leq \Phi(t) \quad \text{e} \quad t^l \leq t^m + 1, \ \ \forall t \geq 0,
$$

deduzimos

$$\Phi(1)(t^l - 1) \leq \Phi(t), \ \ \forall t \geq 0.$$

Como $s > t$ segue que $|A_{k,t}| < |A_{k,s}|$ e, portanto,

$$\Phi(1) \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^l dx - \Phi(1)|A_{k,t}| \leq \int_{A_{k,t}} \Phi(|\nabla u|) dx.$$

Por (2.35),

$$\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^\gamma dx \leq C_{15}\left(\int_{A_{k,s}} \left|\frac{u-k}{s-t}\right|^{\gamma^*} dx + (k^{\gamma^*} + 1)|A_{k,s}| \right).$$

Em qualquer caso, existe uma contante $\overline{c} > 0$, independente de k, tal que

$$\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^\gamma dx \leq \overline{c}\left(\int_{A_{k,s}} \left|\frac{u-k}{s-t}\right|^{\gamma^*} dx + (k^{\gamma^*} + 1)|A_{k,s}| \right),$$

finalizando a demonstração. ∎

A demonstração do próximo lema pode ser encontrado [50, Lemma 4.7].

Lema 2.1.11. *Seja (J_n) uma sequência de números não-negativos satisfazendo*

$$J_{n+1} \leq C D^n J_n^{1+\zeta}, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $C, \zeta > 0$ e $D > 1$. Se

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}},$$

então $J_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Apresentamos agora um resultado que desempenha um papel fundamental ao longo deste trabalho.

Proposição 2.1.12. *Seja $u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ uma solução não negativa de (P_μ). Então, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$.*

Demonstração. Com o intuito de facilitar a leitura, dividiremos a demonstração em três etapas.

Etapa 1: $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Primeiramente, fixemos $R_1 \in (0,1)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Dado $K > 0$, defina as sequências

$$\sigma_n = \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2^{n+1}},\ \overline{\sigma}_n = \frac{\sigma_n + \sigma_{n+1}}{2} \quad \text{e} \quad K_n = \frac{K}{2}\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\ \forall n = 0,1,2,....$$

Note que,

$$\sigma_n \downarrow \frac{R_1}{2},\ K_n \uparrow \frac{K}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_{n+1} < \overline{\sigma}_n < \sigma_n < R_1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considaremos

$$J_n = \int_{A_{K_n,\sigma_n}} \big((u - K_n)^+\big)^{\gamma^*} dx \quad \text{e} \quad \xi_n = \xi\bigg(\frac{2^{n+1}}{R_1}\Big(|x - x_0| - \frac{R_1}{2}\Big)\bigg), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

com $\xi \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$0 \leq \xi \leq 1,\ \xi(t) = 1 \text{ se } t \leq \frac{1}{2},\ \xi(t) = 0 \text{ se } t \geq \frac{3}{4} \ \text{ e } \ |\xi'| < C.$$

Afirmação 2.1.13. *Existem $C, \zeta > 0$ e $D > 1$ verificando*

$$J_{n+1} \leq CD^n J_n^{1+\zeta},\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{2.36}$$

Com efeito, desde que $\xi_n = 1$ em $B_{\sigma_{n+1}}(x_0)$ e $\xi_n = 0$ em $B^c_{\overline{\sigma}_n}(x_0)$, segue que

$$\begin{aligned} J_{n+1} &\leq \int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} \big((u - K_{n+1})^+\xi_n\big)^{\gamma^*} dx \\ &= \int_{B_{R_1}(x_0)} \big((u - K_{n+1})^+\xi_n\big)^{\gamma^*} dx \\ &\leq C(N,\gamma)\bigg(\int_{B_{R_1}(x_0)} |\nabla((u - K_{n+1})^+\xi_n)|^\gamma dx\bigg)^{\frac{\gamma^*}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Observando que

$$|\nabla((u - K_{n+1})^+\xi_n)|^\gamma \leq 2^\gamma\Big(|\nabla u|^\gamma \xi_n^\gamma + \frac{2^{\gamma(n+1)}}{R_1^\gamma}\big((u - K_{n+1})^+\big)^\gamma\Big)$$

resulta que

$$J_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma^*}} \leq C(N,\gamma,R_1)\bigg(\int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} |\nabla u|^\gamma dx + 2^{\gamma n}\int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} \big((u - K_{n+1})^+\big)^\gamma dx\bigg).$$

Aplicando-se o Lema 2.1.10, obtemos

$$\begin{aligned} J_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma^*}} \leq\ & \overline{C}(N,\gamma,R_1)\bigg(\int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} \Big|\frac{u - K_{n+1}}{\sigma_n - \overline{\sigma}_n}\Big|^{\gamma^*} dx + (K_{n+1}^{\gamma^*} + 1)|A_{K_{n+1},\sigma_n}| \\ & + 2^{\gamma n}\int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} \big((u - K_{n+1})^+\big)^\gamma dx\bigg). \end{aligned}$$

Sendo $|\sigma_n - \overline{\sigma}_n| = \dfrac{R_1}{2^{n+3}}$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma^*}} &\leq C_1(N,\gamma,R_1)\Bigg(2^{\gamma n}\int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} \big((u-K_{n+1})^+\big)^{\gamma^*}dx + (K^{\gamma^*}+1)|A_{K_{n+1},\sigma_n}| \\
&\quad +2^{\gamma n}\int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} \big((u-K_{n+1})^+\big)^{\gamma}dx\Bigg).
\end{aligned}
$$

Combinado a desigualdade acima com $t^\gamma \leq t^{\gamma^*}+1$ para todo $t\geq 0$ e usando que $\overline{\sigma}_n < \sigma_n$, vem que

$$
J_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma^*}} \leq C_2(N,\gamma,R_1)\Bigg(2^{\gamma n}\int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} \big((u-K_{n+1})^+\big)^{\gamma^*}dx + (K^{\gamma^*}+2^{\gamma n}+1)|A_{K_{n+1},\sigma_n}|\Bigg).
$$

Por outro lado, como $K_{n+1}-K_n = \dfrac{K}{2^{n+3}}$,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{K}{2^{n+3}}\right)^{\gamma^*}|A_{K_{n+1},\sigma_n}| &= |K_{n+1}-K_n|^{\gamma^*}|A_{K_{n+1},\sigma_n}| \\
&= \int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} |K_{n+1}-K_n|^{\gamma^*}dx \\
&\leq \int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} \big((u-K_n)^+\big)^{\gamma}dx = J_n,
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
|A_{K_{n+1},\sigma_n}| \leq \frac{2^{\gamma^*(n+3)}}{K^{\gamma^*}}J_n.
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} \big((u-K_{n+1})^+\big)^{\gamma^*}dx &\leq \int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} \big((u-K_n)^+\big)^{\gamma^*}dx + \int_{A_{K_{n+1},\sigma_n}} \big(K_{n+1}-K_n\big)^{\gamma^*}dx \\
&\leq \int_{A_{K_n,\sigma_n}} \big((u-K_n)^+\big)^{\gamma^*}dx + |K_{n+1}-K_n|^{\gamma^*}|A_{K_{n+1},\sigma_n}| \\
&\leq 2J_n,
\end{aligned}
$$

e consequentemente,

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma^*}} &\leq C_2(N,\gamma,R_1)\left(2^{n\gamma+1}J_n + \frac{(K^{\gamma^*}+2^{\gamma n}+1)}{K^{\gamma^*}}2^{n(\gamma+\gamma^*)}J_n\right) \\
&\leq C_2(N,\gamma,R_1,K)2^{n(\gamma+\gamma^*)}J_n,
\end{aligned}
$$

de onde segue

$$
J_{n+1} \leq C_3(N,\gamma,R_1,K)\left(2^{(\gamma+\gamma^*)\frac{\gamma^*}{\gamma}}\right)^n J_{n,j}^{\frac{\gamma^*}{\gamma}}.
$$

Considerando $C = C_3(N, \gamma, R_1, K)$, $D = 2^{(\gamma+\gamma^*)\frac{\gamma^*}{\gamma}}$ e $\zeta = \frac{\gamma^*}{\gamma} - 1$, obtemos

$$J_{n+1} \leq C D^n J_n^{1+\zeta}.$$

mostrando a Afirmação 2.1.13.

Tendo em vista a aplicação do Lema 2.1.11, nosso objetivo será verificar que existe $K^* \geq 1$ tal que

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{para todo} \quad K \geq K^*.$$

Para isso, note que

$$J_0 = \int_{A_{K_0,\sigma_0}} \left((u-K_0)^+\right)^{\gamma^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left((u-\frac{K}{2})^+\right)^{\gamma^*} dx.$$

Passando ao limite na desigualdade acima quando $K \to +\infty$, temos

$$\lim_{K\to+\infty} J_0 = 0.$$

Assim, existe $K^* \geq 1$, tal que

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{para todo} \quad K \geq K^*. \tag{2.37}$$

Fixando $K = K^*$, de (2.36)-(2.37) e aplicando o Lema 2.1.11, deduzimos

$$J_n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado, notemos ainda que

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_{K_n,\sigma_n}} \left((u-K_n)^+\right)^{\gamma^*} dx = \int_{A_{\frac{K^*}{2},\frac{R_1}{2}}} \left((u-\frac{K^*}{2})^+\right)^{\gamma^*} dx.$$

Portanto,

$$u(x) \leq \frac{K^*}{2} \quad \text{q.t.p. em} \quad B_{\frac{R_1}{2}}(x_0).$$

Sendo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ arbitrário, concluímos que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Etapa 2: $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$**.**

Essa regularidade pode ser obtida usando resultados encontrados em DiBenedetto [30] e Lieberman [55].

Etapa 3: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$**.**

Desde que $u \geq 0$, devemos mostrar que dado $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$u(x) \leq \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0).$$

Repetindo os argumentos da Etapa 1, com $K = \eta$, temos por (2.36)

$$J_{n+1} \leq CD^n J_n^{1+\zeta}.$$

Além disso, observando que

$$J_0 = \int_{A_{K_0,\sigma_0}} \left((u - K_0)^+\right)^{\gamma^*} dx \leq \int_{B_{R_1}(x_0)} \left((u - \frac{\eta}{4})^+\right)^{\gamma^*} dx.$$

e

$$\lim_{|x_0|\to+\infty} \int_{B_{R_1}(x_0)} \left((u - \frac{\eta}{4})^+\right)^{\gamma^*} dx = 0,$$

concluímos que

$$\lim_{|x_0|\to+\infty} J_0 = 0.$$

Logo, existe $\rho > 0$, tal que

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0).$$

Pelo Lema 2.1.11,

$$J_n \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0),$$

implicando

$$\int_{A_{\frac{\eta}{2},\frac{R_1}{2}}} \left((u - \frac{\eta}{4})^+\right)^{\gamma^*} dx = 0 \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0).$$

Pela continuidade de u segue

$$u(x) \leq \frac{\eta}{4}, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0).$$

isso encerra a prova da Etapa 3, e por conseguinte a proposição. ■

Para finalizar esta seção, com o auxílio do [72, Theorem 1.1] e fazendo uso da proposição precedente, mostraremos a positividade das soluções do Teorema 2.1.1.

Corolário 2.1.14. *Seja $u \in Y_\mu \backslash \{0\}$ uma solução não-negativa do problema (P_μ). Então, u é uma solução positiva.*

Demonstração. Primeiramente, segue-se da Proposição 2.1.12 que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Se $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, a teoria de regularidade encontrada em [55] implica que $u \in C^1(\overline{\mathcal{O}})$. Usando isto, fixamos $M_1 > \max\{\|\nabla u\|_\infty, 1\}$ e

$$\widetilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq M_1 \\ \dfrac{\phi(M_1)}{M_1^{l-2}} t^{l-1}, & t \geq M_1. \end{cases}$$

Primeiramente, mostremos a existência de $\alpha_1 > 0$ verificando

$$\widetilde{\phi}(|y|)|y|^2 \geq \alpha_1 |y|^l - \alpha_1 \ \ \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.38}$$

Para este fim, observe que se $|y| \leq M_1$, por (ϕ_2)

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}(|y|)y &= \phi(|y|)|y|^2 \\ &\geq c_1 \min\{|y|^{l-2}, |y|^{m-2}\}|y|^2 \\ &\geq c_1|y|^l - M_1^2. \end{aligned}$$

Se $|y| \geq M_1$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}(|y|)y &= \frac{\phi(M_1)}{M_1^{l-2}}|y|^{l-1}|y|^2 \\ &\geq \frac{\phi(M_1)}{M_1^{l-3}}|y|^l \\ &\geq c_2|y|^l - M_1^2. \end{aligned}$$

Agora, a desigualdade em (2.38) segue considerando $\alpha_1 = \min\{c_1, c_2\}$ e $\alpha_2 = M_1^2$.

A seguir, usando a função acima, defina $\widetilde{A}(y) = \dfrac{1}{\alpha_1}\widetilde{\phi}(|y|)y$. Note que

$$\widetilde{A}(y) = \frac{1}{\alpha_1}\phi(|y|)y \ \text{ para } \ |y| \leq M_1$$

e

$$|\widetilde{A}(y)| \leq c|y|^{l-1} \tag{2.39}$$

para alguma constante $c > 0$. De fato, se $|y| \leq M_1$, novamente por (ϕ_2)

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}(y)| &\leq c_3 \max\{|y|^{l-2}, |y|^{m-2}\}|y| \\ &\leq c_3 \max\{1, |M_1|^{m-l}\}|y|^{l-1}. \end{aligned}$$

Se $|y| \geq M_1$, então de (ϕ_2)

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}(y)| &\leq \frac{\phi(M_1)}{M_1^{l-2}}|y|^{l-1} \\ &\leq c_4 \frac{\max\{M_1^{l-2}, M_1^{m-2}\}}{M_1^{l-1}}|y|^{l-1} \\ &\leq c_5 \max\{1, |M_1|^{m-l}\}|y|^{l-1}, \end{aligned}$$

de onde segue (2.39). Ainda por (2.38),

$$y\widetilde{A}(y) = \frac{1}{\alpha}\widetilde{\phi}(|y|)|y|^2 \geq |y|^l - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \tag{2.40}$$

Considerando $B(x) = \dfrac{1}{\alpha_1}\big(\mu\phi(|u(x)|)u(x) - f(u(x))\big)$, concluímos que u é uma solução fraca do problema quasilinear

$$-\text{div}\widetilde{A}(\nabla u(x)) + B(x) = 0 \;\text{ em }\; \mathcal{O}.$$

Desde que $\mathcal{O}$ é arbitrário e as desigualdades (2.38)-(2.40) ocorrem, pelo [72, Theorem 1.1], deduzimos que u é uma solução positiva.

■

2.2 O problema não-autônomo

Nesta seção, temos por objetivo provar a existência de soluções positivas de energia mínima para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + V(\epsilon x)\phi(|u|)u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \, u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{$\widetilde{P}_\epsilon$}$$

quando ϵ é suficientemente pequeno.

Usando (R), mostra-se que as imersões

$$X_\epsilon \hookrightarrow L^\Phi(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad X_\epsilon \hookrightarrow L^{\Phi_*}(\mathbb{R}^N)$$

são contínuas. Além disso, devido a (2.5), valem as imersões compactas

$$X_\epsilon \hookrightarrow L^\Phi(B_\rho(0)) \quad \text{e} \quad X_\epsilon \hookrightarrow L^B(B_\rho(0))$$

para todo $\rho > 0$. Verifica-se também que $I_\epsilon \in C^1(X_\epsilon, \mathbb{R})$ com

$$I'_\epsilon(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u|)uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx,$$

para todo $u, v \in X_\epsilon$. Portanto, $u \in X_\epsilon$ é uma solução fraca de $(\widetilde{P}_\epsilon)$ se, e somente se, u é ponto critico de I_ϵ. Além disso, por (2.1), os pontos críticos de I_ϵ são funções não negativas.

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 2.2.1. *Assuma (ϕ_1)-(ϕ_5), (r_1)-(r_4), (b_1)-(b_4), (f_1)-(f_3) e (R). Então, existe $\overline{\epsilon} > 0$ tal que o problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$ tem uma solução não-negativa de energia mínima u_ϵ para todo $0 < \epsilon < \overline{\epsilon}$.*

2.2.1 Preliminares

Com um raciocínio inteiramente análogo ao Lema 2.1.2 mostra-se que I_ϵ verifica a geometria do passo da montanha[9]. Assim, em virtude de uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS), concluímos que existe uma sequência $(u_n) \subset W^{1,\Phi}\big(\mathbb{R}^N\big)$ verificando

$$I_\epsilon(u_n) \to c_\epsilon \quad \text{e} \quad I'_\epsilon(u_n) \to 0,$$

onde c_ϵ é o nível minimax associado a I_ϵ dado por

$$c_\epsilon = \inf_{\alpha \in \Gamma_\epsilon} \max_{t \in [0,1]} I_\epsilon\big(\alpha(t)\big),$$

onde

$$\Gamma_\epsilon = \Big\{\alpha \in \mathcal{C}\Big([0,1], X_\epsilon\Big);\ \alpha(0) = 0 \ \text{ e } \ I_\epsilon\big(\alpha(1)\big) \le 0\Big\}.$$

[9]Ver [8, Lema 4.1].

Além disso, argumentando como no Lema 2.1.3, prova-se também que

$$c_\epsilon = \inf_{u \in \mathcal{N}_\epsilon} I_\epsilon(u) = \inf_{u \in X_\epsilon \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\epsilon(tu),$$

onde $\mathcal{N}_\epsilon$ denota a variedade de Nehari associada a I_ϵ, isto é,

$$\mathcal{N}_\epsilon = \{u \in X_\epsilon \setminus \{0\} \ : \ I'_\epsilon(u)u = 0\}.$$

Neste momento é oportuno mostrar que a variedade de Nehari está a uma distância positiva da origem de X_ϵ.

Lema 2.2.2. *Para todo $u \in \mathcal{N}_\epsilon$, existe $\varsigma > 0$, independente de ϵ, tal que*

$$\|u\|_\epsilon > \varsigma.$$

Demonstração. Observemos, inicialmente, que (2.1) implica em

$$c_\epsilon = I_\epsilon(u) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx.$$

Usando o Lema 1.1.32,

$$\begin{aligned} c_\epsilon &\leq \xi_1(\|\nabla u\|_\Phi) + \xi_1(\|u\|_{\Phi,V_\epsilon}) \\ &\leq (\|\nabla u\|_\Phi^m + \|u\|_{\Phi,V_\epsilon}^m) + (\|\nabla u\|_\Phi^l + \|u\|_{\Phi,V_\epsilon}^l), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de $\xi_1(t) \leq t^l + t^m$ para todo $t \geq 0$. Logo,

$$c_\epsilon \leq C_1(\|u\|_\epsilon^m + \|u\|_\epsilon^l). \tag{2.41}$$

Se $\|u\|_\epsilon > 1$ para todo $u \in \mathcal{N}_\epsilon$, o resultado segue. Se existe $u \in \mathcal{N}_\epsilon$ tal que $\|u\|_\epsilon \leq 1$, sendo $l \leq m$ por (2.41), obtemos

$$c_\epsilon \leq 2C_1\|u\|_\epsilon^l.$$

Por outro lado, uma vez que $E_{V_0}(u) \leq I_\epsilon(u)$ para todo $u \in X_\epsilon$, concluímos que $d_{V_0} \leq c_\epsilon$, e consequentemente

$$\|u\|_\epsilon \geq \left(\frac{d_{V_0}}{2C_1}\right)^{\frac{1}{l}}.$$

O resultado segue, então, considerando $\varsigma = \min\left\{1, \left(\frac{d_{V_0}}{2C_1}\right)^{\frac{1}{l}}\right\}$. ■

2.2.2 A condição de Palais-Smale

Nesta subseção, temos por objetivo mostrar que o funcional I_ϵ associado ao problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$ verifica a condição (PS) abaixo de um nível fixado. Para este fim, estabelecemos algumas propriedades envolvendo as sequências de Palais-Smale para I_ϵ.

Iniciamos provando que as sequências $(PS)_c$ para I_ϵ são limitadas em X_ϵ.

Lema 2.2.3. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para I_ϵ. Então, existe uma constante $C > 0$, independente de n, tal que*

$$\|u_n\|_\epsilon \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $(u_n) \subset X_\epsilon$ tal que

$$I_\epsilon(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'_\epsilon(u_n) \to 0.$$

Então,

$$I_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\epsilon(u_n)u_n \leq c_1(1 + \|v_n\|_\epsilon).$$

Por outro lado, por (ϕ_2) e (f_2)

$$\phi(t)t^2 \leq m\Phi(t) \ \text{ e } \ \theta F(t) \leq f(t)t, \ \text{ para todo } t \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\epsilon(u_n)u_n &\geq \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big) \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(u_n)\Big)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{f(u_n)u_n}{\theta} - F(u_n)\Big)dx \\ &\geq c_2 \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(u_n)\Big)dx, \end{aligned}$$

onde $c_2 = \dfrac{\theta - m}{\theta}$. Aplicando o Lema 1.1.32

$$I_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\epsilon(u_n)u_n \geq c_2\Big(\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + \xi_0(\|u_n\|_{\Phi,V_\epsilon})\Big).$$

Portanto,

$$c_2\Big(\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + \xi_0(\|u_n\|_{\Phi,V_\epsilon})\Big) \leq c_1(1 + \|u_n\|_\epsilon).$$

Agora, a demonstração segue por contradição usando o mesmo argumento do Lema 2.1.4. ∎

Usando as hipóteses (ϕ_1)-(ϕ_2) mostra-se que X_ϵ é reflexivo. Pelo lema anterior, passando-se a uma subsequência, se necessário, existe $u \in X_\epsilon$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ X_\epsilon \tag{2.42}$$

e por imersão compacta deduzimos que

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Uma análise cuidadosa da linha de raciocínio usada na demonstração dos Lemas 2.1.5 e 2.1.7, nos permite concluir uma importante propriedade das sequências de Palais-Smale para I_ϵ.

Lema 2.2.4. *A sequência (u_n) satisfaz o seguinte limite*

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \textit{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, u é um ponto crítico para I_ϵ, isto é, $I'_\epsilon(u) = 0$.

Demonstração. Procedendo como na demonstração do Lema 2.1.5 mostra-se

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Resta provar que u é ponto crítico. Para tanto, começamos observando que

$$\phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Usando a limitação da sequência $\left(\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)$ em $L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$ com a Proposição 1.2.3, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx, \quad \text{para toda } v \in X_{\epsilon,c},$$

onde $X_{\epsilon,c} = \big\{v \in X_\epsilon\,;\, v \text{ tem suporte compacto}\big\}$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n(x)|)\nabla u_n(x)\nabla v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u(x)|)\nabla u\nabla v dx \quad \text{para todo } v \in X_{\epsilon,c}.$$

Por outro lado, uma vez que V é limitada no suporte de v, $\Big(\phi(|u_n|)u_n\Big)$ é limitada em $L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$ e $\Big(b(|u_n|)u_n\Big)$ é limitada em $L^{\widetilde{B}}(\mathbb{R}^N)$, segue-se da Proposição 1.2.3

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u_n|)u_n v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u|)uvdx.$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx,$$

para todo $v \in X_{\epsilon,c}$. Portando, $I'_\epsilon(u) = 0$. Agora, o resultado segue usando que $X_{\epsilon,c}$ é denso em X_ϵ. ■

O próximo lema é uma versão do Lema 2.1.9 para o caso não-autônomo.

Lema 2.2.5. *Seja $(v_n) \subset X_\epsilon$ uma sequência $(PS)_c$ para I_ϵ com $v_n \rightharpoonup 0$ em X_ϵ. Então,*

(a) $v_n \to 0$ em X_ϵ, ou

(b) Existem ϱ, $\tau > 0$

$$\liminf_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\varrho(y)} \Phi(|v_n|)dx \geq \tau > 0.$$

Demonstração. A demonstração segue usando as mesmas linhas de raciocínio do Lema 2.1.9. ■

O próximo lema é crucial para mostrar que I_ϵ verifica a condição (PS) em alguns níveis.

Lema 2.2.6. *Suponha que $V_\infty < +\infty$. Seja $(v_n) \subset X_\epsilon$ uma sequência $(PS)_c$ para I_ϵ com $v_n \rightharpoonup 0$ em X_ϵ. Se $v_n \not\to 0$ em X_ϵ, então $d_{V_\infty} \leq c$.*

Demonstração. Aplicando o Lema 2.1.3, existe uma sequência $(t_n) \subset (0, +\infty)$ tal que $t_n v_n \in \mathcal{M}_{V_\infty}$.

Afirmação 2.2.7. *A sequência (t_n) satisfaz o seguinte limite*

$$\limsup_{n\to+\infty} t_n \leq 1.$$

Com efeito, suponha, por contradição, que a afirmação acima não é válida. Então, existe $\delta > 0$ e uma subsequência que denotaremos ainda por (t_n) tal que

$$t_n \geq 1 + \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

Sendo (v_n) uma sequência $(PS)_c$ segue que $I'_\epsilon(v_n)v_n = o_n(1)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v_n|)|\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|v_n|)|v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx + o_n(1),$$

o que implica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(|\nabla v_n|)}{|\nabla v_n|^{m-2}}|\nabla v_n|^m dx \quad + \quad & \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\frac{\phi(|v_n|)}{|v_n|^{m-2}}|v_n|^m dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(v_n)}{|v_n|^{m-1}}|v_n|^m dx + o_n(1), \end{aligned} \tag{2.44}$$

Por outro lado, usando que $(t_n v_n) \subset \mathcal{M}_{V_\infty}$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla t_n v_n|)|\nabla(t_n v_n)|^2 dx + V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|t_n v_n|)|t_n v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(t_n v_n) t_n v_n dx,$$

de onde segue

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(|\nabla(t_n v_n)|)}{|\nabla(t_n v_n)|^{m-2}}|\nabla v_n|^m dx \quad + \quad & V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(|t_n v_n|)}{|t_n v_n|^{m-2}}|v_n|^m dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_n v_n)}{|t_n v_n|^{m-1}}|v_n|^m dx. \end{aligned} \tag{2.45}$$

De (2.44) e (2.45),

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\phi(|\nabla(t_n v_n)|)}{|\nabla(t_n v_n)|^{m-2}} - \frac{\phi(|\nabla v_n|)}{|\nabla v_n|^{m-2}} \right)|\nabla v_n|^m dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_\infty \frac{\phi(|t_n v_n|)}{|t_n v_n|^{m-2}} - V(\epsilon x)\frac{\phi(|v_n|)}{|v_n|^{m-2}} \right)|v_n|^m dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(t_n v_n)}{|t_n v_n|^{m-1}} - \frac{f(v_n)}{|v_n|^{m-1}} \right)|v_n|^m dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Recorde que, por (ϕ_3) a função $\dfrac{\phi(t)}{t^{m-2}}$ é não-crescente para $t > 0$. Logo, de (2.43)

$$\frac{\phi(|\nabla(t_n v_n)|)}{|\nabla(t_n v_n)|^{m-2}} \leq \frac{\phi(|\nabla v_n|)}{|\nabla v_n|^{m-2}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\phi(|t_n v_n|)}{|t_n v_n|^{m-2}} \leq \frac{\phi(|v_n|)}{|v_n|^{m-2}},$$

e consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(t_n v_n)}{|t_n v_n|^{m-1}} - \frac{f(v_n)}{|v_n|^{m-1}} \right)|v_n|^m dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(\epsilon x))\frac{\phi(|v_n|)}{|v_n|^{m-2}}|v_n|^m dx + o_n(1).$$

Agora, usando a hipótese (R) para todo $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$V(\epsilon x) \geq V_\infty - \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| \geq \rho. \tag{2.46}$$

Sendo V contínua,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V(\epsilon x))\phi(|v_n|)|v_n|^2dx &= \int_{B_\rho(0)}(V_\infty - V(\epsilon x))\phi(|v_n|)|v_n|^2dx \\ &\quad + \int_{B_\rho^c(0)}(V_\infty - V(\epsilon x))\phi(|v_n|)|v_n|^2dx \\ &\leq C_1\int_{B_\rho(0)}\phi(|v_n|)|v_n|^2dx + \eta\int_{B_\rho^c(0)}\phi(|v_n|)|v_n|^2dx \\ &\leq mC_1\int_{B_\rho(0)}\Phi(|v_n|)dx + m\eta\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|v_n|)dx,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a condição (ϕ_2). Como (v_n) é limitada em $L^\Phi(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência, $v_n \to 0$ em $L^\Phi(B_\rho(0))$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(t_nv_n)}{|t_nv_n|^{m-1}} - \frac{f(v_n)}{|v_n|^{m-1}}\right)|v_n|^m dx \leq C_2\eta + o_n(1).$$

Por hipótese, sabemos que $v_n \nrightarrow 0$ em X_ϵ. Assim, aplicando o Lema 2.2.5, existem $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $\rho, \tau > 0$ verificando

$$\int_{B_\rho(y_n)}\Phi(|v_n|) \geq \tau > 0. \tag{2.47}$$

Considerando $\overline{v}_n(x) = v_n(x - y_n)$, usando a invariância de $\mathbb{R}^N$ por translações, segue que $(\overline{v}_n)$ é limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, a menos de subsequência,

$$\overline{v}_n \rightharpoonup \overline{v} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

o que implica

$$\overline{v}_n \to \overline{v} \quad \text{em} \quad L^\Phi(B_\rho(0)).$$

Por (2.47),

$$\int_{B_\rho(0)}\Phi(|\overline{v}|) \geq \tau > 0.$$

Logo, existe $\mathcal{O} \subset B_\rho(0)$ com medida positiva tal que $\overline{v} > 0$ em $\mathcal{O}$. Assim, combinando (f_3) com (2.43), concluímos que

$$0 < \int_{\mathcal{O}}\left(\frac{f((1+\delta)v_n)}{|(1+\delta)v_n|^{m-1}} - \frac{f(v_n)}{|v_n|^{m-1}}\right)|v_n|^m dx \leq C_2\eta + o_n(1), \quad \forall \eta > 0,$$

Fazendo $n \to +\infty$ na última desigualdade e aplicando o Lema de Fatou, segue que

$$0 < \int_{\mathcal{O}} \left(\frac{f((1+\delta)v)}{|(1+\delta)v|^{m-1}} - \frac{f(v)}{|v|^{m-1}} \right) |v|^m dx \leq C_2 \eta, \quad \forall \eta > 0,$$

o que é um absurdo, e a afirmação esta provada.

Na sequência, estudaremos os seguintes casos:

Caso 1. $\limsup\limits_{n \to +\infty} t_n = 1.$

Neste caso, existe uma subsequência de (t_n), ainda denotada por (t_n), tal que $t_n \to 1$. Sendo (v_n) uma sequência $(PS)_c$ para I_ϵ, temos

$$c + o_n(1) = I_\epsilon(v_n) = I_{V_\infty}(t_n v_n) + I_\epsilon(v_n) - I_{V_\infty}(t_n v_n).$$

Usando a caracterização do nível c_{V_∞} e recordado que $t_n v_n \in \mathcal{M}_{V_\infty}$, obtemos

$$c + o_n(1) \geq d_{V_\infty} + I_\epsilon(v_n) - I_{V_\infty}(t_n v_n). \tag{2.48}$$

Note que,

$$\begin{aligned} I_\epsilon(v_n) - I_{V_\infty}(t_n v_n) \;\; &= \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|) \Big) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x) \Phi(|v_n|) dx \\ &\quad - V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|t_n v_n|) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(t_n v_n) - F(v_n) \Big) dx. \end{aligned}$$

A imersão compacta $X_\epsilon \hookrightarrow L_\Phi(B_\rho(0))$ e a continuidade de V implicam

$$\int_{B_\rho(0)} V(\epsilon x) \Phi(|v_n|) dx = o_n(1) \qquad \text{e} \qquad V_\infty \int_{B_\rho(0)} \Phi(|t_n v_n|) dx = o_n(1).$$

Usando (2.46) com os limites acima, obtemos

$$\begin{aligned} I_\epsilon(v_n) - I_{V_\infty}(t_n v_n) \;\; &\geq \;\; o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|) \Big) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(t_n v_n) - F(v_n) \Big) dx \\ &\quad + (V_\infty - \eta) \int_{B_\rho^c(0)} \Phi(|v_n|) dx - V_\infty \int_{B_\rho^c(0)} \Phi(|t_n v_n|) dx, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} I_\epsilon(v_n) - I_{V_\infty}(t_n v_n) \;\; &\geq \;\; o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|) \Big) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(t_n v_n) - F(v_n) \Big) dx \\ &\quad + V_\infty \int_{B_\rho^c(0)} \Big(\Phi(|v_n|) - \Phi(|t_n v_n|) \Big) dx - \eta \int_{B_\rho^c(0)} \Phi(|v_n|) dx. \end{aligned}$$

Desde que (v_n) é limitada em X_ϵ, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I_\epsilon(v_n) - I_{V_\infty}(t_n v_n) \geq\ & o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)\Big)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(t_n v_n) - F(v_n)\Big)dx \\ & + V_\infty \int_{B_\rho^c(0)} \Big(\Phi(|v_n|) - \Phi(|t_n v_n|)\Big)dx - C_3\eta. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Afirmação 2.2.8.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)\Big)dx = o_n(1), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|v_n|) - \Phi(|t_n v_n|)\Big)dx = o_n(1),$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(t_n v_n) - F(v_n)\Big)dx = o_n(1).$$

Assumindo, que a afirmação acima é válida, de (2.48) e (2.49),

$$c + o_n(1) \geq d_{V_\infty} - C_3\eta + o_n(1).$$

Passando ao limite na desigualdade acima quando $n \to \infty$, em seguida fazendo $\eta \to 0$, concluímos que

$$c \geq d_{V_\infty}.$$

Agora, nosso objetivo imediato é mostrar a Afirmação 2.2.8. Aplicando o Teorema do Valor Médio, temos

$$|\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)| \leq C_4|1 - t_n||\phi(\theta_n)\theta_n|\nabla v_n|$$

com $\theta_n \in (|\nabla v_n|, |\nabla(t_n v_n)|)$ ou $\theta_n \in (|\nabla(t_n v_n)|, |\nabla v_n|)$. Desde que $(\phi(t)t)' > 0$ para todo $t > 0$, se $\theta_n \leq |\nabla v_n|$, então

$$|\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)| \leq C_4|1 - t_n|\phi(|\nabla v_n|)|\nabla v_n|^2 \leq mC_4(1 - t_n)\Phi(|\nabla v_n|).$$

Se $\theta_n \leq |\nabla t_n v_n|$, a limitação de (t_n) combinada com condição Δ_2, implica em

$$\begin{aligned} |\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)| &\leq C_4|1 - t_n|\phi(|\nabla(t_n v_n)|)|\nabla(t_n v_n)|^2 \\ &\leq mC_4|1 - t_n|\Phi(|\nabla(t_n v_n)|) \leq C_5|1 - t_n|\Phi(|\nabla v_n|). \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $C_6 > 0$ tal que

$$|\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)| \leq C_6|1 - t_n|\Phi(|\nabla v_n|).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla t_n v_n|)| dx \leq C_7 |1 - t_n| = o_n(1),$$

pois (v_n) é limitada em X_ϵ. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(|\nabla v_n|) - \Phi(|\nabla t_n v_n|)| dx = o_n(1).$$

De maneira análoga, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|v_n|) - \Phi(|t_n v_n|)\Big) dx = o_n(1).$$

Para concluir a Afirmação 2.2.8, resta-nos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(t_n v_n) - F(v_n)\Big) dx = o_n(1). \tag{2.50}$$

Para tanto, note que pelo Teorema do Valor Médio

$$|F(t_n v_n) - F(v_n)| \leq |1 - t_n| |f(\widetilde{\theta}_n)| |v_n|$$

com $|\widetilde{\theta}_n| \leq C_8 |v_n|$. Dado $\eta > 0$, existe $c_\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f(\widetilde{\theta}_n)| &\leq \eta \phi(|\widetilde{\theta}_n|)|\widetilde{\theta}_n| + c_\eta b(|\widetilde{\theta}_n|)|\widetilde{\theta}_n|. \\ &\leq \eta \phi(C_8|v_n|) C_8 |v_n| + c_\eta b(C_8 |v_n|) C_8 |v_n| \\ &\leq C_9 \eta \Phi(|v_n|) + C_{10} B(|v_n|), \end{aligned}$$

o que é suficiente, com a limitação da sequência (v_n) em X_ϵ, para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(t_n v_n) - F(v_n)| dx \leq C_1 1 |1 - t_n| = o_n(1)$$

e, consequentemente, o limite em (2.50), finalizando a prova da afirmação.

Caso 2. $\limsup_{n \to +\infty} t_n = t_0 < 1.$

Neste caso, podemos supor, sem perda de generalidade que

$$t_n < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$d_{V_\infty} \leq I_{V_\infty}(t_n v_n) \;\; = \;\; I_{V_\infty}(t_n v_n) - \frac{1}{m} I'_{V_\infty}(t_n v_n)(t_n v_n).$$

Assim,

$$d_{V_\infty} \leq \int_{\mathbb{R}^N} P(|\nabla(t_n v_n)|)dx + V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} P(|t_n v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} Q(t_n v_n)dx, \qquad (2.51)$$

onde

$$P(s) = \Phi(s) - \frac{1}{m}\phi(s)s^2 \quad \text{e} \quad Q(s) = \frac{1}{m}f(s)s - F(s).$$

Vejamos agora que P e Q são funções crescentes em $(0, +\infty)$. Com efeito, por (ϕ_3),

$$\Big(\frac{\phi(s)}{s^{m-2}}\Big)' < 0, \quad \forall s > 0,$$

ou seja,

$$\big(\phi'(s)s^{m-2} - (m-2)\phi(s)s^{m-3}\big)s^{-(m-2)^2} < 0, \quad \forall s > 0.$$

Logo,

$$\phi'(s)s^2 - (m-2)\phi(s)s < 0, \quad \forall s > 0,$$

e, portanto,

$$\big(\Phi(s) - \frac{1}{m}\phi(s)s^2\big)' = \phi(s)s - \frac{1}{m}\phi'(s)s^2 - \frac{2}{m}\phi(s)s = \frac{(m-2)}{m}\phi(s) - \frac{1}{m}\phi'(s)s > 0,$$

mostrando que P é crescente em $(0, +\infty)$. De maneira similar, com a hipótese (f_3) mostra-se que a função Q também é crescente em $(0, +\infty)$. Decorre de (2.51) e do crescimento das funções P e Q que

$$d_{V_\infty} \overbrace{\leq}^{t_n<1} \int_{\mathbb{R}^N} P(|\nabla v_n|)dx + V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} P(|v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} Q(v_n)dx$$

Por (R), para todo $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$V(\epsilon x) \geq V_\infty - \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| \geq \rho.$$

Uma vez que $v_n \rightharpoonup 0$ em X_ϵ, usando a imersão compacta $X_\epsilon \hookrightarrow L^\Phi(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{B_\rho(0)} P(|v_n|)dx = o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d_{V_\infty} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} P(|\nabla v_n|)dx + \int_{B^c_\rho(0)} (V(\epsilon x) + \eta)P(|v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} Q(v_n)dx + o_n(1) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} P(|\nabla v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)P(|v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} Q(v_n)dx \\ &\quad +2\eta \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|v_n|)dx + o_n(1) \\ &\leq I_\epsilon(v_n) - \frac{1}{m}I'_\epsilon(v_n)v_n + c_1\eta + +o_n(1) \end{aligned}$$

e sendo (v_n) uma sequência $(PS)_c$,

$$d_{V_\infty} \leq c + c_1\eta + o_n(1).$$

Fazendo $n \to 0$, em seguida $\eta \to 0$, concluímos que

$$d_{V_\infty} \leq c,$$

finalizando a demonstração. ■

A seguir, apresentamos uma consequência imediata o lema anterior.

Corolário 2.2.9. *Se (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_ϵ tal que $v_n \rightharpoonup 0$ e $c < d_{V_\infty}$, então*

$$v_n \to 0 \quad em \quad X_\epsilon.$$

O lema seguinte, embora de simples demonstração, é um resultado técnico importante para o estudo que segue.

Lema 2.2.10. *Seja $(u_n) \subset X_\epsilon$ uma sequência $(PS)_c$ para I_ϵ com $u_n \rightharpoonup u$ em X_ϵ. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla v_n|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + o_n(1), \tag{2.52}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|v_n|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx + o_n(1), \tag{2.53}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx + o_n(1), \tag{2.54}$$

onde $v_n = u_n - u$.

Demonstração. Considere $J = \Phi$, $h_n = |\nabla u_n|$ e $h = |\nabla u|$. Como no Lema 2.2.4, temos que

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

de onde segue

$$h_n \to h \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Uma vez que $J(0) = 0$ e

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} J(h_n)dx < +\infty,$$

aplicando um resultado devido a Brezis-Lieb[10] , segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(h_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} J(h_n - h)dx + \int_{\mathbb{R}^N} J(h)dx + o_n(1),$$

por conseguinte,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + o_n(1). \tag{2.55}$$

Por outro lado, fazendo $J = \Phi$, $h_n = |\nabla u_n| - |\nabla u|$ e $h = -|\nabla u|$, temos $J(0) = 0$, $h_n(x) \to h(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} J(h_n)dx < +\infty.$$

Segue-se novamente de [19, Teorema 2] que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla v_n| - |\nabla u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(-|\nabla u|)dx + o_n(1).$$

Desde que $\big||\nabla v_n| - |\nabla u|\big| \leq |\nabla u_n|$, usando o fato de Φ ser crescente em $(0, +\infty)$ e uma função par, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + o_n(1). \tag{2.56}$$

Agora, (2.52) segue combinando (2.55) e (2.56). A demonstração de (2.53) segue os mesmos argumentos usados anteriormente e a mesma será omitida. Enquanto que (2.54) é uma consequência imediata de Brezis-Lieb [19, Teorema 2].

∎

O resultado abaixo é crucial para mostrar que o funcional I_ϵ verifica a condição (PS) abaixo de um nível fixado. Na demonstração de tal resultado ficará explícito o crescimento assumido em f', além das hipóteses técnicas (ϕ_4)- (ϕ_5), (r_1)-(r_2), (b_1) e (b_2).

Proposição 2.2.11. *Seja $(u_n) \subset X_\epsilon$ uma sequência $(PS)_c$ para I_ϵ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X_ϵ. Então,*

$$I_\epsilon(v_n) = I_\epsilon(u_n) - I_\epsilon(u) + o_n(1) \quad e \quad I'_\epsilon(v_n) = o_n(1),$$

onde $v_n = u_n - u$.

[10] ver [19, Teorema 2].

Demonstração.

Em virtude do Lema 2.2.10, constata-se sem dificuldade que

$$I_\epsilon(v_n) = I_\epsilon(u_n) - I_\epsilon(u) + o_n(1).$$

Resta-nos mostrar que

$$\|I'_\epsilon(v_n)\| = o_n(1).$$

Para este fim, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ é suficiente que

$$\|I'_\epsilon(u_n) - I'_\epsilon(v_n) - I'_\epsilon(u)\| = o_n(1). \tag{2.57}$$

A fim de provarmos o limite acima, sejam $w \in X_\epsilon$ com $\|w\|_\epsilon \leq 1$ e

$$\vartheta_{n,w} := \big|\big(I'_\epsilon(u_n) - I'_\epsilon(v_n) - I'_\epsilon(u)\big)w\big|.$$

Ora, como

$$\begin{aligned}\vartheta_{n,w} \;=\; & \Big|\int_{\mathbb{R}^N} \big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big)\nabla\omega dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \big(\phi(|u_n|)u_n - \phi(|v_n|)v_n - \phi(|u|)u\big)wV(\epsilon x)dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \big(f(u_n) - f(v_n) - f(u)\big)wdx\Big|,\end{aligned} \tag{2.58}$$

então

$$\begin{aligned}\vartheta_{n,w} \;\leq\; & \int_{\mathbb{R}^N} \big|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big||\nabla w|dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \big|\phi(|u_n|)u_n - \phi(|v_n|)v_n - \phi(|u|)u\big||w|V(\epsilon x)dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \big|f(u_n) - f(v_n) - f(u)\big||w|dx.\end{aligned}$$

Usando que $\widetilde{\Phi}$ é crescente em $(0, +\infty)$ combinado com a condição Δ_2, vem

$$\begin{aligned}& \widetilde{\Phi}\Big(\big|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big|\Big) \\ & \leq \widetilde{\Phi}\big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\big) + \widetilde{\Phi}\big(\phi(|\nabla v_n|)|\nabla v_n|\big) + \widetilde{\Phi}\big(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\big) \\ & \leq \Phi\big(2|\nabla u_n|\big) + \Phi\big(2|\nabla v_n|\big) + \Phi\big(2|\nabla u|\big) \\ & \leq C_1\Big(\Phi\big(|\nabla u_n|\big) + \Phi\big(|\nabla v_n|\big) + \Phi\big(|\nabla u|\big)\Big).\end{aligned}$$

Sendo (u_n) é limitada em X_ϵ, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\Phi}\Big(\big|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big|\Big)dx < +\infty,$$

e, consequentemente,

$$\Big(\big|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big|\Big) \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N).$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} &\big|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big||\nabla w|dx \\ &\leq 2\Big\|\big|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big|\Big\|_{\widetilde{\Phi}}\|\nabla w\|_{\Phi}.\end{aligned}$$

Agora, combinando a imersão contínua $X_\epsilon \hookrightarrow L^{\Phi}(\mathbb{R}^N)$ com a Proposição 1.2.1, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\big||\nabla w|dx \leq o_n(1)\|w\|_\epsilon. \tag{2.59}$$

Repetindo o argumento anterior verifica-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big|\phi(|u_n|)u_n - \phi(|v_n|)\nabla v_n - \phi(|u|)u\big||w|V(\epsilon x)dx \leq o_n(1)\|w\|_\epsilon. \tag{2.60}$$

Afirmação 2.2.12.

$$\sup_{\|w\|_\epsilon \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \big|f(u_n)w - f(v_n)w - f(u)w\big|dx = o_n(1).$$

Suponha, por um momento, que a Afirmação 2.2.12 é válida. Isso, combinado com (2.58)-(2.60) resulta que

$$\sup_{\|w\|_\epsilon \leq 1} \vartheta_{n,w} \leq o_n(1).$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\sup_{\|w\|_\epsilon \leq 1} |\big(I'_\epsilon(v_n) - I'_\epsilon(u_n) + I'_\epsilon(u)\big)w| = o_n(1),$$

o que mostra (2.57).

Desse ponto em diante, nosso objetivo será mostrar a Afirmação 2.2.12. Para isso, observe primeiro que dado $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$\|u\|_{\widetilde{\Phi},B^c_\rho(0)} < \eta \quad \text{e} \quad \|u\|_{\widetilde{B},B^c_\rho(0)} < \eta,$$

pois $\phi(|u|)u \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$ e $b(|u|)u \in L^{\widetilde{B}}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, por (2.3), existe $c_1 > 0$ tal que

$$|f(u)| \leq \phi(|u|)|u| + c_1 b(|u|)|u|.$$

Logo, aplicando a Desigualdade de Hólder,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho^c(0)} |f(u)||w|dx &\leq \int_{B_\rho^c(0)} \phi(|u|)|u||w|dx + c_1 \int_{B_\rho^c(0)} b(|u|)|u||w|dx \\
&\leq 2\|\phi(|u|)|u|\|_{\widetilde{\Phi},B_\rho^c(0)}\|w\|_{\Phi,B_\rho^c(0)} + 2\|b(|u|)|u|\|_{\widetilde{B},B_\rho^c(0)}\|w\|_{B,B_\rho^c(0)} \\
&\leq 2c_2\eta\|w\|_\epsilon.
\end{aligned}$$

Por outro lado, considerando a sequência

$$h_{n,w} = f(u_n)w - f(v_n)w - f(u)w,$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h_{n,w}|dx \leq \int_{B_\rho(0)} |h_{n,w}|dx + \int_{B_\rho^c(0)} |f(u_n) - f(v_n)||w|dx + 2c_2\eta\|w\|_\epsilon. \tag{2.61}$$

Observe que

$$\int_{B_\rho(0)} |h_{n,w}|dx = o_n(1). \tag{2.62}$$

De fato, recordando que as imersões

$$X_\epsilon \hookrightarrow L^\Phi(B_\rho(0)) \quad \text{e} \quad X_\epsilon \hookrightarrow L^B(B_\rho(0))$$

são compactas, desde que $u_n \rightharpoonup u$ em X_ϵ, existem $h_1, h_2 \in L^1(B_\rho(0))$ tais que

$$\Phi(|u_n|) \leq h_1 \quad \text{e} \quad B(|u_n|) \leq h_2.$$

Além disso,

$$h_{n,w}(x) \to 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad B_\rho(0)$$

e

$$\begin{aligned}
|h_{n,w}| &\leq |f(u_n)||w| + |f(v_n)||w| + |f(u)||w| \\
&\leq c_3\Big(\phi(|u_n|)|u_n||w| + b(|u_n|)|u_n||w| + \phi(|v_n|)|v_n||w| + b(|v_n|)|v_n||w| \\
&\quad +\phi(|u|)|u||w| + b(|u|)|u||w|\Big) \\
&\overbrace{\leq}^{\text{Young}} c_4\Big(\widetilde{\Phi}(\phi(|u_n|)|u_n|) + \widetilde{B}(b(|u_n|)|u_n|) + \widetilde{\Phi}(\phi(|v_n|)|v_n|) + \widetilde{B}(b(|v_n|)|v_n|) \\
&\quad +\widetilde{\Phi}(\phi(|u|)|u|) + \widetilde{B}(b(|u|)|u| + \Phi(|w|) + B(|w|)\Big) \\
&\overbrace{\leq}^{Lema1.1.17} c_4\Big(\Phi(2|u_n|) + B(2|u_n|) + \Phi(2|v_n|) + B(|v_n|) \\
&\quad +\Phi(2|u|) + B(2|u|) + \Phi(|w|) + B(|w|)\Big) \\
&\overbrace{\leq}^{\Delta_2} c_5\Big(\Phi(|u_n|) + B(|u_n|) + \Phi(|u|) + B(|u|) + \Phi(|w|) + B(|w|)\Big) \\
&\leq c_5\Big(h_1 + h_2 + \Phi(|u|) + B(|u|) + \Phi(|w|) + B(|w|)\Big) \in L^1(B_\rho(0)).
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos o limite em (2.62).

A seguir, vejamos que existe uma constante positiva c_6 tal que

$$\int_{B_\rho^c(0)} |f(u_n) - f(v_n)||w|dx \leq c_6\eta\|w\|_\epsilon. \tag{2.63}$$

Por (f_1), dado $\eta > 0$, existe $c_\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|f'(t)| &\leq \eta|(r(t)t)'| + c_\eta|(b(t)t)'| \\
&\leq \eta\big(|r'(t)t| + r(t)\big) + c_\eta\big(|b'(t)t| + b(t)\big) \qquad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Assim, por (r_2) e (b_2),

$$|f'(t)| \leq \eta(\widetilde{C} + 1)r(t) + c_\eta(\widehat{C} + 1)b(t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.64}$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio,

$$|f(u_n) - f(v_n)||w| \leq |f'(\omega_n)||u||w|,$$

onde $\omega_n \in \big(\min\{u_n, v_n\}, \max\{u_n, v_n\}\big)$. Recordando que as funções r e b são crescentes, temos

$$r(|\omega_n|) \leq r(|u_n| + |v_n|) \quad \text{e} \quad b(|\omega_n|) \leq r(|u_n| + |v_n|). \tag{2.65}$$

Combinando (2.64) e (2.65), obtemos

$$|f'(\omega_n)| \leq c_1\eta r(2|u_n|+|u|)+c_2 b(2|u_n|+|u|).$$

Por sua vez, usando (r_3), (b_3) e a condição Δ_2,

$$\begin{aligned}
c_1\eta r(2|u_n|+|u|)+c_2 b(2|u_n|+|u|) &\leq c_1 r_1\eta\frac{R(2|u_n|+|u|)}{(2|u_n|+|u|)^2}+c_2 b_2\frac{B(2|u_n|+|u|)}{(2|u_n|+|u|)^2}\\
&\leq c_3\eta\left(\frac{R(|u_n|)}{|u_n|^2}+\frac{R(|u|)}{|u|^2}\right)+c_4\left(\frac{B(|u_n|)}{|u_n|^2}+\frac{B(|u|)}{|u|^2}\right)\\
&\leq \frac{c_3}{r_1}\eta\Big(r(|u_n|)+r(|u|)\Big)+\frac{c_4}{b_1}\Big(b(|u_n|)+b(|u|)\Big).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|f(u_n)-f(v_n)||w| &\leq c_7\eta r(|u_n|)|u||w|+c_8 b(|u_n|)|u||w|\\
&\quad +c_9 r(|u|)|u||w|+c_{10}b(|u|)|u||w|. \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

No que segue, fixemos $x\in\mathbb{R}^N$ e definamos os conjuntos

$$A_x=\{n\in\mathbb{N}:\ |u(x)|\leq|u_n(x)|\}\ \text{ e }\ B_x:=\{n\in\mathbb{N}:\ |u_n(x)|\leq|u(x)|\}.$$

Se $n\in A_x$, então

$$\begin{aligned}
r(|u_n(x)|)|u_n(x)||u(x)| &= \eta r(|u_n(x)|)|u_n(x)|\frac{1}{\eta}|u(x)|\\
&\leq \widetilde{R}(\eta r(|u_n(x)|)|u_n(x)|)+R(\frac{1}{\eta}|u(x)|)\\
&\leq \eta R(2|u_n(x)|)+C_\eta R(|u(x)|)\\
&\leq C_1\eta R(|u_n(x)|)+C_\eta R(|u(x)|)\\
&\leq \frac{1}{r_1}\big(C_1\eta r(|u_n(x)|)|u_n(x)|^2+C_\eta r(|u(x)|)|u(x)|^2\big),
\end{aligned}$$

o que implica

$$r(|u_n(x)|)|u(x)|\leq C_2\eta r(|u_n|)|u_n|+C_{\eta,1}r(|u(x)|)|u(x)|.$$

Se $n\in B_x$, desde que r é crescente segue

$$r(|u_n(x)|)|u(x)|\leq r(|u(x)|)|u(x)|\leq C_2\eta r(|u_n(x)|)|u_n(x)|+r(|u(x)|)|u(x)|.$$

Portanto,

$$r(|u_n(x)|)|u(x)| \leq C_2\eta r(|u_n(x)|)|u_n(x)| + (C_{\eta,1}+1)r(|u(x)|)|u(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

e como $x \in \mathbb{R}^N$ foi arbitrário resulta que

$$r(|u_n|)|u| \leq C_2\eta r(|u_n|)|u_n| + (C_{\eta,1}+1)r(|u|)|u(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.67}$$

De modo análogo, verifica-se que

$$b(|u_n|)|u| \leq C_3\eta b(|u_n|)|u_n| + (C_{\eta,2}+1)b(|u(x)|)|u(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.68}$$

Agora, combinando as desigualdades acima com (2.66), obtemos

$$\begin{aligned}|f(u_n)-f(v_n)||w| &\leq C_4\eta r(|u_n|)|u_n||w| + C_5\eta b(|u_n|)|u_n||w| \\ &\quad + C_6 r(|u|)|u||w| + C_7 b(|u|)|u||w|.\end{aligned}$$

Usando as imersões contínuas

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^R(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^B(\mathbb{R}^N),$$

a limitação das sequências $\big(r(|u_n|)|u_n|\big)$ e $\big(b(|u_n|)|u_n|\big)$, respectivamente, em $L^{\widetilde{R}}(\mathbb{R}^N)$ e $L^{\widetilde{B}}(\mathbb{R}^N)$ juntamente com a Desigualdade de Hólder, obtemos (2.63). De (2.61)-(2.63), vem que

$$\sup_{\|w\|_\epsilon \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} h_{n,w}dx \leq o_n(1) + c_6\eta + 2c_2\eta.$$

Fazendo $\eta \to 0$ na desigualdade anterior, concluímos

$$\sup_{\|w\|_\epsilon \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} h_{n,w}dx = o_n(1),$$

mostrando a Afirmação 2.2.12. Portanto, de (2.58)-(2.60)

$$\sup_{\|w\|_\epsilon \leq 1} \vartheta_{n,w} \leq o_n(1),$$

ou seja

$$\sup_{\|w\|_\epsilon \leq 1} |\big(I'_\epsilon(v_n) - I'_\epsilon(u_n) + I'_\epsilon(u)\big)w| = o_n(1),$$

isso encerra a prova.

■

O próximo resultado estabelece uma imersão compacta envolvendo o espaço X_ϵ. Os casos particulares onde $\Phi(t) = \frac{1}{p}|t|^p$ para $N > p > 1$ e $\Phi(t) = \frac{1}{p}|t|^p + \frac{1}{q}|t|^q$ para $N > q > p > 1$ foram considerados em [26] e [6], respectivamente.

Lema 2.2.13. *Se $V_\infty = +\infty$, a imersão*

$$X_\epsilon \hookrightarrow L^\Phi(\mathbb{R}^N)$$

é compacta. Em particular, a imersão $X_\epsilon \hookrightarrow L^B(\mathbb{R}^N)$ é compacta se B é uma N-função satisfazendo (b_4).

Demonstração. Com efeito, seja $(u_n) \subset X_\epsilon$ uma sequência limitada em X_ϵ. Assim, existe $u \in X_\epsilon$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X_ϵ. Por (R), para cada $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ satisfazendo

$$V(\epsilon z) > \frac{1}{\eta}, \quad |z| > \rho.$$

Por outro lado, usando a imersão compacta $X_\epsilon \hookrightarrow L^\Phi(B_\rho(0))$, temos

$$u_n \to u \quad \text{em } L^\Phi(B_\rho(0)),$$

ou seja,

$$\int_{B_\rho(0)} \Phi(|u_n - u|)dx = o_n(1).$$

Observando que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n - u|)dx &\leq \eta \int_{B^c_\rho(0)} V(\epsilon x)\Phi(|u_n - u|)dx + o_n(1)\\ &\leq C_1\eta + o_n(1),\end{aligned}$$

segue da arbitrariedade de η que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n - u|)dx = o_n(1).$$

Para concluir a demonstração, suponha que B verifica (b_4). Usando a limitação e $(u_n - u)$ em $L^{\Phi_*}(\mathbb{R}^N)$ junto com o fato que $u_n \to u$ em $L^\Phi(\mathbb{R}^N)$, para cada $\eta > 0$, existe $c_\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} B(|u_n - u|)dx &\leq c_\eta \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n - u|)dx + \eta \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_*(|u_n - u|)dx\\ &\leq c_\eta o_n(1) + C_1\eta.\end{aligned}$$

Sendo η arbitrário, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} B(|u_n - u|)dx \to 0,$$

mostrando que $u_n \to u$ em $L^B(\mathbb{R}^N)$. ∎

A proposição abaixo mostra que I_ϵ satisfaz a condição (PS) para determinados níveis.

Proposição 2.2.14. *Assuma que $V_\infty < +\infty$. Então, I_ϵ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c < d_{V_\infty}$. Se $V_\infty = +\infty$, a condição $(PS)_c$ ocorre para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset X_\epsilon$ uma sequência verificando

$$I_\epsilon(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'_\epsilon(u_n) \to 0.$$

Segue dos Lemas 2.2.3 e 2.2.4 que (u_n) é limitada em X_ϵ e existe $u \in X_\epsilon$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } X_\epsilon \qquad \text{e} \qquad I'_\epsilon(u) = 0. \tag{2.69}$$

Considerando $v_n = u_n - u$, pela Proposição 2.2.11,

$$I_\epsilon(v_n) = c - I_\epsilon(u) + o_n(1) = \overline{c} + o_n(1) \quad \text{and} \quad I'_\epsilon(v_n) = o_n(1),$$

mostrando que (v_n) é uma sequência $(PC)_{\overline{c}}$ para I_ϵ. A seguir, vejamos que $I_\epsilon(u) \geq 0$. Fazendo uso das hipóteses (ϕ_2) e (f_2), obtemos

$$\begin{aligned} I_\epsilon(u) - \frac{1}{m}I'_\epsilon(u)u \;&=\; \int_{\mathbb{R}^N} \big(\Phi(|\nabla u|) - \frac{1}{m}\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2\big)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \big(\frac{1}{m}f(u)u - F(u)\big)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\big(\Phi(|u|) - \frac{1}{m}\phi(|u|)|u|^2\big)dx \geq 0. \end{aligned}$$

No entanto, por (2.69), $I_\epsilon(u) = I_\epsilon(u) - \dfrac{1}{m}I'_\epsilon(u)u$, implicando que $I_\epsilon(u) \geq 0$. Logo,

$$\overline{c} \leq c.$$

Suponha que $V_\infty < +\infty$. Se $c < d_{V_\infty}$, então (v_n) é uma sequência $(PS)_{\overline{c}}$ com

$$\overline{c} \leq c < d_{V_\infty}$$

Então, pelo Corolário 2.2.9, concluímos que

$$v_n \to 0 \quad \text{em } X_\epsilon,$$

isto é, $u_n \to u$ em X_ϵ.

Assuma agora que $V_\infty = +\infty$. Pelo Lema 2.2.13, a menos de subsequência,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|v_n|)dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} B(|v_n|)dx \to 0.$$

Por outro lado, dado $\eta > 0$, existe $c_\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f(v_n)v_n| &\leq \eta\phi(|v_n|)|v_n|^2 + c_\eta b(|v_n|)|v_n|^2 \\ &\leq m\eta\Phi(|v_n|) + c_\eta b_2 B(|v_n|). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx \to 0.$$

Uma vez que que $I'_\epsilon(v_n)v_n = 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v_n|)|\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|v_n|)|v_n|^2 dx = o_n(1)$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla v_n|)dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|v_n|)dx \to 0.$$

Portanto,

$$v_n \to 0 \quad \text{em} \quad X_\epsilon.$$

■

A seguir, mostraremos que a condição (PS) vale para I_ϵ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$ para alguns níveis.

Proposição 2.2.15. *Assuma que $V_\infty < +\infty$. Então, I_ϵ satisfaz a condição $(PS)_c$ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$ para $c \in (0, d_{V_\infty})$. Se $V_\infty = +\infty$, a condição (PS) ocorre para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_\epsilon$ uma sequência verificando

$$I_\epsilon(u_n) = c + o_n(1) \quad \text{e} \quad \|I'_\epsilon(u_n)\|_* = o_n(1).$$

Então, aplicando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange[11], existe $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\epsilon(u_n) = \lambda_n J'_\epsilon(u_n) + o_n(1), \tag{2.70}$$

onde $J_\epsilon : X_\epsilon \to \mathbb{R}$ é dado por

$$J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u|)|u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx.$$

Note que

$$\begin{aligned} J'_\epsilon(u_n)u_n &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| + 2\phi(|\nabla u_n|)\Big)|\nabla u_n|^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Big(\phi'(|u_n|)|u_n| + 2\phi(|u_n|)\Big)|u_n|^2 dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \Big(f'(u_n)(u_n)^2 + f(u_n)u_n\Big) dx. \end{aligned}$$

Por (ϕ_3),

$$\phi'(t)t \leq (m-2)\phi(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} J'_\epsilon(u_n)u_n &\leq m\Bigg(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u_n|)|u_n|^2 dx\Bigg) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \big(f'(u_n)(u_n)^2 + f(u_n)u_n\big) dx. \end{aligned}$$

Combinado a última desigualdade e o fato de $I'_\epsilon(u_n)u_n = 0$ resulta que

$$-J'_\epsilon(u_n)u_n \geq \int_{\mathbb{R}^N} \big(f'(u_n)(u_n)^2 - (m-1)f(u_n)u_n\big) dx. \tag{2.71}$$

Por outro lado, usando o Lema 2.2.2 tem-se $\|u_n\|_\epsilon \not\to 0$. Isto implica que existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que

$$\int_{B_\rho(y_n)} \Phi(|u_n|) dx \geq \tau > 0 \tag{2.72}$$

para constantes positivas ρ e τ. Definindo $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$, segue que $(\tilde{u}_n)$ é uma sequência limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

[11] ver [74, Proposição 5.12].

Tendo em vista a imersão compacta $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\Phi}(B_\rho(0))$ com (2.72), concluí-se que $\tilde{u} \neq 0$. Portanto, existe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ com medida positiva tal que $\tilde{u} > 0$ q.t.p. em $\mathcal{O}$.

Agora, suponha que

$$\limsup_{n\to+\infty} J'_\epsilon(u_n)u_n = 0.$$

Isso juntamente com (2.71) implicam em

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}^N} \big(f'(\tilde{u}_n)(\tilde{u}_n)^2 - (m-1)f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n\big)dx.$$

Por outro lado, por (f_3) e o Lema de Fatou, observamos que

$$0 \geq \int_{\mathcal{O}} \big(f'(\tilde{u})(\tilde{u})^2 - (m-1)f(\tilde{u})\tilde{u}\big)dx > 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, de (2.71),

$$\limsup_{n\to+\infty} J'_\epsilon(u_n)u_n < 0,$$

para alguma subsequência, consequentemente $\lambda_n = o_n(1)$. Consequentemente, por (2.70)

$$I'_\epsilon(u_n) = o_n(1),$$

mostrando que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$. Agora, o resultado segue da Proposição 2.2.14. ■

Inspirados na demonstração do resultado precedente obtemos o corolário abaixo.

Corolário 2.2.16. *Os pontos críticos do funcional I_ϵ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$ são pontos críticos de I_ϵ em X_ϵ.*

2.2.3 Demonstração do Teorema 2.2.1

Em virtude dos resultados provados nas seções anteriores, estabelecemos a existência de solução não-negativa de energia mínima para $(\widetilde{P}_\epsilon)$ quando ϵ é suficientemente pequeno.

Iniciamos recordando que I_ϵ satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha. Então, existe $(u_n) \subset X_\epsilon$ satisfazendo

$$I_\epsilon(u_n) \to c_\epsilon \;\text{ e }\; I'_\epsilon(u_n) \to 0,$$

onde c_ϵ denota o nível do passo da montanha associado a I_ϵ.

Se $V_\infty = +\infty$, pela Proposição 2.2.14, existe $u \in X_\epsilon$ tal que, para alguma subsequência,

$$u_n \to u \quad \text{em } X_\epsilon.$$

Portanto,

$$I_\epsilon(u) = c_\epsilon \quad \text{e} \quad I'_\epsilon(u) = 0.$$

Se $V_\infty < +\infty$, é suficiente provar que $c_\epsilon \in (0, d_{V_\infty})$ para ϵ suficiente pequeno. Com este propósito, sem perda de generalidade, considere $V(0) = V_0$. Seja $\mu \in (V_0, V_\infty)$. Então, pela definição do nível do passo da montanha, temos

$$d_{V_0} < d_\mu < d_{V_\infty}. \tag{2.73}$$

No que segue, seja $w \in Y_\mu$ uma solução de energia mínima para o problema (P_μ). Para cada $\rho > 0$, consideramos $\vartheta_\rho \in C^1(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$0 \leq \vartheta_\rho(x) \leq 1, \quad \vartheta_\rho(x) \equiv 1, \text{ em } B_\rho(0), \quad \text{e} \quad \text{supp}\vartheta_\rho \subset B_{2\rho}(0).$$

Sejam $w_\rho = w\vartheta_\rho$ e $t_\rho > 0$ tais que

$$E_\mu(t_\rho w_\rho) = \max_{t \geq 0} E_\mu(t w_\rho).$$

Note que, existe ρ_0 suficientemente grande tal que

$$E_\mu(t_{\rho_0} w_{\rho_0}) < d_{V_\infty}. \tag{2.74}$$

De fato, caso contrário, para todo $\rho > 0$ teríamos

$$E_\mu(t_\rho w_\rho) \geq d_{V_\infty}.$$

Por outro lado, usando a convexidade de Φ e o fato de $\text{supp}\vartheta_\rho \subset B_{2\rho}(0)$, obtém-se

$$w_\rho \to w \quad \text{em} \quad Y_\mu.$$

Agora, argumentando como na demonstração do Lema 2.2.6,

$$t_\rho \to 1.$$

Assim,

$$d_{V_\infty} \leq \liminf_{\rho \to +\infty} E_\mu(t_\rho w_\rho) = E_\mu(w) = d_\mu$$

o que é um absurdo com (2.73), o que mostra (2.74).

Desde que $V_0 = V(0)$, dado $\eta > 0$, existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que

$$V(\epsilon x) < V_0 + \eta, \quad \forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}) \quad \text{e} \quad \forall x \in \operatorname{supp}(t_{\rho_0} w_{\rho_0}).$$

Observando que $\mu \in (V_0, V_\infty)$, para η suficientemente pequeno,

$$V_0 + \eta < \mu$$

e, consequentemente,

$$V(\epsilon x) < \mu, \quad \forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}) \quad \text{e} \quad \forall x \in \operatorname{supp}(t_{\rho_0} w_{\rho_0}).$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x) \Phi(|t t_{\rho_0} w_{\rho_0}|) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \mu \Phi(|t t_{\rho_0} w_{\rho_0}|) dx, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}),$$

implicando em

$$I_\epsilon(t t_{\rho_0} w_{\rho_0}) \leq \max_{t \geq 0} E_\mu(t t_{\rho_0} w_{\rho_0}) = E_\mu(t_{\rho_0} w_{\rho_0}), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}).$$

Portanto,

$$c_\epsilon \leq E_\mu(t_{\rho_0} w_{\rho_0}), \quad \forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}).$$

Isso com (2.74) implica em

$$c_\epsilon < d_{V_\infty}, \quad \forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}).$$

Agora, o teorema segue da Proposição 2.2.14.

2.2.4 Limitação, regularidade e positividade das soluções de $(\widetilde{P}_\epsilon)$

Nesta subseção estudamos a limitação, comportamento assintótico, regularidade e a positividade das soluções para o problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$.

Como no caso autônomo, o resultado técnico abaixo é crucial no estudo que segue.

Lema 2.2.17. *Seja* $u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ *uma solução de* $(\widetilde{P}_\epsilon)$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}^N$. *Então,*

$$\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^\gamma dx \leq c\Bigg(\int_{A_{k,s}} \Big|\frac{u-k}{s-t}\Big|^{\gamma^*} dx + (k^{\gamma^*}+1)|A_{k,s}|\Bigg),$$

onde $0 < t < s < 1$, $k > 0$, c *é uma constante independente de* k *e* $A_{k,\rho} = \{x \in B_\rho(x_0) : u(x) > k\}$ *para* $\rho > 0$.

Demonstração.

Seja u uma solução de $(\widetilde{P}_\epsilon)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $R_0 > 1$. Fixemos $0 < t < s < 1$ e $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \operatorname{supp}\xi \subset B_s(x_0), \quad \xi \equiv 1 \text{ em } B_t(x_0) \quad \text{e} \quad |\nabla \xi| \leq \frac{2}{s-t}.$$

Para cada $k \geq 0$ considere a função teste $\varphi = \xi^m(u-k)^+$. Usando a definição de solução para $(\widetilde{P}_\epsilon)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,s}} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 \xi^m dx + m\int_{A_{k,s}} \xi^{m-1}(u-k)^+\phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \xi dx \\
&\int_{A_{k,s}} V(\epsilon x)\phi(|u|)|u||\xi^m (u-k)^+ dx = \int_{A_{k,s}} f(u)\xi^m(u-k)^+ dx.
\end{aligned}$$

Desde que $V_0 \leq V(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,s}} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 \xi^m dx + V_0\int_{A_{k,s}} \phi(|u|)|u||\xi^m (u-k)^+ dx \\
\leq\;& -m\int_{A_{k,s}} \xi^{m-1}(u-k)^+\phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \xi dx + \int_{A_{k,s}} f(u)\xi^m(u-k)^+ dx.
\end{aligned}$$

Definindo

$$J = \int_{A_{k,s}} \Phi(|\nabla u|)\xi^m dx$$

e usando que $l\Phi(t) \leq \phi(t)t^2$, temos

$$\begin{aligned}
lJ \;\leq\;& m\int_{A_{k,s}} \xi^{m-1}(u-k)^+\phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla \xi| dx \\
& -V_0\int_{A_{k,s}} \phi(|u|)|u|\xi^m(u-k)^+ dx + \int_{A_{k,s}} f(u)\xi^m(u-k)^+ dx.
\end{aligned}$$

Recorde que, dado $\eta > 0$ existe $c_\eta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \eta\phi(|t|)|t| + c_\eta b(|t|)|t|.$$

Assim, fixando $\eta = V_0$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$lJ \leq m \int_{A_{k,s}} \xi^{m-1}(u-k)^+ \phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla \xi| dx + C_1 \int_{A_{k,s}} b(|u|)|u|\xi^m (u-k)^+ dx.$$

Desse ponto em diante, a demonstração segue a mesma linha de raciocínio do Lema 2.1.10.

■

O próximo resultado é consequência do lema precedente juntamente com o Lema 2.1.11. Uma vez que sua demonstração é feita de maneira análoga ao caso autônomo omitiremos aqui sua demonstração.

Proposição 2.2.18. *Seja $u \in X_\epsilon$ uma solução não negativa de $(\widetilde{P}_\epsilon)$. Então, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$.*

A seguir, mostramos que as soluções obtidas no Teorema 2.2.1 são positivas.

Corolário 2.2.19. *Seja $u \in X_\epsilon \backslash \{0\}$ uma solução não-negativa do problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$. Então, u é uma solução positiva.*

Demonstração. A prova segue repetindo os mesmos argumentos do Corolário 2.1.14 considerando, neste caso,

$$B(x) = \frac{1}{\alpha_1}\Big(V(\epsilon x)\phi(|u(x)|)u(x) - f(u(x))\Big).$$

■

2.3 Multiplicidade de soluções para $(\widetilde{P}_\epsilon)$

Na presente seção, nosso principal objetivo é mostrar a existência de múltiplas soluções bem como o estudo do comportamento dos pontos de máximo em relação ao conjunto M.

2.3.1 Resultados Preliminares

Nesta subseção, estabelecemos alguns resultados que possibilitam o estudo sobre a multiplicidade de soluções para o problema não autônomo.

Na sequência, $w \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ denota uma solução positiva de energia mínima de (P_{V_0}). Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\big([0,+\infty),[0,1]\big)$ satisfazendo

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{\delta}{2} \\ 0, & \text{se} \quad s \geq \delta. \end{cases}$$

Para cada $y \in M$, seja

$$\Psi_{\epsilon,y}(x) = \varphi(|\epsilon x - y|)w(\frac{\epsilon x - y}{\epsilon}).$$

Note que, $\Psi_{\epsilon,y} \in X_\epsilon$ para cada $y \in M$. Então, existe $t_\epsilon > 0$ tal que $t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y} \in \mathcal{N}_\epsilon$ e

$$I_\epsilon(t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}) = \max_{t \geq 0} I_\epsilon(t\Psi_{\epsilon,y}).$$

Consequentemente, a função $\widetilde{\Psi}_\epsilon : M \to \mathcal{N}_\epsilon$ dada por $\widetilde{\Psi}_\epsilon(y) = t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}$ esta bem definida. Além disso, $\widetilde{\Psi}_\epsilon$ tem suporte compacto para todo $y \in M$.

A primeira propriedade importante envolvendo a função $\widetilde{\Psi}$ é dada no lema abaixo.

Lema 2.3.1. *A função $\widetilde{\Psi}_\epsilon$ verifica o seguinte limite*

$$\lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon\big(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)\big) = d_{V_0}, \ \ \textit{uniformemente em } y \in M.$$

Demonstração. Comece observando que é suficiente mostrar que para $(y_n) \subset M$ e $(\epsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$ com $\epsilon_n \to 0$, a menos de subsequência,

$$I_{\epsilon_n}(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) \to d_{V_0}.$$

Com o intuito de mostrar o limite acima, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $t_{\epsilon_n} > 0$ tal que $t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon_n,y_n} \in \mathcal{N}_{\epsilon_n}$.

Afirmação 2.3.2. *A sequência (t_{ϵ_n}) satisfaz o limite*

$$t_{\epsilon_n} \to 1.$$

De fato, mostraremos primeiro que existe $t_* > 0$ tal que

$$t_{\epsilon_n} \to t_*.$$

Desde que $\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n) \in \mathcal{N}_{\epsilon_n}$, temos $I'_{\epsilon_n}(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)|\nabla(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))|^2 dx \ &+ \ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)\phi(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|^2 dx \\ &= \ \int_{\mathbb{R}^N} f(t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon_n,y_n})t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon_n,y_n}dx.\end{aligned}$$

Recorde que (ϕ_2) combinada com o Lema 1.1.32 vem que

$$\phi(ts)(ts)^2 \overbrace{\leq}^{(\phi_2)} m\Phi(ts) \overbrace{\leq}^{\text{Lema}1.1.32} m\xi_1(t)\Phi(s), \quad \forall t, s \geq 0,$$

onde $\xi_1(t) = \max\{t^l, t^m\}$. Assim,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)|\nabla(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)\phi(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|^2 dx \\ \leq \ & m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big).\end{aligned}$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $z = \dfrac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}$, usando que $\varphi \equiv 1$ em $B_{\frac{\delta}{2}}(0)$ e $B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subset B_{\frac{\delta}{2\epsilon_n}}(0)$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)dx \ &= \ \int_{\mathbb{R}^N} f(t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n z|)w(z))t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n z|)w(z)dx \\ &\geq \ \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} \frac{f(t_{\epsilon_n}w(z))}{(t_{\epsilon_n}w(z))^{m-1}}|t_{\epsilon_n}w(z)|^m dx.\end{aligned}$$

Então, das últimas duas desigualdades,

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} \frac{f(t_{\epsilon_n}w(z))}{(t_{\epsilon_n}w(z))^{m-1}}|t_{\epsilon_n}w(z)|^m dx \ &\leq \ m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big).\end{aligned}$$

Ora, pela Proposição 2.1.12, tem-se $w \in C^1$, logo, existe $z_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$w(z_0) = \min_{z \in B_{\frac{\delta}{2}}(0)} w(z),$$

e, consequentemente,

$$\frac{f(t_{\epsilon_n}w(z_0))}{(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{m-1}}\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)}|t_{\epsilon_n}w(z)|^m dx \leq m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(t_{\epsilon_n}|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n z+y_n)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big). \qquad (2.75)$$

Por (f_3), existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(t) \geq d_1 t^m - d_2, \quad \forall t \geq 0,$$

o que implica

$$\frac{f(t)}{t^{m-1}} \geq \frac{1}{\theta}(d_1 t^{\theta-m} - d_2 t^{-m}), \quad \forall t \geq 0. \qquad (2.76)$$

De (2.75) e (2.76),

$$\frac{1}{\theta}\big(d_1(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{\theta-m} - d_2(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{-m}\big)t_{\epsilon_n}^m\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)}|w(z)|^m dx$$
$$\leq m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n z+y_n)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big).$$

Agora, suponha por contradição, que para alguma subsequência,

$$t_{\epsilon_n} \to +\infty \ \text{ e } \ t_{\epsilon_n} \geq 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\big(d_1(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{\theta-m} - d_2(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{-m}\big)\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)}|w(z)|^m dx$$
$$\leq m\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n z+y_n)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big), \qquad (2.77)$$

pois $\xi_1(t_{\epsilon_n}) = t_{\epsilon_n}^m$. Além disso, graças ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a definição de Ψ_{ϵ_n,y_n}, um cálculo direto nos fornece

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx \to \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla w|)dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n z+y_n)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx \to \int_{\mathbb{R}^N}V_0\Phi(|w|)dx,$$

assim o lado direito da desigualdade em (2.77) é limitado. Contudo, como $\theta > m$

$$\left[d_1(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{\theta-m} - d_2(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{-m}\right] \to +\infty,$$

o que é uma contradição. Portanto (t_{ϵ_n}) é limitada, e para alguma subsequência, existe $t_* \geq 0$ tal que $t_{\epsilon_n} \to t_*$. Pelo Lema 2.2.2, temos

$$\|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)\|_\Phi + \|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)\|_{V_\epsilon,\Phi} = \|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)\|_\epsilon \geq \varsigma > 0, \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

Por outro lado, segue-se do Lema 1.1.32 que

$$\xi_0\big(\|\nabla\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)\|_\Phi\big)+\xi_0\big(\|\nabla\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)\|_{V_{\epsilon_n},\Phi}\big) \leq \int_{\mathbb{R}^N}\Phi\big(|\nabla\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|\big)dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n x)\Phi\big(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|\big)dx$$

onde $\xi_0(t) = \min\{t^l, t^m\}$. Considerando $\varsigma_1 = \min\{\varsigma^l, \varsigma^m\}$, temos

$$\varsigma_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N}\Phi\big(|\nabla\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|\big)dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n x)\Phi\big(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|\big)dx.$$

Aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla(t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx \to \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(t_*|\nabla w|)dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n x)\Phi\big(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|\big)dx \to \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(t_*|w|)dx.$$

Usando os limites acima com o Lema 1.1.32, deduzimos que

$$0 < \varsigma_1 \leq \xi_1(t_*)\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla w|)dx + \int_{\mathbb{R}^N}V_0\Phi(|w|)dx\Big)$$

onde $\xi_1(t) = \max\{t^l, t^m\}$. Suponha que $t_* \leq 1$, então $\xi_1(t_*) = t_*^l$, de onde segue

$$t_* \geq \left(\frac{\varsigma_1}{\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla w|)dx + \int_{\mathbb{R}^N}V_0\Phi(|w|)dx}\right)^l > 0,$$

mostrando que $t_* > 0$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^N}\phi(t_{\epsilon_n}|\nabla\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)(t_{\epsilon_n}|\nabla\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)^2dx \to \int_{\mathbb{R}^N}\phi(t_*|\nabla w|)(t_*|\nabla w|)^2dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n x)\phi(t_{\epsilon_n}|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)(t_{\epsilon_n}|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)^2dx \to \int_{\mathbb{R}^N}V_0\phi(t_*|w|)(t_*|w|)^2dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon,y_n})t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon_n,y_n}dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(t_*w)t_*wdx,$$

implicando que $E'_{V_0}(t_*w)(t_*w) = 0$. Portanto, $t_*w \in \mathcal{M}_{V_0}$, e consequentemente, $t_* = 1$, pois w é solução de energia mínima de (P_{V_0}), mostrando a Afirmação 2.3.2.

Para finalizar, a Afirmação 2.3.2 combinada com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos leva a concluir

$$\lim_{n\to+\infty} I_{\epsilon_n}(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) = E_{V_0}(w) = d_{V_0}.$$

■

A seguir, estabelecemos um importante resultado de compacidade para E_μ restrito a variedade $\mathcal{M}_\mu$.

Lema 2.3.3. ***(Lema de Compacidade)*** *Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}_\mu$ uma sequência satisfazendo $E_\mu(u_n) \to d_\mu$. Então,*

a) (u_n) possui uma subsequencia convergente em Y_μ, ou

b) existe uma sequência $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, a menos de subsequência, $\widetilde{u}_n(x) = u_n(x+\widetilde{y}_n)$ convergente em Y_μ.

Em particular, existe $u \in \mathcal{M}_\mu$ tal que $E_\mu(u) = d_\mu$.

Demonstração. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland[12], para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in \mathcal{M}_\mu$ tal que

$$E_\mu(w_n) \leq E_\mu(u_n) + o_n(1) \quad \text{e} \quad \|w_n - u_n\|_\mu = o_n(1). \tag{2.78}$$

Resulta da desigualdade acima que

$$E_\mu(w_n) = d_\mu + o_n(1).$$

Além disso, usando a invariância de $\mathbb{R}^N$ por translações, temos

$$E'_\mu(w_n)w_n = 0.$$

[12]ver [74, Teorema 2.4].

Assim, usando os Lemas 2.2.3 e 2.1.7, segue que (w_n) é limitada em Y_μ e existe $w \in Y_\mu$ verificando

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em } Y_\mu \quad \text{e} \quad E'_\mu(w) = 0.$$

Se $w \neq 0$, com os mesmos argumentos do Teorema 2.1.1 segue que $E_\mu(w) = d_\mu$. Agora, seguindo a mesma linha de raciocínio usado na demonstração da Proposição 2.2.11, deduzimos

$$E_\mu(v_n) = E_\mu(w_n) - E_\mu(w) + o_n(1) = o_n(1) \quad \text{e} \quad E'_\mu(v_n) = o_n(1),$$

onde $v_n = w_n - w$. Logo, por (ϕ_2) e (f_2),

$$\begin{aligned} o_n(1) &= E_\mu(v_n) - \frac{1}{\theta}E'_\mu(v_n)v_n \\ &\geq \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla v_n|)dx + \mu\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|v_n|)dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{\theta}f(v_n)v_n - F(v_n)\Big) \\ &\geq \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla v_n|)dx + \mu\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|v_n|)dx \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla v_n|)dx = o_n(1) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|v_n|)dx = o_n(1),$$

mostrando que

$$w_n \to w \quad \text{em} \quad Y_\mu.$$

Portanto, por (2.78),

$$u_n \to w \quad \text{em} \quad Y_\mu.$$

Se $w = 0$, em virtude do Lema 2.2.5, existem constantes$\rho, \tau > 0$ e uma sequência $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\int_{B_\rho(\widetilde{y}_n)}\Phi(|w_n|)dx \geq \tau > 0. \tag{2.79}$$

Considerando $\widetilde{w}_n(x) = w_n(x + \widetilde{y}_n)$, tem-se $(\widetilde{w}_n)$ limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ e existe $\widetilde{w} \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\widetilde{w}_n \rightharpoonup \widetilde{w} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

De (2.79), temos $\widetilde{w} \neq 0$. Assim, pela primeira parte da demonstração

$$\widetilde{w}_n \to \widetilde{w} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N). \tag{2.80}$$

Definindo $\widetilde{u}_n(x) = u(x + \widetilde{y}_n)$, segue de (2.78)-(2.80) que

$$\|\widetilde{w}_n - \widetilde{u}_n\|_{Y_\mu} = o_n(1)$$

e, portanto,

$$\widetilde{u}_n \to \widetilde{w} \quad \text{em} \quad Y_\mu.$$

isso encerra a prova.

■

A próxima proposição, a última desta subsecção, será crucial no estudo da concentração dos pontos de máximo das soluções de $(\widetilde{P}_\epsilon)$.

Proposição 2.3.4. *Sejam $\epsilon_n \to 0$ e $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$ tal que $I_{\epsilon_n}(u_n) \to d_{V_0}$. Então, existe uma sequência $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $v_n(x) = u_n(x + \widetilde{y}_n)$ tem uma subsequência convergente em Y_{V_0}. Além disso, a menos de subsequência, $y_n \to y \in M$, onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$.*

Demonstração. Argumentando como na demonstração do Lema 2.2.5, obtemos um sequência $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes positivas ρ e τ satisfazendo

$$\int_{B_\rho(\widetilde{y}_n)} \Phi(u_n)dx \geq \tau > 0. \tag{2.81}$$

Desde que, $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$, $I_{\epsilon_n}(u_n) \to d_{V_0}$ e V verifica a condição de Rabinowitz, por intermédio de um cálculo simples, obtém-se (u_n) limitada em Y_{V_0}. Então, definindo $v_n(x) = u_n(x + \widetilde{y}_n)$, tem-se (v_n) é limitada em Y_{V_0}. Assim, a menos de subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad Y_{V_0}$$

e, por(2.81), conclui-se que $v \neq 0$. No que segue, seja $t_n > 0$ tal que $\widetilde{v}_n = t_n v_n \in \mathcal{M}_{V_0}$. Note que,

$$d_{V_0} \leq E_{V_0}(\widetilde{v}_n) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla \widetilde{v}_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n)\Phi(|\widetilde{v}_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v}_n)dx,$$

onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$. Ora, como $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$, por uma mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} d_{V_0} \leq E_{V_0}(\widetilde{v}_n) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(t_n u_n)|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|t_n u_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n)dx \\ &\leq \max_{t \geq 0} I_{\epsilon_n}(t u_n) = I_{\epsilon_n}(u_n) = d_{V_0} + o_n(1), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$E_{V_0}(\widetilde{v}_n) \to d_{V_0} \quad \text{e} \quad (\widetilde{v}_n) \subset \mathcal{M}_{V_0}. \tag{2.82}$$

Com isso, mostra-se que $(\widetilde{v}_n)$ é limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ e existe $\widetilde{v}$ tal que

$$\widetilde{v}_n \rightharpoonup \widetilde{v} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Usando que $\|v_n\|_{1,\Phi} \not\to 0$ juntamente com a limitação de $(\widetilde{v}_n)$, resulta que existe $t_* > 0$ tal que

$$t_n \to t_*.$$

Por (2.82) podemos aplicar o Lema 2.3.3, que combinado com a unicidade do limite nos fornece a convergência

$$\widetilde{v}_n \to t_* v = \widetilde{v} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

e portanto,

$$v_n \to v \quad \text{em} \quad Y_{V_0}. \tag{2.83}$$

Afirmamos que (y_n) é limitada em $\mathbb{R}^N$. De fato, caso contrário, existiria uma subsequência ainda denotada por (y_n), verificando

$$|y_n| \to +\infty.$$

Suponha que $V_\infty = +\infty$. Uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n)\phi(|v_n|)|v_n|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v_n|)|\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n)\phi(|v_n|)|v_n|^2 dx,$$

onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$ e $I'_{\epsilon_n}(u_n)u_n = 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n)\phi(|v_n|)|v_n|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx.$$

Logo, usando a convergência em (2.83)

$$+\infty = \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)v dx < +\infty,$$

o que é um absurdo. Agora, suponha que $V_\infty < +\infty$. Aplicando o Lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \Phi(|\widetilde{v}|)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n)\Phi(|\widetilde{v}_n|)dx.$$

Como $\widetilde{v}_n \to \widetilde{v}$ em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, vem que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla \widetilde{v}_n|)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla \widetilde{v}|)dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v}_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v})dx.$$

Sendo $V_0 < V_\infty$ segue das desigualdades acima que

$$\begin{aligned} d_{V_0} \leq E_{V_0}(\widetilde{v}) \quad &< \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla \widetilde{v}|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \Phi(|\widetilde{v}|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v})dx \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla \widetilde{v}_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n)\Phi(|\widetilde{v}_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v}_n)dx \Big). \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} d_{V_0} \quad &< \liminf_{n\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla (t_n u_n)|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n)\Phi(|t_n u_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n)dx \Big) \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} I_{\epsilon_n}(t_n u_n) \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} I_{\epsilon_n}(u_n) = d_{V_0}, \end{aligned} \tag{2.84}$$

o que é um absurdo. Portanto, existe $y \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$y_n \to y.$$

Vejamos agora que $V(y) = V_0$, isto é, $y \in M$. Caso contrário, deveríamos ter $V(y) > V_0$. Repetindo o mesmo raciocínio usado acima chegaremos novamente em (2.84), o que é um absurdo, finalizando a prova do resultado. ■

Antes de seguir em frente, convém definir de forma apropriada a função Baricentro para nosso estudo. Com esta finalidade, no que segue, dado $\delta > 0$, seja $\rho = \rho(\delta) > 0$ tal que $M_\delta \subset B_\rho(0)$ e considere $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por

$$\chi(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in B_\rho(0) \\ \dfrac{\rho x}{|x|}, & \text{se} \quad x \in B_\rho^c(0). \end{cases}$$

A função Baricentro $\beta : \mathcal{N}_\epsilon \to \mathbb{R}^N$ é definida por

$$\beta(u) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon x)\Phi(|u|)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u|)dx}.$$

A partir de agora, concentramos nosso interesse na demonstração dois resultados envolvendo as funções $\widetilde{\Psi}_\epsilon$ e β. Tais resultados serão fundamentais na prova do Teorema A.

Lema 2.3.5. *A função* $\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}$ *satisfaz o seguinte limite*

$$\lim_{\epsilon_n \to 0} \beta(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y)) = y, \ \ \textit{uniformemente em } \ y \in M.$$

Demonstração. Sejam $(y_n) \subset M$ e $(\epsilon_n) \subset (0, +\infty)$ com $\epsilon_n \to 0$. Note que,

$$\beta(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon x)\Phi(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)dx},$$

ou seja,

$$\beta(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon x)\Phi\Big(t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n x - y_n|)w(\frac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n})\Big)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n x - y_n|)w(\frac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n})\Big)dx}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = \dfrac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}$, ficamos com

$$\beta(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n z + y_n)\Phi(t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n z|)w(z))dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n z|)w(z))dx}.$$

Logo,

$$\beta(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) - y_n = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \big(\chi(\epsilon_n z + y_n) - y_n\big)\Phi(t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n z|)w(z))dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t_{\epsilon_n}\varphi(|\epsilon_n z|)w(z))dx}.$$

Como na demonstração da Afirmação 2.3.2 do Lema 2.3.1, observamos que $t_n \to 1$. Com isso, graças ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, um cálculo direto nos fornece

$$|\beta(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) - y_n| \to 0,$$

como queríamos. ■

Na sequência, consideramos a função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$h(\epsilon) = \sup_{y \in M} |I_\epsilon(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) - d_{V_0}|$$

que verifica pelo Lema 2.3.1,

$$\lim_{\epsilon \to 0} h(\epsilon) = 0.$$

Definindo o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon := \{u \in \mathcal{N}_\epsilon \ : \ I_\epsilon(u) \leq d_{V_0} + h(\epsilon)\},$$

segue do Lema 2.3.1 que $\widetilde{\Psi}_\epsilon(y) \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$, mostrando que $\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon \neq \emptyset$.

Com as notações acima, temos o seguinte resultado:

Lema 2.3.6. *Sejam $\delta > 0$ e $M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ dist(x, M) \leq \delta\}$. Então, o limite abaixo ocorre*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{u \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y \in M_\delta} \big|\beta(u) - y\big| = 0.$$

Demonstração. Seja $(\epsilon_n) \subset (0, +\infty)$ uma sequência tal que $\epsilon_n \to 0$. Segue da definição de supremo que existe uma sequência $(u_n) \subset \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n}$ tal que

$$\inf_{y \in M_\delta} \big|\beta(u_n) - y\big| = \sup_{u \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y \in M_\delta} \big|\beta(u) - y\big| + o_n(1).$$

Dessa forma, é suficiente provar que existe uma sequência $(y_n) \subset M_\delta$ tal que, a menos de subsequência

$$\lim_{n \to +\infty} \big|\beta(u_n) - y_n\big| = 0. \tag{2.85}$$

Uma vez que $(u_n) \subset \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon \subset \mathcal{N}_\epsilon$,

$$c_{\epsilon_n} \leq I_{\epsilon_n}(u) \leq d_{V_0} + h(\epsilon_n) \quad \text{e} \quad I'_{\epsilon_n}(u_n)u_n = 0.$$

Afirmação 2.3.7.

$$c_{\epsilon_n} \to d_{V_0}.$$

De fato, segue diretamente da desigualdade anterior que

$$\limsup_{n \to +\infty} c_{\epsilon_n} \leq d_{V_0}. \tag{2.86}$$

Por outro lado, sendo $V_0 \leq V(\epsilon_n x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, dado $u \in X_{\epsilon_n}$, vem que

$$E_{V_0}(tu) \leq I_{\epsilon_n}(tu), \quad \forall \ t \geq 0,$$

então

$$d_{V_0} \leq \max_{t \geq 0} I_{V_0}(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_{\epsilon_n}(tu)$$

o que implica

$$d_{V_0} \leq c_{\epsilon_n}.$$

Assim,

$$d_{V_0} \leq \liminf_{n \to +\infty} c_{\epsilon_n}. \tag{2.87}$$

Dessa forma, a Afirmação 2.3.7 decorre de (2.86) e (2.87). Agora, aplicando a Proposição 2.3.4, existe $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$y_n \to y \in M,$$

onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$. Logo, para n suficientemente grande $(y_n) \subset M_\delta$. Recordando que

$$\beta(u_n) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon x)\Phi(|u_n|)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n|)dx},$$

efetuando a mudança de variáveis $x = z + \widetilde{y}_n$, ficamos com

$$\beta(u_n) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n z + y_n)\Phi(u_n(z + \widetilde{y}_n))dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(u_n(z + \widetilde{y}_n))dx}.$$

Consequentemente,

$$\beta(u_n) - y_n = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \big(\chi(\epsilon_n z + y_n) - y_n\big)\Phi(v_n(z))dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(v_n(z))dx},$$

onde $v_n(z) = u_n(x + \widetilde{y}_n)$. Pelo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, um cálculo direto nos permite concluir que

$$|\beta(u_n) - y_n| \to 0,$$

o que mostra (2.85), finalizando a demonstração. ■

2.3.2 Demonstração do Teorema A

Agora, estamos prontos para provar o resultado principal deste capítulo. Dividiremos a demonstração em duas partes.

Parte I: Multiplicidade de soluções

Aqui, faremos uso dos resultados preliminares obtidos na seção anterior. Como mencionado na Introdução, a ferramenta usada será a categoria de Lusternik-Schnirelman.

Considere $X = X_\epsilon$, $\Psi = J_\epsilon$, $\varphi = I_\epsilon$, $d = c_{V_0} + h(\epsilon)$ e $\varphi^d = \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$, em que J_ϵ define a variedade de Nehari $\mathcal{N}_\epsilon$. Tendo em vista o Teorema 5.20 encontrado em [74], conclui-se que o funcional I_ϵ restrito a $\mathcal{N}_\epsilon$ tem pelo menos $cat_{\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon)$ pontos críticos, para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$. Assim, resta provar que

$$cat_{M_\delta}(M) \leq cat_{\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon) \tag{2.88}$$

e que todo ponto crítico de I_ϵ restrito a $\mathcal{N}_\epsilon$ é ponto crítico de I_ϵ em X_ϵ. Sendo M é compacto, temos $cat_{M_\delta}(M) < +\infty$. Dessa forma, podemos supor que $cat_{\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon) < +\infty$, caso contrário, a desigualdade (2.88) é verificada.

Mostraremos, inicialmente que podemos definir a aplicação $\beta \circ \widetilde{\Psi}_\epsilon : M \to M_\delta$, para algum $\delta > 0$. Pelo Lema 2.3.1, recorde que dado $y \in M$

$$I_\epsilon(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) \leq c_{V_0} + h(\epsilon),$$

o que implica em $\widetilde{\Psi}_\epsilon(y) \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$, ou seja, $\widetilde{\Psi}_\epsilon(M) \subset \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$. Agora, aplicando o Lema 2.3.6, fixados $u \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$ e $\delta_1 > 0$, existe $\overline{\epsilon} > 0$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$,

$$\sup_{u \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y \in M_{\delta_1}} \left|\beta(u) - y\right| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Por definição,

$$dist(\beta(u), M_{\delta_1}) = \inf_{y \in M_{\delta_1}} |\beta(u) - y| \leq \sup_{u \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y \in M_{\delta_1}} |\beta(u) - y|.$$

Dessa forma,

$$dist(\beta(u), M_{\delta_1}) < \frac{\delta_1}{2}.$$

Considerando $\delta = \delta_1 + \frac{\delta_1}{2}$, vem que

$$dist(\beta(u), M) \leq dist(\beta(u), M_{\delta_1}) + dist(M_{\delta_1}, M) < \delta,$$

o que resulta $\beta\big(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon\big) \subset M_\delta$. Logo, a aplicação $\beta \circ \widetilde{\Psi}_\epsilon : M \to M_\delta$ está bem definida e é contínua.

A seguir, defina a aplicação

$$
\begin{aligned}
G\colon [0,1]\times M &\to M_\delta \\
(t,y) &\mapsto G(t,y) = t(\beta\circ\widetilde{\Psi}_\epsilon)(y) + (1-t)y,
\end{aligned}
$$

e observe que

$$dist(G(t,y),M) = \inf_{z\in M} |t\beta(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) + (1-t)y - z|.$$

Portanto,

$$dist(G(t,y),M) \le \inf_{z\in M} \Big(|t\big(\beta(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) - y\big)| + |y-z|\Big),$$

o que implica

$$dist(G(t,y),M) \le t\delta + \inf_{z\in M} |y-z| \le \delta, \quad \forall \epsilon \in (0,\overline{\epsilon}),$$

mostrando que G está bem definida. Além disso, G é contínua e verifica

$$G(0,y) = y \quad \text{e} \quad G(1,y) = \widetilde{\Psi}_\epsilon(y),$$

mostrando que $\beta\circ\widetilde{\Psi}_\epsilon$ é homotópica a inclusão $i\colon M\to M_\delta$.

Neste momento, vejamos que (2.88) ocorre. Para tanto, suponha que $cat_{\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon) = n$. Por definição, existem $A_1, ..., A_n$ conjuntos fechados e contráteis em $\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$ tais que

$$\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Desde que A_i é contrátil em $\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$, para cada $i = 1, ..., n$, existem uma aplicação contínua $h_i : [0,1]\times A_i \to \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$ e $w_i \in A_i$, tais que

$$h_i(0,u) = u \quad \text{e} \quad h_i(1,u) = w_i.$$

Para cada $i = 1, ..., n$, defina $B_i = \widetilde{\Psi}_\epsilon^{-1}(A_i)$. Sendo $\widetilde{\Psi}_\epsilon$ contínua, segue que B_i é fechado em M. Assim, os conjuntos $B_{i's}$ são fechados, pois M é fechado. Além disso,

$$M = \widetilde{\Psi}_\epsilon^{-1}(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{\Psi}_\epsilon^{-1}(A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Afirmamos que B_i é contrátil em M_δ para cada $i = 1, ..., n$. Com efeito, seja $i \in \{1, ..., n\}$ e considere a aplicação

$$
\begin{aligned}
g_i : [0,1]\times B_i &\to M_\delta \\
(t,y) &\mapsto g_i(t,y) = \beta(h_i(t,\widetilde{\Psi}_\epsilon(y))).
\end{aligned}
$$

Note que g_i é contínua e

$$g_i(0,y)=\beta(h_i(0,\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)))=\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) \quad \text{e} \quad g_i(1,y)=\beta(h_i(1,\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)))=\beta(w_i).$$

Defina, para cada i, a aplicação $F_i:[0,1]\times B_i\to M_\delta$ por

$$F_i(t,y)=\begin{cases} G_i(2t,y) & se \quad t\in[0,\frac{1}{2}],\\ g_i(2t-1,y) & se \quad t\in[\frac{1}{2},1],\end{cases}$$

onde G_i é a restrição da função G ao conjunto $[0,1]\times B_i$. Disso, não é difícil ver que,

$$F_i(\frac{1}{2},y)=G_i(1,y)=\beta(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y))=g_i(0,y),$$

de onde segue que F_i está bem definida. Além disso, $F\in\mathcal{C}\big([0,1]\times B_i,M_\delta\big)$ e

$$F_i(0,y)=G_i(0,y)=y \quad \text{e} \quad F_i(1,y)=g_i(1,y)=\beta(w_i),$$

resulta que B_i é contrátil para $i=1,...,n$. Portanto,

$$cat_{M_\delta}(M)\le n,$$

mostrando (2.88).

Para finalizar, mostraremos que todo ponto crítico de I_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$ é ponto crítico de I_ϵ em X_ϵ. Com esse intuito, seja u_ϵ um ponto crítico de I_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$. Aplicando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange[13], existe $\lambda_\epsilon\in\mathbb{R}$ tal que

$$I'_\epsilon(u_\epsilon)=\lambda_\epsilon J'_\epsilon(u_\epsilon),$$

onde

$$J_\epsilon(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon x)\phi(|u|)|u|^2dx-\int_{\mathbb{R}^N}f(u)udx.$$

Recorde que, por (ϕ_3),

$$\phi'(t)t\le(m-2)\phi(t), \quad \forall t\ge 0.$$

[13]ver [74, Proposição 5.12].

Então,

$$\begin{aligned}J'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^N}\big(\phi'(|\nabla u_\epsilon|)|\nabla u_\epsilon| + 2\phi(|\nabla u_\epsilon|)\big)|\nabla u_\epsilon|^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}\big(f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2 + f(u_\epsilon)u_\epsilon\big)dx\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\big(\phi'(|u_\epsilon|)|u_\epsilon| + 2\phi(|u_\epsilon|)\big)|u_\epsilon|^2dx\\ &\le m\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_\epsilon|)|\nabla u_\epsilon|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u_\epsilon|)|u_\epsilon|^2dx\Big)\\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N}\big(f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2 + f(u_\epsilon)u_\epsilon\big)dx. \qquad (2.89)\end{aligned}$$

Uma vez que $u_\epsilon \in \mathcal{N}_\epsilon$, temos $I'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon = 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_\epsilon|)|\nabla u_\epsilon|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u_\epsilon|)|u_\epsilon|^2dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_\epsilon)u_\epsilon dx. \qquad (2.90)$$

Por (2.89) e (2.90), segue que

$$J'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon \le \int_{\mathbb{R}^N}\big((m+1)f(u_\epsilon)u_\epsilon - f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2\big)dx.$$

Sendo $u_\epsilon \neq 0$, existe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ com $|\mathcal{O}| > 0$ tal que

$$u_\epsilon(x) > 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathcal{O}$$

e, consequentemente, por (f_3)

$$-J'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon \ge \int_{\mathcal{O}}\big(f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2 - (m+1)f(u_\epsilon)u_\epsilon\big)dx > 0.$$

Desde que $I'_\epsilon(u_\epsilon) = \lambda_\epsilon J'_\epsilon(u_\epsilon)$ e $u_\epsilon \in \mathcal{N}_\epsilon$, vem

$$\lambda_\epsilon J'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon = 0,$$

implicando que $\lambda_\epsilon = 0$. Portanto, $I'_\epsilon(u_\epsilon) = 0$, isto é, u_ϵ é ponto crítico de I_ϵ em X_ϵ.

Assim, o problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$.

Parte II: Concentração dos pontos de máximo

Desse ponto em diante, estudaremos o comportamento dos pontos de máximo das soluções. Convém mencionar que, novamente devido a generalidade do operador Φ-Laplaciano, temos uma dificuldade técnica para obter limitação L^∞ para as sequências de soluções, tendo em vista que não claro o uso do método de interação de Moser como foi aplicado em [5]. Contornamos tal dificuldade seguindo a mesma linha de raciocínio do Lema 2.1.10 e da Proposição 2.1.12.

Proposição 2.3.8. *Seja $v_j \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi v_j + V_j(x)\phi(|v_j|)v_j = f(v_j), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v_j \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\ v_j > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_j}$$

onde $V_j(x) = V(\epsilon_j x + \epsilon_j \widetilde{y}_j)$, $\epsilon_j\widetilde{y}_j \to y$ em $\mathbb{R}^N$ e $v_j \to v$ em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Então, $v_j \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $v_j \in C^{1,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e existe $C > 0$ tal que $\|v_j\|_\infty \le C$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\lim_{|x|\to+\infty} v_j(x) = 0, \quad \text{uniformemente em } j.$$

Demonstração. Com o intuito de facilitar a leitura e o entendimento da demonstração, dividiremos a mesma em três epatas.

Etapa 1: $v_j \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Primeiramente, fixemos $R_1 \in (0,1)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Dado $K > 0$, defina as sequências

$$\sigma_n = \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2^{n+1}},\ \overline{\sigma}_n = \frac{\sigma_n + \sigma_{n+1}}{2} \quad \text{e} \quad K_n = \frac{K}{2}\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\ \forall n = 0,1,2,....$$

Note que,

$$\sigma_n \downarrow \frac{R_1}{2},\ K_n \uparrow \frac{K}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_{n+1} < \overline{\sigma}_n < \sigma_n < R_1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos

$$J_{n,j} = \int_{A_{j,K_n,\sigma_n}} \big((v_j - K_n)^+\big)^{\gamma^*} dx \quad \text{e} \quad \xi_n = \xi\bigg(\frac{2^{n+1}}{R_1}\Big(|x - x_0| - \frac{R_1}{2}\Big)\bigg), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $A_{j,k,\rho} = \big\{x \in B_\rho(x_0)\ :\ v_j(x) > k\big\}$ para $k, \rho > 0$ e $\xi \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$0 \le \xi \le 1,\ \xi(t) = 1, \text{ se } t \le \frac{1}{2},\ \text{ e } \xi(t) = 0, \text{ se } t \ge \frac{3}{4} \text{ e } |\xi'| < C.$$

Antes de tudo, vejamos que existem $C, \zeta > 0$ e $D > 1$ satisfazendo

$$J_{n+1,j} \le CD^n J_{n,j}^{1+\zeta},\ n = 0,1,2,\ldots,$$

Com efeito, desde que $\xi_n = 1$ em $B_{\sigma_{n+1}}(x_0)$ e $\xi_n = 0$ em $B^c_{\overline{\sigma}_n}(x_0)$, segue que

$$\begin{aligned}
J_{n+1,j} &\leq \int_{A_{j,K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} \big((v_j - K_{n+1})^+\xi_n\big)^{\gamma^*} dx \\
&\leq C(N,\gamma)\Bigg(\int_{B_{R_1}(x_0)} |\nabla((v_j - K_{n+1})^+\xi_n)|^\gamma dx\Bigg)^{\frac{\gamma^*}{\gamma}} \\
&\leq C(N,\gamma)\Bigg(\int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} |\nabla u|^\gamma dx + \int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} ((u - K_{n+1})^+|\nabla\xi_n|)^\gamma dx\Bigg)^{\frac{\gamma^*}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Observando que

$$|\nabla((v_j - K_{n+1})^+\xi_n)|^\gamma \leq 2^\gamma\Big(|\nabla v_j|^\gamma \xi_n^\gamma + \frac{2^{\gamma(n+1)}}{R_1^\gamma}\big((v_j - K_{n+1})^+\big)^\gamma\Big)$$

deduzimos

$$J_{n+1,j}^{\frac{\gamma}{\gamma^*}} \leq C(N,\gamma,R_1)\Bigg(\int_{A_{j,K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} |\nabla v_j|^\gamma dx + 2^{\gamma n}\int_{A_{j,K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} \big((v_j - K_{n+1})^+\big)^\gamma dx\Bigg).$$

Repetindo os argumentos encontrados na demonstração do Lema 2.2.17 mostra-se que existe uma constante $\overline{c} > 0$, independente de n e j, tal que

$$\int_{A_{j,K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} |\nabla v_j|^\gamma dx \leq \overline{c}\Bigg(\int_{A_{j,K_{n+1},\sigma_n}} \Big|\frac{v_j - K_{n+1}}{\sigma_n - \overline{\sigma}_n}\Big|^{\gamma^*} dx + (k^{\gamma^*} + 1)|A_{j,K_{n+1},\sigma_n}|\Bigg),$$

Combinando as desigualdades acima, ficamos com

$$\begin{aligned}
J_{n+1,j}^{\frac{\gamma}{\gamma^*}} \leq\ & \overline{C}(N,\gamma,R_1)\Bigg(\int_{A_{j,K_{n+1},\sigma_n}} \Big|\frac{v_j - K_{n+1}}{\sigma_n - \overline{\sigma}_n}\Big|^{\gamma^*} dx + (K_{n+1}^{\gamma^*} + 1)|A_{K_{n+1},\sigma_n}| \\
& +2^{\gamma n}\int_{A_{K_{n+1},\overline{\sigma}_n}} \big((v_j - K_{n+1})^+\big)^\gamma dx\Bigg).
\end{aligned}$$

Agora, de maneira muito similar ao que fizemos na demonstração da Proposição 2.1.12, verifica-se que existem $C = C(N,\gamma,R_1,K)$, $D = 2^{(\gamma+\gamma^*)\frac{\gamma^*}{\gamma}}$ e $\zeta = \frac{\gamma^*}{\gamma} - 1$ satisfazendo

$$J_{n+1,j} \leq CD^n J_{n,j}^{1+\zeta},\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.91}$$

Tendo em vista aplicar o Lema 2.1.11, nosso objetivo imediato será mostrar que existe $K^* \geq 1$ tal que

$$J_{0,j} \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{para todo} \quad K \geq K^*, \quad \text{para todo}\ \ j \approx +\infty.$$

De fato, note que

$$J_{0,j} = \int_{A_{j,K_0,\sigma_0}} \big((v_j - K_0)^+\big)^{\gamma^*} dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \big((v_j - \frac{K}{2})^+\big)^{\gamma^*} dx.$$

Ora, como $v_j \to v$ em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, usando a imersão contínua $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,\gamma}(\mathbb{R}^N)$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$J_{0,j} \le \int_{\mathbb{R}^N} \big((v - \frac{K}{2})^+\big)^{\gamma^*} dx, \quad \text{para todo } j \ge j_0.$$

Passando ao limite na desigualdade acima quando $K \to +\infty$, vem que

$$\lim_{K \to +\infty} J_{0,j} = 0, \quad \text{para todo } j \ge j_0.$$

Assim, existe $K^* \ge 1$, tal que

$$J_{0,j} \le C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{para todo} \quad K \ge K^*, \quad \text{para todo } j \ge j_0. \tag{2.92}$$

Fixando $K = K^*$, por (2.91) e (2.92) podemos aplicar o Lema 2.1.11, para obter o limite

$$J_{n,j} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \quad \text{para todo } j \ge j_0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \to +\infty} J_{n,j} = \lim_{n \to +\infty} \int_{A_{j,K_n,\sigma_n}} \big((v_j - K_n)^+\big)^{\gamma^*} dx = \int_{A_{j,\frac{K^*}{2},\frac{R_1}{2}}} \big((v_j - \frac{K^*}{2})^+\big)^{\gamma^*} dx.$$

Portanto,

$$v_j(x) \le \frac{K^*}{2} \quad \text{q.t.p. em } B_{\frac{R_1}{2}}(x_0), \quad \text{para todo} \quad j \ge j_0.$$

Consequentemente,

$$\|v_j\|_\infty \le \overline{C} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

onde $\overline{C} = \max\{\frac{K^*}{2}, \|v_1\|_\infty, \ldots.., \|v_{j_0-1}\|_\infty\}$.

Etapa 2: $v_j \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$**.**

Essa regularidade pode ser obtida usando resultados encontrados em DiBenedetto [30] e Lieberman [55].

Etapa 3: $\lim_{|x| \to +\infty} v_j(x) = 0$, uniformemente em j.

Desde que $v_j \geq 0$, devemos mostrar que dado $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$v_j(x) \leq \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Repetindo os argumentos da Etapa 1, com $K = \eta$, temos por (2.91)

$$J_{n+1,j} \leq CD^n J_{n,j}^{1+\zeta}.$$

Além disso, observando que

$$\limsup_{|x_0|\to+\infty}\left(\limsup_{j\to+\infty} J_{0,j}\right) = \limsup_{|x_0|\to+\infty}\left(\limsup_{j\to+\infty}\int_{A_{j,K_0,\sigma_0}}\left((v_j-\frac{\eta}{2})^+\right)^{\gamma^*}dx\right)$$

e

$$\limsup_{|x_0|\to+\infty}\int_{B_{R_1}(x_0)}\left((v-\frac{\eta}{2})^+\right)^{\gamma^*}dx = 0,$$

concluímos

$$\lim_{|x_0|\to+\infty} J_{0,j} = 0, \quad \forall j \approx +\infty.$$

Logo, existem $\rho > 0$ e $j_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$J_{0,j} \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{se} \quad |x_0| > \rho, \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

Aplicando o Lema 2.1.11, temos

$$\lim_{n\to+\infty} J_{n,j} = 0, \quad \text{se} \quad |x_0| > \rho, \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

ou seja,

$$\int_{B_{\frac{R_1}{2}}(x_0)}\left((v_j-\frac{\eta}{2})^+\right)^{\gamma^*}dx = 0, \quad \text{se} \quad |x_0| > \rho, \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

mostrando que

$$v_j(x) \leq \frac{\eta}{2}, \quad \text{para} \;\; x \in B_{\frac{R_1}{2}}(x_0) \quad \text{e} \quad |x_0| > \rho, \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0.$$

Agora, aumentando ρ se necessário,

$$v_j(x) \leq \frac{\eta}{2}, \quad \text{se} \quad |x| > \rho \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N},$$

o que demonstra a Etapa 3. ■

Corolário 2.3.9. *Seja $v_j \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ uma solução de (P_j). Então, v_j é positiva.*

Demonstração. A demonstração segue como no Corolário 2.1.14.

■

Antes de finalizar, mostraremos o lema abaixo.

Lema 2.3.10. *Existe $\alpha_0 > 0$ tal que $\|v_j\|_\infty > \alpha_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponha que $\|v_j\|_\infty \to 0$. Fixando $\epsilon_0 = \frac{V_0}{2}$, por (f_1), existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(v_j)v_j \leq \epsilon_0 \phi(v_j)v_j^2 \quad \text{para todo } j \geq j_0. \tag{2.93}$$

Uma vez que $I'_\epsilon(v_j)v_j = 0$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v_j|)|\nabla v_j|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|v_j|)|v_j|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_j)v_j dx.$$

Usando (2.93), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(v_j)v_j dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(v_j)}{\phi(v_j)u_n} v_j^2 dx \\ &\leq \frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|v_j|)|v_j|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|v_j|)|v_j|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla v_j|)|\nabla v_j|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|v_j|)|v_j|^2 dx \leq 0$$

e, daí, segue que $\|v_j\|_\epsilon = 0$ para $j > j_0$, o que é um absurdo com o Lema 2.2.2. Portanto, existe $\alpha_0 > 0$ verificando

$$\|v_j\|_\infty > \alpha_0, \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}.$$

■

Finalmente, mostraremos a concentração dos pontos de máximo. Para este fim, seja u_{ϵ_n} uma solução do problema $(\widetilde{P}_{\epsilon_n})$. Então, $v_n(x) = u_{\epsilon_n}(x + \widetilde{y}_n)$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi v_n + V_n(x)\phi(|v_n|)v_n = f(v_n), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v_n \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\ v_n > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

em que $V_n(x) = V(\epsilon_n x + \epsilon_n \widetilde{y}_n)$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ é dada na Proposição 2.3.4. Além disso, a menos de subsequência,

$$v_n \to v \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad y_n \to y \in M$$

onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$. Aplicando a Proposição 2.3.8 juntamente com o Lema 2.3.10, concluímos que existe $q_n \in B_{\rho_0}(0)$ tal que $v_n(q_n) = \max_{z \in \mathbb{R}^N} v_n(z)$, para algum $\rho_0 > 0$. Portanto, $x_n = q_n + \widetilde{y}_n$ é um ponto de máximo u_{ϵ_n} e

$$\epsilon_n x_n \to y.$$

Desde que V é uma função contínua, segue que

$$\lim_{n \to +\infty} V(\epsilon_n x_n) = V(y) = V_0.$$

Comentário final.

Se u_ϵ é uma solução positiva de $(\widetilde{P}_\epsilon)$, a função $w_\epsilon(x) = u_\epsilon\Big(\dfrac{x}{\epsilon}\Big)$ é solução positiva de (P_ϵ). Portanto, os pontos de máximo z_ϵ e x_ϵ de w_ϵ e u_ϵ respectivamente, satisfazem a igualdade

$$z_\epsilon = \epsilon x_\epsilon,$$

e consequentemente

$$\lim_{\epsilon \to 0} V(z_\epsilon) = V_0,$$

mostrando que os pontos de máximo das soluções se concentram em torno dos pontos de mínimo de V.

Capítulo 3

Multiplicidade e concentração de soluções positivas via método de penalização

Neste capítulo mostraremos a existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas para (P_ϵ), onde o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo (V_0) e (V_1). As funções $\phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são de classe C^1 e verificam as hipóteses mencionadas na Introdução.

Conforme visto no Capítulo 2 o problema (P_ϵ) é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + V(\epsilon x)\phi(|u|)u \ = \ f(u), \ \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\widetilde{P}_\epsilon$}$$

No decorrer deste capítulo nosso estudo será dedicado ao problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$.

A fim de adaptarmos o método de del Pino e Felmer, ao longo deste capítulo iremos assumir que dado $\delta > 0$, existe Ω satisfazendo a condição (V_1) com

$$M_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{d}(x, M) \leq \delta \right\} \subset \Omega.$$

Além disso, sem perda de generalidade iremos supor que $0 \in \Omega$.

3.1 Um problema auxiliar

Nesta seção, motivados por alguns argumentos explorados em Alves e Figueiredo [7], e principalmente em del Pino e Felmer [28], mostraremos a existência e multiplicidade de soluções positivas para um problema auxiliar. Para este fim, fixaremos algumas notações.

Seja θ o número dado na hipótese (f_3), $a, k > 0$ satisfazendo

$$k > \frac{(\theta - l)}{(\theta - m)} \frac{m}{l} \quad \text{e} \quad \frac{f(a)}{\phi(a)a} = \frac{V_0}{k}. \tag{3.1}$$

Usando os números acima, definimos a função

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} f(s) & se \quad s \leq a \\ \dfrac{V_0}{k}\phi(s)s & se \quad s > a. \end{cases}$$

Fixando $t_0 < a < t_1$ com $t_0, t_1 \approx a$, existe uma função $\zeta \in C^1([t_0, t_1])$ satisfazendo

(ζ_1) $\zeta(s) \leq \widehat{f}(s)$, para todo $s \in [t_0, t_1]$,

(ζ_2) $\zeta(t_0) = \widehat{f}(t_0)$ e $\zeta(t_1) = \widehat{f}(t_1)$,

(ζ_3) $\zeta'(t_0) = (\widehat{f})'(t_0)$ e $\zeta'(t_1) = (\widehat{f})'(t_1)$,

(ζ_4) A função $s \to \dfrac{\zeta(s)}{\phi(s)s}$ é não-decrescente para $s \in [t_0, t_1]$.

No Apêndice A, mostramos como pode ser feita a construção da função ζ.

Usando as funções ζ e $\widehat{f}$ definimos

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} \widehat{f}(s) & se \quad s \notin [t_0, t_1], \\ \zeta(s) & se \quad s \in [t_0, t_1], \end{cases}$$

e

$$g(x, s) = \chi_\Omega(x) f(s) + (1 - \chi_\Omega(x))\widetilde{f}(s),$$

onde χ_Ω é a função característica associada ao conjunto Ω. Segue da definição de g, que a mesma é uma função de Carathéodory verificando

$$g(x, s) = 0, \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0] \tag{3.2}$$

e

$$g(x,s) \leq f(s), \quad \forall (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, a função $s \to g(x,s)$ é de classe C^1. Usando as hipóteses sobre a não-linearidade f e a definição de g, um cálculo simples revela que

(g_1) $\displaystyle\limsup_{|s|\to 0} \frac{g(x,s)}{\phi(|s|)|s|} = 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

(g_2) $\displaystyle\limsup_{|s|\to +\infty} \frac{g(x,s)}{b(|s|)|s|} < +\infty$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

(g_3) $\displaystyle 0 \leq \theta G(x,s) = \theta \int_0^s g(x,t)dt \leq g(x,s)s$, $\forall (x,s) \in \Omega \times (0,+\infty)$.

A função g também satisfaz

(g_4) $\displaystyle 0 < lG(x,s) \leq g(x,s)s \leq \frac{V_0}{k}\phi(s)s^2$, $\forall (x,s) \in \Omega^c \times (0,+\infty)$.

De fato, vejamos primeiro que $lG(x,s) \leq g(x,s)s$ para todo $(x,s) \in \Omega^c \times (0,+\infty)$. Para este fim, suponha que $x \notin \Omega$. Então, $g(x,t) = \widetilde{f}(t)$ e

$$G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt = \int_0^s \widetilde{f}(t)dt.$$

Se $s \in [t_0, t_1]$, temos $g(x,s) = \widetilde{f}(s) = \zeta(s)$. Logo

$$\begin{aligned}
G(x,s) &= \int_0^{t_0} \widetilde{f}(t)dt + \int_{t_0}^s \widetilde{f}(t)dt \\
&= \int_0^{t_0} \widehat{f}(t)dt + \int_{t_0}^s \zeta(t)dt = \int_0^{t_0} f(t)dt + \int_{t_0}^s \zeta(t)dt \\
&= \int_0^{t_0} \frac{f(t)}{\phi(t)t}\phi(t)tdt + \int_{t_0}^s \frac{\zeta(t)}{\phi(t)t}\phi(t)tdt \\
&\leq \frac{f(t_0)}{\phi(t_0)(t_0)} \int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \frac{\zeta(s)}{\phi(s)s} \int_{t_0}^s \phi(t)tdt \\
&= \frac{\zeta(t_0)}{\phi(t_0)(t_0)} \int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \frac{\zeta(s)}{\phi(s)s} \int_{t_0}^s \phi(t)tdt \\
&\leq \frac{\zeta(s)}{\phi(s)s} \int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \frac{\zeta(s)}{\phi(s)s} \int_{t_0}^s \phi(t)tdt \\
&= \frac{\zeta(s)}{\phi(s)s}\Big(\int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \int_{t_0}^s \phi(t)tdt\Big) \\
&= \frac{\zeta(s)s}{\phi(s)s^2}\Phi(s) \leq \frac{1}{l}g(x,s)s.
\end{aligned}$$

Se $s \notin [t_0, t_1]$, temos $g(x,s) = \widetilde{f}(s) = \widehat{f}(s)$. Assim, caso $s < t_0$, segue $\widehat{f}(s) = f(s)$ implicando que $\theta G(x,s) \leq f(s)s$, em particular,

$$lG(x,s) \leq f(s)s.$$

Caso $s > t_1$,

$$\begin{aligned}
G(x,s) &= \int_0^{t_0} \widetilde{f}(s)dt + \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{f}(t)dt + \int_{t_1}^{s} \widetilde{f}(t)dt \\
&= \int_0^{t_0} \widehat{f}(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \zeta(t)dt + \int_{t_1}^{s} \widehat{f}(t)dt \\
&\leq \int_0^{t_0} f(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \zeta(t)dt + \int_{t_1}^{s} \frac{V_0}{k}\phi(t)tdt \\
&\leq \frac{f(t_0)}{\phi(t_0)t_0}\int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \frac{\zeta(t_1)}{\phi(t_1)t_1}\int_{t_0}^{t_1} \phi(t)tdt + \int_{t_1}^{s} \frac{V_0}{k}\phi(t)tdt \\
&\leq \frac{f(a)}{\phi(a)a}\int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \frac{\widehat{f}(t_1)}{\phi(t_1)t_1}\int_{t_0}^{t_1} \phi(t)tdt + \int_{t_1}^{s} \frac{V_0}{k}\phi(t)tdt \\
&= \frac{V_0}{k}\int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \frac{V_0}{k}\int_{t_0}^{t_1} \phi(t)tdt + \frac{V_0}{k}\int_{t_1}^{s} \phi(t)tdt \\
&= \frac{V_0}{k}\Big(\int_0^{t_0} \phi(t)tdt + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)tdt + \int_{t_1}^{s} \phi(t)tdt\Big) \\
&= \frac{V_0}{k}\Phi(s) \leq \frac{V_0}{k}\frac{1}{l}\phi(s)s^2 = \frac{1}{l}\widehat{f}(s)s = \frac{1}{l}g(x,s)s.
\end{aligned}$$

A seguir, mostraremos que $g(x,s) \leq \dfrac{V_0}{k}\phi(s)s^2$ $(x,s) \in \Omega^c \times (0,+\infty)$. Para tanto, suponha que $x \notin \Omega$. Uma vez que $\zeta(s) \leq \widehat{f}(s)$ para todo $s \in [t_0, t_1]$, obtém-se

$$g(x,s) \leq \widehat{f}(s).$$

Dessa forma, basta analisar o caso em que $s \leq a$. Neste caso,

$$\widehat{f}(s) = f(s) = \frac{f(s)}{\phi(s)s}\phi(s)s \leq \frac{f(a)}{\phi(a)a}\phi(s)s = \frac{V_0}{k}\phi(s)s$$

e então

$$g(x,s)s \leq \frac{V_0}{k}\phi(s)s^2.$$

Agora, usando que as funções $\dfrac{f(s)}{\phi(s)s}$ e $\dfrac{\zeta(s)}{\phi(s)s}$ são não-decrescentes podemos mostrar que g satisfaz

(g_5) A função $s \to \dfrac{g(x,s)}{\phi(s)s}$ é não-decrescente para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $s > 0$.

Usando a função g, consideramos o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + V(\epsilon x)\phi(|u|)u \ = \ g(\epsilon x, u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{A_ϵ}$$

e denotaremos por $J_\epsilon \colon X_\epsilon \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a (A_ϵ) dado por

$$J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon x, u)dx.$$

Antes de seguir em frente, fixamos a seguinte notação

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \epsilon x \in \Omega\} = \Omega/\epsilon.$$

Assim, se u é uma solução positiva de (A_ϵ) com $u(x) \leq t_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon$, então u é também uma solução positiva de $(\widetilde{P}_\epsilon)$.

3.1.1 Caracterização do nível do Passo da Montanha

Seguindo o mesmo raciocínio da demonstração do Lema 2.1.2 mostra-se que J_ϵ verifica a geometria do passo da montanha. Assim, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS), concluímos que existe uma sequência $(u_n) \subset W^{1,\Phi}\big(\mathbb{R}^N\big)$ verificando

$$J_\epsilon(u_n) \to c_\epsilon \quad \text{e} \quad J'_\epsilon(u_n) \to 0,$$

onde c_ϵ é o nível minimax associado a J_ϵ.

Na sequência, mostraremos alguns resultados envolvendo J_ϵ e a variedade de Nehari associada ao mesmo é dada por

$$\mathcal{N}_\epsilon = \big\{u \in X_\epsilon \backslash \{0\} \ : \ J'_\epsilon(u)u = 0\big\}.$$

O resultado abaixo é uma versão do Lema 2.2.2 e sua demonstração é inteiramente análoga. Assim, a sua prova será omitida.

Lema 3.1.1. *Para todo $u \in \mathcal{N}_\epsilon$, existe $\varsigma > 0$ independente de ϵ, tal que*

$$\|u\|_\epsilon > \varsigma.$$

No que segue, denotamos por $c_{\epsilon,1}$ e $c_{\epsilon,2}$ os seguintes números

$$c_{\epsilon,1} = \inf_{u \in \mathcal{N}_\epsilon} J_\epsilon(u) \quad \text{e} \quad c_{\epsilon,2} = \inf_{u \in X_\epsilon \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J_\epsilon(tu).$$

Fixando o conjunto

$$\mathcal{A}_\epsilon = \left\{ u \in X_\epsilon \ : \ u^+ \neq 0 \quad \text{e} \quad |supp(u) \cap \Omega_\epsilon| > 0 \right\}$$

e o número

$$\overline{c}_{\epsilon,2} = \inf_{u \in \mathcal{A}_\epsilon} \max_{t \geq 0} J_\epsilon(tu),$$

mostra-se facilmente que

$$c_{\epsilon,2} = \overline{c}_{\epsilon,2}.$$

O próximo lema estabelece uma importante caracterização envolvendo o nível do passo da montanha.

Lema 3.1.2. *Assuma que* (ϕ_1)*-*(ϕ_3)*,* (r_1)*-*(r_4)*,* (b_1)*-*(b_4)*,* (f_1)*-*(f_3) *e* (V_0)*-*(V_1) *ocorrem. Então, para cada* $u \in \mathcal{A}_\epsilon$*, existe um único* $t_u > 0$ *tal que* $t_u u \in \mathcal{N}_\epsilon$ *e* $J_\epsilon(t_u u) = \max_{t \geq 0} J_\epsilon(tu)$*. Além disso,*

$$c_\epsilon = c_{\epsilon,1} = c_{\epsilon,2},$$

onde c_ϵ *denota o nível do passo da montanha associado a* J_ϵ*.*

Demonstração. Para cada $u \in \mathcal{A}_\epsilon$, definimos $h_\epsilon(t) = J_\epsilon(tu)$, isto é,

$$h_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(tu)|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|tu|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon x, tu)dx.$$

Existência

Argumentando como no Lema 2.1.3, podemos mostrar que $h_\epsilon(t) > 0$ para t suficientemente pequeno e $h_\epsilon(t) < 0$ para t suficientemente grande. Isto implica na existência de $t_u > 0$ tal que

$$h_\epsilon(t_u) = \max_{t \geq 0} h_\epsilon(t) = \max_{t \geq 0} J_\epsilon(tu),$$

implicando que $h'_\epsilon(t_u) = 0$, ou seja, $J'_\epsilon(t_u u)u = 0$ e consequentemente $t_u u \in \mathcal{N}_\epsilon$.

Unicidade

Suponha que existem $t_1, t_2 > 0$ tais que $t_1 u, t_2 u \in \mathcal{N}_\epsilon$ e $t_1 < t_2$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla(t_1 u)|)|\nabla(t_1 u)|^2 dx \quad + \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|t_1 u|)|t_1 u|^2 dx = \int_{[u>0]} g(\epsilon x, t_1 u) t_1 u dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla(t_2 u)|)|\nabla(t_2 u)|^2 dx \quad + \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|t_2 u|)|t_2 u|^2 dx = \int_{[u>0]} g(\epsilon x, t_2 u) t_2 u dx.$$

Considerando $\upsilon(t) = \dfrac{\phi(t)}{t^{m-2}}$ para todo $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \big(\upsilon(|t_1|\nabla u||) - \upsilon(|t_2|\nabla u||)\big)|\nabla u|^m dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\big(\upsilon(|t_1|u||) - \upsilon(|t_2|u||)\big)|u|^m dx \\ = &\int_{[u>0]} \left(\frac{g(\epsilon x, t_1 u)}{(t_1 u)^{m-1}} - \frac{g(\epsilon x, t_2 u)}{(t_2 u)^{m-1}}\right) u^m dx. \end{aligned}$$

Por (ϕ_3), υ é decrescente para $t > 0$. Isto com a hipótese (V_0) resulta que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \big(\upsilon(|t_1|\nabla u||) - \upsilon(|t_2|\nabla u||)\big)|\nabla u|^m dx \\ &+ \frac{V_0}{k}\int_{(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon)\cap[u>0]} \big(\upsilon(|t_1|u||) - \upsilon(|t_2|u||)\big)|u|^m dx \\ &\leq \int_{\Omega_\epsilon \cap [u>0]} \left(\frac{f(t_1 u)}{(t_1 u)^{m-1}} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^{m-1}}\right) u^m dx \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon)\cap[u>0]} \left(\frac{\widetilde{f}(t_1 u)}{(t_1 u)^{m-1}} - \frac{\widetilde{f}(t_2 u)}{(t_2 u)^{m-1}}\right) u^m dx \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \big(\upsilon(|t_1|\nabla u||) - \upsilon(|t_2|\nabla u||)\big)|\nabla u|^m dx \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon)\cap[u>0]} \left[\left(\frac{V_0}{k}\upsilon(|t_1|u||) - \frac{\widetilde{f}(t_1 u)}{(t_1 u)^{m-1}}\right) - \left(\frac{V_0}{k}\upsilon(|t_2|u||) - \frac{\widetilde{f}(t_2 u)}{(t_2 u)^{m-1}}\right)\right] u^m dx \\ \leq &\int_{\Omega_\epsilon \cap [u>0]} \left(\frac{f(t_1 u)}{(t_1 u)^{m-1}} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^{m-1}}\right) u^m \, dx. \end{aligned}$$

Considerando a função

$$h(t) = \frac{V_0}{k}\upsilon(t) - \frac{\widetilde{f}(t)}{t^{m-1}}$$

observamos que

$$h(t) = \upsilon(t)h_1(t),$$

onde

$$h_1(t) = \frac{V_0}{k} - \frac{\widetilde{f}(t)}{\phi(t)t}.$$

Como υ, h_1 são não-crescentes e não-negativas, segue que h é não-crescente. Assim, $h(t_1 u) \geq h(t_2 u)$ e, então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \big(\upsilon(|t_1|\nabla u||) - \upsilon(|t_2|\nabla u||)\big)|\nabla u|^m dx + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon)\cap[u>0]} \big(h(t_1u) - h(t_2u)\big)u^m dx \\ &\leq \int_{\Omega_\epsilon\cap[u>0]} \left[\frac{f(t_1u)}{(t_1u)^{m-1}} - \frac{f(t_2u)}{(t_2u)^{m-1}}\right] u^m dx < 0, \end{aligned}$$

onde o lado direito da desigualdade acima decorre de (f_3), o que é um absurdo, mostrando que $t_1 = t_2$.

Para finalizar, basta seguir as ideias contidas em [35][1] para obter

$$c_\epsilon = c_{\epsilon,1} = c_{\epsilon,2}.$$

■

3.1.2 A condição de Palais-Smale para J_ϵ

Nesta subseção, mostraremos que o funcional J_ϵ verifica a condição (PS) para alguns níveis.

Preliminarmente, mostramos que as sequências (PS) associada ao funcional J_ϵ são limitadas.

Lema 3.1.3. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para J_ϵ. Então, existe uma constante $C > 0$, independente de n, tal que*

$$\|u_n\|_\epsilon \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Sendo (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_ϵ, existe $C_1 > 0$ tal que

$$J_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(u_n)u_n \leq C_1(1 + \|u_n\|_\epsilon). \tag{3.4}$$

[1] ver os Lemas A.4 e A.5.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(u_n)u_n \quad & \overbrace{\geq}^{(\phi_2)} \quad \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(u_n)\Big)dx \\
& \qquad + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)\Big)dx \\
& \overbrace{\geq}^{(g_4)} \quad \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(u_n)\Big)dx \\
& \qquad + \frac{l-\theta}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} G(\epsilon x, u_n)dx \\
& \overbrace{\geq}^{(g_4)} \quad \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(u_n)\Big)dx \\
& \qquad - \Big(1 - \frac{l}{\theta}\Big)\frac{1}{kl}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} V(\epsilon x)\phi(|u_n|)|u_n|^2dx \\
& \overbrace{\geq}^{(\phi_2)} \quad \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(u_n)\Big)dx \\
& \qquad - \Big(1 - \frac{l}{\theta}\Big)\frac{m}{kl}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)dx.
\end{aligned}$$

Ora, por (3.1),

$$C_2 = \left[\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big) - \Big(1 - \frac{l}{\theta}\Big)\frac{m}{kl}\right] > 0.$$

Isso combinado com a última desigualdade implica em

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(u_n)u_n \quad & \geq \quad C_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|\nabla u_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(u_n)dx\right) \\
& \geq \quad C_3\big(\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + \xi_0(\|u_n\|_{\Phi, V_\epsilon})\big),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde na última desigualdade foi usado o Lema 1.1.32. De (3.4) e (3.5),

$$C_3\big(\xi_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) + \xi_0(\|u_n\|_{\Phi,V_\epsilon})\big) \leq C_1(1 + \|u_n\|_\epsilon).$$

Agora, a demonstração segue argumentando como no Lema 2.1.4. ∎

O resultado abaixo é fundamental para mostrar que o funcional associado ao problema auxiliar verifica a condição (PS).

Lema 3.1.4. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para J_ϵ. Então, para cada $\eta > 0$, existe $\rho_0 = \rho_0(\eta) > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\rho_0}(0)}\Big[\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big]dx < \eta.$$

Demonstração. Para cada $\rho > 0$, seja $\xi_\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$\xi_\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in B_{\frac{\rho}{2}}(0), \\ 1, & x \notin B_\rho(0), \end{cases}$$

com $0 \leq \xi_\rho(x) \leq 1$ e $|\nabla \xi_\rho| \leq \dfrac{C}{\rho}$, onde C é uma constante independente de ρ. Note que

$$\begin{aligned} J_\epsilon'(u_n)(\xi_\rho u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla(\xi_\rho u_n)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u_n|)u_n^2\xi_\rho dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n)u_n\xi_\rho dx. \end{aligned}$$

Escolhendo $\rho > 0$ de maneira que $\Omega_\epsilon \subset B_{\frac{\rho}{2}}(0)$, ficamos com

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \xi_\rho\Big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x)\phi(|u_n|)|u_n|^2\Big)dx &= J_\epsilon'(u_n)(\xi_\rho u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} u_n\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla \xi_\rho dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} g(\epsilon x, u_n)u_n\xi_\rho dx. \end{aligned}$$

Por (ϕ_2), $l\Phi(t) \leq \phi(t)t^2$ para todo $t \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} l\int_{\mathbb{R}^N} \xi_\rho\Big[\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big]dx &\leq J_\epsilon'(u_n)(\xi_\rho u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||\nabla \xi_\rho|dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} g(\epsilon x, u_n)u_n\xi_\rho dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, (g_4) e (ϕ_2) nos permite concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} g(\epsilon x, u_n)u_n\xi_\rho dx \leq \frac{V_0}{k}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} \phi(u_n)u_n^2\xi_\rho dx \leq \frac{m}{k}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\xi_\rho dx.$$

o que implica

$$\begin{aligned} l\int_{\mathbb{R}^N} \xi_\rho\Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big)dx &\leq J_\epsilon'(u_n)(\xi_\rho u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||\nabla \xi_\rho|dx \\ &\quad + \frac{m}{k}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\xi_\rho dx. \end{aligned}$$

Desde que $(\xi_\rho u_n)$ é limitada em X_ϵ,

$$J_\epsilon'(u_n)(\xi_\rho u_n) = o_n(1).$$

Usando o limite acima com o fato de $k > \dfrac{m}{l}$, obtemos

$$\Big(l - \frac{m}{k}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \xi_\rho\Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big)dx \leq o_n(1) + \frac{C}{\rho}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, deduzimos

$$\Big(l-\frac{m}{k}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\xi_\rho\Big(\Phi(|\nabla u_n|)+V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big)dx \;\leq\; o_n(1)+\frac{2C}{\rho}\|u_n\|_\Phi\|\phi(|u_n|)|u_n|\|_{\widetilde{\Phi}}.$$

Sendo (u_n) limitada em X_ϵ, existe $C_1>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\xi_\rho\Big(\Phi(|\nabla u_n|)+V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big)dx \;\leq\; o_n(1)+\frac{C_1}{\rho}.$$

Agora, fixando $\eta>0$, existe $\rho_0>0$ tal que $\frac{C_1}{\rho_0}<\eta$, logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\rho_0}(0)}\Big(\Phi(|\nabla u_n|)+V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big)dx \;<\; o_n(1)+\eta$$

e, portanto,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\rho_0}(0)}\Big[\Phi(|\nabla u_n|)+V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big]dx<\eta.$$

■

O próximo lema estabelece uma importante propriedade envolvendo as sequências (PS) para J_ϵ. Uma vez que a demonstração segue os mesmos argumentos do Lema 2.2.4, omitiremos sua demonstração.

Lema 3.1.5. *Sejam (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para o funcional J_ϵ com $u_n \rightharpoonup u$ em X_ϵ. Então,*

$$\nabla u_n(x)\to\nabla u(x)\quad q.t.p.\ em\quad \mathbb{R}^N.$$

Além disso, u é ponto crítico de J_ϵ.

Como aplicação dos fatos até agora estabelecidos podemos provar a proposição seguinte.

Proposição 3.1.6. *O funcional J_ϵ verifica a condição (PS).*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para J_ϵ. Pelo Lema 3.1.3, segue que (u_n) é limitada. Sendo X_ϵ um espaço reflexivo, existe $u\in X_\epsilon$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } X_\epsilon \tag{3.6}$$

Em primeiro lugar, em vista do Lema 3.1.4, fixado $\eta>0$, existe $\rho_0>0$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\rho_0}(0)}\Big(\Phi(|\nabla u_n|)+V(\epsilon x)\Phi(|u_n|)\Big)dx<\eta.$$

Aumentando $\rho_0 > 0$, se necessário, podemos supor que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho_0}(0)} \Phi(|\nabla u|)dx < \eta \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho_0}(0)} V(\epsilon x)\Phi(|\nabla u|)dx < \eta.$$

Combinando as desigualdades acima com a condição Δ_2 vem que

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \leq \limsup_{n \to +\infty} \int_{B_{\rho_0}(0)} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx + 2\eta \tag{3.7}$$

e

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u_n - u|)dx \quad \leq \quad \limsup_{n \to +\infty} \int_{B_{\rho_0}(0)} V(\epsilon x)\Phi(|u_n - u|)dx + 2\eta.$$

Por (3.6), a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^\Phi(B_{\rho_0}(0))$. Portanto,

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u_n - u|)dx \leq 2\eta.$$

Como η foi arbitrário, concluímos que

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u_n - u|)dx = 0. \tag{3.8}$$

Desse ponto em diante, nosso objetivo será mostrar que

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{B_{\rho_0}(0)} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx = 0.$$

Para isso, comecemos observando que, pelo Lema 3.1.5

$$\Phi(|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|) \to 0 \quad \text{q.t.p. em } B_{\rho_0}(0).$$

Além disso, da condição Δ_2 e (ϕ_2), existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq c_1\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + c_2\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2.$$

Usando novamente o Lema 3.1.5,

$$c_1\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + c_2\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 \to (c_1 + c_2)\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 \quad \text{q.t.p. em } B_{\rho_0}(0).$$

Por outro lado, como na demonstração do Lema 2.1.5, obtém-se

$$\int_{B_{\rho_0}(0)} (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx = o_n(1).$$

Portanto,

$$\int_{B_{\rho_0}(0)} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx \to \int_{B_{\rho_0}(0)} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx.$$

Por conseguinte,

$$\int_{B_{\rho_0}(0)} \Big(c_1\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + c_2\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2\Big)dx \to (c_1+c_2)\int_{B_{\rho_0}(0)} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_{\rho_0}(0)} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx = 0.$$

O limite acima com (3.7) implica em

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx = 0. \tag{3.9}$$

De (3.8) e (3.9),

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad X_\epsilon,$$

mostrando que J_ϵ verifica a condição (PS). ■

A partir de agora, nosso principal objetivo é estudar a condição (PS) para J_ϵ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$. No que segue, sem perda de generalidade, iremos assumir que

$$V(0) = \min_{z\in\mathbb{R}^N} V(z) = V_0.$$

A seguir, fixamos o problema autônomo abaixo

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + V_0\phi(|u|)u \;=\; f(u), \;\text{em}\; \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\; u>0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_0}$$

Recorde que as soluções fracas de (P_0) são pontos críticos do funcional

$$E_0(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + V_0\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

o qual esta bem definido em $Y = W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ munido da norma

$$\|u\|_Y = \|\nabla u\|_\Phi + V_0\|u\|_\Phi.$$

Além disso, denotaremos por d_0 o nível do passo da montanha associado a E_0, e por $\mathcal{M}_0$, a variedade de Nehari

$$\mathcal{M}_0 = \big\{u \in Y\backslash\{0\} \;:\; E_0'(u)u = 0\big\}.$$

O próximo lema será de grande ajuda na demonstração que o funcional J_ϵ verifica a condição (PS) sobre $\mathcal{N}_\epsilon$.

Lema 3.1.7. *Considere* $U = \big\{u \in \mathcal{N}_\epsilon \, : \, J_\epsilon(u) < d_0 + 1\big\}$. *Então, existem constantes* $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, *independentes de* ϵ, *satisfazendo*

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u|)dx \leq \sigma_1$ *para todo* $u \in U$,

(b) $\displaystyle\int_{\Omega_\epsilon} \Big(f'(u)u^2 - (m-1)f(u)u\Big)dx \geq \sigma_2$ *para todo* $u \in U$,

para todo ϵ *pequeno.*

Demonstração.

(a) Dado $u \in U$, temos

$$J_\epsilon(u) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(u)u = J_\epsilon(u) < d_0 + 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(u)u \quad & \overbrace{\geq}^{(\phi_2)} \quad \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u|) + V(\epsilon x)\Phi(u)\Big)dx \\ & \qquad + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(g(\epsilon x, u)u - \theta G(\epsilon x, u)\Big)dx \\ & \overbrace{\geq}^{(g_3)-(g_4)} \quad \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u|) + V(\epsilon x)\Phi(u)\Big)dx \\ & \qquad + \frac{l-\theta}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon} G(\epsilon x, u)dx \\ & \overbrace{\geq}^{(g_4)} \quad \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u|) + V(\epsilon x)\Phi(u)\Big)dx \\ & \qquad - \Big(1 - \frac{l}{\theta}\Big)\frac{1}{kl}\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon} V(\epsilon x)\phi(|u|)|u|^2dx. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$J_\epsilon(u) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(u)u \geq CV_0\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(u)dx,$$

onde $C = \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big) - \Big(1 - \frac{l}{\theta}\Big)\frac{m}{kl} > 0$. Portanto,

$$CV_0\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(u)dx \leq d_0 + 1, \quad \forall u \in U$$

mostrando (a).

(b) Suponha por absurdo que (b) não ocorre. Então, para alguma sequência $(u_n) \subset U$

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n}} \Big(f'(u_n)u_n^2 - (m-1)f(u_n)u_n\Big)dx \to 0.$$

Afirmamos que existem $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $\varrho > 0$ e $a > 0$ satisfazendo

$$\int_{B_\varrho(y_n)\cap\Omega_{\epsilon_n}} \Phi(|u_n|)dx \geq a > 0. \tag{3.10}$$

De fato, caso contrário, pela Proposição B.2

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n}} B(|u_n|)dx \to 0.$$

Consequentemente, dado $\eta > 0$ existe $c_\eta > 0$ verificando

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n}} f(u_n)u_n dx \leq \eta \int_{\Omega_{\epsilon_n}} \Phi(|u_n|)dx + c_\eta \int_{\Omega_{\epsilon_n}} B(|u_n|)dx.$$

Desde que $(u_n) \subset U$, mostra-se que $(\|u_n\|_{\epsilon_n})$ é limitada em $\mathbb{R}$, o resulta

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n}} f(u_n)u_n dx \to 0. \tag{3.11}$$

Por sua vez, como $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\phi(|u_n|)|u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, u_n)u_n dx$$

Usando (V_0) e (g_4) deduzimos que

$$\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\phi(|u_n|)|u_n|^2 dx\Big) \leq \int_{\Omega_{\epsilon_n}} f(u_n)u_n dx.$$

Agora, usando (ϕ_2), a desigualdade e o limite em (3.11), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|u_n|)dx \to 0,$$

e portanto,

$$\|u_n\|_{\epsilon_n} \to 0$$

o que é um absurdo com o Lema 3.1.1, mostrando que vale (3.10). Logo,

$$\int_{B_\varrho(0)\cap\Omega_{\epsilon_n}-\{y_n\}} \Phi(|v_n|)dx \geq a > 0, \tag{3.12}$$

onde $v_n(x) = u_n(x+y_n)$. Por outro lado, usando a limitação de $(\|u_n\|_{\epsilon_n})$ em $\mathbb{R}$, segue que (v_n) é limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Por conseguinte, existe $v \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Por (3.12) e imersão compacta,

$$\int_{B_\varrho(0)\cap\mathbb{R}^N_+} \Phi(|v|)dx > a \qquad \text{ou} \qquad \int_{B_\varrho(0)\cap\mathbb{R}^N} \Phi(|v|)dx > a,$$

em qualquer caso deduzimos que $v \neq 0$. Por (f_3) e o Lema de Fatou, temos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\epsilon - y_n} \Big(f'(v_n)v_n^2 - (m-1)f(v_n)v_n\Big)dx \geq \int_{B_\varrho(0)\cap\mathbb{R}^N_+} \Big(f'(v)v^2 - (m-1)f(v)v\Big)dx > 0$$

ou

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\epsilon - y_n} \Big(f'(v_n)v_n^2 - (m-1)f(v_n)v_n\Big)dx \geq \int_{B_\varrho(0)\cap\mathbb{R}^N} \Big(f'(v)v^2 - (m-1)f(v)v\Big)dx > 0$$

o que é um absurdo.

■

Estamos, finalmente, em condições de mostrar a condição (PS) para o funcional restrito a variedade de Nehari.

Proposição 3.1.8. *O funcional J_ϵ restrito a $\mathcal{N}_\epsilon$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para $c \in (0, d_0+1)$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para J_ϵ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$, isto é,

$$J_\epsilon(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|J'_\epsilon(u_n)\|_* = o_n(1).$$

Então, graças ao Teorema dos Multiplicadores de Lagrande, existe $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$J'_\epsilon(u_n) = \lambda_n L'_\epsilon(u_n) + o_n(1),$$

onde $L_\epsilon(v) = J'_\epsilon(v)v$ para todo $v \in X_\epsilon$. Assim,

$$\lambda_n L'_\epsilon(u_n)u_n = o_n(1). \tag{3.13}$$

Vejamos agora que, $\lambda_n = o_n(1)$. De fato, primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
L'_\epsilon(u_n)u_n &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| + 2\phi(|\nabla u_n|)\Big)|\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Big(\phi'(|u_n|)|u_n| + 2\phi(|u_n|)\Big)|u_n|^2 dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N}\Big(g'(\epsilon x, u_n)u_n^2 + g(\epsilon x, u_n)u_n\Big)dx \\
&\leq m\left(\int_{\mathbb{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\phi(|u_n|)|u_n|^2 dx\right) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N}\Big(g'(\epsilon x, u_n)u_n^2 + g(\epsilon x, u_n)u_n\Big)dx,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $\phi'(t)t \leq (m-2)\phi(t)$ para todo $t > 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
L'_\epsilon(u_n)u_n &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\Big((m-1)g(\epsilon x, u_n)u_n - g'(\epsilon x, u_n)u_n^2\Big)dx \\
&= \int_{\Omega_\epsilon \cup [u_n < t_0]}\Big((m-1)f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2\Big)dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon)\cap[t_0 \leq u_n \leq t_1]}\Big[(m-1)\zeta(u_n)u_n - \zeta'(u_n)u_n^2\Big]dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon)\cap[u_n > t_1]}\Big((m-1)\frac{V_0}{k}\phi(u_n)u_n^2 - \frac{V_0}{k}(\phi(u_n)(u_n))'u_n^2\Big)dx.
\end{aligned}$$

Desde que $\zeta(t), (\phi(t)t)' \geq 0$ para todo $t > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
L'_\epsilon(u_n)u_n &\leq \int_{\Omega_\epsilon \cup [u_n < t_0]}\Big((m-1)f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2\Big)dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon)\cap[t_0 \leq u_n \leq t_1]}(m-1)\zeta(u_n)u_n dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon)\cap[u_n > t_1]}(m-1)\frac{V_0}{k}\phi(u_n)u_n^2 dx. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Observando que

$$\zeta(t) \leq \frac{V_0}{k}\phi(t)t \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

obtemos

$$\begin{aligned}
L'_\epsilon(u_n)u_n &\leq \int_{\Omega_\epsilon \cup [u_n < t_0]}\Big((m-1)f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2\Big)dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon)\cap[t_0 \leq u_n \leq t_1]}(m-1)\frac{V_0}{k}\phi(u_n)u_n^2 dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon)\cap[u_n > t_1]}(m-1)\frac{V_0}{k}\phi(u_n)u_n^2 dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.1.7 resulta que

$$-L'_\epsilon(u_n)u_n \quad \geq \quad \sigma_2 - \frac{2mV_0\sigma_1}{k}.$$

Logo, aumentando k se necessário, existe $C > 0$ tal que

$$-L'_\epsilon(u_n)u_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $L'_\epsilon(u_n)u_n \nrightarrow 0$, e por (3.13), conclui-se que $\lambda_n = o_n(1)$, donde

$$J'_\epsilon(u_n) = o_n(1),$$

implicando que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para J_ϵ em X_ϵ. Agora, o resultado segue da Proposição 3.1.6. ∎

Argumentando como na proposição precedente obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.1.9. *Os pontos críticos do funcional J_ϵ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$ são pontos críticos de J_ϵ em X_ϵ.*

Os próximos dois resultados são obtidos usando os mesmos argumentos do Teorema 2.2.1 e a Proposição 2.2.18, por esse motivo omitiremos suas demonstrações.

Teorema 3.1.10. *Assuma (ϕ_1)-(ϕ_5), (r_1)-(r_4), (b_1)-(b_4), (f_1)-(f_3) e (R). Então, existe $\overline{\epsilon} > 0$ tal que o problema (A_ϵ) tem uma solução não-negativa de energia mínima u_ϵ para todo $0 < \epsilon < \overline{\epsilon}$.*

Proposição 3.1.11. *Se $u_\epsilon \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução não-trivial de (A_ϵ), então u_ϵ é positiva, $u_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\lim_{|x| \to +\infty} u_\epsilon(x) = 0.$$

3.1.3 Multiplicidade de solução para (A_ϵ)

Nesta subseção, iremos estabelecer a existência de múltiplas soluções positivas para (A_ϵ) fazendo uso da categoria de Lusternik-Schnirelman. Além disso, também estudaremos o comportamento dos pontos de máximos dessas soluções em relação ao conjunto M.

Para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeno, consideremos $\vartheta \in \mathcal{C}_0^\infty([0,+\infty),[0,1])$ verificando

$$\vartheta(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{\delta}{2} \\ 0, & \text{se} \quad s \geq \delta. \end{cases}$$

Usando a função acima, para cada $y \in M$, definimos

$$\Psi_{\epsilon,y}(x) = \vartheta(|\epsilon x - y|)w(\frac{\epsilon x - y}{\epsilon}),$$

onde $w \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ denota uma solução positiva de energia mínima do problema (P_0) a qual é garantida pelo Teorema 2.1.1. Pelo Lema 3.1.2, existe $t_\epsilon > 0$ tal que $t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y} \in \mathcal{N}_\epsilon$ e

$$J_\epsilon(t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}) = \max_{t\geq 0} J_\epsilon(t\Psi_{\epsilon,y}).$$

Isto nos permite garantir a boa definição da função $\widetilde{\Psi}_\epsilon \colon M \to \mathcal{N}_\epsilon$ dada por $\widetilde{\Psi}_\epsilon(y) = t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}$.

A seguir, apresentamos um resultado que estabelece uma relação entre o funcional J_ϵ e a função $\widetilde{\Psi}_\epsilon$.

Lema 3.1.12. *A função $\widetilde{\Psi}_\epsilon$ verifica o seguinte limite*

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) = d_0, \quad \textit{uniformemente em } y \in M.$$

Demonstração. Observe que é suficiente mostrar que para cada $(y_n) \subset M$ e $(\epsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$ com $\epsilon_n \to 0$ tal que, a menos de subsequência,

$$J_{\epsilon_n}(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) \to d_0.$$

Primeiramente, recorde que $J'_{\epsilon_n}(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n) = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\phi}(|\nabla(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\widehat{\phi}(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, \widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)dx,$$

onde $\widehat{\phi}(s) = \phi(s)s^2$ para todo $s \geq 0$. Usando o Lema 1.1.32 com a hipótese (ϕ_2),

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\phi}(|\nabla(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\widehat{\phi}(|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)|)dx \\ \leq \;& m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big[\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big], \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $\xi_1(t) = \max\{t^l, t^m\}$. Por outro lado, usando a mudança de variável $z = \dfrac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, \widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n z + y_n, t_{\epsilon_n}\vartheta(|\epsilon_n z|)w(z))t_{\epsilon_n}\vartheta(|\epsilon_n z|)w(z)dx.$$

Note que, se $z \in B_{\frac{\delta}{\epsilon_n}}(0)$, então $\epsilon_n z + y_n \in B_\delta(y_n) \subset M_\delta \subset \Omega$. Desde que $f = g$ em Ω, $\vartheta \equiv 1$ em $B_{\frac{\delta}{2}}(0)$ e $B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subset B_{\frac{\delta}{2\epsilon_n}}(0)$ obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, \widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n))\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)dx \geq \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} f(t_{\epsilon_n} w(z))t_{\epsilon_n} w(z)dx. \tag{3.16}$$

Combinando (3.15) com (3.16), segue

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} \frac{f(t_{\epsilon_n} w(z))}{(t_{\epsilon_n} w(z))^{m-1}} |t_{\epsilon_n} w(z)|^m dx &\leq m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big[\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big].\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1.12, w é uma função contínua. Então, existe $z_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$w(z_0) = \min_{z \in B_{\frac{\delta}{2}}(0)} w(z).$$

Consequentemente, por (f_3)

$$\begin{aligned}\frac{f(t_{\epsilon_n} w(z_0))}{(t_{\epsilon_n} w(z_0))^{m-1}} \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} |t_{\epsilon_n} w(z)|^m dx &\leq m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big[\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big].\end{aligned}$$

De (f_2), existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}&\big[c_1(t_{\epsilon_n} w(z_0))^{\theta-m} - c_2(t_{\epsilon_n} w(z_0))^{-m}\big] t_{\epsilon_n}^m \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} |w(z)|^m dx \\ &\leq m\xi_1(t_{\epsilon_n})\Big[\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big].\end{aligned}$$

Agora, suponha por contradição, que para alguma subsequência

$$t_{\epsilon_n} \to +\infty \;\text{ e }\; t_{\epsilon_n} \geq 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\xi_1(t_{\epsilon_n}) = t_{\epsilon_n}^m$ o que resulta

$$\begin{aligned}&\big[c_1(t_{\epsilon_n} w(z_0))^{\theta-m} - c_2(t_{\epsilon_n} w(z_0))^{-m}\big] \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} |w(z)|^m dx \\ &\leq m\Big[\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big].\end{aligned}$$

Novamente, usando a mudança de variável $z = \dfrac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}$ juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, conclui-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(\Psi_{\epsilon_n,y_n})|)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla w|)dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)\Phi(|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|)dx\Big] \to \int_{\mathbb{R}^N} V_0\Phi(|w|)dx.$$

Sendo $\theta > m$, tem-se

$$\left[c_1(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{\theta-m} - c_2(t_{\epsilon_n}w(z_0))^{-m}\right] \to +\infty,$$

o que é uma contradição. Assim, (t_{ϵ_n}) é limitada, e a menos de subsequência, existe $t_* \geq 0$ tal que

$$t_{\epsilon_n} \to t_*.$$

Recordando que $\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n) \in \mathcal{N}_{\epsilon_n}$, temos $\|\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)\|_{\epsilon_n} \geq \varsigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, mostra-se que

$$E_0'(t_*w)(t_*w) = 0 \ \text{ e } \ t_* > 0,$$

donde $t_*w \in \mathcal{M}_0$. Como w é uma solução de energia mínima de (P_0), segue que $t_* = 1$. Portanto, usando que $t_n \to 1$ com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, vem que

$$\lim_{n\to+\infty} J_{\epsilon_n}(\widetilde{\Psi}_{\epsilon_n}(y_n)) = E_0(w) = d_0,$$

finalizando a demonstração. ∎

Repetindo os mesmos argumentos usados no Lema 2.3.5, temos o lema abaixo.

Lema 3.1.13. *A função $\widetilde{\Psi}_\epsilon$ satisfaz o seguinte limite*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \beta(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) = y, \ \textit{uniformemente em } M.$$

A seguir, consideremos a função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$h(\epsilon) = \sup_{y\in M} |J_\epsilon(\widetilde{\Psi}_\epsilon(y)) - d_0|,$$

que verifica $\lim\limits_{\epsilon\to 0} h(\epsilon) = 0$. Além disso, defina

$$\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon := \big\{ u \in \mathcal{N}_\epsilon \ : \ J_\epsilon(u) \leq d_0 + h(\epsilon) \big\}.$$

Pelo Lema 3.1.12, $\widetilde{\Psi}_\epsilon(y) \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$, mostrando que $\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon \neq \emptyset$. Com as notações acima, temos o seguinte resultado.

Lema 3.1.14. *Seja $\delta > 0$ e $M_\delta = \big\{ x \in \mathbb{R}^N \ : \ dist(x, M) \leq \delta \big\}$. Então,*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{u\in\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y\in M_\delta} \big| \beta(u) - y \big| = 0.$$

Demonstração. A demonstração segue como o Lema 2.3.6. ■

O próximo teorema é um resultado de multiplicidade para o problema auxiliar.

Teorema 3.1.15. *Dado $\delta > 0$, existe $\epsilon_\delta > 0$ tal que (A_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ de soluções positivas, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_\delta$.*

Demonstração. Considere $X = X_\epsilon$, $\Psi = L_\epsilon$, $\varphi = J_\epsilon$, $d = d_0 + h(\epsilon)$ e $\varphi^d = \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$, em que L_ϵ define a variedade de Nehari $\mathcal{N}_\epsilon$. Em virtude do Teorema 5.20 encontrado em [74], conclui-se que o funcional J_ϵ restrito a $\mathcal{N}_\epsilon$ tem pelo menos $cat_{\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon)$ pontos críticos, para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$. Para finalizar, como na demonstração do Teorema A motra-se que

$$cat_{M_\delta}(M) \leq cat_{\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon),$$

segue-se que o funcional J_ϵ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ de pontos críticos em $\mathcal{N}_\epsilon$ para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$. Por outro lado, seguindo o mesmo raciocínio da Proposição 3.1.8 verifica-se que todo ponto crítico de J_ϵ restrito a $\mathcal{N}_\epsilon$ é ponto crítico de J_ϵ em X_ϵ, o que finaliza a demonstração. ■

3.2 Multiplicidade de soluções para o problema original

O principal objetivo desta seção é provar que as solução encontradas no Teorema 3.1.15 são solução do problema $(\widetilde{P}_\epsilon)$, para todo ϵ suficientemente pequeno. Para este fim, primeiramente estabelecemos alguns resultados técnicos.

Proposição 3.2.1. *Seja $\epsilon_n \to 0$ e $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$ tal que $J_{\epsilon_n}(u_n) \to d_0$. Então, existe uma sequência $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $v_n(x) = u_n(x + \widetilde{y}_n)$ tem uma subsequência convergente em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a menos de subsequência, $y_n \to y \in M$, onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$.*

Demonstração. A demonstração segue o mesmo raciocínio da Proposição 2.3.4. ■

A proposição abaixo é crucial para o estudo que segue.

Lema 3.2.2. *Sejam $(x_j) \subset \overline{\Omega}_{\epsilon_j}$ e (ϵ_j) sequências com $\epsilon_j \to 0$ quando $j \to +\infty$. Se $v_j(x) = u_{\epsilon_j}(x + x_j)$ onde u_{ϵ_j} é uma solução de $(\widetilde{P}_{\epsilon_j})$ obtida pelo Teorema 3.1.15, então (v_j) converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que v_j verifica o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi v_j + V_j(x)\phi(|v_j|)v_j \;=\; g(\epsilon_j x + \overline{x}_j, v_j), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v_j \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \, v_j > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_j}$$

onde $V_j(x) = V(\epsilon_j x + \overline{x}_j)$ e $\overline{x}_j = \epsilon_j x_j$. A seguir, mostraremos que existe $C > 0$ tal que

$$\|v_j\|_\infty \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Com esta finalidade, fixemos $R_1 \in (0,1)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Dado $K > 0$, defina as sequências

$$\sigma_n = \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2^{n+1}}, \; \overline{\sigma}_n = \frac{\sigma_n + \sigma_{n+1}}{2} \quad \text{e} \quad K_n = \frac{K}{2}\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) \; \forall n = 0,1,2,....$$

Note que,

$$\sigma_n \downarrow \frac{R_1}{2}, \; K_n \uparrow \frac{K}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_{n+1} < \overline{\sigma}_n < \sigma_n < R_1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$J_{n,j} = \int_{A_{j,K_n,\sigma_n}} \big((v_j - K_n)^+\big)^{\gamma^*} dx \quad \text{e} \quad \xi_n = \xi\Big(\frac{2^{n+1}}{R_1}\Big(|x - x_0| - \frac{R_1}{2}\Big)\Big), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $A_{j,k,\rho} = \big\{x \in B_\rho(x_0) \;:\; v_j(x) > k\big\}$ para $k, \rho > 0$ e $\xi \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$0 \leq \xi \leq 1, \; \xi(t) = 1 \text{ se } t \leq \frac{1}{2}, \, \xi(t) = 0 \text{ se } t \geq \frac{3}{4} \; \text{ e } \; |\xi'| < C.$$

Seguindo os argumentos encontrados na demonstração da Proposição 2.3.8, mostra-se a existência de constantes $C, \zeta > 0$ e $D > 1$ satisfazendo

$$J_{n+1,j} \leq CD^n J_{n,j}^{1+\zeta}, \; n = 0,1,2,\ldots, \tag{3.17}$$

Desse ponto em diante, nosso objetivo é provar que existe $K^* \geq 1$ tal que

$$J_{0,j} \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{para todo} \quad K \geq K^*, \quad \text{para todo} \ \ j \approx +\infty.$$

De fato, note que

$$J_{0,j} = \int_{A_{j,K_0,\sigma_0}} \left((v_j - K_0)^+\right)^{\gamma^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left((v_j - \frac{K}{2})^+\right)^{\gamma^*} dx.$$

Pela Proposição 3.2.1,

$$v_j \to v \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N). \tag{3.18}$$

O limite em (3.18) com a imersão continua $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,\gamma}(\mathbb{R}^N)$ implicam na existência de $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$J_{0,j} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left((v - \frac{K}{2})^+\right)^{\gamma^*} dx, \quad \text{para todo} \ \ j \geq j_0.$$

Passando ao limite na desigualdade acima quando $K \to +\infty$, deduzimos que

$$\lim_{K \to +\infty} J_{0,j} = 0, \quad \text{para todo} \ \ j \geq j_0.$$

Assim, existe $K^* \geq 1$, tal que

$$J_{0,j} \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} D^{-\frac{1}{\zeta^2}}, \quad \text{para todo} \quad K \geq K^*, \quad \text{para todo} \ \ j \geq j_0. \tag{3.19}$$

Fixando $K = K^*$, por (3.17) e (3.19) podemos aplicar o Lema 2.1.11, para obter o limite

$$J_{n,j} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \quad \text{para todo} \ \ j \geq j_0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \to +\infty} J_{n,j} = \int_{A_{j,\frac{K^*}{2},\frac{R_1}{2}}} \left((v_j - \frac{K^*}{2})^+\right)^{\gamma^*} dx.$$

Portanto,

$$v_j(x) \leq \frac{K^*}{2} \quad \text{q.t.p. em} \ \ B_{\frac{R_1}{2}}(x_0), \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

de onde segue

$$\|v_j\|_\infty \leq \overline{C} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

onde $\overline{C} = \max\{\frac{K^*}{2}, \|v_1\|_\infty, ..., \|v_{j_0-1}\|_\infty\}$. Combinando a estimativa acima com a teoria de regularidade, conclui-se que $(v_j) \subset C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e existe $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_j \to v \quad \text{em} \quad C^{1,\alpha}(B_{\rho_0}(0)), \quad \forall \rho_0 > 0.$$

■

Lema 3.2.3. *Sejam (ϵ_n) uma sequência com $\epsilon_n \to 0$ e $(x_n) \subset \overline{\Omega}_{\epsilon_n}$ uma sequência tal que $u_{\epsilon_n}(x_n) \geq \tau_0 > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e alguma $\tau_0 > 0$, onde u_{ϵ_n} é uma solução de (A_ϵ) obtida pelo Teorema 3.1.15. Então,*

$$\lim_{n\to+\infty} V(\overline{x}_n) = V_0,$$

onde $\overline{x}_n = \epsilon_n x_n$.

Demonstração. Sendo Ω limitado e $\overline{x}_n \in \overline{\Omega}$, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que, a menos de subsequência,

$$\overline{x}_n \to x_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Então, pela continuidade de V,

$$\lim_{n\to+\infty} V(\overline{x}_n) = V(x_0) \geq V_0. \tag{3.20}$$

Suponha por contradição que

$$V(x_0) > V_0. \tag{3.21}$$

Aplicando o Teorema 3.1.15, tem-se $(u_{\epsilon_n}) \subset \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n}$. Assim,

$$c_{\epsilon_n} \leq J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) < d_0 + h(\epsilon_n)$$

o que resulta

$$\limsup_n c_{\epsilon_n} \leq d_0.$$

Por outro lado, uma vez que

$$E_0(tu) \leq J_{\epsilon_n}(tu) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

tem-se

$$d_0 \leq \max_{t\geq 0} E_0(tu_{\epsilon_n}) \leq \max_{t\geq 0} J_{\epsilon_n}(tu_{\epsilon_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que nos permite concluir

$$d_0 \leq \liminf_n c_{\epsilon_n}.$$

Portanto,

$$J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) \to d_0 \quad \text{e} \quad J'_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n})u_{\epsilon_n} = 0.$$

Logo, (u_{ϵ_n}) é uma sequência limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, implicando que $v_n(z) = u_{\epsilon_n}(z + x_n)$ é limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, existe $v \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N). \tag{3.22}$$

Ora, como $u_{\epsilon_n}(x_n) \geq \tau_0 > 0$, o Lema 3.2.2 com a convergência acima implicam em $v(0) \geq \tau_0 > 0$, mostrando que $v \not\equiv 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n > 0$ tal que $t_n v_n \in \mathcal{M}_0$. Repetindo os argumentos da demonstração do Lema 3.1.12, verificamos que

$$t_n \to t_* \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Defina $\widetilde{v}_n = t_n v_n$ e observe que

$$\begin{aligned}
E_0(\widetilde{v}_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)dx + V_0 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|t_n v_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n v_n)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(t_n v_n)|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + \overline{x}_n)\Phi(|t_n v_n|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n z + \overline{x}_n, t_n v_n)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla(t_n u_{\epsilon_n}|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z)\Phi(|t_n u_{\epsilon_n}|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n z, t_n u_{\epsilon_n})dx \\
&= J_{\epsilon_n}(t_n u_{\epsilon_n}) \leq \max_{t \geq 0} J_{\epsilon_n}(t u_{\epsilon_n}) = J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$d_0 \leq E_0(\widetilde{v}_n) \leq d_0 + o_n(1),$$

implicando em $E_0(\widetilde{v}_n) \to d_{V_0}$. Aplicando o Lema 2.3.3, deduzimos que

$$\widetilde{v}_n \to \widetilde{v} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \tag{3.23}$$

com $\widetilde{v} = t_* v \not\equiv 0$. Além disso, $E_0(\widetilde{v}) = d_0$ e por (3.21),

$$d_0 < \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla \widetilde{v}|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x_0)\Phi(|\widetilde{v}|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v})dx.$$

Usando (3.23) com o lema de Fatou, vem que

$$\begin{aligned} d_0 &< \liminf_{n\to+\infty}\Big[\int_{\mathbb{R}^N}\big(\Phi(|\nabla\widetilde{v}_n|)+V(\epsilon_n z+\overline{x}_n)\Phi(|\widetilde{v}_n|)-F(\widetilde{v}_n)\big)dx\Big] \\ &\le \liminf_{n\to+\infty}\Big[\int_{\mathbb{R}^N}\big(\Phi(|\nabla(t_nv_n)|)+V(\epsilon_n z+\overline{x}_n)\Phi(|t_nv_n|)-G(\epsilon_n z+\overline{x},t_nv_n)\big)dx\Big] \\ &= \liminf_{n\to+\infty} J_{\epsilon_n}(t_nu_{\epsilon_n}) \le \liminf_{n\to+\infty} J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) = d_0 \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, de (3.20),

$$\lim_{n\to+\infty} V(\overline{x}_n) = V_0.$$

■

Antes de concluir esta subseção estabelecemos um resultado fundamental na demonstração do Teorema B.

Lema 3.2.4. *Se* $\kappa_\epsilon = \sup\big\{\max_{\partial\Omega_\epsilon} u_\epsilon : u_\epsilon \in \widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$ *é uma solução de* $(\widetilde{P}_\epsilon)\big\}$, *então*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\kappa_\epsilon = 0. \tag{3.24}$$

Demonstração. Assuma que

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\kappa_\epsilon > \tau_0 > 0,$$

para algum $\tau_0 > 0$. Isto implica na existência de $(\epsilon_n) \subset (0,+\infty)$ e $x_n \in \partial\Omega_{\epsilon_n}$ tais que

$$u_{\epsilon_n}(x_n) = \max_{x\in\partial\Omega_{\epsilon_n}} u_{\epsilon_n}(x) > \tau_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o Lema 3.2.3,

$$\lim_{n\to+\infty} V(\overline{x}_n) = V_0,$$

onde $\overline{x}_n = \epsilon_n x_n$. Sendo $(\overline{x}_n) \subset \partial\Omega$, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que, a menos de subsequência, $\overline{x}_n \to x_0$, e consequentemente $V(x_0) = V_0$, o que é um absurdo com (V_1). Portanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\kappa_\epsilon = 0.$$

■

3.2.1 Demonstração do Teorema B

Estamos, finalmente, em condições de demonstrar o principal resultado deste capítulo. Com o propósito de facilitar a leitura, dividimos a demonstração em duas partes.

Parte I: Multiplicidade de soluções

Aplicando o Teorema 3.1.15, dado $\delta > 0$ existe $\epsilon_\delta > 0$ tal que (A_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ de soluções positivas, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_\delta)$. Seja u_ϵ uma das soluções de (A_ϵ). Pelo Lema 3.2.4 existe $\overline{\epsilon} > 0$ tal que

$$\kappa_\epsilon < t_0, \quad \forall \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}).$$

Assim, $(u_\epsilon - t_0)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon)$ e

$$\omega_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in \Omega_\epsilon, \\ (u_\epsilon - t_0)^+, & se \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon, \end{cases}$$

pertence a $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Usando ω_ϵ como função teste, decorre que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} \phi(|\nabla u_\epsilon|) \nabla u_\epsilon \nabla (u_\epsilon - t_0)^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} V(\epsilon x) \phi(|u_\epsilon|) u_\epsilon (u_\epsilon - t_0)^+ dx \\ = & \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} g(\epsilon x, u_\epsilon)(u_\epsilon - t_0)^+ dx, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \Big(1 - \frac{1}{k}\Big) \Bigg[\int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} \phi(|\nabla (u_\epsilon - t_0)^+|) |\nabla (u_\epsilon - t_0)^+|^2 dx \\ & + V_0 \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} \phi(|u_\epsilon|) u_\epsilon (u_\epsilon - t_0)^+ dx \Bigg] \leq 0. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.11, tem-se $u_\epsilon > 0$. Então, da última desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} \phi(|u_\epsilon|) u_\epsilon (u_\epsilon - t_0)^+ dx = 0,$$

e, consequentemente,

$$(u_\epsilon - t_0)^+ = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon,$$

mostrando que as soluções do problema auxiliar são de $(\widetilde{P}_\epsilon)$.

Parte I: Concentração dos pontos de máximo

Finalmente, se u_{ϵ_n} é uma solução do problema $(\widetilde{P}_{\epsilon_n})$. Então, $v_n(x) = u_{\epsilon_n}(x + \widetilde{y}_n)$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi v_n + V_n(x)\phi(|v_n|)v_n \ = \ f(v_n), \ \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v_n \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \, v_n > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P_n}$$

onde $V_n(x) = V(\epsilon_n x + \epsilon_n \widetilde{y}_n)$ e $(\widetilde{y}_n)$ é a sequência obtida na Proposição 3.2.1. Além disso, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ e $y_n \to y$ em M, onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$. Usando que $g \leq f$ e argumentando como no lema 2.3.10, mostra-se que existe $\alpha > 0$

$$\|v_n\|_\infty > \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como $\|v_n\|_\infty \leq C$ para alguma constante $C > 0$, segue que existem $\rho_0 > 0$ e $q_n \in B_{\rho_0}(0)$ tal que $v_n(q_n) = \max\limits_{z \in \mathbb{R}^N} v_n(z)$. Portanto, $x_n = q_n + \widetilde{y}_n$ é um ponto de máximo de u_{ϵ_n} e

$$\epsilon_n x_n \to y.$$

Desde que V é uma função contínua, segue que

$$\lim_{n \to +\infty} V(\epsilon_n x_n) = V(y) = V_0.$$

Comentário final.

Se u_ϵ é uma solução positiva de $(\widetilde{P}_\epsilon)$, a função $w_\epsilon(x) = u_\epsilon\Big(\dfrac{x}{\epsilon}\Big)$ é solução positiva de (P_ϵ). Logo, os pontos de máximo z_ϵ e x_ϵ de w_ϵ e u_ϵ respectivamente, satisfazem a igualdade

$$z_\epsilon = \epsilon x_\epsilon,$$

e portanto

$$\lim_{\epsilon \to 0} V(z_\epsilon) = V_0,$$

mostrando a concentração os pontos de máximo das soluções em torno dos pontos de mínimo de V.

Capítulo 4

Soluções do tipo *multi-peak* para uma classe de problemas quasilineares em $\mathbb{R}^N$ envolvendo espaços de Orlicz-Sobolev

Neste capítulo, estabelecemos a existência de solução *multi-peak* para (P_ϵ), onde o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo $(\widetilde{V}_0)$ e $(\widetilde{V}_1)$. As funções $\phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são de classe C^1 verificando as hipóteses mencionadas na Introdução. Com esta finalidade, o estudo deste capítulo será dedicado a seguinte classe de problemas quasilineares

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + V(\epsilon x)\phi(|u|)u \;=\; f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \; u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\widetilde{P}_\epsilon$}$$

Aqui, generalizamos o estudo feito por Alves em [3], no sentido que, obtemos os mesmos tipos de resultados para uma classe mais ampla de operadores. Neste momento, vale ressaltar, que os resultados obtidos no presente capítulo são os primeiros no contexto dos espaços de Orlicz-Sobolev com o intuito de estabelecer existência de solução *multi-peak*.

4.1 Um problema auxiliar

Na presente seção, nosso principal objetivo é provar a existência de solução para um problema auxiliar usando a mesma abordagem encontrada em [3], [28] e [47].

Seja θ o número dado em (f_3), $a, \xi > 0$ satisfazendo

$$\xi > \frac{(\theta - l)}{(\theta - m)} \frac{m}{l} \quad \text{e} \quad \frac{f(a)}{\phi(a)a} = \frac{V_0}{\xi}.$$

Usando os números acima definimos a seguinte função

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & se \quad s \leq a, \\ \dfrac{V_0}{\xi}\phi(s)s & se \quad s > a. \end{cases}$$

Fixando $\Gamma \subset \{1, ..., \kappa\}$ definimos

$$\Omega = \bigcup_{i \in \Gamma} \Omega_i$$

e

$$g(x, s) = \chi_\Omega(x) f(s) + (1 - \chi_\Omega(x))\widetilde{f}(s),$$

onde χ_Ω é a função característica ao conjunto Ω.

Por definição g é uma função de Carathéodory verificando

$$g(x, s) = 0, \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0] \tag{4.1}$$

e

$$g(x, s) \leq f(s), \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, a função $s \to g(x, s)$ é de classe C^1 e satisfaz as seguintes condições:

(g_1) $0 \leq \theta G(x, s) = \theta \int_0^s g(x, t)dt \leq g(x, s)s$, $\forall (x, s) \in \Omega \times (0, +\infty)$.

(g_2) $0 < lG(x, s) \leq g(x, s)s \leq \dfrac{V_0}{\xi}\phi(s)s^2$, $\forall (x, s) \in \Omega^c \times (0, +\infty)$.

Usando a função g, podemos considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + V(\epsilon x)\phi(|u|)u \; = \; g(\epsilon x, u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N), \, u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{A_ϵ}$$

Denotaremos por funcional energia $J_\epsilon : X_\epsilon \to \mathbb{R}^N$ dado por

$$J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon x, u)dx.$$

Antes de seguir em frente, convém recordar que se u_ϵ é uma solução positiva de (A_ϵ) com $u_\epsilon(x) \leq a$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon$ com $\Omega_\epsilon = \Omega/\epsilon$, então u_ϵ é também uma solução positiva de $(\widetilde{P}_\epsilon)$.

4.1.1 O comportamento das sequências $(PS)_c^*$

A finalidade desta seção é estabelecer um resultado crucial para demonstração do Teorema C. Antes, contudo, de passarmos à proposição abaixo, precisamos apresentar uma definição que será usada ao longo do capítulo.

Diremos que (u_n) é uma sequência $(PS)_c^*$ quando

$$(u_n) \subset X_{\epsilon_n}, \;\; \epsilon_n \to 0, \;\; J_{\epsilon_n}(u_n) \to c \;\text{ e }\; \|J'_{\epsilon_n}(u_n)\| \to 0.$$

O principal resultado desta subseção é o seguinte:

Proposição 4.1.1. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c^*$. Então, existe uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), um número inteiro p, sequências de pontos $(y_{n,j}) \subset \mathbb{R}^N$ com $j = 1, ..., p$ tais que*

$$\epsilon_n y_{n,j} \to x_j \in \overline{\Omega} \quad e \quad |y_{n,j} - y_{n,i}| \to +\infty \quad quando \;\; n \to +\infty$$

e

$$\Big\| u_n(\cdot) - \sum_{j=1}^{p} u_{0,j}(\cdot - y_{n,j})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,j}) \Big\|_{\epsilon_n} \to 0 \;\; quando \;\; n \to +\infty$$

onde $\varphi_\epsilon(x) = \varphi\big(x/(-\ln\epsilon)\big)$ para $0 < \epsilon < 1$, e φ é uma função corte satisfazendo $\varphi(z) = 1$ para $|z| \leq 1$, $\varphi(z) = 0$ para $|z| \geq 2$ e $|\nabla\varphi| \leq 2$. A função $u_{0,j} \neq 0$ é solução não negativa de

$$-\Delta_\Phi u + V_j \phi(|u|)u = g_{0,j}(x, u) \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{P^j}$$

onde $V_j = V(x_j) \geq V_0 > 0$ e $g_{0,j}(x, u) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,j}, u)$. Além disso, temos $c \geq 0$ e

$$c = \sum_{j=1}^{p} J_{0,j}(u_{0,j}),$$

onde $J_{0,j} : W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ *denota o funcional dado por*

$$J_{0,j}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + V_j \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_{0,j}(x,u)dx$$

com $G_{0,j}(x,t) = \int_0^t g_{0,j}(x,s)ds$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c^*$. Argumentando como no Lema 3.1.3, mostra-se que existe $C > 0$, independente de n, tal que

$$\|u_n\|_{\epsilon_n} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, usando $(\widetilde{V}_0)$, obtém-se (u_n) limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$c + o_n(1) = J_{\epsilon_n}(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_{\epsilon_n}(u_n)u_n. \tag{4.3}$$

Por outro lado, combinando (ϕ_2) com (g_1)-(g_2), conclui-se que

$$J_{\epsilon_n}(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_{\epsilon_n}(u_n)u_n \geq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|u_n|)dx \right), \tag{4.4}$$

onde $C_1 = \left[\left(1 - \frac{m}{\theta}\right) - \left(1 - \frac{l}{\theta}\right)\frac{m}{\xi l} \right] > 0$. Assim, de (4.3) e (4.4) segue que $c \geq 0$ e, se $c = 0$, resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|u_n|)dx \to 0$$

implicando que $\|u_n\|_{\epsilon_n} \to 0$. Dessa forma, desse ponto em diante, iremos considerar apenas o caso em que $c > 0$.

Afirmamos que existem constantes positivas ρ, a, uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), e uma sequência $(y_{n,1}) \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\int_{B_\rho(y_{n,1})} \Phi(|u_n(x)|)dx \geq a > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Caso contrário, desde que (u_n) é limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema 1.1.31,

$$\int_{\mathbb{R}^N} B(|u_n|)dx \to 0.$$

Observando que

$$\begin{aligned} J'_{\epsilon_n}(u_n)u_n \;&=\; \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\phi(|u_n|)|u_n|^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_{\epsilon_n}} g(\epsilon_n x, u_n)u_n dx - \int_{\Omega_{\epsilon_n}} f(u_n)u_n dx, \end{aligned}$$

e usando (f_1), (ϕ_2) e (b_2), obtemos

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^N} B(|u_n|)dx + J'_{\epsilon_n}(u_n)u_n \geq l\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|u_n|)dx\Big)$$

e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|u_n|)dx \to 0.$$

Ora, como

$$c + o_n(1) = J_{\epsilon_n}(u_n) \overbrace{\leq}^{(4.1)} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\Phi(|u_n|)dx$$

deduzimos que $c = 0$ o que é uma contradição, mostrando que (4.5) ocorre.

No que segue, considere $w_{n,1}(x) = u_n(x + y_{n,1})$. Usando $(\widetilde{V}_0)$, mostra-se que $(w_{n,1})$ limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe $u_{0,1} \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$w_{n,1} \rightharpoonup u_{0,1} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

O limite acima juntamente com (4.5) implica que $u_{0,1} \neq 0$.

Com o intuito de provar que $u_{0,1}$ é uma solução de (P^1), mostraremos primeiro a afirmação seguinte.

Afirmação 4.1.2. *A sequência $(\epsilon_n y_{n,1})$ é limitada. Além disso, existe $x_1 \in \overline{\Omega}$ tal que, a menos de subsequência, $\epsilon_n y_{n,1} \to x_1$.*

Com efeito, suponha por contradição que $(\epsilon_n y_{n,1})$ é uma sequência ilimitada. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$|\epsilon_n y_{n,1}| \to +\infty.$$

Usando o limite $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \epsilon \ln \epsilon = 0$, verifica-se que para n suficientemente grande

$$\epsilon_n y_{n,1} + \epsilon_n x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \quad \text{para} \quad |x| < 2|\ln \epsilon_n|.$$

Considerando $v_n(x) = u_n(x)\varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1})$, tem-se $(\|v_n\|_{\epsilon_n})$ limitada em $\mathbb{R}$ e, sendo (u_n) uma sequência $(PS)^*_c$, vem que $J'_{\epsilon_n}(u_n)v_n = o_n(1)$.

Por outro lado, note que

$$
\begin{aligned}
J'_{\epsilon_n}(u_n)v_n &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla v_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)\phi(|u_n|)u_n v_n dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, u_n) v_n dx \\
&\overbrace{\geq}^{(\widetilde{V}_0)} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + V_0 \phi(|u_n|)|u_n|^2\Big)\varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1})dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} u_n \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla \varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1}) - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, u_n)u_n \varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1})dx \\
&\overbrace{\geq}^{(\phi_2)} l \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V_0 \Phi(|u_n|)\Big)\varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1})dx \\
&\quad - \frac{2}{|\ln \epsilon_n|} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||u_n|dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, u_n)u_n \varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1})dx.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||u_n|dx < +\infty,
$$

pois sendo (u_n) limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n||u_n|dx &\overbrace{\leq}^{\text{Young}} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n|)dx \\
&\overbrace{\leq}^{\text{Lema1.1.17}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(2|\nabla u_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n|)dx \\
&\leq (c+1) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u_n|)dx < +\infty.
\end{aligned}
$$

Recorde que se $|x| < 2|\ln \epsilon_n|$, então $\epsilon_n y_{n,1} + \epsilon_n x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega$ para todo n suficientemente grande. Assim,

$$
\begin{aligned}
J'_{\epsilon_n}(u_n)v_n &\geq l \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_n|) + V_0 \Phi(|u_n|)\Big)\varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1})dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, u_n)u_n \varphi_{\epsilon_n}(x - y_{n,1})dx + o_n(1) \\
&= l \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla w_{n,1}|) + V_0 \Phi(|w_{n,1}|)\Big)\varphi_{\epsilon_n}(x)dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1})w_{n,1} \varphi_{\epsilon_n}(x)dx + o_n(1) \\
&\overbrace{\geq}^{(g_2)} \Big(l - \frac{1}{\xi}\Big) \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla w_{n,1}|) + V_0 \Phi(|w_{n,1}|)\Big)\varphi_{\epsilon_n}(x)dx + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Desde que $w_{n,1} \rightharpoonup u_{0,1}$ em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, pelo o Lema de Fatou, segue-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_{0,1}|) + V_0\Phi(|u_{0,1}|)\Big)dx = 0$$

e, consequentemente, $u_{0,1} = 0$ o que é uma contradição, mostrando que $(\epsilon_n y_{n,1})$ é uma sequência limitada. Dessa forma, existe $x_1 \in \mathbb{R}^N$ tal que, a menos de subsequência,

$$\epsilon_n y_{n,1} \to x_1.$$

Agora, seguindo a mesma linha de raciocínio anterior verifica-se que $x_1 \in \overline{\Omega}$, o que prova a Afirmação 4.1.2.

Vejamos agora que $u_{0,1}$ é uma solução de (P^1). Argumentando como no Lema 2.2.4, obtém-se uma subsequência de $(w_{n,1})$, ainda denotada por $(w_{n,1})$, tal que

$$w_{n,1}(x) \to u_{0,1}(x) \ \text{ e } \ \nabla w_{n,1}(x) \to \nabla u_{0,1}(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{4.6}$$

Dado $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ observamos que

$$J'_{\epsilon_n}(u_n)\big(v(x - y_{n,1})\big) = o_n(1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} o_n(1) \;=\; & \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla w_{n,1}(x)|)\nabla w_{n,1}(x)\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1})\phi(|w_{n,1}(x)|)w_{n,1}(x)v dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1})v dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.2.3 juntamente com a Afirmação 4.1.2, resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla w_{n,1}(x)|)\nabla w_{n,1}(x)\nabla v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_{0,1}(x)|)\nabla u_{0,1}\nabla v dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1})\phi(|w_{n,1}(x)|)w_{n,1}(x)v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(x_1)\phi(|u_{0,1}(x)|)u_{0,1}v dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1})v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} g(x_1, u_{0,1})v dx$$

onde, no último limite, usamos a convergência $w_{n,1} \rightharpoonup u_{0,1}$ em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u_{0,1}(x)|)\nabla u_{0,1}\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x_1)\phi(|u_{0,1}(x)|)u_{0,1}v dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x_1, u_{0,1})v dx,$$

por conseguinte, $u_{0,1}$ é solução de (P^1).

A seguir, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$u_n^1(x) = u_n(x) - (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1}).$$

Agora, nosso objetivo imediato é mostrar que (u_n^1) é uma sequência $(PS)^*_{c-J_{0,1}(u_{0,1})}$, isto é,

$$J_{\epsilon_n}(u_n^1) \to c - J_{0,1}(u_{0,1}) \quad \text{e} \quad \|J'_{\epsilon_n}(u_n^1)\| \to 0.$$

Primeiramente, provaremos que

$$J_{\epsilon_n}(u_n^1) \to c - J_{0,1}(u_{0,1}). \tag{4.7}$$

Para tanto, é suficiente mostrar a

Afirmação 4.1.3.

$$J_{\epsilon_n}(u_n^1) = J_{\epsilon_n}(u_n) - J_{\epsilon_n}\big((u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1})\big) + o_n(1).$$

De fato, suponha por um momento que o limite acima ocorre. Usando a definição de φ_{ϵ_n}, um cálculo simples nos permite concluir que

$$u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n} \to u_{0,1} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N). \tag{4.8}$$

Então,

$$J_{\epsilon_n}\big((u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1})\big) \to J_{0,1}(u_{0,1})$$

e como $J_{\epsilon_n}(u_n) \to c$, segue-se (4.7).

No que segue, defina

$$L_{n,1} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|\nabla u_n^1|) - \Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1})|)\Big)dx,$$

$$L_{n,2} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Phi(|u_n^1|) - \Phi(|u_n|) + \Phi(|(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1})|)\Big)V(\epsilon_n x)dx,$$

$$L_{n,3} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(G(\epsilon_n x, u_n) - G(\epsilon_n x, u_n^1) - G\big(\epsilon_n x, (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1})\big)\Big)dx.$$

A fim de que se tenha a Afirmação 4.1.3 é suficiente mostrar que

$$L_{n,1} + L_{n,2} + L_{n,3} = o_n(1). \tag{4.9}$$

Dessa forma, na sequência, verificaremos a validade de (4.9). Começamos notando que

$$\begin{aligned} L_{n,1} &= \int_{B_{2|\ln \epsilon_n|}(0)} \Big(\Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})|) - \Phi(|\nabla w_{n,1}|) + \Phi(|\nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})|)\Big)dx \\ &= \int_{B_{2|\ln \epsilon_n|}(0)} \Big(\Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})|) - \Phi(|\nabla w_{n,1}|) + \Phi(|\nabla u_{0,1}|)\Big)dx + o_n(1), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos a convergência dada em (4.8). Por outro lado, combinando (4.6) com o Lema 2.2.10 decorre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla u_{0,1}|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla w_{n,1}|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_{0,1}|)dx + o_n(1).$$

Logo,

$$L_{n,1} = \int_{B_{2|\ln \epsilon_n|}(0)} \Big(\Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})|) - \Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla u_{0,1}|)\Big)dx + o_n(1). \tag{4.10}$$

Segue-se do Teorema do Valor Médio,

$$\Big|\Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})|) - \Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla u_{0,1}|)\Big| \leq \phi(|\theta_n|)|\theta_n||\nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n}) - \nabla u_{0,1}|,$$

onde $|\theta_n| \leq 2(|\nabla w_{n,1}| + |\nabla u_{0,1}|)$. Uma vez que $\big(\phi(|\theta_n|)|\theta_n|\big)$ é limitada em $L^{\Phi}(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\Phi}\big(\phi(|\theta_n|)|\theta_n|\big)dx &\overbrace{\leq}^{\text{Lema}1.1.17} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(2|\theta_n|)dx \\ &\overbrace{\leq}^{\Delta_2} c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla w_{n,1}|)dx + c_2 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u_{0,1}|)dx < +\infty, \end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder que

$$\int_{B_{2|\ln \epsilon_n|}(0)} \phi(|\theta_n|)|\theta_n||\nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n}) - \nabla u_{0,1}|dx \leq 2\|\phi(|\theta_n|)|\theta_n|\|_{\widetilde{\Phi}}\|\nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n}) - \nabla u_{0,1}\|_{\Phi}.$$

A desigualdade acima com a convergência em (4.8) implica que

$$\int_{B_{2|\ln \epsilon_n|}(0)} \Big|\Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})|) - \Phi(|\nabla w_{n,1} - \nabla u_{0,1}|)\Big|dx = o_n(1). \tag{4.11}$$

De (4.10) e (4.11), segue que $L_{n,1} = o_n(1)$. Procedendo-se de maneira análoga, obtemos $L_{n,2} = o_n(1)$. Resta-nos provar que

$$L_{n,3} = o_n(1).$$

Para isso, observe que, efetuando uma mudança de variável

$$\begin{aligned} L_{n,3} \quad = \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \Big(G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1}) - G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1} - (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})) \\ & -G\big(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})\big)\Big) dx. \end{aligned}$$

Desde que

$$u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n} \to u_{0,1} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

por (f_1), dado $\eta > 0$ exitem $\rho > 0$ e $n_{0,1} \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left| \int_{|x|\geq\rho} G\big(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})\big) dx \right| \leq \eta, \quad \text{para todo } n \geq n_{0,1}.$$

Além disso, aplicando novamente o Teorema do Valor Médio juntamente com (4.2), temos

$$\Big| G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1}) - G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1} - (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})) \Big| \leq |f(\theta_n)||u_{0,1}|,$$

onde $|\theta_n| \leq 2|w_{n,1}| + u_{0,1}$. Por outro lado, por (f_1)

$$f(\theta_n)u_{0,1} \leq \eta\phi(|\theta_n|)|\theta_n||u_{0,1}| + c_\eta b(|\theta_n|)|\theta_n||u_{0,1}|$$

Sendo $\big(\phi(|\theta_n|)|\theta_n|\big)$ e $\big(b(|\theta_n|)|\theta_n|\big)$ limitadas em $L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^N)$ e $L^{\widetilde{B}}(\mathbb{R}^N)$, respectivamente, segue da Desigualdade de Hölder e da convergência em (4.8) que existe $n_{0,2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{|x|\geq\rho} \big(G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1}) - G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1} - (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n}))\big) dx \right| \leq \eta,$$

para todo $n \geq n_{0,2}$. Pelas imersões

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\Phi}(B_\rho(0)) \quad \text{e} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{B}(B_\rho(0))$$

compactas, um cálculo direto acarreta na existência de $n_{0,3} \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & \Bigg| \int_{|x|\leq\rho} \Big(G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1}) - G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, w_{n,1} - (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})) \\ & -G\big(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,1}, (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})\big)\Big) dx \Bigg| \leq \eta \ \text{ para todo } n \geq n_{0,3}. \end{aligned}$$

Segue das desigualdades anteriores que $L_{n,3} = o_n(1)$ e, portanto, a Afirmação 4.1.3 é válida.

Mostraremos agora que

$$\|J'_{\epsilon_n}(u_n^1)\| \to 0. \tag{4.12}$$

Para tanto, basta mostrar a

Afirmação 4.1.4.

$$\|J'_{\epsilon_n}(u_n) - J'_{\epsilon_n}(u_n^1) - J'_{\epsilon_n}\big((u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1})\big)\| \to 0.$$

Com efeito, desde que

$$u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n} \to u_{0,1} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),$$

tem-se

$$J'_{\epsilon_n}\big((u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,1})\big) \to J'_{0,1}(u_{0,1}) = 0$$

e como $\|J'_{\epsilon_n}(u_n)\| \to 0$, pois (u_n) é uma sequência $(PS)_c^*$, obtém-se o limite em (4.12).

A seguir, iremos verificar que a Afirmação 4.1.4 ocorre. Para isto, seja $\psi_n \in X_{\epsilon_n}$ com $\|\psi_n\|_{\epsilon_n} \leq 1$. Aplicando a Desigualdade de Hölder juntamente com a Proposição 1.2.1,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi(|\nabla w_{n,1}|)\nabla w_{n,1} - \phi(|\nabla v_{n,1}|)\nabla v_{n,1} - \phi(|\nabla u_{0,1}|)\nabla u_{0,1}\Big)\nabla\psi_n(x + y_{n,1})dx\right| \\
\leq\ & 2\||\phi(|\nabla w_{n,1}|)\nabla w_{n,1} - \phi(|\nabla v_{n,1}|)\nabla v_{n,1} - \phi(|\nabla u_{0,1}|)\nabla u_{0,1}|\|_{\widetilde{\Phi}}\|\nabla\psi_n\|_{\Phi} \\
\leq\ & 2o_n(1)\|\psi_n\|_{\epsilon_n}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $v_{n,1} = w_{n,1} - u_{0,1}$. Usando novamente a convergência $u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n} \to u_{0,1}$ em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$, conclui-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi\big(|\nabla v_{n,1}|\big)\nabla v_{n,1} - \phi(|\nabla u_n^1(x + y_{n,1})|)\nabla u_n^1(x + y_{n,1})\Big)\nabla\psi_n(x + y_{n,1})dx = o_n(1) \tag{4.14}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi(|\nabla u_{0,1}|)\nabla u_{0,1} - \phi(|\nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})|)\nabla(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})\Big)\nabla\psi_n(x + y_{n,1})dx = o_n(1). \tag{4.15}$$

Considerando

$$L_{n,4} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u_n^1|)\nabla u_n^1 - \phi(|\nabla (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x-y_{n,1})|)\nabla (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x-y_{n,1})\Big)\nabla \psi_n dx,$$

e usando (4.14)-(4.15), ficamos com

$$L_{n,4} \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi(|\nabla w_{n,1}|)\nabla w_{n,1} - \phi(|\nabla v_{n,1}|)\nabla v_{n,1} - \phi(|\nabla u_{0,1}|)\nabla u_{0,1}\Big)\nabla \psi_n(x+y_{n,1}) dx + o_n(1).$$

Logo, por (4.13)

$$\sup_{\|\psi_n\|_{\epsilon_n}\leq 1} L_{n,4} = o_n(1).$$

De maneira análoga, considerando

$$L_{n,5} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\phi(|u_n|)u_n - \phi(|u_n^1|)u_n^1 - \phi(|(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x-y_{n,1})|)(u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x-y_{n,1})\Big)\psi_n V(\epsilon_n x) dx,$$

verifica-se que

$$\sup_{\|\psi_n\|_{\epsilon_n}\leq 1} L_{n,5} = o_n(1).$$

Por fim, definindo

$$L_{n,6} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(g(\epsilon_n x, u_n) - g(\epsilon_n x, u_n^1) - g\big(\epsilon_n x, (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x-y_{n,1})\big)\Big)\psi_n dx$$

e procedendo de maneira similar a demonstração que $L_{n,3} = o_n(1)$, mostra-se

$$\sup_{\|\psi_n\|_{\epsilon_n}\leq 1} L_{n,6} = o_n(1).$$

Portanto,

$$\sup_{\|\psi_n\|_{\epsilon_n}\leq 1} |L_{n,4} - L_{n,5} - L_{n,6}| = o_n(1),$$

o que prova a Afirmação 4.1.4. Por (4.7) e (4.12), resulta que (u_n^1) é uma sequência $(PS)^*_{c-J_{0,1}(u_{0,1})}$.

Uma vez que (u_n^1) é uma sequência $(PS)^*_{c-J_{0,1}(u_{0,1})}$, podemos repetir os argumentos anteriores para encontrar uma sequência $(y_{n,2}) \subset \mathbb{R}^N$ verificando

$$\int_{B_\rho(y_{n,2})} \Phi(|u_n^1(x)|)dx \geq a_1 > 0. \tag{4.16}$$

Note que a sequência $(y_{n,2})$ pode ser escolhida de maneira que

$$|y_{n,2} - y_{n,1}| \to +\infty. \tag{4.17}$$

De fato, suponha por contradição que $\big(|y_{n,2} - y_{n,1}|\big)$ é limitada em $\mathbb{R}$. Assim, por (4.16), existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$\int_{B_\rho(y_{n,2})} \Phi(|u_n^1(x)|)dx \leq \int_{B_{\rho_1}(0)} \Phi(|w_n(x) - (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x)|)dx.$$

Então,

$$\int_{B_{\rho_1}(0)} \Phi(|w_n(x) - (u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n})(x)|)dx \geq a_1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição, pois $w_n - u_{0,1}\varphi_{\epsilon_n} \to 0$ em $L^\Phi(B_{\rho_1}(0))$, isso mostra o limite em (4.17).

Considerando $w_{n,2}(x) = u_n^1(x + y_{n,2})$ segue que $(w_{n,2})$ é limitada em $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, existe $u_{0,2} \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$w_{n,2} \rightharpoonup u_{0,2} \quad \text{em} \quad W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N).$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio usado anteriormente deduzimos que

$$w_{n,2}(x) \to u_{0,2}(x),\ \nabla w_{n,2}(x) \to \nabla u_{0,2}(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Além disso, mostra-se que $u_{0,2}$ é solução de (P^2) e sequência (u_n^2) dada por

$$u_n^2(x) = u_n^1(x) - (u_{0,2}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,2})$$

verifica

$$J_{\epsilon_n}(u_n^2) \to c - J_{0,1}(u_{0,1}) - J_{0,2}(u_{0,2}) \quad \text{e} \quad \|J'_{\epsilon_n}(u_n^2)\|_{\epsilon_n}^* \to 0,$$

isto é, (u_n^2) é uma sequência $(PS)^*_{c-J_{0,1}(u_{0,1})-J_{0,2}(u_{0,2})}$. Continuando com este raciocínio, encontramos sequências $(y_{n,s}) \subset \mathbb{R}^N$ e $(u_n^s) \subset W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ com

$$u_n^s(x) = u_n^{s-1}(x) - (u_{0,s}\varphi_{\epsilon_n})(x - y_{n,s})$$

satisfazendo

$$J_{\epsilon_n}(u_n^s) \to c - \sum_{i=1}^{s} J_{0,i}(u_{0,i}), \quad \|J'_{\epsilon_n}(u_n^s)\|_{\epsilon_n}^* \to 0 \quad \text{e} \quad |y_{n,j} - y_{n,i}| \to +\infty \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Finalmente, argumentando como [47, Proposição 2.2], encontramos $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$J_{\epsilon_n}(u_n^p) \to 0 \quad \text{e} \quad \|J'_{\epsilon_n}(u_n^p)\|_{\epsilon_n}^* \to 0,$$

implicando que

$$\|u_n^p\|_{\epsilon_n} \to 0 \qquad \text{e} \qquad c = \sum_{i=1}^{p} J_{0,i}(u_{0,i}),$$

finalizando a demonstração. ■

4.2 Existência de solução para $(\tilde{P}_\epsilon)$

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar a existência um valor crítico especial para J_ϵ para ϵ suficientemente pequeno. Este fato é fundamental nos argumentos usados na prova da existência de solução multi-peak para o problema (P_ϵ).

No que segue, sejam $\widetilde{\Omega}_{\epsilon,1}, \widetilde{\Omega}_{\epsilon,2}, ..., \widetilde{\Omega}_{\epsilon,\kappa} \subset \mathbb{R}^N$ conjuntos abertos limitados satisfazendo

$$\overline{\Omega}_{\epsilon,i} \subset \widetilde{\Omega}_{\epsilon,i} \quad \text{e} \quad \widetilde{\Omega}_{\epsilon,i} \cap \widetilde{\Omega}_{\epsilon,j} = \emptyset \quad \text{para } i \neq j.$$

A seguir, denotamos por $E_i : W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ e $E_{\epsilon,i} : \widetilde{X}_{\epsilon,i} \to \mathbb{R}$ os seguintes funcionais

$$E_i(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_i \Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

e

$$\widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) = \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \Phi(|\nabla u|)dx + \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx - \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} G(\epsilon x, u)dx,$$

onde $\widetilde{X}_{\epsilon,i}$ denota o subespaço de $W^{1,\Phi}(\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i})$ dado por

$$\widetilde{X}_{\epsilon,i} = \Big\{ u \in W^{1,\Phi}(\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}) \, : \, \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx < +\infty \Big\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} = \|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} + \|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}},$$

onde

$$\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} := \inf \Big\{ \lambda > 0\, ; \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \Phi\Big(\frac{|\nabla u|}{\lambda}\Big)dx \leq 1 \Big\}$$

e

$$\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} := \inf \Big\{ \lambda > 0\, ; \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\Phi\Big(\frac{|u|}{\lambda}\Big)dx \leq 1 \Big\}.$$

Com os mesmos argumentos usados no Lema 3.1.2, mostra-se que existem funções $w_i \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ e $w_{\epsilon,i} \in \widetilde{X}_{\epsilon,i}$ satisfazendo

$$E_i(w_i) = \mu_i, \quad \widetilde{E}_{\epsilon,i}(w_{\epsilon,i}) = \widetilde{\mu}_{\epsilon,i} \quad \text{e} \quad E_i'(w_i) = \widetilde{E}_{\epsilon,i}'(w_{\epsilon,i}) = 0,$$

onde

$$\mu_i = \inf_{u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \sup_{t\geq 0} E_i(tu) = \inf_{\alpha\in\Gamma_i} \sup_{t\in[0,1]} E_i(\alpha(t)),$$

$$\widetilde{\mu}_{\epsilon,i} = \inf_{u\in\widetilde{X}_{\epsilon,i}\{0\}} \sup_{t\geq 0} E_i(tu) = \inf_{\alpha\in\widetilde{\Gamma}_{\epsilon,i}} \sup_{t\in[0,1]} E_i(\alpha(t)),$$

$$\Gamma_i = \big\{\alpha \in C([0,1], W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)) \,:\, \alpha(0)=0,\, E_i(\alpha(1))<0\big\}$$

e

$$\widetilde{\Gamma}_{\epsilon,i} = \big\{\alpha \in C([0,1], \widetilde{X}_{\epsilon,i}) \,:\, \alpha(0)=0,\, \widetilde{E}_{\epsilon,i}(\alpha(1))<0\big\}.$$

4.2.1 Alguns resultados envolvendo os níveis μ_i e $\widetilde{\mu}_{\epsilon,i}$

Primeiramente, mostraremos algumas propriedades da variedade de Nehari associada a $\widetilde{E}_{\epsilon,i}$ dada por

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i} = \big\{u \in \widetilde{X}_{\epsilon,i}\setminus\{0\} \;:\; \widetilde{E}'_{\epsilon,i}(u)u = 0\big\}.$$

Lema 4.2.1. *Existem $\sigma_0, \sigma_1 > 0$, independente de ϵ, tais que*

$$\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} > \sigma_0 \quad e \quad \widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) > \sigma_1, \quad \forall u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i}, \;\; \forall i \in \Gamma.$$

Demonstração. Note que, dado $u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i}$,

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx + \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\phi(|u|)|u|^2 dx = \int_{\Omega_{\epsilon,i}} f(u)u dx + \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}\setminus\Omega_{\epsilon,i}} g(\epsilon x, u)u dx.$$

Por (f_1) e $(\widetilde{V}_0)$, dado $\eta > 0$ existe $c_\eta > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_{\epsilon,i}} f(u)u dx \leq \frac{\eta}{V_0}\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\phi(|u|)|u|^2 + c_\eta \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \Phi_*(|u|)dx.$$

Além disso, por (g_2),

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}\setminus\Omega_{\epsilon,i}} g(\epsilon x, u)u dx \leq \frac{1}{\xi}\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\phi(|u|)|u|^2 dx.$$

Recordando que $l\Phi(t) \leq \phi(t)t$ para todo $t \geq 0$, usando as desigualdades acima, obtém-se

$$c_1\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \Phi(|\nabla u|)dx + \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\Phi(|u|)dx\Big) \leq c_2 \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \Phi_*(|u|)dx.$$

Aplicando os Lemas 1.1.32 e 1.1.33, ficamos com

$$c_1\big(\xi_0(\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}) + \xi_0(\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}})\big) \leq c_2\xi_3(\|u\|_{\Phi_*,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}).$$

Pela Proposição B.2, existe uma constante positiva M^*, independente de ϵ, tal que

$$\|u\|_{\Phi_*,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \leq M^*\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}}$$

e, daí,

$$c_1\big(\xi_0(\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}) + \xi_0(\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}})\big) \leq c_2 M^* \xi_3(\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}}).$$

Se $\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \geq 1$, para todo $u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i}$ não há nada a ser feito. Se existe $u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i}$ tal que $\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \leq 1$ tem-se

$$c_3\|u\|^m_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \leq c_2 M^*\|u\|^{l^*}_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}},$$

o que resulta

$$\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \geq \Big(\frac{c_3}{c_2 M^*}\Big)^{l^*-m}.$$

Considerando $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}\min\Big\{1, \Big(\dfrac{c_3}{c_2M^*}\Big)^{l^*-m}\Big\}$, conclui-se que

$$\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} > \sigma_0, \quad \forall u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i}.$$

Por outro lado, dado $u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i}$, combinando as hipóteses (ϕ_2) e (g_1)-(g_2), deduzimos

$$\widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) = \widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) - \frac{1}{\theta}\widetilde{E}'_{\epsilon,i}(u)u \geq C\Bigg(\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \Phi(|\nabla u_n|)dx + \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} V(\epsilon x)\Phi(u_n)dx\Bigg),$$

onde $C = \Big[\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big) - \Big(1 - \frac{l}{\theta}\Big)\frac{m}{\xi l}\Big]$. Portanto, pelo Lema 1.1.32

$$\widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) \;\; \geq \;\; C\big(\xi_0(\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}) + \xi_0(\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}})\big).$$

Se $\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \leq 1$, então $\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \leq 1$ e $\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \leq 1$. Assim,

$$\widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) \geq 2^{-m}C\sigma_0^m.$$

Se $\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \geq 1$, então

- $\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \leq 1 \leq \|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \;\; \Rightarrow \;\; \|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \leq 2\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}$.

- $\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \leq 1 \leq \|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \;\; \Rightarrow \;\; \|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \leq 2\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}$.

Em qualquer caso

$$\widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) \geq C\xi_0(\sigma_0).$$

- $\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \geq 1$ e $\|u\|_{\Phi,V_\epsilon,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} \geq 1$.

Neste caso,

$$\widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) \geq 2^{-l} C \sigma_0^l.$$

Para finalizar, considerando $\sigma_1 = \dfrac{1}{2} \min \left\{2^{-m} C\sigma_0^m, 2^{-l} C\sigma_0^l, C\xi_0(\sigma_0)\right\}$, vem que

$$\widetilde{E}_{\epsilon,i}(u) \geq \sigma_1,$$

mostrando o resultado. ■

No próximo lema estudamos o comportamento dos níveis μ_i e $\widetilde{\mu}_{\epsilon,i}$ quando $\epsilon \to 0$.

Lema 4.2.2. *Para cada $i \in \Gamma$, o seguinte limite ocorre*

$$\widetilde{\mu}_{\epsilon,i} \to \mu_i \quad \textit{quando} \quad \epsilon \to 0.$$

Demonstração. Iniciamos mostrando que

$$\widetilde{\mu}_{\epsilon,i} \leq \mu_i + o(\epsilon). \tag{4.18}$$

Para tanto, seja $w_i \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$E_i(w_i) = \mu_i \quad \text{e} \quad E_i'(w_i) = 0.$$

Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, fixemos $\vartheta \in C_0^\infty\big([0,+\infty),[0,1]\big)$ verificando

$$\vartheta(s) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{\delta}{2}, \\ 0 & \text{se} \quad s \geq \delta. \end{cases}$$

Usando a função ϑ, definimos

$$w_{\epsilon,i}(x) = \vartheta(|\epsilon x - x_i|) w_i(\frac{\epsilon x - x_i}{\epsilon}),$$

onde $V(x_i) = \min\limits_{y \in \overline{\Omega}_i} V(y)$. Note que, $\operatorname{supp}(w_{\epsilon,i}) \subset B_\delta(\frac{x_i}{\epsilon})$ o que implica $w_{\epsilon,i} \in \widetilde{X}_{\epsilon,i}$. Além disso, existe $t_{\epsilon,i} > 0$ tal que $\Psi_{\epsilon_n,i} := t_{\epsilon,i} w_{\epsilon,i} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon,i}$ e

$$\widetilde{\mu}_{\epsilon,i} \leq \max_{t \geq 0} \widetilde{E}_{\epsilon,i}(t w_{\epsilon,i}) = \widetilde{E}_{\epsilon,i}(t_{\epsilon,i} w_{\epsilon,i}).$$

Agora, usando o mesmo raciocínio da demonstração do Lema 3.1.12 verifica-se que a sequência $(t_{\epsilon_n,i})$ é limitada e

$$t_{\epsilon_n,i} \to 1.$$

Isso com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos permite concluir que

$$\lim_{\epsilon_n \to 0} \widetilde{E}_{\epsilon_n,i}(t_{\epsilon_n,i} w_{\epsilon_n,i}) = E_i(w_i) = \mu_i$$

e, consequentemente,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \widetilde{\mu}_{\epsilon,i} \leq \mu_i. \tag{4.19}$$

Desse ponto em diante, nosso objetivo será provar que

$$\mu_i \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \widetilde{\mu}_{\epsilon,i}. \tag{4.20}$$

Com este propósito, sejam $\epsilon_n \in (0, +\infty)$ com $\epsilon_n \to 0$ e $v_{\epsilon_n,i} \in \widetilde{X}_{\epsilon_n,i}$ uma solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u + V(\epsilon_n x)\phi(|u|)u \;=\; g(\epsilon x, u) \text{ em } \widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ sobre } \partial\widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}, \end{cases} \tag{$P_{\epsilon,i}$}$$

Pelo Lema 4.2.1, existe $\sigma_0 > 0$, independente de ϵ_n, tal que

$$\|v_{\epsilon_n,i}\|_{X_{\epsilon_n,i}} \geq \sigma_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Usando a desigualdade acima com Lema C.1, mostra-se que existem $(y_{n,i}) \subset \mathbb{R}^N$, $\varrho > 0$ e $a > 0$ satisfazendo

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{B_\varrho(y_{n,i}) \cap \Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|v_{\epsilon_n,i}|)dx \geq a. \tag{4.21}$$

Além disso, por (4.21), aumentando ϱ se necessário, podemos assumir que $(y_{n,i}) \subset \Omega_{\epsilon_n,i}$ com $\operatorname{dist}(y_{n,i}, \partial\widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}) \to +\infty$. Portanto, $\epsilon_n y_{n,i} \to \overline{x}_i \in \overline{\Omega}_i$ e dado $\rho > \varrho$, temos $B_{2\rho}(y_{n,i}) \subset \widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}$ para todo n suficientemente grande. Considerando

$$w_{n,i,\rho}(x) = \psi\Big(\frac{|x|}{\rho}\Big) v_{\epsilon_n,i}(x + y_{n,i}), \quad \forall x \in \widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i} - y_{n,i}$$

onde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfaz $\psi = 1$, em $[0,1]$, $\psi = 0$, em $(2,+\infty)$, $0 \le \psi \le 1$ e $\psi' \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se

$$\int_{B_\varrho(0)} \Phi(|w_{n,i,\rho}|)dx = \int_{B_\varrho(y_{n,i})} \Phi(|v_{\epsilon_n,i}|)dx \ge a > 0.$$

Desde que $\mathrm{supp}(w_{n,i,\rho}) \subset B_{2\rho}(0)$, segue que $w_{n,i,\rho} \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Sendo $v_{\epsilon_n,i}$ uma solução de $(P_{\epsilon,i})$, usando (4.18), por cálculo direto, existe $C > 0$, independente de ρ, tal que $\|w_{n,i,\rho}\|_{1,\Phi} \le C$. Logo,

$$w_{n,i,\rho} \rightharpoonup w^i_\rho \text{ em } W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

para algum $w^i_\rho \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$. Então,

$$w_{n,i,\rho} \to w^i_\rho \quad \text{em} \quad L^\Phi(B_\varrho(0)) \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Consequentemente,

$$\int_{B_\varrho(0)} \Phi(|w^i_\rho|)dx \ge a > 0. \tag{4.22}$$

Uma vez que $(\|w^i_\rho\|_{1,\Phi})$ é limitada em $\mathbb{R}$, existe $w \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$w^i_\rho \rightharpoonup w^i \text{ em } W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando} \quad \rho \to +\infty,$$

de onde segue,

$$w^i_\rho \to w^i \quad \text{em} \quad L^\Phi_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando} \quad \rho \to +\infty$$

e, portanto,

$$\int_{B_\varrho(0)} \Phi(|w^i|)dx \ge a > 0. \tag{4.23}$$

Afirmação 4.2.3. *A função w^i é uma solução de (P^i).*

Com efeito, dado $\widetilde{\zeta} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, considere $t > 0$ tal que para todo n suficientemente grande,

$$\mathrm{supp}\widetilde{\zeta} \subset B_t(0) \quad \text{e} \quad B_t(y_{n,i}) \subset \widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}.$$

Sendo $v_{\epsilon_n,i}$ solução de $(P_{\epsilon,i})$, considerando $L(y) = \phi(|y|)y$ e $Q(s) = \phi(|s|)s$ $\forall y \in \mathbb{R}^N$ e $\forall s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{B_t(0)} \Big[L(\nabla v_{\epsilon_n,i}(x+y_{n,i}))\nabla\widetilde{\zeta}dx + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i})Q(v_{\epsilon_n,i}(x+y_{n,i}))\widetilde{\zeta}\Big]dx \\
= & \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}} \Big[L(\nabla v_{\epsilon_n,i})\nabla\widetilde{\zeta}(x-y_{n,i})dx + V(\epsilon_n x)Q(v_{\epsilon_n,i})\widetilde{\zeta}(x-y_{n,i})\Big]dx \\
= & \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}} g(\epsilon_n x, v_{\epsilon_n,i})v_{\epsilon_n,i}\widetilde{\zeta}(x-y_{n,i})dx \\
= & \int_{B_t(0)} g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i}, v_{\epsilon_n,i}(x+y_{n,i}))v_{\epsilon_n,i}(x+y_{n,i})\widetilde{\zeta}dx.
\end{aligned}$$

Para n suficientemente grande e $\rho > t$,

$$\begin{aligned}
& \int_{B_t(0)} \Big[L(\nabla w_{n,i,\rho})\nabla\widetilde{\zeta}dx + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i})Q(w_{n,i,\rho})\widetilde{\zeta}\Big]dx \\
= & \int_{B_t(0)} g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i}, w_{n,i,\rho})w_{n,i,\rho}\widetilde{\zeta}dx.
\end{aligned}$$

Passando ao limite na igualdade acima quando $n \to +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big[L(\nabla w^i_\rho)\nabla\widetilde{\zeta}dx + V(\overline{x}_i)Q(w^i_\rho)\widetilde{\zeta}\Big]dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\overline{x}_i, w^i_\rho)w^i_\rho\widetilde{\zeta}dx.$$

Agora, usando que supp$\zeta \subset B_t(0)$, $\rho > t$ e fazendo $\rho \to +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big[\phi(|\nabla w^i|)\nabla w^i\nabla\widetilde{\zeta}dx + V(\overline{x}_i)\phi(|w^i|)w^i\widetilde{\zeta}\Big]dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\overline{x}_i, w^i)w^i\widetilde{\zeta}dx.$$

Como $\widetilde{\zeta} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ foi arbitrário, concluímos que w^i é uma solução não-trivial de (P^i), mostrando a Afirmação 4.2.3.

Fixando $\tau > \rho$, tem-se $B_\tau(y_{n,i}) \subset \widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}$ para todo n suficientemente grande. Assim, definindo $h(t) = \Phi(t) - \frac{1}{\theta}\phi(t)t^2$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_{\epsilon_n,i} &= \widetilde{E}_{\epsilon_n,i}(v_{\epsilon_n,i}) - \frac{1}{\theta}\widetilde{E}'_{\epsilon_n,i}(v_{\epsilon_n,i})v_{\epsilon_n,i} \\
&\geq \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}} \Big[h(|\nabla v_{\epsilon_n,i}|) + V(\epsilon_n x)h(|v_{\epsilon_n,i}|)\Big]dx \\
&\quad + \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon_n,i}} \Big[\frac{1}{\theta}g(\epsilon_n x, v_{\epsilon_n,i})v_{\epsilon_n,i} - G(\epsilon_n x, v_{\epsilon_n,i})\Big]dx \\
&\geq \int_{B_\tau(y_{n,i})} \Big[h(|\nabla v_{\epsilon_n,i}|) + V(\epsilon_n x)h(|v_{\epsilon_n,i}|)\Big]dx \\
&\quad + \int_{B_\tau(y_{n,i})} \Big[\frac{1}{\theta}g(\epsilon_n x, v_{\epsilon_n,i})v_{\epsilon_n,i} - G(\epsilon_n x, v_{\epsilon_n,i})\Big]dx \\
&\geq \int_{B_\tau(0)} \Big[h(|\nabla w_{n,i,\rho}|) + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i})h(|w_{n,i,\rho}|)\Big]dx \\
&\quad + \int_{B_\tau(0)} \Big[\frac{1}{\theta}g(\epsilon_n x, w_{n,i,\rho})w_{n,i,\rho} - G(\epsilon_n x, w_{n,i,\rho})\Big]dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Fatou,

$$\liminf_{n\to+\infty} \widetilde{\mu}_{\epsilon_n,i} \geq \int_{B_\tau(0)} \Big[h(|\nabla w^i_\rho|) + V(\overline{x}_i)h(|w^i_\rho|)\Big]dx + \int_{B_\tau(0)} \Big[\frac{1}{\theta}g(\overline{x}_i, w^i_\rho)w^i_\rho - G(\overline{x}_i, w^i_\rho)\Big]dx.$$

Agora, fazendo $\rho \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \widetilde{\mu}_{\epsilon_n,i} &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \Big[h(|\nabla w^i|) + V(\overline{x}_i)h(|w^i|)\Big]dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{\theta}g(\overline{x}_i, w^i)w^i - G(\overline{x}_i, w^i)\Big]dx \\
&= J_{0,i}(w^i) - \frac{1}{\theta}J'_{0,i}(w^i)w^i = J_{0,i}(w^i) = \mu_{V(\overline{x}_i)} \geq \mu_i,
\end{aligned}$$

o que mostra (4.20). Por (4.18) e (4.20),

$$\widetilde{\mu}_{\epsilon,i} \to \mu_i \quad \text{quando} \quad \epsilon \to 0,$$

finalizando a demonstração do lema. ■

4.2.2 Um valor crítico especial para J_ϵ

No que segue, sem perda de generalidade, fixemos $\Gamma = \{1, ..., \lambda\} \subset \big\{1, ..., \kappa\big\}$ e para cada $i \in \Gamma$, escolha $\rho_i > 1$ tal que

$$E_i(\rho_i^{-1}w_i),\ E_i(\rho_i w_i) < \mu_i.$$

Considerando $\rho = \max_{i\in\Gamma} \rho_i$, temos

$$E_i(\rho^{-1}w_i), E_i(\rho w_i) < \mu_i \text{ para todo } i \in \Gamma \tag{4.24}$$

e

$$\mu_i = \max_{t\in[\rho^{-2},1]} E_i(t\rho w_i) \text{ para todo } i \in \Gamma.$$

A seguir, definamos $\widetilde{H}_\epsilon \colon [\rho^{-2}, 1]^\lambda \to X_\epsilon$ por

$$\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})(z) = \sum_{i=1}^{\lambda} \theta_i \rho (w_i\varphi)\big(z - \frac{x_i}{\epsilon}\big) \tag{4.25}$$

para todo $\overrightarrow{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_\lambda) \in [\rho^{-2}, 1]^\lambda$, onde $x_i \in \Upsilon_i = \{x \in \Omega_i \ : \ V(x_i) = \alpha_i\}$. Além disso, consideramos o conjunto

$$\mathcal{U}_\epsilon = \Big\{H \in C\big([\rho^{-2},1]^\lambda, X_\epsilon\big);\ H = \widetilde{H}_\epsilon \text{ sobre } \partial([\rho^{-1},1]^\lambda)\big), \\ H(\overrightarrow{\theta})\,|_{\Omega_{\epsilon,i}} \neq 0 \ \forall i \in \Gamma \text{ e } \forall \overrightarrow{\theta} \in [\rho^{-1},1]^\lambda\Big\}.$$

Desde que

$$\operatorname{supp}\Big(w_i\varphi\big(z - \frac{x_i}{\epsilon}\big)\Big) \subset \Omega_{\epsilon,i},$$

temos $\widetilde{H}_\epsilon \in \mathcal{U}_\epsilon$. Portanto, podemos definir o número

$$\mathcal{S}_\epsilon = \inf_{H\in\mathcal{U}_\epsilon} \max_{\overrightarrow{\theta}\in[\rho^{-2},1]^\lambda} J_\epsilon(H(\overrightarrow{\theta})),$$

para ϵ suficientemente pequeno. No que segue, estabelecemos alguns lemas técnicos fundamentais para o estudo que segue.

Lema 4.2.4. *Para ϵ suficientemente pequeno a seguinte propriedade ocorre: Se $H \in \mathcal{U}_\epsilon$, então existe $\overrightarrow{\theta_*} \in [\rho^{-2}, 1]^\lambda$, tal que*

$$\widetilde{E}'_{\epsilon,i}\big(H(\overrightarrow{\theta_*})\big)H(\overrightarrow{\theta_*}) = 0, \ \ \textit{para todo } i \in \Gamma.$$

Em particular, $\widetilde{E}_{\epsilon,i}\big(H(\overrightarrow{\theta_*})\big) \geq \widetilde{\mu}_{\epsilon,i}, \ \ i = 1, ..., \lambda$.

Demonstração. Dado $H \in \mathcal{U}_\epsilon$, considere $\overline{H} : [\rho^{-2}, 1]^\lambda \to \mathbb{R}^\lambda$ dada por

$$\overline{H}(\overrightarrow{\theta}) = \Big(\widetilde{E}'_{\epsilon,1}\big(H(\overrightarrow{\theta})\big)H(\overrightarrow{\theta}), ..., \widetilde{E}'_{\epsilon,\lambda}\big(H(\overrightarrow{\theta})\big)H(\overrightarrow{\theta})\Big), \text{ onde } \overrightarrow{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_\lambda).$$

Para $\overrightarrow{\theta} \in \partial\big([\rho^{-1},1]^\lambda\big)$, temos $\overline{H}(\overrightarrow{\theta}) = \widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})$. Isto implica que não existe $\overrightarrow{\theta} \in \partial\big([\rho^{-2},1]^\lambda\big)$ com $\overline{H}(\overrightarrow{\theta}) = 0$. De fato, para qualquer $i \in \Gamma$

$$\widetilde{E}'_{\epsilon,i}(\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta}))\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta}) = E'_i(\theta_i \rho w_i)\theta_i \rho w_i + o_\epsilon(1) \text{ uniformemente em } \overrightarrow{\theta} \in [\rho^{-2},1]^\lambda.$$

Assim, se $\overrightarrow{\theta} \in \partial\big([\rho^{-2},1]^\lambda\big)$, então $\theta_{i_0} = 1$ ou $\theta_{i_0} = \rho^{-2}$ para algum $i_0 \in \Gamma$ o que implica

$$\widetilde{E}'_{\epsilon,i_0}(\overline{H}(\overrightarrow{\theta}))\overline{H}(\overrightarrow{\theta}) = E'_{i_0}(\rho w_{i_0})\rho w_{i_0} + o_\epsilon(1) \text{ uniformemente em } \overrightarrow{\theta} \in [\rho^{-2},1]^\lambda,$$

ou

$$\widetilde{E}'_{\epsilon,i_0}(\overline{H}(\overrightarrow{\theta}))\overline{H}(\overrightarrow{\theta}) = E'_{i_0}(\rho^{-1} w_{i_0})\rho^{-1} w_{i_0} + o_\epsilon(1) \text{ uniformemente em } \overrightarrow{\theta} \in [\rho^{-2},1]^\lambda.$$

Portanto, se $\widetilde{E}'_{\epsilon,i_0}(\overline{H}(\overrightarrow{\theta}))\overline{H}(\overrightarrow{\theta}) = 0$, fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$E_{i_0}(\rho w_i) \geq \mu_i \text{ ou } E_{i_0}(\rho^{-1} w_i) \geq \mu_i,$$

o que é uma contradição com (4.24). Agora, calculamos o grau $\deg\big(\overline{H},(\rho^{-2},1)^\lambda,(0,....,0)\big)$. Ora, como

$$\deg\big(\overline{H},(\rho^{-2},1)^\lambda,(0,....,0)\big) = \deg\big(\widetilde{H}_\epsilon,(\rho^{-2},1)^\lambda,(0,....,0)\big)$$

e para todo $\overrightarrow{\theta} \in (\rho^{-2},1)^\lambda$

$$\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\theta} = (\rho^{-1},...,\rho^{-1}),$$

conclui-se que

$$\deg\big(\overline{H},(\rho^{-2},1)^\lambda,(0,....,0)\big) = (-1)^\lambda \neq 0$$

e, portanto, existe $\overrightarrow{\theta_*} \in (\delta^{-1},1)^\lambda$ satisfazendo

$$\widetilde{E}'_{\epsilon,i}\big(H(\overrightarrow{\theta_*})\big)H(\overrightarrow{\theta_*}) = 0, \text{ para todo } i \in \Gamma.$$

■

Antes de seguir em frente, fixemos

$$\mathcal{D}_\Gamma = \sum_{i=1}^{\lambda} \mu_i.$$

O próximo resultado estabelece uma importante relação entre $\mathcal{S}_\epsilon$ e $\mathcal{D}_\Gamma$.

Proposição 4.2.5. *O número $\mathcal{S}_\epsilon$ satisfaz o seguinte limite*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{S}_\epsilon = \mathcal{D}_\Gamma.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que usando (g_1) e (g_2), para cada $H \in \mathcal{U}_\epsilon$

$$\begin{aligned}
J_\epsilon\big(H(\overrightarrow{\theta})\big) &\geq \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon}\Big[\Phi(|\nabla H(\overrightarrow{\theta})|) + V(\epsilon x)\Phi(|H(\overrightarrow{\theta})|)\Big]dx - \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon} G(\epsilon x, H(\overrightarrow{\theta}))dx \\
&+ \Big[1-\frac{m}{lk}\Big]\int_{\mathbb{R}^N\setminus\widetilde{\Omega}_\epsilon}\Big[\Phi(|\nabla H(\overrightarrow{\theta})|) + V(\epsilon x)\Phi(|H(\overrightarrow{\theta})|)\Big]dx \\
&\geq \sum_{i=1}^{\lambda}\bigg\{\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}\Big[\Phi(|\nabla H(\overrightarrow{\theta})|) + V(\epsilon x)\Phi(|\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})|)\Big]dx - \int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} G(\epsilon x, H(\overrightarrow{\theta}))dx\bigg\} \\
&= \sum_{i=1}^{\lambda}\widetilde{E}_{\epsilon,i}(H(\overrightarrow{\theta})) \text{ para todo } \overrightarrow{\theta} \in [\rho^{-2},1]^\lambda.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 4.2.4

$$\max_{\overrightarrow{\theta}\in[\rho^{-2},1]^\lambda} J_\epsilon\big(H(\overrightarrow{\theta})\big) \geq \sum_{i=1}^{\lambda}\max_{\overrightarrow{\theta}\in[\rho^{-2},1]^\lambda}\widetilde{E}_{\epsilon,i}(H(\overrightarrow{\theta})) \geq \sum_{i=1}^{\lambda}\widetilde{E}_{\epsilon,i}(H(\overrightarrow{\theta_*}))$$

e aplicando o Lema 4.2.2 resulta que

$$\max_{\overrightarrow{\theta}\in[\rho^{-2},1]^\lambda} J_\epsilon\big(H_\epsilon(\overrightarrow{\theta})\big) \geq \sum_{i=1}^{\lambda}\widetilde{\mu}_{\epsilon,i} + o_\epsilon(1)$$

implicando em

$$\mathcal{S}_\epsilon \geq \mathcal{D}_\Gamma + o_\epsilon(1). \tag{4.26}$$

Por outro lado, mostra-se que

$$J_\epsilon\big((w_i\varphi_\epsilon)(.-\frac{x_i}{\epsilon})\big) = \mu_i + o_\epsilon(1)$$

e para todo $t \in [0,\rho]$

$$J_\epsilon\big(t(w_i\varphi_\epsilon)(.-\frac{x_i}{\epsilon})\big) = E_i(tw_i) + o_\epsilon(1), \quad \forall i \in \Gamma.$$

Uma vez que $\operatorname{supp}\Big(w_i\varphi\big(z-\frac{x_i}{\epsilon}\big)\Big)\subset\Omega_{\epsilon,i}$ para todo $i\in\Gamma$,

$$\begin{aligned}
J_\epsilon\big(\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})\big) &= \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon}\Big[\Phi(|\nabla\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})|)+V(\epsilon x)\Phi(|\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})|)\Big]dx-\int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon}G(\epsilon x,\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta}))dx\\
&+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\widetilde{\Omega}_\epsilon}\Big[\Phi(|\nabla\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})|)+V(\epsilon x)\Phi(|\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})|)\Big]dx-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\widetilde{\Omega}_\epsilon}G(\epsilon x,\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta}))dx\\
&= \sum_{i=1}^{\lambda}\Bigg\{\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}\sum_{i=1}^{\lambda}\Big[\Phi(|\nabla\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big)|)+V(\epsilon x)\big(\Phi(|\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big)|)\big)\Big]dx\\
&-\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}\sum_{i=1}^{\lambda}F\Big(\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big)\Big)dx\Bigg\}\\
&= \sum_{i=1}^{\lambda}\Bigg\{\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}\Big[\Phi(|\nabla\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big)|)+V(\epsilon x)\big(\Phi(|\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big)|)\big)\Big]dx\\
&-\int_{\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}G(\epsilon x,\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big))dx\Bigg\}\\
&= \sum_{i=1}^{\lambda}\Bigg\{\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\Phi(|\nabla\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big)|)+V(\epsilon x)\big(\Phi(|\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big)|)\big)\Big]dx\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}G(\epsilon x,\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(x-\frac{x_i}{\epsilon}\big))dx\Bigg\}\\
&= \sum_{i=1}^{\lambda}J_\epsilon(\theta_i\rho(w_i\varphi)\big(z-\frac{x_i}{\epsilon}\big))=\sum_{i=1}^{\lambda}E_i(\theta_i\rho w_i)+o_\epsilon(1),
\end{aligned}$$

de onde segue

$$\sup_{\overrightarrow{\theta}\in[\rho^{-2},1]^\lambda}J_\epsilon\big(\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})\big)\le\sum_{i=1}^{\lambda}\sup_{t\in[\rho^{-2},1]}E_i(t\rho w_i)+o_\epsilon(1)$$

e, portanto,

$$\mathcal{S}_\epsilon\le\mathcal{D}_\Gamma+o_\epsilon(1). \tag{4.27}$$

Combinando (4.26) e (4.27), obtemos o resultado. ■

Corolário 4.2.6. *Para cada $\alpha>0$, existe $\epsilon_0=\epsilon_0(\alpha)$ tal que*

$$\sup_{\overrightarrow{\theta}\in[\delta^{-1},1]^\lambda}J_\epsilon\big(\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})\big)\le\mathcal{D}_\Gamma+\frac{\alpha}{2}\ \ \forall\epsilon\in(0,\epsilon_0).$$

Demonstração. A demonstração pode ser obtida usando os mesmos argumentos da proposição precedente. ■

A seguir, iremos fixar algumas notações. Fixe $\sigma_0 > 0$ verificando

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \|\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} > \sigma_0 \text{ uniformemente em } \overrightarrow{\theta} \in [\rho^{-2}, 1]^\lambda \text{ e } i \in \Gamma$$

e defina o conjunto

$$\mathcal{Z}_{\epsilon,i} = \big\{u \in \widetilde{X}_{\epsilon,i} \ : \ \|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \leq \frac{\sigma_0}{2}\big\},$$

Pela definição de $\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})$ e $\mathcal{Z}_{\epsilon,i}$, segue que existem constantes positivas τ e ϵ^* tais que

$$\mathrm{dist}_{\epsilon,i}\big(\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta}), \mathcal{Z}_{\epsilon,i}\big) > \tau \text{ para todo } \overrightarrow{\theta} \in [\delta^{-2}, 1]^\lambda,\ i \in \Gamma \text{ e } \epsilon \in (0, \epsilon^*),$$

onde $\mathrm{dist}_{\epsilon,i}(A, B)$ denota a distância entre A e B em $\widetilde{X}_{\epsilon,i}$. Além disso, considerando os números τ e $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, definimos

$$\Theta = \big\{u \in X_\epsilon \ : \ \mathrm{dist}_{\epsilon,i}(u, \mathcal{Z}_{\epsilon,i}) \geq \tau \text{ para todo } i \in \Gamma\big\}.$$

Dados $c, \mu > 0$ e $0 < \delta < \frac{\tau}{2}$, considere também os conjuntos

$$J_\epsilon^c = \big\{u \in X_\epsilon \ : \ J_\epsilon(u) \leq c\big\} \text{ e } \mathcal{Q}_{\epsilon,\mu} = \big\{u \in \Theta_{2\delta} \ : \ |J_\epsilon(u) - \mathcal{S}_\epsilon| \leq \mu\big\},$$

onde Θ_s denota o conjunto

$$\Theta_s = \big\{u \in X_\epsilon \ : \ \mathrm{dist}(u, \Theta) \leq s\big\}, \quad s > 0.$$

Observe que para cada $\mu > 0$, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(\mu) > 0$ tal que a função $u_{\epsilon,*}$ dada por

$$u_{\epsilon,*}(z) = \sum_{i=1}^{\lambda} \Big(w_i \varphi\big(z - \frac{x_i}{\epsilon}\big)\Big)$$

verifica

$$u_{\epsilon,*} \in \Theta_s \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_1) \text{ e } J_\epsilon(u_{\epsilon,*}) = \mathcal{D}_\Gamma + o_\epsilon(1).$$

Desde que $\mathcal{S}_\epsilon = \mathcal{D}_\Gamma + o_\epsilon(1)$, temos

$$J_\epsilon(u_{\epsilon,*}) = \mathcal{S}_\epsilon + o_\epsilon(1),$$

mostrando que $\mathcal{Q}_{\epsilon,\mu} \neq \emptyset$.

Agora, considere D suficientemente grande, independente de ϵ, satisfazendo

$$\|\widetilde{H}_\epsilon(\overrightarrow{\theta})\|_\epsilon \leq \frac{L}{2} \text{ para todo } \overrightarrow{\theta} \in [\rho^{-2}, 1]^{2\lambda}. \tag{4.28}$$

Para cada $s > 0$, denotamos por $\overline{B}_s = \{u \in X_\epsilon \,;\, \|u\|_\epsilon \le s\}$ e definamos o número

$$\mu_* = \min\Big\{\frac{\mu_i}{4}, \frac{L}{4}, \frac{\delta}{4};\ i \in \Gamma\Big\}.$$

Na próxima proposição mostramos uma estimativa uniforme de $\|J'_\epsilon(u)\|$ na região $(\mathcal{Q}_{\epsilon,2\mu}\backslash\mathcal{Q}_{\epsilon,\mu}) \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_\epsilon^{\mathcal{D}_\Gamma}$.

Proposição 4.2.7. *Para cada $\mu \in (0, \mu_*)$ fixado, existem $\sigma_\mu, \epsilon_\mu > 0$ satisfazendo*

$$\|J'_\epsilon(u)\| \ge \sigma_\mu \ \ \textit{para } \epsilon \ge \epsilon_\mu \ \ \textit{e para todo } u \in (\mathcal{Q}_{\epsilon,2\mu} \setminus \mathcal{Q}_{\epsilon,\mu}) \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_\epsilon^{\mathcal{D}_\Gamma}.$$

Demonstração. Assuma por contradição que existe uma sequência $(\epsilon_n) \subset (0, +\infty)$ com $\epsilon_n \to 0$ e

$$v_n \in (\mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu}\backslash\mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu}) \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma}$$

tal que $\|J'_{\epsilon_n}(v_n)\| \to 0$. Observando que $v_n \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu}$ e $(\|v_n\|_{\epsilon_n})$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, segue que $(J_{\epsilon_n}(v_n))$ também é limitada. Portanto, existe $c \in (-\infty, \mathcal{D}_\Gamma]$, tal que, a menos de subsequência,

$$J_{\epsilon_n}(v_n) \to c, \tag{4.29}$$

implicando que (v_n) é uma sequência $(PS)_c^*$. Graças à Proposição 4.1.1, existe uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n), um número natural p, sequências $(y_{n,i}) \subset \mathbb{R}^N$, pontos $x_i \in \overline{\Omega}$, $i = 1, ..., p$ com

$$\epsilon_n y_{n,i} \to x_i \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{4.30}$$

e funções $u_{0,i}$ satisfazendo

$$\Big\|v_n(\cdot) - \sum_{i=1}^{p} u_{0,i}(\cdot - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,i})\Big\|_{\epsilon_n} \to 0 \ \text{ quando } n \to +\infty$$

de onde segue que $\lambda \ge p$. Por outro lado, como $v_n \in \Theta_{2\delta}$, temos $p \ge \lambda$ e, portanto, $p = \lambda$. Daí,

$$J_{\epsilon_n}(v_n) \to \mathcal{D}_\Gamma,$$

mostrando que $v_n \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu}$, para n suficientemente grande, o que é uma contradição, mostrando o resultado. ∎

Estamos, finalmente, em condições de mostrar existência de ponto crítico para o funcional modificado.

Proposição 4.2.8. *Para cada $\mu \in (0, \mu_*)$, existe $\epsilon_\mu > 0$ tal que J_ϵ tem um ponto crítico em $\mathcal{Q}_{\epsilon,\mu} \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_\epsilon^{\mathcal{D}_\Gamma}$ para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_\mu)$.*

Demonstração. Suponha por contradição que exitem $\mu \in (0, \mu_*)$ e uma sequência $(\epsilon_n) \subset (0, +\infty)$ com $\epsilon_n \to 0$, tal que J_{ϵ_n} não tem pontos críticos em $\mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu} \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma}$. Desde que, pela Proposição 3.1.6, o funcional J_{ϵ_n} verifica a condição (PS) e, assim, existe $d_{\epsilon_n} > 0$ satisfazendo

$$\|J'_{\epsilon_n}(u)\| \geq d_{\epsilon_n} \text{ para todo } u \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu} \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma}. \tag{4.31}$$

Pela Proposição 4.2.7,

$$\|J'_{\epsilon_n}(u)\| \geq \sigma_\mu \text{ para todo } u \in (\mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu} \backslash \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu}) \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma}, \tag{4.32}$$

onde σ_μ não depende de ϵ_n, para n suficientemente grande. Agora, a demonstração consiste de duas etapas.

Etapa 1: Construção de um fluxo.

Sejam $\Psi_n : X_{\epsilon_n} \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}_n : J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma} \to X_\epsilon$ funções continuas verificando,

$$0 \leq \Psi_n \leq 1, \qquad \Psi_n(u) = \begin{cases} 1, & \text{para } u \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n, \frac{3\mu}{2}} \cap \overline{B}_L \cap \Theta_\delta \\ 0, & \text{para } u \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu} \cap \overline{B}_{L+1}. \end{cases}$$

e

$$\mathcal{L}_n(u) = \begin{cases} -\Psi_n(u)\|Y_n(u)\|^{-1}Y_n(u), & \text{para } u \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu} \cap \overline{B}_{L+1} \\ 0, & \text{para } u \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu} \cap \overline{B}_{L+1}. \end{cases}$$

onde Y_n é um campo pseudo-gradiente para J_ϵ em $\mathcal{L}_n = \{u \in X_\epsilon : J'_\epsilon(u) \neq 0\}$. Note que $\mathcal{L}_n$ esta bem definida, uma vez que (4.31) e (4.32) implicam que $J'_\epsilon(u) \neq 0$, para todo $u \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu} \cap \overline{B}_{L+1} \cap J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma}$. Observando que

$$\|\mathcal{L}_n(u)\| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } u \in J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma},$$

o fluxo $\eta_n : [0, +\infty) \times J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma} \to J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma}$ definido por

$$\frac{d\eta_n}{dt} = \mathcal{L}_n(\eta_n) \text{ e } \eta_n(0, u) = u \in J_{\epsilon_n}^{\mathcal{D}_\Gamma}$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}J_\epsilon(\eta_n(t,u)) \leq -\frac{1}{2}\Psi_n(u)\|J'_\epsilon(\eta_n(t,u))\| \leq 0 \tag{4.33}$$

$$\left\|\frac{d\eta_n}{dt}\right\| = \|\mathcal{L}_n(\eta_n)\| \leq 1 \tag{4.34}$$

e

$$\eta_n(t,u) = u \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } u \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_n,2\mu} \cap \overline{B}_{L+1}. \tag{4.35}$$

A seguir, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o número

$$c_0^n = \sup\left\{J_{\epsilon_n}(u)\ ;\ u \in \widetilde{H}_{\epsilon_n}\big([\rho^{-2},1]^{2\lambda}\big)\backslash(\mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu} \cap \overline{B}_L)\right\}.$$

Afirmamos que $\limsup\limits_{n\to+\infty} c_0^n < \mathcal{D}_\Gamma$. De fato, caso contrário, existiria uma subsequência de $(c_0^{n_j})$ verificando

$$c_0^{n_j} \to \mathcal{D}_\Gamma,\ \ \widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta_{n_j}}) \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_{n_j},\mu} \cap \overline{B}_L,\ \ \widetilde{H}_{\epsilon_{n_j}}(\overrightarrow{\theta_{n_j}}) \to \mathcal{D}_\Gamma$$

e

$$c_0^{n_j} - \frac{1}{n_j} \leq \widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta_{n_j}}) \leq \mathcal{D}_\Gamma. \tag{4.36}$$

Por (4.28), teríamos

$$\widetilde{H}_{\epsilon_{n_j}}\big([\rho^{-2},1]^{2\lambda}\big) \subset B_{\frac{L+1}{2}}(0),$$

donde

$$\widetilde{H}_{\epsilon_{n_j}}(\overrightarrow{\theta_{n_j}}) \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_{n_j},\mu},$$

isto é,

$$|\widetilde{H}_{\epsilon_{n_j}}(\overrightarrow{\theta_{n_j}}) - \mathcal{S}_{\epsilon_{n_j}}| > \mu > 0.$$

Por outro lado, combinando o Lema 4.2.5 com (4.36), resultaria em

$$|\widetilde{H}_{\epsilon_{n_j}}(\overrightarrow{\theta_{n_j}}) - \mathcal{S}_{\epsilon_{n_j}}| \to 0$$

o que é uma contradição. Logo,

$$\limsup_{n\to+\infty} c_0^n < \mathcal{D}_\Gamma$$

Além disso, mostra-se que existe $K_* > 0$ satisfazendo

$$|J_{\epsilon_n}(u) - J_{\epsilon_n}(v)| \leq K_*\|u-v\|_{\epsilon_n}\ \ \forall u,v \in \overline{B}_{L+1}.$$

Etapa 2: Existem $(T_n) \subset (0,+\infty)$ e $\varepsilon_0 > 0$, independente de n, tais que

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big[\max_{\overrightarrow{\theta}\in[\delta^{-2},1]^\lambda} J_{\epsilon_n}\big(\eta_n(T_n,\widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta}))\big)\Big] < \mathcal{D}_\Gamma - \varepsilon_0.$$

De fato, para simplificar a notação, denotaremos por $u = \widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta})$. Se $u \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu} \cap \overline{B}_L \cap \Theta_\delta$, usando (4.33) e a definição de c_0^n, obtemos

$$J_{\epsilon_n}\big(\eta_n(t,u)\big) \leq J_{\epsilon_n}(u) \leq c_0^n \text{ para todo } t \geq 0.$$

Se $u \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu} \cap \overline{B}_L \cap \Theta_\delta$ fazendo

$$\widetilde{\eta}_n(t) = \eta_n(t,u), \quad \widetilde{d}_{\epsilon_n} = \min\{d_{\epsilon_n},\sigma_\mu\} \quad \text{e} \quad T_n = \frac{\mu\sigma_\mu}{2\widetilde{d}_{\epsilon_n}}$$

temos dois casos para analisar:

Caso 1: $\widetilde{\eta}_n(t) \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\frac{3\mu}{2}} \cap \overline{B}_L \cap \Theta_\delta$ para todo $t \in [0,T_n]$.

Neste caso, temos Ψ_n e $\|J'_{\epsilon_n}(\widetilde{\eta}_n(t))\| \geq \sigma_\mu$ para todo $t \in [0,T_n]$. Portanto, de (4.33)

$$J_{\epsilon_n}(\widetilde{\eta}_n(T_n)) = J_{\epsilon_n}(u) + \int_0^{T_n} \frac{d}{dt}J_\epsilon(\widetilde{\eta}_n(s))ds \leq \mathcal{D}_\Gamma - \frac{1}{2}\widetilde{d}_{\epsilon_n}T_n,$$

por conseguinte,

$$J_{\epsilon_n}(\widetilde{\eta}_n(T_n)) \leq \mathcal{D}_\Gamma - \frac{\mu\sigma_\mu}{4}.$$

Caso 2: $\widetilde{\eta}_n(t_0) \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\frac{3\mu}{2}} \cap \overline{B}_L \cap \Theta_\delta$ para algum $t_0 \in [0,T_n]$.

Relacionado a este caso, temos as seguintes situações:

(i) Existe $t_2 \in [0,T_n]$ tal que $\widetilde{\eta}_n(t_2) \notin \overline{\Theta}_\delta$. Sendo $\widetilde{\eta}_n(0) \in \Theta$, fazendo $t_1 = 0$, vem que

$$\|\widetilde{\eta}_n(t_2) - \widetilde{\eta}_n(t_1)\|_{\epsilon_n} \geq \delta > \mu.$$

(ii) Existe $t_2 \in [0,T_n]$ tal que $\widetilde{\eta}_n(t_2) \notin \overline{B}_L$. Uma vez que, $\widetilde{\eta}_n(0) \in \overline{B}_{\frac{L}{2}}$, fazendo $t_1 = 0$, tem-se

$$\|\widetilde{\eta}_n(t_2) - \widetilde{\eta}_n(t_1)\|_{\epsilon_n} \geq \frac{L}{2} > \mu.$$

(iii) Se $\widetilde{\eta}_n(t) \in \overline{B}_L \cap \Theta_\delta$ para todo $t \in [0, T_n]$, existem $t_1, t_2 \in [0, T_n]$ com $t_1 \leq t_2$ tais que $\widetilde{\eta}_n(t) \in \big(\mathcal{Q}_{\epsilon_n, \frac{3\mu}{2}} \backslash \mathcal{Q}_{\epsilon_n, \mu}\big)$ para todo $t \in [t_1, t_2]$ com

$$|J_{\epsilon_n}(\widetilde{\eta}_n(t_1)) - \mathcal{S}_\epsilon| = \mu \ \text{ e } \ |J_{\epsilon_n}(\widetilde{\eta}_n(t_1)) - \mathcal{S}_\epsilon| = \frac{3\mu}{2}.$$

Pela definição de K_*, Ψ_n e $\mathcal{L}_n$, obtém-se

$$|t_2 - t_1| \geq \|\widetilde{\eta}_n(t_2) - \widetilde{\eta}_n(t_1)\|_{\epsilon_n} \geq \frac{\mu}{2K_*}$$

Agora, note que

$$J_{\epsilon_n}(\widetilde{\eta}_n(T_n)) = J_{\epsilon_n}(u) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} J_\epsilon(\widetilde{\eta}_n(s)) ds \leq \mathcal{D}_\Gamma - \frac{1}{2K_*}\sigma_\mu(t_2 - t_1)$$

e, então,

$$J_{\epsilon_n}(\widetilde{\eta}_n(T_n)) \leq \mathcal{D}_\Gamma - \frac{1}{2K_*}\mu\sigma_\mu$$

Afirmação 4.2.9. *A função* $\overrightarrow{\theta} \mapsto \eta_n\big(T_n, \widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta})\big)$ *pertence a* $\mathcal{U}_{\epsilon_n}$.

De fato, como $\eta_n\big(T_n, \widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta})\big)$ é uma função contínua em $[\rho^{-2}, 1]^\lambda$, é suficiente provar que

$$\eta_n\big(T_n, \widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta})\big) = \widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta}) \ \text{ para todo } \overrightarrow{\theta} \in \partial([\rho^{-2}, 1]^\lambda).$$

Para tanto, vejamos que $\widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta}) \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_n, 2\mu}$ para todo $\overrightarrow{\theta} \in \partial([\rho^{-2}, 1]^\lambda)$ e n suficientemente grande. Usando (4.24), temos

$$\Big|J_{\epsilon_n}\big(\widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta})\big) - \mathcal{D}_\Gamma\Big| \geq 2\mu_* \ \text{ para todo } \overrightarrow{\theta} \in \partial([\rho^{-2}, 1]^\lambda).$$

Isto juntamente com o limite

$$\mathcal{S}_\epsilon \to \mathcal{D}_\Gamma \quad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

implicam

$$\Big|J_{\epsilon_n}\big(\widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta})\big) - \mathcal{S}_\epsilon\Big| \geq 2\mu_* > 4\mu \ \text{ para todo } \overrightarrow{\theta} \in \partial([\rho^{-2}, 1]^\lambda) \ \text{ e } n \text{ suficientemente grande.}$$

Portanto, $\widetilde{H}_{\epsilon_n}(\overrightarrow{\theta}) \notin \mathcal{Q}_{\epsilon_n, 2\mu}$, mostrando a Afirmação 4.2.9.

Combinando a definição de $\mathcal{S}_\epsilon$ com as Etapas 2 e 3, conclui-se que

$$\limsup_{n \to +\infty} \mathcal{S}_\epsilon \leq \mathcal{D}_\Gamma - \epsilon_0$$

o que é uma contradição com a Proposição 4.2.5. ∎

4.3 A existência de solução *multi-peak*

Nesta seção, mostraremos a existência de λ-peak soluções para (P_ϵ). Para tanto, mostraremos primeiramente o seguinte resultado

Lema 4.3.1. *Existem $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}$, tais que a solução v_ϵ obtida na Proposição 4.2.8 satisfaz*

$$\max_{z\in\partial\Omega_\epsilon} v_\epsilon(z) < a \ \textit{ para todo } \mu \in (0,\bar{\mu}) \ \textit{e} \ \epsilon \in (0,\bar{\epsilon}).$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem sequências $\epsilon_n, \mu_n \to 0$ verificando

$$v_n := v_{\epsilon_n} \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu_n} \ \text{ e } \ \max_{z\in\partial\Omega_{\epsilon_n}} v_n(z) \geq a \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $v_n \in \mathcal{Q}_{\epsilon_n,\mu_n}$,

$$J'_{\epsilon_n}(v_n) = 0, \quad |J_{\epsilon_n}(v_n) - \mathcal{S}_{\epsilon_n}| \to 0 \ \text{ e } \ \text{dist}(v_n,\Theta) \leq 2\delta. \tag{4.37}$$

Aplicando a Proposição 4.1.1, existe um número natural p, sequências $(y_{n,i}) \subset \mathbb{R}^N$, pontos $x_i \in \overline{\Omega}$, $i = 1,...,\lambda$ e funções $u_{0,i}$ verificando

$$\left\| v_n(\cdot) - \sum_{i=1}^{p} u_{0,i}(\cdot - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,i}) \right\|_{\epsilon_n} \to 0 \ \text{ quando } n \to +\infty \tag{4.38}$$

e

$$\epsilon_n y_{n,i} \to x_i \ \text{ para } i = 1,...,p. \tag{4.39}$$

Observando que $\text{dist}(v_n,\Theta) \leq 2\delta$, o limite em (4.38) implica que $p \geq \lambda$ e $x_i \in \overline{\Omega}_i$ para $i = 1,...,\lambda$. Agora, o limite $\mathcal{S}_{\epsilon_n} \to \mathcal{D}_\Gamma$ combinado com (4.39) e $|J_{\epsilon_n}(v_n) - \mathcal{S}_{\epsilon_n}| \to 0$ resulta que

$$p = \lambda \quad \text{e} \quad x_i \in \Upsilon_i \quad \text{para todo} \quad i = 1,...,\lambda.$$

Considere $(z_n) \subset \partial\Omega_{\epsilon_n}$ satisfazendo

$$v_n(z_n) = \max_{z\in\partial\Omega_\epsilon} v_{\epsilon_n}(z)$$

e defina $w_n(x) = v_n(x + z_n)$. Note que

$$\left\| w_n(\cdot) - \sum_{i=1}^{p} u_{0,i}(\cdot + z_n - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot + z_n - y_{n,i}) \right\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ \text{ quando } n \to +\infty$$

Por outro lado, dado $\varrho > 0$,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} u_{0,i}(\cdot + z_n - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot + z_n - y_{n,i}) \Big\|_{W^{1,\Phi}(B_\varrho(0))} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Portanto,

$$\|w_n\|_{W^{1,\Phi}(B_\varrho(0))} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \tag{4.40}$$

Sendo v_n solução de (A_ϵ) segue que w_n é solução do problema

$$-\Delta_\Phi w_n + V(\epsilon_n x + \epsilon_n z_n)\phi(|w_n|)w_n = g(\epsilon_n x + \epsilon_n z_n, w_n) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

Ora, argumentando como no Lema 3.2.2, existe $w \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$w_n \to w \text{ em } C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

A convergência acima com a desigualdade

$$\max_{z \in \partial\Omega_{\epsilon_n}} v_n(z) \geq a,$$

implicam que $w_n(0) \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e então, $w(0) \geq a$. Portanto, existe $\varrho \in (0,1)$ tal que

$$w(x) \geq \frac{a}{2} \quad \text{para todo} \quad x \in B_\varrho(0).$$

Assim, $w \neq 0$ o que é uma contradição com (4.40), mostrando o lema. ∎

4.3.1 Demonstração do Teorema C

Aplicando o Lema 4.3.1 existem $\overline{\epsilon}, \overline{\mu} > 0$, tais que a solução $v_\epsilon \in \mathcal{Q}_{\epsilon,\mu}$ obtida na Proposição 4.2.8 satisfaz

$$\max_{z \in \partial\Omega_\epsilon} v_\epsilon(z) < a \text{ para todo } \mu \in (0, \overline{\mu}) \text{ e } \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}).$$

Repetindo o argumento usando na demonstração do Teorema B mostra-se que

$$v_\epsilon(x) \leq a \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon.$$

Logo, v_ϵ é solução de $(\widetilde{P}_\epsilon)$ para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$.

Para finalizar a demonstração, mostraremos que a família de soluções (v_ϵ) tem a propriedade mencionada na afirmação do Teorema C. Tendo isto em mente, considere $\epsilon_n \to 0$, $v_n = v_{\epsilon_n}$ e observe que (v_n) é uma sequência $(PS)^*_{\mathcal{D}_\Gamma}$ verificando

$$\operatorname{dist}(v_n, \Theta) \leq 2\delta \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.41}$$

Pela Proposição 4.1.1, existe uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n), um número natural p, uma sequência $(y_{n,i}) \subset \mathbb{R}^N$ com $i = 1, ..., p$ tais que

$$\epsilon_n y_{n,i} \to x_i \in \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad |y_{n,j} - y_{n,i}| \to +\infty \quad \text{quando } \ n \to +\infty \tag{4.42}$$

com $i \in \big\{1, ..., p\big\}$ e

$$\Big\| v_n(\cdot) - \sum_{i=1}^{p} u_{0,i}(\cdot - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,i}) \Big\|_{\epsilon_n} \to 0 \ \text{ quando } n \to +\infty \tag{4.43}$$

onde $\varphi_\epsilon(x) = \varphi\big(x/(-\ln \epsilon)\big)$ para $0 < \epsilon < 1$, e φ é uma função corte satisfazendo $\varphi(z) = 1$ para $|z| \leq 1$, $\varphi(z) = 0$ para $|z| \geq 2$ e $|\nabla \varphi| \leq 2$. A função $u_{0,j} \neq 0$ é solução não-negativa do problema

$$-\Delta_\Phi u + V_i \phi(|u|)u = g_{0,i}(x, u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

em que $V_i = V(x_i) \geq V_0 > 0$ e $g_{0,i}(x, u) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i}, u)$. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{\lambda} \mu_i = \sum_{i=1}^{p} J_{0,i}(u_{0,i}) \tag{4.44}$$

onde $J_{0,i} : W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ denota o funcional dado por

$$J_{0,i}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx + V_i \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u|)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_{0,i}(x, u)dx$$

com $G_{0,i}(x, t) = \int_0^t g_{0,i}(x, s)ds$. Usando os mesmos argumentos da demonstração do Lema 4.3.1, por (4.41)-(4.44), conclui-se que $p = \lambda$, $x_i \in \overline{\Omega}_i$ e

$$\sum_{j=1}^{\lambda} \mu_j = \sum_{j=1}^{\lambda} J_{0,j}(u_{0,j}).$$

A última igualdade implica que $x_i \in \Upsilon_i$ para todo $i = 1, ..., \lambda$. De fato, caso contrário, existiria algum $i_0 \in \{1, ..., \lambda\}$ tal que $x_{i_0} \in \partial\Omega_{i_0}$. Isso com a hipótese $(\widetilde{V}_1)$ nos permite concluir que $V(x_{i_0}) > \alpha_i$ e, então, $J_{0,i_0}(u_{0,i_0}) > \mu_{i_0}$. Por outro lado, sendo $J_{0,i}(u_{0,i_0}) \geq \mu_i$, para todo $i = 1, ..., \lambda$, teríamos

$$\sum_{i=1}^{\lambda} \mu_i < \sum_{i=1}^{\lambda} J_{0,i}(u_{0,i}),$$

que é uma contradição. Portanto, $x_i \in \Upsilon_i$ e, consequentemente, $V(x_i) = \alpha_i$ para todo $i = 1, ..., \lambda$. Daí, segue que $u_{0,i}$ é uma solução não-trivial do problema

$$-\Delta_\Phi u + \alpha_i \phi(|u|)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Desse ponto em diante, nosso objetivo será mostrar que dado $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{\infty, \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i})} \leq \eta \tag{4.45}$$

e existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{\infty, B_\rho(y_{n,j})} \geq \delta, \text{ para todo } j \in \Gamma. \tag{4.46}$$

Para este fim, mostraremos a seguinte estimativa:

Afirmação 4.3.2. *Dado $\eta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que*

$$\|v_n\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}))} \leq \eta. \tag{4.47}$$

De fato, para cada $j \in \Gamma$, existe $\rho_j > 0$ tal que

$$\|u_{0,j}\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho_j}(0))} < \eta.$$

Considerando $\rho = \max\{\rho_1, ..., \rho_p\}$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} \Phi(|\nabla u_{0,j}|)dx, \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} \Phi(|u_{0,j}|)dx < \eta \text{ para todo } j \in \Gamma.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(y_{n,j})} \Phi\big(|\nabla(u_{0,j}(\cdot - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,j}))|\big)dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} \Phi\big(|\nabla u_{0,j}|\big)dx + o_n(1).$$

Portanto, dado $\eta > 0$, podemos encontrar ρ suficientemente grande verificando

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(y_{n,j})} \Phi\big(|\nabla(u_{0,j}(\cdot - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,j}))|\big)dx < \frac{\eta}{2}.$$

De maneira similar,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(y_{n,j})} \Phi(|u_{0,j}(\cdot - y_{n,i})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,j})|)dx < \frac{\eta}{2},$$

isso acarreta em

$$\|u_{0,j}(\cdot - y_{n,j})\varphi_{\epsilon_n}(\cdot - y_{n,j})\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(y_{n,j}))} \leq \eta. \tag{4.48}$$

Assim, a Afirmação 4.3.2 segue combinando (4.43) e (4.48).

Com a afirmação precedente podemos provar a seguinte estimativa:

Afirmação 4.3.3. *Dado $\eta > 0$, existem $\rho > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$|v_n(z)| \leq \eta \ \textit{para todo} \ z \in \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_{\rho+1}(y_{n,i}), \quad \forall n \geq n_0.$$

De fato, fixemos $R_1 \in (0,1)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_{\rho+1}(y_{n,i})$ verificando

$$B_{\frac{R_1}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}).$$

Para cada $h, \eta > 0$, defina as sequências

$$\sigma_h = \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2^{h+1}}, \ \overline{\sigma}_h = \frac{\sigma_h + \sigma_{h+1}}{2} \quad \text{e} \quad K_h = \frac{\eta}{2}\Big(1 - \frac{1}{2^{h+1}}\Big) \ \forall h = 0, 1, 2, ...$$

Note que,

$$\sigma_h \downarrow \frac{R_1}{2}, \ K_h \uparrow \frac{\eta}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_{h+1} < \overline{\sigma}_h < \sigma_h < 1.$$

No que segue, defina

$$A_{n,K_h,\sigma_h} = \big\{x \in B_{\sigma_h}(x_0) \ : \ v_n(x) > K_h\big\}.$$

Para cada $h = 0, 1, ...$, fixemos

$$J_{h,n} = \int_{A_{n,K_h,\sigma_h}} \big((v_n - K_h)^+\big)^{\gamma^*} dx \quad \text{e} \quad \xi_h(x) = \xi\bigg(\frac{2^{h+1}}{R_1}\Big(|x - x_0| - \frac{R_1}{2}\Big)\bigg),$$

em que $\xi \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz

$$0 \leq \xi \leq 1, \ \xi(t) = 1, \ \text{para } t \leq \frac{1}{2} \ \xi(t) = 0 \text{ para } t \geq \frac{3}{4} \text{ e } |\xi'| < c.$$

Repetindo os mesmos argumentos explorados na demonstração da Proposição 2.3.8 verifica-se que

$$J_{h+1,n} \leq CA^h J_{h,n}^{1+\tau},$$

onde $C = C(N, \gamma, \gamma^*, R_1, \eta)$, $\tau = \frac{\gamma^*}{\gamma} - 1$ e $A = 2^\beta$ para algum β suficientemente grande. Afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$J_{0,n} \leq C^{\frac{1}{\tau}} A^{-\frac{1}{\tau^2}}, \forall n \geq n_0. \tag{4.49}$$

Com efeito, note que

$$\begin{aligned} J_{0,n} = \int_{A_{n,K_0,\sigma_0}} \left((v_n - \frac{\eta}{2})^+\right)^{\gamma^*} dx &\leq \int_{A_{n,\frac{\eta}{2},R_1}} v_n^{\gamma^*} dx \\ &\leq \left(\frac{\eta}{2}\right)^{l^*} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i})} \left(\frac{2v_n}{\eta}\right)^{l^*} dx \\ &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i})} \Phi_*(|v_n|) dx, \end{aligned}$$

onde c_1 depende de η. Por outro lado, aplicando o Corolário B.3, existe $c_2 > 0$ que também independente de ρ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i})} \Phi_*(|v_n|) dx \leq c_2 \|v_n\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}))}.$$

Logo,

$$J_{0,n} \leq c_3 \|v_n\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}))},$$

em que $c_3 > 0$ depende de η. Agora, usando a Afirmação 4.3.2, aumentando ρ se necessário, podemos assumir que

$$c_3 \|v_n\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}))} \leq C^{\frac{1}{\tau}} A^{-\frac{1}{\tau^2}},$$

mostrando (4.49). Aplicando o Lema 2.1.11, concluímos

$$\lim_{h \to +\infty} J_{h,n} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{h \to +\infty} J_{h,n} = \lim_{h \to +\infty} \int_{A_{n,K_h,\sigma_h}} \left((v_n - K_h)^+\right)^{\gamma^*} dx = \int_{A_{n,\frac{\eta}{2},\frac{R_1}{2}}} \left((v_n - \frac{\eta}{2})^+\right)^{\gamma^*} dx,$$

de onde segue

$$v_n(z) \leq \frac{\eta}{2}, \quad z \in B_{\frac{R_1}{2}}(x_0),$$

e portanto,

$$|v_n(z)| \leq \frac{\eta}{2}, \quad z \in \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_{\rho+1}(y_{n,i}),$$

finalizando a prova da afirmação.

No que segue, considere a função $w_{n,i}(x) = v_n(x+y_{n,i})$. Note que $w_{n,i}$ é uma solução não-negativa e não trivial do problema

$$-\Delta_\Phi w_{n,i} + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i})\phi(|w_{n,i}|)w_{n,i} = g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i}, w_{n,i}) \text{ em } \mathbb{R}^N \qquad (A_{\epsilon_n})$$

Afirmação 4.3.4. *Existe $\delta > 0$ tal que $\|w_{n,i}\|_\infty \geq \delta$ para n suficientemente grande.*

De fato, se $\|w_{n,i}\|_\infty \to 0$, combinando (f_1) com a definição de g, segue

$$\frac{g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i}, w_{n,i})}{\phi(|w_{n,i}|)w_{n,i}} \leq \frac{V_0}{2} \ \forall\ n \geq n_0.$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. A desigualdade acima com $J'_{\epsilon_n}(w_{n,i})w_{n,i} = 0$ implicam

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla w_{n,i}|)|\nabla w_{n,i}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_{n,i})\phi(|w_{n,i}|)|w_{n,i}|^2 dx = 0 \ \forall\ n \geq n_0, .$$

Assim, $\|w_{n,i}\|_{\epsilon_n} = 0$ para todo $n \geq n_0$ o que é uma contradição com o Lema 4.2.1.

Na sequência, considerando $\eta < \delta$ e usando as Afirmações 4.3.3 e 4.3.4

$$\|w_{n,i}\|_{\infty, B_{(\rho+1)}(0)} \geq \delta,$$

isto é,

$$\|v_n\|_{\infty, B_{\rho+1}(y_{n,i})} \geq \delta, \ \text{ para todo } i \in \Gamma.$$

Finalmente, fazendo $u_n(x) = v_n\Big(\dfrac{x}{\epsilon_n}\Big)$ e $P_{n,i} = \epsilon_n y_{n,i}$, concluímos que u_n é uma solução de (P_ϵ) verificando

$$\|u_n\|_{\infty, B_{\epsilon_n(\rho+1)}(P_{n,i})} \geq \delta, \ \text{ para todo } i \in \Gamma.$$

e

$$\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}^N \setminus \cup_{i\in\Gamma} B_{\epsilon_n(\rho+1)}(P_{n,i})} \leq \|v_n\|_{\infty, \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_{\rho+1}(y_{n,i})} \leq \eta \ \text{ para todo } n \geq n_0,$$

provando o teorema.

Apêndices

Apêndice A

Construção de uma função auxiliar

Neste apêndice, mostramos como construímos a função ζ usada no Capítulo 3. Primeiramente, recorde que

$$f'(a) > (m-1)\frac{f(a)}{a},$$

o que implica

$$f'(a) > \frac{V_0}{k}(m-1)\phi(a).$$

Por continuidade, no que segue, fixamos δ suficientemente pequeno, tal que o número $\lambda = a - \delta$ verifique

$$f'(\lambda) > \frac{V_0}{k}(m-1)\phi(\lambda). \tag{A.1}$$

Considerando $h(s) = \dfrac{f(s)}{\phi(s)}$, temos

$$h'(\lambda) > \frac{V_0}{k} \quad \text{e} \quad h(\lambda) < \frac{V_0}{k}\lambda.$$

De fato, recorde que

$$\frac{f(a)}{\phi(a)a} = \frac{V_0}{k}.$$

Desde que as funções $\dfrac{t^{m-2}}{\phi(t)}$ e $\dfrac{f(t)}{t^{m-1}}$ são crescentes para $t > 0$, segue que

$$\frac{f(t)}{\phi(t)t} = \frac{f(t)}{t^{m-1}}\frac{t^{m-2}}{\phi(t)}$$

também é crescente para $t > 0$. Logo, para $\lambda < a$,

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\phi(\lambda)} < \frac{f(a)}{\phi(a)a}\lambda,$$

o que implica

$$\frac{V_0}{k}\lambda - h(\lambda) > \frac{f(a)}{\phi(a)a}\lambda - \frac{f(a)}{\phi(a)a}\lambda = 0.$$

Por outro lado, recordando que

$$\phi'(\lambda)\lambda < (m-2)\phi(\lambda)$$

e usando novamente que $\dfrac{f(t)}{\phi(t)t}$ é crescente com (A.1), vem

$$\begin{aligned} h'(\lambda) &= \frac{f'(\lambda)}{\phi(\lambda)} - \frac{f(\lambda)\phi'(\lambda)}{\big(\phi(\lambda)\big)^2} \\ &> \frac{V_0}{k}(m-1) - (m-2)\frac{f(\lambda)}{\phi(\lambda)\lambda} \\ &> \frac{V_0}{k}(m-1) - (m-2)\frac{f(a)}{\phi(a)a} = \frac{V_0}{k}. \end{aligned}$$

Agora, defina a função

$$\widehat{h}(s) = \begin{cases} h(s), & se \quad s \leq a, \\ \dfrac{V_0}{k}s, & se \quad s > a, \end{cases}$$

e note que $\widehat{h}(s) = \dfrac{\widehat{f}(s)}{\phi(s)}$ onde

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} f(s), & se \quad s \leq a, \\ \dfrac{V_0}{k}\phi(s)s, & se \quad s > a. \end{cases}$$

Além disso,

- $\dfrac{h(a)}{a} = \dfrac{f(a)}{\phi(a)a} = \dfrac{V_0}{k}$,
- $\dfrac{h(s)}{s} = \dfrac{f(s)}{\phi(s)s} = \dfrac{s^{m-2}}{\phi(s)}\dfrac{f(s)}{s^{m-1}} \Big\uparrow$ para $s > 0$,
- $h^{'}(\lambda) > \dfrac{V_0}{k}$,

- $B := \dfrac{V_0}{k}\lambda - h(\lambda) > 0.$

O próximo lema é fundamental para obter a função ζ.

Lema A.1. *Existem $t_0, t_1 \in (0, +\infty)$ tais que $t_0 < a < t_1$ e $\widetilde{\zeta} \in C^1([t_0, t_1])$, satisfazendo*

($\widetilde{\zeta}_1$) $\widetilde{\zeta}(s) \leq \widehat{h}(s)$, para todo $s \in [t_0, t_1]$,

($\widetilde{\zeta}_2$) $\widetilde{\zeta}(t_0) = \widehat{h}(t_0)$ e $\widetilde{\zeta}(t_1) = \widehat{h}(t_1)$,

($\widetilde{\zeta}_3$) $(\widetilde{\zeta})'(t_0) = (\widehat{h})'(t_0)$ e $(\widetilde{\zeta})'(t_1) = (\widehat{h})'(t_1)$,

($\widetilde{\zeta}_4$) A função $s \to \dfrac{\widetilde{\zeta}(s)}{s}$ é não-descrente para todo $s \in [t_0, t_1]$.

Demonstração. No que segue, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeno, fixamos os números

$$\lambda = a - \delta, B = h'(\lambda) > \frac{V_0}{k} \text{ e } D = \frac{V_0}{k}\lambda - h(\lambda),$$

onde $\dfrac{V_0}{k} = \dfrac{h(a)}{a}$. Considerando a função

$$y(t) = At^2 + Bt,$$

temos que

$$y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = B.$$

A seguir, nosso objetivo é provar que existem $A < 0$ e $T > \delta$ tais que

$$y(T) = \frac{V_0}{k}T + D \text{ e } y'(T) = \frac{V_0}{k}.$$

As igualdades acima são equivalentes a resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} AT^2 + BT = \frac{V_0}{k}T + D \\ \\ 2AT + B = \frac{V_0}{k} \end{cases}$$

cuja solução é

$$T = \frac{2D}{B - \frac{V_0}{k}} = \frac{2(\frac{V_0}{k}\lambda - h(\lambda))}{B - \frac{V_0}{k}} > \delta, \text{ se } \delta \approx 0^+$$

e

$$A = -\frac{1}{4}\frac{(B - \frac{V_0}{k})^2}{D}.$$

Agora, seja $\widetilde{\zeta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{\zeta}(t) = y(t - \lambda) + h(\lambda).$$

Note que

$$\widetilde{\zeta}(\lambda) = h(\lambda),\ (\widetilde{\zeta})'(\lambda) = h'(\lambda),\ \widetilde{\zeta}(T + \lambda) = \frac{V_0}{k}(T + \lambda) \ \text{ e } \ (\widetilde{\zeta})'(T + \lambda) = \frac{V_0}{k}. \tag{A.2}$$

Um cálculo direto nos permite concluir

$$(\widetilde{\zeta})'(t)t - \widetilde{\zeta}(t) = At^2 - A\lambda^2 + B\lambda - h(\lambda).$$

Logo,

$$(\widetilde{\zeta})'(t)t - \widetilde{\zeta}(t) > 0 \Leftrightarrow At^2 - A\lambda^2 + B\lambda - h(\lambda) > 0.$$

Entretanto,

$$At^2 - A\lambda^2 + B\lambda - h(\lambda) > 0 \Leftrightarrow -t_* < t < t_*,$$

onde

$$t_* = \sqrt{\lambda^2 - \frac{(B\lambda - f(\lambda))}{A}} = T + \lambda.$$

Portanto,

$$(\widetilde{\zeta})'(t)t - \widetilde{\zeta}(t) \geq 0 \ \forall t \in [\lambda, T + \lambda], \tag{A.3}$$

de onde segue que $\dfrac{\widetilde{\zeta}(t)}{t}$ é não-decrescente em $[a - \delta, a + \tau]$, onde $\tau = T - \delta > 0$.

Usando (A.3)

$$\widetilde{\zeta}(t) \leq (\widetilde{\zeta})'(t)t = \big(2A(t - \lambda) + B\big)t \quad \forall\, t \in [\lambda, T + \lambda]$$

o que implica

$$\widetilde{\zeta}(t) \leq (2AT + B)t = \frac{V_0}{k}t \leq h(t) \quad \forall\, t \in [a, T + \lambda]. \tag{A.4}$$

Além disso, mostra-se que

$$A\delta^2 + B\delta + h(\lambda) < h(a), \quad \delta \approx 0^+.$$

Assim, diminuindo δ se necessário, por continuidade, conclui-se que

$$\widetilde{\zeta}(t) = A(t-\lambda)^2 + B(t-\lambda) + h(\lambda) < h(t) \quad \forall\, t \in [\lambda, a]. \tag{A.5}$$

Considerando $t_0 = a - \delta$ e $t_1 = a + \tau$, por (A.2), (A.4) e (A.5),

$$\widetilde{\zeta}(s) \le \widehat{h}(s) \quad \text{para todo } \ s \in [t_0, t_1],$$

$$\widetilde{\zeta}(t_0) = \widehat{h}(t_0), \ (\widetilde{\zeta})'(t_0) = \widehat{h}'(t_0), \ \widetilde{\zeta}(t_1) = \widehat{h}(t_1) \ \text{ e } \ (\widetilde{\zeta})'(t_1) = \widehat{h}'(t_1).$$

■

Usando o Lema A.1, segue que a função $\zeta(t) = \phi(t)\widetilde{\zeta}(t)$ verifica as seguintes condições:

- $\zeta(s) \le \widehat{f}(s)$, para todo $s \in [t_0, t_1]$,
- $\zeta(t_0) = \phi(t_0)\widehat{h}(t_0) = \widehat{f}(t_0)$ e $\zeta(t_1) = \phi(t_1)\widehat{h}(t_1) = \widehat{f}(t_1)$,
- $$\begin{aligned} \zeta'(t_0) &= \phi^{'}(t_0)\widetilde{\zeta}(t_0) + \phi(t_0)(\widetilde{\zeta})'(t_0) \\ &= \phi'(t_0)\widehat{h}(t_0) + \phi(t_0)(\widehat{h})'(t_0) \\ &= \phi'(t_0)h(t_0) + \phi(t_0)h'(t_0) \\ &= \big(\phi(t)h(t)\big)'(t_0) = f'(t_0), \end{aligned}$$
- $\zeta'(t_1) = (\widehat{f})'(t_1)$,
- $\dfrac{\zeta(s)}{\phi(s)s} = \dfrac{\phi(s)\widetilde{\zeta}(s)}{\phi(s)s} = \dfrac{\widetilde{\zeta}(s)}{s}$,

mostrando que a função ζ verifica as condições (ζ_1), (ζ_1), (ζ_3) e (ζ_4) mencionadas no Capítulo 3.

Apêndice B

Um resultado de imersão

Neste apêndice, estabelecemos dois resultados de imersão que foram usados na tese. O primeiro resultado esta associado a uma importante propriedade envolvendo os espaços de Orlicz-Sobolev que sabemos ser válida para os espaços de Sobolev. Aqui, seguimos as ideias encontradas em Donaldson e Trundinger [32, Teorema 3.2] e Adams [1, Teorema 8.35]. Todavia, enfatizamos que a nossa demonstração pode ser aplicada também a domínios ilimitados de $\mathbb{R}^N$.

Proposição B.2. *Existe uma constante $M^* > 0$, independente de ϵ tal que*

$$\|u\|_{\Phi_*,\Omega_{\epsilon,i}} \leq M^* \|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \text{ para todo } u \in \widetilde{X}_{\epsilon,i}.$$

Demonstração. No que segue, defina a função $\upsilon(t) = \big(\Phi_*(t)\big)^{1-\frac{1}{N}}$. Primeiramente, observe que

$$\left|\frac{d}{dt}\upsilon(t)\right| \leq \frac{N-1}{N}\widetilde{\Phi}^{-1}\big(\upsilon(t)^{\frac{N}{N-1}}\big) \text{ para todo } t > 0. \tag{B.1}$$

De fato, por definição

$$\frac{d}{ds}\Phi_*^{-1}(s) = \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{ds}\Phi_*^{-1}(s) = \frac{1}{\frac{d}{ds}\Phi_*(s)}.$$

Logo, fazendo $s = \Phi_*^{-1}(t)$, obtém-se

$$\Phi^{-1}\big(\Phi_*(t)\big)\frac{d}{dt}\Phi_*(t) = \big(\Phi_*(t)\big)^{1+\frac{1}{N}} \text{ para todo } t \geq 0. \tag{B.2}$$

Aplicando o Lema 1.1.9,

$$\Phi_*(t) \leq \Phi^{-1}\big(\Phi_*(t)\big)\widetilde{\Phi}^{-1}\big(\Phi_*(t)\big). \tag{B.3}$$

Combinando (B.2) e (B.3), obtemos

$$\Big|\frac{d}{dt}\Phi_*(t)\Big| \leq \widetilde{\Phi}^{-1}\big(\Phi_*(t)\big)\big(\Phi_*(t)\big)^{\frac{1}{N}}$$

de onde segue

$$\Big|\frac{d}{dt}\upsilon(t)\Big| \leq \frac{N-1}{N}\widetilde{\Phi}^{-1}\big(\Phi_*(t)\big) \text{ para todo } t > 0.$$

Note que para cada $u \in \widetilde{X}_{\epsilon,i} \cap L^\infty(\Omega_{\epsilon,i})$ e $k > 0$, a função $\nu := \upsilon \circ \left(\frac{|u|}{k}\right) \in W^{1,1}(\Omega_{\epsilon,j})$ e

$$\frac{\partial \nu(x)}{\partial x_j} = \upsilon'\Big(\frac{|u(x)|}{k}\Big)\frac{\text{sgn}u(x)}{k}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}.$$

Por [1, Teorema 4.12], desde que $\Omega_{\epsilon,j}$ verifica a condição do cone uniforme para todo $\epsilon > 0$, sabemos que existe uma constante associada com a imersão $W^{1,1}(\Omega_{\epsilon,j}) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega_{\epsilon,j})$ que não depende de ϵ, isto é, existe uma constante positiva C, independente de u e ϵ, tal que

$$\|\nu\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega_{\epsilon,j})} \leq C\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big\|\frac{\partial \nu}{\partial x_j}\Big\|_{L^1(\Omega_{\epsilon,j})} + \|\nu\|_{L^1(\Omega_{\epsilon,j})}\Big),$$

ou equivalentemente,

$$\left[\int_{\Omega_{\epsilon,i}}\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big)dx\right]^{1-\frac{1}{N}} \leq \frac{C}{k}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_{\epsilon,i}}\Big|\upsilon'\Big(\frac{|u|}{k}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|dx + C\int_{\Omega_{\epsilon,i}}|\upsilon\Big(\frac{|u|}{k}\Big)|dx.$$

Considerando $k = \|u\|_{\Phi_*,\Omega_{\epsilon,i}}$, pela Desigualdade de Hölder e (B.1), temos

$$1 \leq \frac{2C}{k}\frac{N-1}{N}\sum_{j=1}^{N}\|\widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big))\|_{\widetilde{\Phi},\Omega_{\epsilon,i}}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\|_{\Phi,\Omega_{\epsilon,i}} + C\int_{\Omega_{\epsilon,i}}|\upsilon\Big(\frac{|u|}{k}\Big)|dx. \tag{B.4}$$

Agora, observe que

$$\Big\|\widetilde{\Phi}^{-1}\Big(\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big)\Big)\Big\|_{\widetilde{\Phi},\Omega_{\epsilon,i}} = \inf\Big\{\lambda > 0 \ : \ \int_{\Omega_{\epsilon,i}}\widetilde{\Phi}\Big(\frac{1}{\lambda}\widetilde{\Phi}^{-1}\Big(\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big)\Big)\Big)dx \leq 1\Big\}.$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_{\epsilon,i}} \widetilde{\Phi}\Big(\widetilde{\Phi}^{-1}\Big(\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big)\Big)\Big)dx = 1,$$

donde

$$\inf\Big\{\lambda > 0 \ : \ \int_{\Omega_{\epsilon,i}} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{1}{\lambda}\widetilde{\Phi}^{-1}\Big(\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big)\Big)\Big)dx \leq 1\Big\} \leq 1.$$

Logo,

$$\Big\|\widetilde{\Phi}^{-1}\Big(\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big)\Big)\Big\|_{\widetilde{\Phi},\Omega_{\epsilon,i}} \leq 1,$$

e, portanto,

$$\|\widetilde{\Phi}^{-1}\big(\Phi_*\Big(\frac{|u|}{k}\Big)\big)\|_{\widetilde{\Phi},\Omega_{\epsilon,i}}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\|_{\Phi,\Omega_{\epsilon,i}} \leq \|\nabla u\|_{\Phi,\Omega_{\epsilon,i}} \tag{B.5}$$

Por outro lado, usando o Teorema do Valor Médio, verifica-se

$$\int_{\Omega_{\epsilon,i}} |v\Big(\frac{|u|}{k}\Big)|dx \leq \frac{2}{k}\frac{N-1}{N}\|\widetilde{\Phi}^{-1}\big(\Phi_*(\frac{|u|}{k})\big)\|_{\widetilde{\Phi},\Omega_{\epsilon,i}}\|u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}. \tag{B.6}$$

De (B.4)-(B.6), conclui-se que

$$1 \quad \leq \quad \frac{2C}{k}\frac{N-1}{N}\|\nabla u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}} + \frac{2}{k}\frac{N-1}{N}\|u\|_{\Phi,\widetilde{\Omega}_{\epsilon,i}}.$$

Portanto, existe $M_* > 0$, independente de ϵ, satisfazendo

$$\|u\|_{\Phi_*,\Omega_{\epsilon,i}} \leq M^*\|u\|_{\widetilde{X}_{\epsilon,i}} \text{ para todo } u \in \widetilde{X}_{\epsilon,i} \cap L^\infty(\Omega_{\epsilon,i}).$$

Agora, o resultado segue usando densidade. ∎

Decorre da demonstração do resultado acima o seguinte corolário:

Corolário B.3. *Seja $(y_{n,i})$ obtida na Proposição 4.1.1. Então, existe $C > 0$ independente de ρ e $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i})} \Phi_*(|v|)dx \leq C\|v\|_{W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}))},$$

para todo $v \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}))$.

Demonstração. O corolário segue repetindo as mesmos argumentos usados na demonstração da Proposição B.2. O principal ponto que gostaríamos de enfatizar é o fato de que a constante associada com a imersão

$$W^{1,1}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i})) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i}))$$

independe de ρ e $n \in \mathbb{N}$, pois os conjuntos $\Theta_{\rho,n,i} = \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j=1}^p B_\rho(y_{n,i})$ verificam a condição do cone uniforme para todo $\rho > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. ∎

Apêndice C

Um resultado do tipo Lions para espaços de Orlicz-Sobolev

Neste apêndice, estabelecemos um resultado bem conhecido para os espaços de Sobolev. Entretanto, convém mencionar que não encontramos na literatura uma versão para os espaços de Orlicz-Sobolev . Aqui, adaptamos os argumentos encontrados em [8].

Proposição C.1. *Sejam $\varrho, C_0 > 0$ e $\epsilon_n \in (0, +\infty)$ com $\epsilon_n \to 0$. Seja $(v_{n,i}) \subset \widetilde{X}_{\epsilon_n}, i$ uma sequência satisfazendo*

$$\|v_{n,i}\|_{\widetilde{X}_{\epsilon_{n},i}} \leq C_0 \;\; e \;\; \lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\varrho(y)\cap\Omega_{\epsilon_{n},i}} \Phi(|v_{n,i}|)dx = 0.$$

Então, para qualquer N-função B verificando a condição Δ_2 com

$$\lim_{t\to 0} \frac{B(t)}{\Phi(t)} = 0 \;\; e \;\; \lim_{|t|\to+\infty} \frac{B(t)}{\Phi_*(t)} = 0.$$

temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_{n},i}} B(|v_{n,i}|)dx = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, note que dado $\eta > 0$ existe $\kappa > 0$ tal que

$$B(|v_{n,i}|) \leq \eta\Phi_*(|v_{n,i}|) \text{ para } |v_{n,i}| \geq \kappa.$$

Combinando a Proposição (B.2) com a limitação de $(\|v_{n,i}\|_{\widetilde{X}_{\epsilon_n,i}})$ em $\mathbb{R}$, temos

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|v_{n,i}|)dx \leq \eta C + \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\leq\kappa]} B(|v_{n,i}|)dx$$

o que implica

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|v_{n,i}|)dx \leq \eta C + \limsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\leq\kappa]} B(|v_{n,i}|)dx. \tag{C.1}$$

Assim, a proposição segue mostrando que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\leq\kappa]} B(|v_{n,i}|)dx = 0. \tag{C.2}$$

De fato, supondo (C.1) e (C.2),

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|v_{n,i}|)dx \leq \eta C$$

e pela arbitrariedade de η segue que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|v_{n,i}|)dx = 0.$$

Agora, mostraremos que o limite em (C.2) ocorre. Com esta finalidade, para cada $\zeta > 0$ suficientemente pequeno considere a função $\chi_\zeta \in C_0^1(\mathbb{R})$ dada por

$$\chi_\zeta(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } |s| \leq \kappa - \zeta, \\ a_1(s), & \text{se } -(\kappa+\zeta) \leq s \leq -(\kappa-\zeta), \\ a_2(s), & \text{se } \kappa-\zeta \leq s \leq \kappa+\zeta, \\ 0, & \text{se } |s| \geq \kappa+\zeta, \end{cases}$$

onde $a_1, a_2 \in C^1\big(\mathbb{R};[0,1]\big)$ com a_1 não-decrescente e a_2 não-crescente. A seguir, defina a seguinte função auxiliar

$$u_{n,i}(x) = \chi_\zeta(|v_{n,i}(x)|)v_{n,i}(x).$$

Note que

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|u_{n,i}|)dx \geq \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\leq\kappa-\zeta]} B(|v_{n,i}|)dx. \tag{C.3}$$

Logo, (C.2) segue mostrando o limite abaixo

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|u_{n,i}|)dx = 0. \tag{C.4}$$

De fato, por (C.3) e C.4,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\le\kappa-\zeta]} B(|v_{n,i}|)dx = 0.$$

Desde que

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[\kappa-\zeta\le|v_{n,i}|\le\kappa]} B(|v_{n,i}|)dx = o_n(1)$$

e

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\le\kappa]} B(|v_{n,i}|)dx = \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[\kappa-\zeta\le|v_{n,i}|\le\kappa]} B(|v_{n,i}|)dx + \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\le\kappa-\zeta]} B(|v_{n,i}|)dx,$$

resulta que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}\cap[|v_{n,i}|\le\kappa]} B(|v_{n,i}|)dx = 0,$$

Para concluir, provaremos (C.4). No que segue, defina

$$w_{n,i} = \frac{u_{n,i}}{\kappa+\zeta}$$

e observe que a condição Δ_2 implica na existência de uma constante $C_{\kappa+\zeta} > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|u_{n,i}|)dx \le C_{\kappa+\zeta}\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|w_{n,i}|)dx.$$

Portanto, C.4 segue provando o seguinte limite

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega_{\epsilon,i}} B(|w_{n,i}|)dx = 0. \tag{C.5}$$

Usando novamente a condição Δ_2 existe uma constante $C_\kappa > 0$ verificando

$$\Phi(|w_{n,i}|) \le C_\kappa\Phi(|u_{n,i}|) \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Uma vez que $|w_{n,i}| \le \kappa+\zeta$, para todo $n\in\mathbb{N}$, pelo Lema 1.1.32

$$\int_{B_\varrho(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|u_{n,i}|)dx \ge \frac{\Phi(\kappa+\zeta)}{C_\kappa}\int_{B_\varrho(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} \xi_0(|w_{n,i}|)dx \ge \widetilde{C}_{\kappa+\zeta}\int_{B_\varrho(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} |w_{n,i}|^m dx$$

onde $\xi_0(s) = \min\{s^l, s^m\}$, de onde segue

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_\varrho(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} |w_{n,i}|^m dx = 0. \tag{C.6}$$

Afirmamos que para todo $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(|w_{n,i}|^{\alpha}) \in W^{1,1}(\Omega_{\epsilon_n,i})$. Com efeito, sendo $|w_{n,i}| \leq 1$ e $w_{n,i} \in \widetilde{X}_{\epsilon_n,i}$,

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|w_{n,i}|^{\alpha})dx \leq \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|w_{n,i}|)dx \leq \frac{1}{V_0}\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|w_{n,i}|)V(\epsilon_n x)dx < +\infty.$$

Além disso,

$$|\nabla\Phi(|w_{n,i}|^{\alpha})| \leq \alpha\phi(|w_{n,i}|^{\alpha})|w_{n,i}|^{\alpha}|\nabla\Phi(|w_{n,i}|)|.$$

Aplicando a Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} |\nabla\Phi(|w_{n,i}|^{\alpha})|dx &\leq \alpha\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \phi(|w_{n,i}|^{\alpha})|w_{n,i}|^{\alpha}|\nabla w_{n,i}|dx \\
&\leq \alpha\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \widetilde{\Phi}\big(\phi(|w_{n,i}|^{\alpha})|w_{n,i}|^{\alpha}\big)dx + \alpha\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|\nabla w_{n,i}|)dx \\
&\leq \alpha\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi\big(2|w_{n,i}|\big)dx + \alpha\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|\nabla w_{n,i}|)dx \\
&\leq c_1\left[\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Big(\Phi(|\nabla w_{n,i}|) + \Phi\big(|w_{n,i}|\big)\Big)dx\right] < +\infty,
\end{aligned}$$

de onde segue que $\Phi(|w_{n,i}|^{\alpha}) \in W^{1,1}(\Omega_{\epsilon_n,i})$. Usando a imersão contínua de Sobolev

$$W^{1,1}\big(B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}\big) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}\big(B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}\big)$$

existe uma constante $c_1 > 0$, independente de ϵ_n e ϱ, satisfazendo

$$\left[\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} \big(\Phi(|w_{n,i}|^{\alpha})^{\frac{N}{N-1}}\big)dx\right]^{\frac{N-1}{N}} \leq c_1\left[\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} \Big(\Phi(|\nabla w_{n,i}|) + \Phi\big(|w_{n,i}|\big)\Big)dx\right].$$

Considerando $H_{n,i} = \Phi(|\nabla w_{n,i}|) + \Phi\big(|w_{n,i}|\big)$ observamos que

$$\left[\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} |w_{n,i}|^{\frac{m\alpha N}{N-1}}dx\right]^{\frac{N-1}{N}} \leq c_1\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} H_{n,i}dx. \tag{C.7}$$

Agora, fixemos α suficientemente grande e consideremos $p = \frac{m}{N} + m\alpha$. Por (C.6) e (C.7),

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} |w_{n,i}|^{p}dx &\leq \left[\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} |w_{n,i}|^{m}dx\right]^{\frac{1}{N}}\left[\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} |w_{n,i}|^{\frac{m\alpha N}{N-1}}dx\right]^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq c_1\eta\int_{B_{\varrho}(y)\cap\Omega_{\epsilon_n,i}} H_{n,i}dx.
\end{aligned}$$

A seguir, seja $(y_{j,i}) \subset \Omega_{\epsilon_n,i}$, $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Omega_{\epsilon_n,i} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_\varrho(y_{j,i}),$$

onde cada ponto de $\Omega_{\epsilon_n,i}$ pertence a no máximo β bolas. Portanto,

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} |w_{n,i}|^p dx \leq \beta c_1 \eta \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} H_{n,i} dx.$$

Recorde que $\|v_{n,i}\|_{\widetilde{X}_{\epsilon_n,i}} \leq C_0$, então $H_{n,i}$ é uniformemente limitada em $L^1(\Omega_{\epsilon_n,i})$, consequentemente

$$w_{n,i} \to 0 \ \text{ em } L^p(\Omega_{\epsilon_n,i})$$

para p suficientemente grande. Por outro lado,

$$\|w_{n,i}\|_{L^m(\Omega_{\epsilon_n,i})} \leq c_2 \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi(|\nabla w_{n,i}|) dx < +\infty.$$

Por interpolação, concluímos que

$$w_{n,i} \to 0 \ \text{ em } L^q(\Omega_{\epsilon_n,i}) \ \text{ para todo } \ q > m,$$

em particular,

$$w_{n,i} \to 0 \ \text{ em } L^{l^*}(\Omega_{\epsilon_n,i}) \ \text{ e } \ w_{n,i} \to 0 \ \text{ em } L^{m^*}(\Omega_{\epsilon_n,i}),$$

consequentemente,

$$\int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} \Phi_*(|w_{n,i}|) dx \to 0,$$

pois $\Phi_*(t) \leq c_3(|t|^{l^*} + |t|^{m^*})$ para todo $t \geq 0$.

Finalmente, existe $C_\eta > 0$ tal que

$$B(|t|) \leq \eta \Phi(|t|) + C_\eta \Phi_*(|t|) \ \text{ para todo } t \geq 0,$$

logo

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|w_{n,i}|) dx \leq \eta c_4.$$

Fazendo $\eta \to 0$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_{\epsilon_n,i}} B(|w_{n,i}|) dx = 0,$$

mostrando (C.5), finalizando a demonstração. ■

Referências Bibliográficas

[1] A. Adams e J.F. Fournier, Sobolev Spaces, 2nd ed., Academic Press 2003.

[2] A. Adams e L.I. Hedberg, Function Spaces and Potential Theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 314, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[3] C.O. Alves, Existence of Multi-peak of solutions for a class of qualinear problems in $\mathbb{R}^N$, Topol. Methods Nonlinear Anal., **38** (2011), 307-332.

[4] C.O. Alves e M.C. Ferreira, Multi-bump solutions for a class of quasilinear problems involving variable exponents, Ann. Mat. Pura Appl., **194(6)** (2015), 1563-1593.

[5] C.O. Alves e G.M. Figueiredo, Existence and multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation in $\mathbb{R}^N$, Differential Integral Equations, **19(2)** (2006), 143-162.

[6] C.O. Alves e G.M. Figueiredo, Multiplicity and Concentration of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Problems. Adv., Nonlinear Stud., **11(2)** (2011), 265-294.

[7] C.O. Alves e G.M. Figueiredo, Multiplicity of Positive Solutions For a Quasilinear Problem in $\mathbb{R}^N$ Via Penalization Method, Adv. Nonlinear Stud., **5** (2005), 551-572.

[8] C.O. Alves, G.M. Figueiredo e J.A. Santos, Strauss and Lions type results for a class of Orlicz-Sobolev spaces and applications, Topol. Methods Nonlinear Anal., **44(2)** (2014), 435-456.

[9] C.O. Alves e M.A.S. Souto, On existence and concentration behavior of ground state solutions for a class of problems with critical growth, Comm. Pure and Applied Analysis, **1(3)** (2002), 417-431.

[10] C.O. Alves, M.L.M. Carvalho e J.V.A. Gonçalves, On existence of solution of variational multivalued elliptic equations with critical growth via the Ekeland principle, Commun. Contemp. Math., **17(6)** (2015), DOI: 10.1142/S0219199714500382.

[11] A. Ambrosetti, M. Badiale e S. Cingolani, Semiclassical states of nonlinear Schödinger equations with potentials, Arch. Ration Mech. Anal. **140** (1997), 285-300.

[12] A. Ambrosetti e A. Malchiodi, Concentration phenomena for for NLS: recent results and new perspectives. Perspectives in nonlinear partial differential equations, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **446** (2007), 19-30.

[13] A. Ambrosetti, A. Malchiodi e S. Secchi, Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials, Arch. Ration. Mech. Anal., **159** (2001), 253-271.

[14] A. Azzollini, P. d'Avenia e A. Pomponio, Quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ via variational methods and Orlicz-Sobolev embeddings, Calc. Var. Partial Differential Equations, **49** (2014), 197-213.

[15] S. Barile e G.M. Figueiredo, Some classes of eigenvalues problems for generalized $p\&q$-Laplacian type operators on bounded domains, Nonlinear Anal., **119** (2015), 457-468.

[16] T. Bartsch e Z. Q. Wang, Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations, **20** (1995), 1725-1741.

[17] G. Bonanno, G.M. Bisci e V. Radulescu, Quasilinear elliptic non-homogeneous dirichlet problems through Orlicz-Sobolev spaces, Nonlinear Anal., **75** (2012), 4441-4456.

[18] G. Bonanno, G.M. Bisci e V. Radulescu, Existence and multiplicity of solutions for a quasilinear nonhomogeneous problems: An Orlicz-Sobolev space setting J. Math. Anal. Appl., **330** (2007), 416-432.

[19] H. Brezis e E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc., **88(3)** (1983), 486-490.

[20] M.L.M. Carvalho, Equações Diferenciais Parciais Elípticas Multivalentes: Crescimento Crítico, Métodos Variacionais, Tese de Doutorado, IME-UFG, 2013.

[21] R. Cerný, Generalized Moser-Trudinger inequality for unbounded domains and its application Nonlinear Differential Equations and Applicationsr, **5** (2012), 575-608.

[22] M.F. Chaves, G. Ercole e O.H. Miyagaki, Existence of a nontrivial solution for the (p,q)-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, Nonlinear Anal., **114** (2015), 133-141.

[23] S. Cingolani e M. Lazzo, Multiple positive solutions to nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions, J. Diff. Equations, **160** (2000), 118-138.

[24] S. Cingolani e M. Lazzo, Multiple semiclassical standing waves for a class of nonlinear Schrödinger equations, Topol. Methods. Nonl. Analysis, **10** (1997), 1-13.

[25] Ph. Clément, M. Garcia-Huidobro, R. Manásevich e K. Schmitt, Mountain pass type solutions for quasilinear elliptic equations, Calc. Var., **11** (2000), 33-62.

[26] D.G. Costa, On a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations, **1994(7)** (1994), 1-14.

[27] G. Dal Maso e F. Murat, Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems, Nonlinear Anal., **31** (1998), 405-412.

[28] M. del Pino e P.L. Felmer, Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Calc. Var. Partial Differential Equations, **4(2)** (1996), 121-137.

[29] M. del Pino e P.L. Felmer, Multi-peak bound states for nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **15** (1998), 127-149.

[30] E. DiBenedetto, $C^{1,\gamma}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations, Nonlinear Anal., **7(8)** (1985), 827-850.

[31] T.K. Donaldson, Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev spaces, J. Diff. Equations, **10** (1971), 507-528.

[32] T.K. Donaldson e N.S. Trudinger, Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems, J. Funct. Anal., **8(1)** (1971), 52-75.

[33] G.M. Figueiredo, Existence and multiplicity of solutions for a class of $p\&q$ elliptic problems with critical exponent, Math. Nachr., **286(11-12)** (2013), 1129-1141.

[34] G.M. Figueiredo, Existence of positive solutions for a class of $p\&q$ elliptic problems with critical growth on $\mathbb{R}^N$. J. Math. Anal. Appl., **378** (2011), 507-518.

[35] G.M. Figueiredo, Multiplicidade de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Quasilineares, Tese de Doutorado, UNICAMP 2004.

[36] A. Floer e A. Weinstein, Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential, J. Funct. Anal., **69(3)** (1986), 397-408.

[37] N. Fukagai, M. Ito e K. Narukawa, Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on $\mathbb{R}^N$, Funkcial. Ekvac., **49(2)** (2006), 235-267.

[38] N. Fukagai, M. Ito e K. Narukawa, Quasilinear elliptic equations with slowly growing principal part and critical Orlicz-Sobolev nonlinear term, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **139(1)** (2009), 73-106.

[39] N. Fukagai e K. Narukawa, On the existence of multiple positive solutions of quasilinear elliptic eigenvalue problems, Ann. Mat. Pura Appl., **186(3)** (2007), 539-564.

[40] M. Fuchs e L. Gongbao, L^∞-bounds for elliptic equations on Orlicz-Sobolev spaces, Arch. Math. (Basel), **72(4)** (1999), 293-297.

[41] M. Fuchs e G. Li, Variational inequalities for energy functionals with nonstandard growth conditions. Abstr. Appl. Anal., **3** (1998), 41-64.

[42] M. Fuchs e V. Osmolovski, Variational integrals on Orlicz-Sobolev spaces. Z. Anal. Anwendungen, **17** (1998), 393-415.

[43] N. Fusco e C. Sbordone, Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals, Comm. Partial Differential Equations, **18(1-2)** (1993), 153-167.

[44] J.-P. Gossez, Orlicz-Sobolev spaces and nonlinear elliptic boundary value problems. Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Teubner-Texte zur Mathematik, (1979), 59-94.

[45] J.-P. Gossez, Nonlinear elliptic boundary value problem for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients, Trans. Am. Math. Soc., **190** (1974), 163-205.

[46] A. Giacomini e M. Squassina, Multi-peak solutions for a class of degenerate elliptic equations, Asymptotic Anal., **36** (2003), 115-147.

[47] C. Gui, Existence of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational method, Comm. Partial Differential Equations, **21(5-6)** (1996), 787-820.

[48] C. He e G. Li, The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing $p\&q$-Laplacians. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **33** 337-371, (2008).

[49] C. He e G. Li, The existence of a nontrivial solution to the $p\&q$-Laplacian problem with nonlinearity asymptotic to u^{p-1} at infinity in $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Analysis, **68** (2008), 1100-1119.

[50] O.A. Ladyzhenskaya and N.N. Ural'tseva, Linear and quasilinear elliptic equations, Acad. Press 1968.

[51] M. Lazzo, Solutions positives multiples pour une equation elliptique non lineaire avec l'exposant critique de Sobolev, C. R. Acad. Sci. Paris, **314** (1992), 161-164.

[52] V.K. Le, D. Motreanu e V.V. Motreanu, On a non-smooth eigenvalue problem in Orlicz-Sobolev spaces., Appl. Anal., **89(2)** (2010), 229-242.

[53] V.K. Le e K. Schmitt, Quasilinear elliptic equations and inequalities with rapidly growing coefficients, J. London Math. Soc., **62** (2000), 852-872.

[54] G. Li e X. Liang, The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of p-q-Laplacian type on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal., **71(5-6)** (2009), 2316-2334.

[55] G.M. Lieberman, Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations, Nonlinear Anal., **12(11)** (1988), 1203-1219.

[56] G.M. Lieberman, The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations, Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 311-361.

[57] M. Mihailescu e V. Radulescu, Existence and multiplicity of solutions for a quasilinear non-homogeneous problems: An Orlicz-Sobolev space setting, J. Math. Anal. Appl., **330** (2007), 416-432.

[58] M. Mihailescu e V. Radulescu, Nonhomogeneous Neumann problems in Orlicz-Sobolev spaces. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, **346** (2008), 401-406.

[59] M. Mihailescu e D. Repovs, Multiple solutions for a nonlinear and non-homogeneous problems in Orlicz-Sobolev spaces. Appl. Math. Comput., **217** (2011), 6624-6632.

[60] M. Mihailescu, V. Radulescu e D. Repovs, On a non-homogeneous eigenvalue problem involving a potential: an Orlicz-Sobolev space setting, J. Math. Pures Appl., **93** (2010), 132-148.

[61] Y.G. Oh, Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class $(V)_\alpha$, Comm. Partial Differential Equations, **13(12)** (1988), 1499-1519.

[62] Y. G. Oh, Corrections to existence of semi-classical bound state of nonlinear Schrödinger equations with potencial on the class $(V)_\alpha$, Comm. Partial Diff. Eq., **14** (1989), 833-834.

[63] Y.G. Oh, On positive multi-lump bound states of nonlinear Schrödinger equations under multiple well potential, Comm. Math. Phys., **131(2)** (1990), 223-253.

[64] W. Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, Studia Math., **3** (1931), 200-211.

[65] M.N. Rao and Z.D. Ren, Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, New York 1985.

[66] P.H. Rabinowitz, On a class of nonlinear Schrödinger equations, Z. Angew. Math. Phys., **43(2)** (1992), 270-291.

[67] J.A. Santos, Multiplicity of solutions for quasilinear equations involving critical Orlicz-Sobolev nonlinear terms, Electron. J. Differential Equations, **2013(249)** (2013), 1-13.

[68] J.A. Santos, Equações quasilineares multivalentes, Tese de Doutorado, UNB 2011.

[69] J.A. Santos e S.H.M. Soares, Radial solutions of quasilinear equations in Orlicz-Sobolev type spaces, J. Math. Anal. Appl., **428** (2015), 1035-1053.

[70] J. Serrin e M. Tang, Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations, Indiana Univ. Math. J., **49(3)** (2000), 897?923.

[71] Z. Tan e F. Fang, Orlicz-Sobolev versus Holder local minimizer and multiplicity results for quasilinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl., **402** (2013), 348-370.

[72] N.S. Trudinger, On Harnack type inequalities and their applicatoin to quasilinear elliptic equations, Communication on Pure and Applied Mathematics, **20** (1967), 721-747.

[73] X. Wang, On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys., **53** (1993), 229-244.

[74] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhauser, 1996.

[75] Zhen-hui Zhang e Hao-yuan Xu, Existence of Multi-peak Solutions for p-Laplace Problems in $\mathbb{R}^N$, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, **31** (2015), 1061-1072.