Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre as extensões multilineares dos operadores absolutamente somantes.

por

Diana Marcela Serrano Rodríguez

João Pessoa - PB
Março/2014

Sobre as extensões multilineares dos operadores absolutamente somantes.

por

Diana Marcela Serrano Rodríguez †

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Março/2014

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Membro 1

Prof. Dr. Membro 2

Prof. Dr. Membro 3

Prof. Dr. Membro 4

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Março/2014

Resumo

No presente trabalho vamos trabalhar com duas generalizações dos bem conhecidos operadores absolutamente somantes. A primeira envolve os operadores multineares múltiplo somantes e nos focaremos num resultado de coincidência que é equivalente à desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille. Esta afirma que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e todo inteiro positivo $m \geq 1$, existem escalares $B_{\mathbb{K},m} \geq 1$ tais que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left| U(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m} \sup_{z_1,\ldots,z_m \in \mathbb{D}^N} |U(z_1, \ldots, z_m)|$$

para toda forma m-linear $U : \mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo N, onde $(e_i)_{i=1}^N$ é a base canônica de $\mathbb{K}^N$. Nessa linha, nosso objetivo será a investigação das melhores constantes $B_{\mathbb{K},m}$ que satisfazem essa desigualdade.

A segunda generalização envolve o estudo dos operadores multilineares absolutamente somantes num ponto; apresentamos uma versão abstrata destes operadores que engloba várias de suas propriedades. Veremos que, considerando os espaços de sequências adequados, teremos outros tipos de operadores como casos particulares da nossa versão.

Palavras-chave: Operadores absolutamente somantes, Operadores multilineares múltiplo somantes, Operadores multilineares absolutamente somantes, Teorema de Bohnenblust-Hille.

Abstract

In this work we study two generalizations of the well-known concept of absolutely summing operators. The first one consists of the multiple summing multilinear operators and it is focused on a result of coincidence that is equivalent to the Bohnenblust-Hille inequality. This inequality asserts that, for $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and every positive integer m there exists positive scalars $B_{\mathbb{K},m}\geq 1$ such that

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\left|U(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\leq B_{\mathbb{K},m}\sup_{z_1,\ldots,z_m\in\mathbb{D}^N}\left|U(z_1,\ldots,z_m)\right|$$

for every m-linear mapping $U:\mathbb{K}^N\times\cdots\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}$ and every positive integer N, where $(e_i)_{i=1}^{N}$ denotes the canonical basis of $\mathbb{K}^N$. In this line our main goal is the investigation of the best constants $B_{\mathbb{K},m}$ satisfying the above inequality.

The second generalization involves the concept of absolutely summing multilinear operators at a given point; we present an abstract version of these operators involving many of their properties. We prove that, considering appropriate sequence spaces, we have other kind of operators as particular cases of our version.

Keywords: Absolutely summing operators, Multiple summing multilinear operators, Absolutely summing multilinear operators, Bohnenblust-Hille inequality.

Sumário

Introdução

Em 1829, o matemático J. P. G. L. Dirichlet estabeleceu o resultado clássico de Análise que afirma que, em $\mathbb{R}$, uma série converge absolutamente se, e somente se, converge incondicionalmente. Para espaços de Banach de dimensão infinita, a situação é um pouco diferente: por exemplo, nos espaços ℓ_p, para $1 < p < \infty$, a série $\sum \frac{e_n}{n}$ é incondicionalmente convergente mas não é absolutamente convergente.

Posteriormente, Banach propôs em [3, p. 40] o problema de existência de séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, problema contemplado também no Scottish Book ([34, Problema 122]) e resolvido afirmativamente, quase vinte anos depois, por A. Dvoretzky e C.A. Rogers ([21]). Interessado neste resultado, Alexander Grothendieck realiza uma demonstração diferente deste em [23] e apresenta uma classe de operadores que "transforma"séries incondicionalmente convergentes em séries absolutamente convergentes em [24]; tais operadores são os denominados operadores absolutamente somantes. No entanto, foi apenas nos anos 60 que esta classe foi devidamente introduzida e divulgada através de trabalhos de diferentes matemáticos como Pietsch ([48]), Lindenstrauss ([27]) e Pełczyński ([35]).

Nos anos 80, Pietsch esboça a teoria multilinear dos operadores absolutamente somantes em [49]. Adicionalmente, em 1989, Alencar e Matos ([2]) introduzem um conceito que chamou a atenção de vários autores, procurando outras noções que também estendessem a teoria linear para o contexto não-linear. Em 2003, D. Pérez-García ([46]) e M. C. Matos ([31]) definem, de maneira independente, os operadores múltiplo somantes que constituem uma classe que mantém, sob certo sentido, a essência da teoria linear. No mesmo ano, M. C. Matos ([32]) define os operadores multilineares absolutamente somantes num ponto e, desde então, varios são os autores que têm trabalhado sobre esta linha; veja, por exemplo, [4] e [13].

Baseamos este trabalho no contexto das extensões ao caso multilinear dos operadores absolutamente somantes, mais precisamente, nas teorias dos operadores multilineares absolutamente somantes num ponto e dos operadores múltiplo somantes, ambas desenvolvidas por Matos.

Sobre os operadores multilineares múltiplo somantes, estudamos um resultado de coincidência provado em [16] e [42], que é equivalente à famosa desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille. Esta desigualdade, publicada em 1931 na prestigiosa revista *Annals of Mathematics,* afirma que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e todo inteiro positivo $m \geq 1$, existem escalares $B_{\mathbb{K},m} \geq 1$ tais que

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} \left| U(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m} \sup_{z_1,\dots,z_m \in \mathbb{D}^N} |U(z_1, \dots, z_m)| \qquad (1)$$

para toda forma m-linear $U : \mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo N, onde $(e_i)_{i=1}^N$ é a base canônica de $\mathbb{K}^N$. Desde 1931 até a década passada, apareceram várias demonstrações e aplicações desta desigualdade em diversas áreas da matemática e, por sua vez, foram obtidas fórmulas cada vez menores para as constantes $(B_{\mathbb{K},m})_{m\in\mathbb{N}}$. Contudo, estas fórmulas tinham em comum o fato de possuírem um crescimento do tipo exponencial.

Nos últimos anos, a busca pelas constantes nesta desigualdade tem trazido a consideração um fato surpreendente: as constantes ótimas da desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille possuem crescimento, no mínimo, subexponencial. Em [19], Diniz, Muñoz–Fernández, Pellegrino e Seoane–Sepúlveda trouxeram à luz a evidência deste fato mediante um estudo das constantes dadas no trabalho [42] dos dois últimos autores mencionados. Estas constantes, dadas em [42], serão tratadas na *Seção 2.1,* e denotadas ao longo do texto por $(C_{\mathbb{K},m})_{m\in\mathbb{N}}$. Elas são as melhores constantes conhecidas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille e foram concebidas mediante uma análise exaustiva das ideias de Defant et al. do artigo [16].

Denotaremos por $K_{\mathbb{K},m}$ as constantes ótimas (menores) que satisfazem (1). Uma das constribuições principais do presente trabalho mostra que existe uma constante positiva C tal que:

$$K_{\mathbb{K},m+1} - K_{\mathbb{K},m} < \frac{C}{m^{0.473}}$$

para uma quantidade infinita de m. A ferramenta central para provar esta estimativa e outros teoremas relacionados que trataremos na *Seção 2.3,* é um resultado de interesse independente: a existência de uma sequência de constantes que satisfazem (1) tal que o limite da diferença dos termos consecutivos é zero. Este resultado, que chamaremos de *Lema Fundamental* , será dado na *Seção* 2.2. Por meio deste, também conseguiremos demonstrar que as constantes ótimas da desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille possuem crescimento subpolinomial do tipo p-sub-harmônico para $p \approx 0.526322$, no caso dos reais, e $p \approx 0.304975$ no caso dos complexos. Mais precisamente, mostraremos que

$$K_{\mathbb{R},m} < 1.65\,(m-1)^{0.526322} + 0.13$$

e

$$K_{\mathbb{C},m} < 1.41\,(m-1)^{0.304975} - 0.04.$$

Os resultados anteriores têm seus respectivos análogos se modificamos na desigualdade (1) o expoente $\frac{2m}{m+1}$ por $\frac{2mt}{(m-1)t+2}$ para o parâmetro t variando entre 1 e 2; tais modificações serão chamadas de variações da desigualdade de Bohnenblust-Hille, fazendo parte do *Capítulo 2* e encontrando-se contidos no trabalho:

- [39] *There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants* $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ *with* $\lim_{n\to\infty}(C_{n+1} - C_n) = 0$. D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, D. M. Serrano-Rodríguez. J. Funct. Anal., 264(2): 429–463, (2013).

Por outra parte, no *Capítulo 3* obtemos uma fórmula fechada que satisfaz a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille e que se aproxima, consideravelmente bem, das constantes $(C_{\mathbb{K},m})_{m\in\mathbb{N}}$ mencionadas anteriormente, as quais estão dadas por uma fórmula recursiva que envolve a função Γ, tornando complicado o cálculo destas. Assim, apresentamos neste capítulo a menor fórmula fechada para constantes que satisfazem a desigualdade de Bohnenblust-Hille. Este resultado encontra-se na publicação:

- [58] *Improving the closed formula for subpolynomial constants in the multilinear Bohnenblust–Hille inequalities.* D. M. Serrano-Rodríguez. Lin. Alg. and its Appl., 438(7): 3124–3138, (2013).

Finalmente, lembramos que, em [54], uma abordagem abstrata para operadores absolutamente somantes, para espaços de sequências muito gerais, foi introduzida e explorada. Essa classe foi chamada de operadores absolutamente λ-somantes. A busca de ambientes abstratos onde uma teoria mais geral ainda seja valida tem sido investigada em diferentes artigos, ainda para operadores não-multilineares (citamos [33, 44, 45] e as referências ali contidas).

No *Capítulo 4*, introduziremos uma abordagem semelhante para o caso multilinear. Mostraremos que vários resultados multilineares conhecidos (e também alguns outros novos resultados) são casos particulares de nossa classe abstrata, a qual chamaremos de operadores multilineares absolutamente $\gamma_{(s;s_1,\ldots,s_m)}$-somantes num ponto. Como é de se esperar, vários dos resultados da teoria dos operadores multilineares absolutamente somantes num ponto aparecem como caso particular dos nossos resultados no ambiente abstrato.

Além disso, a classe dos operadores absolutamente $\gamma_{(s;s_1,\ldots,s_m)}$-somantes contém, como caso particular, outras classes de operadores multilineares estudadas recentemente, tais como os operadores multilineares quase somantes e Cohen fortemente somantes. Estes resultados fazem parte do artigo:

- [57] *Absolutely $\gamma-$ summing multilinear operators* D. M. Serrano-Rodríguez. Lin. Alg. and its Appl., 439(12): 4110–4118, (2013).

Notação e terminologia

No decorrer deste texto, consideraremos apenas espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$. Não faremos distinção entre os termos "aplicação", "função", "mapa"ou "operador". Na maior parte deste texto, X, Y, E, F, G, H, X_i, $Y_i, ...$ denotarão espaços de Banach. A norma de um espaço de Banach E será usualmente denotada por $\|\cdot\|$; quando maior precisão for necessária, usaremos $\|\cdot\|_E$. O símbolo B_E denotará a bola unitária fechada $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ de um espaço de Banach E.

O dual topológico de um espaço de Banach E será denotado por E', lembremos que $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ e, mais geralmente, denotaremos por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ o espaço de Banach de todas as aplicações m-lineares de $E_1 \times ... \times E_m$ em F, com a norma usual do sup. Quando $E_1 = ... = E_m$, o espaço será denotado da forma $\mathcal{L}(^nE; F)$ e se $F = \mathbb{K}$, denotá-lo-emos simplesmente por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m)$.

Diremos que $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é de posto finito quando a dimensão de $T(F)$ for finita. A imagem de um operador linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ entre dois espaços quaisquer $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ de um vetor $v \in \mathbb{V}$ será expressa por Tv ou $T(v)$.

Os números reais p, q serão tais que $1 \leq p, q < \infty$. O conjugado de p será denotado por p', $p' \in (1, \infty)$. Este é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Para $p = 1$, $p' = \infty$.

Chamamos a atenção para os seguintes espaços que surgirão ao longo do texto:

Se $1 \leq p < \infty$, $l_p(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}};\ \sum_n \|x_n\|^p < \infty\right\}$. Se $X = \mathbb{K}$, o espaço $l_p(X)$ será denotado simplesmente por l_p.

$l_\infty(X)$ é o espaço das sequências limitadas de X. Novamente, se $X = \mathbb{K}$ denotaremos $l_\infty(X)$ por l_∞.

$l_p^N := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p;\ x_n = 0 \text{ para todo } n \geq N + 1\}$

Capítulo 1

A origem. Operadores absolutamente somantes.

Johan Dirichlet $(1805 - 1859)$, matemático alemão, demonstrou que uma sequência de escalares é absolutamente somante precisamente quando é incondicionalmente somante e, mediante ajustes feitos nesta demonstração, estendeu-se este resultado para qualquer espaço normado de dimensão finita. Anos depois, por Stefan Banach $(1892 - 1945)$, surge a seguinte propriedade: um espaço normado é completo se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.

Nesta direção, a seguinte questão foi apresentada em 1932 por Banach em seu livro *Théorie des opérations linéaires*: *"Existe, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente?"*.

Esta pergunta faz parte do livro *The Scottish Book* (O Livro Escocês) e levou quinze anos para ser respondida mediante o seguinte teorema apresentado em [21] por A. Dvoretzky e C. A. Rogers: *"Séries incondicionalmente convergentes coincidem com séries absolutamente convergentes se, e somente se, o espaço de Banach tem dimensão finita"*.

Este resultado chamou a atenção de Alexander Grothendieck $(1928-)$, que começou a trabalhar em problemas relacionados exibindo, inclusive, outra demonstração para esse resultado. Ele define uma classe de operadores com a seguinte propriedade:

"Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável, então $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável, desde que T seja um operador linear contínuo entre espaços de Banach". Estes são, os operadores absolutamente somantes. Assim, mediante diferentes resultados e seu trabalho *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* apresentado em 1956 (veja [24], [23]), Grothendieck, em algum sentido, é conhecido como o ancestral da teoria dos operadores absolutamente somantes. Entretanto, a noção de operadores absolutamente somantes, em sua formulação moderna, é devida a A. Pietsch em [48], B. Mitiagin e A. Pełczyński em [35]. Em 1968, um trabalho célebre, [27], de A. Pełczyński e Lindestrauss tornou a teoria de operadores absolutamente somantes mais popular e mostrou aplicações à teoria dos espaços de Banach.

1.1 Operadores lineares absolutamente somantes

Nesta seção, vamos esboçar um breve panorama da teoria dos operadores lineares absolutamente somantes. Esta é a base da teoria dos operadores multilineares absolutamente e múltiplo somantes, os quais são nossa base de estudo.

Definição 1.1.1 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fortemente p-somável se $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \in l_p$.*

Denotamos por $l_p(X)$ o espaço vetorial de todas as sequências fortemente p-somáveis em X. Em $l_p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|, \text{ se } p = \infty. \end{cases}$$

O espaço $l_p(X)$, munido com esta norma, é um espaço de Banach.

Em $l_p(X)$, as sequências $(x_1, x_2, , \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ serão identificadas com as sequências finitas $(x_1, x_2, , \ldots, x_n)$. O conjunto formado por estas sequências forma um subespaço denso em $l_p(X)$. De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Agora, é só escolher a sequência finita $x' = (x_1, x_2, , \dots, x_N)$, e, daí,

$$\|x - x'\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Definição 1.1.2 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fracamente p-somável se $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p$ para todo $\varphi \in X'$.*

Denotamos por $l_p^w(X)$ o conjunto de todas as sequências fracamente p-somáveis.

$\left(l_p^w(X), \|\cdot\|_p^w\right)$ é um espaço de Banach, para todo $p \in [1, \infty]$, onde

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p^w := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|(\varphi(x_n))_n\|_p , \tag{1.1}$$

Note que, para $1 \leq p < \infty$, $l_p(X) \subset l_p^w(X)$. De fato, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$, então

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p^w &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p .
\end{aligned}$$

Quando $p = \infty$, vamos ter sempre que $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$ e, além disso, as normas coincidem. De fato, pelo teorema de Hahn-Banach, temos

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n \|x_n\| = \sup_n \left(\sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x_n)| \right) = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sup_n |\varphi(x_n)| \right) = \|(x_n)\|_\infty^w$$

A igualdade entre $\ell_p(X)$ e $\ell_p^w(X)$ acontecerá em geral somente quando o espaço vetorial X possua dimensão finita. Este resultado é o que se conhece como a versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers,

Teorema 1.1.3 (Dvoretzky-Rogers, versão fraca) *Seja $1 \leq p < \infty$. Todo espaço de Banach com dimensão infinita contém uma sequência fracamente p-somável, que não é fortemente p-somável.*

É fácil ver que quando temos um operador linear contínuo u entre espaços de Banach X e Y, este vai levar sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ em sequências $(ux_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ e, analogamente, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$, então, $(ux_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p^w(Y)$.

Em melhores termos, se $u : X \to Y$ é um operador linear limitado entre espaços de Banach, a correspondência

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \to (ux_n)_{n=1}^{\infty}$$

sempre induz um operador linear limitado $\hat{u}^s : l_p(X) \to l_p(Y)$, como também um operador linear limitado $\hat{u}^w : l_p^w(X) \to l_p^w(Y)$ e, em ambos os casos,

$$\|\hat{u}^s\| = \|\hat{u}^w\| = \|u\|.$$

De fato, se $\hat{u}^s : l_p(X) \to l_p(Y)$, temos

$$\|\hat{u}^s\| = \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \|u\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|$$

e

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ux\| = \sup_{\left\|(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x,0,0,\ldots)\right\|_p \leq 1} \left\|\hat{u}^s\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq \|\hat{u}^s\|.$$

Logo, $\|\hat{u}^s\| = \|u\|$. Com raciocínio similar, é fácil mostrar que $\|\hat{u}^w\| = \|u\|$. Assim, podemos falar normalmente que u, um operador linear contínuo, leva "forte em forte" e "fraco em fraco". Como $l_p(X) \subset l_p^w(X)$ então, temos também que u, um operador linear contínuo, leva "forte em fraco". E "fraco em forte"? Esta questão nos leva à definição dos operadores absolutamente somantes.

Definição 1.1.4 (Operador absolutamente somante) *Sejam* $1 \leq p, q < \infty$ *e* $u : X \longrightarrow Y$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que* u *é absolutamente* $(p;q)$*-somante (ou* $(p;q)$*-somante) quando o operador induzido*

$$\begin{array}{rll} \hat{u}: & l_q^w(X) & \to l_p(Y) \\ & (x_n)_{n=1}^{\infty} & \to (ux_n)_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

estiver bem definido e for linear e limitado.

Denotamos por $\prod_{p,q}(X;Y)$ o conjunto formado por todos os operadores $(p;q)$-somantes de X em Y. Quando $p = q$, escrevemos $\prod_p(X;Y)$ no lugar de $\prod_{p,q}(X;Y)$. Quando $p = 1$, dizemos simplesmente que o operador é absolutamente somante.

Geralmente, para determinar quando um operador é, ou não, absolutamente $(p;q)$-somante, utiliza-se o seguinte resultado. Este caracteriza estes operadores através de desigualdades.

Proposição 1.1.5 *Seja $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. São equivalentes:*

(i) u é $(p;q)$-somante;

(ii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n$ em X e n natural;

(iii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X)$.

Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ o ínfimo dos K tais que a desigualdade (1.2) continua válida. Além disso, temos $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$.

Proposição 1.1.6 $\left(\prod_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(\cdot)\right)$ *é um espaço de Banach e, além disso,*

$$\|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$$

É importante perceber que se $p < q$, então, somente o operador nulo pode ser $(p;q)$-somante. De fato, é claro que podemos supor $X \neq \{0\}$. Como $p < q$, sempre podemos encontrar $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\ell_q - \ell_p$. Então, para $0 \neq x \in X$, $(\lambda_k x)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X)$. Suponhamos que exista $u \neq 0$ absolutamente $(p;q)$-somante. Logo, pela Proposição 1.1.5, existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(\lambda_k x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo n natural. Assim,

$$\|u(x)\| \left(\sum_{k=1}^{k} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x)| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

isto é,

$$\|u(x)\| \left(\sum_{k=1}^{k} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tomando $\sup_{\|x\| \leq 1}$, obtemos

$$\|u\| \left(\sum_{k=1}^{k} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

e concluímos que $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$, o que significa uma contradição.

Portanto, para evitar o caso trivial, vamos sempre supor $p \geq q$.

Para mais detalhes sobre os operadores absolutamente somantes, o livro [18] é uma excelente referência para consultas.

Como mencionamos no inicio deste texto, nosso trabalho baseia-se nos operadores multilineares absolutamente e múltiplo somantes, duas generalizações dos operadores absolutamente somantes. Desta forma, convém apresentarmos uma breve introdução das mesmas.

1.2 Operadores multilineares absolutamente somantes

O enfoque, tanto multilinear como polinomial, dos operadores absolutamente somantes, foi iniciado por Pietsch ([49]) e, desde então, diferentes autores têm trabalhado em ambos os contextos mencionados. Para exemplos do caso polinomial observe [8], [11] e [22]. Observe, também, os trabalhos [11], [46] e [32] para o multilinear.

Para nosso interesse destacamos o trabalho [32], onde M.C. Matos define a seguinte classe, explorada por diferentes autores (veja [2], [4], [51]).

Definição 1.2.1 (Operadores multilineares absolutamente somantes.) *Se $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_m}$, um operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ é absolutamente $(p; q_1, ..., q_m)$-somante no ponto $a = (a_1, ..., a_m) \in E_1 \times ... \times E_m$ quando*

$$\left(T\left(a_1 + x_j^1, ..., a_m + x_j^m\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$$

para todo $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^w(E_k)$. Esta classe é denotada por $\mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}^{a}$. Quando a é a origem, denotamo-la por $\mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}$, e se T é absolutamente $(p; q_1, ..., q_m)$-somante em todo ponto, escrevemos $T \in \mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}^{ev}$.

Um resultado útil nesta teoria é a caracterização por desigualdades, a qual nos dá uma nova ferramenta, além da definição, para provar se um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ é absolutamente $(p; q_1, ..., q_m)$-somante. Para uma demonstração destes resultados, recomendamos [7, *Teorema* 1.2, *ii*)] e [4].

Proposição 1.2.2 *$T \in \mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}(E_1,...,E_m;F)$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(m)}\right)\right\|_p \leq C\prod_{s=1}^{m}\left\|\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q_s}^{w} \tag{1.3}$$

para todo $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_s}^{w}$, $s = 1,...,m$. Além disso, a menor das constantes C que satisfazem (1.3), que será denotada por $\|\cdot\|_{as}$, define uma norma no espaço $\mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}(E_1,...,E_m;F)$.

Teorema 1.2.3 *Para $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$T \in \mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}^{ev}(E_1,...,E_m;F)$;*

(ii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}&\left\|\left(T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T(b_1,...,b_m)\right)_{j=1}^{n}\right\|_p\\ &\leq C\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{q_1}^{w}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{q_m}^{w}\right),\end{aligned}$$

(iii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}&\left\|\left(T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T(b_1,...,b_m)\right)_{j=}^{\infty}\right\|_p\\ &\leq C\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q_1}^{w}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q_m}^{w}\right),\end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $(b_1,...,b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_r}^{w}$, $r = 1,...,m$.

Ademais, a menor das constantes C que satisfazem (1.4) define uma norma em $\mathcal{L}_{as}^{ev}(E_1,...,E_m;F)$ a qual será denotada por $\|\cdot\|_{ev}$. Em ambos os casos $\left(\mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}(E_1,...,E_m;F), \|\cdot\|_{as}\right)$ e $\left(\mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}^{ev}(E_1,...,E_m;F), \|\cdot\|_{ev}\right)$ são espaços de Banach.

Sugerimos o trabalho [41, *Subseção* 5.4,] para mais detalhes sobres estes operadores.

1.3 Operadores multilineares múltiplo somantes

Em 2003, Pérez-García ([46]) e M.C. Matos ([31]), de forma independente, apresentaram uma nova abordagem multilinear para os operadores absolutamente somantes:

os operadores múltiplo somantes, embora a abordagem de M.C. Matos remonte a 1993 (veja [30]). Esta nova classe de operadores passou a ser intensamente explorada e, desde então, é considerada como uma das extensões mais fiéis ao espírito linear.

Definição 1.3.1 (Operador múltiplo somante) *Um operador linear limitado $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é múltiplo $(q; p_1, ..., p_n)$-somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\| T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right) \right\|^q \right)^{1/q} \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{p_k}^{w} \tag{1.5}$$

quaisquer que sejam $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^k \in E_k$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$.

Se $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é múltiplo $(q; p_1, ..., p_n)$-somante, escrevemos $T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$, onde $\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$ denota a classe de tais operadores. O ínfimo dos C que satisfazem (1.5) é representado por $\pi_{q;p_1,...,p_n}(T)$.

Se $p_1 = ... = p_n = p$, dizemos que T é múltiplo $(q; p)$-somante e escrevemos $T \in \Pi_{q;p}^n(E_1, ..., E_n; F)$. No caso de $q = p$, dizemos que o operador é múltiplo p-somante e denotamos $T \in \Pi_p^n(E_1, ..., E_n; F)$. Se $E_1 = ...E_n = E$, escrevemos simplesmente $\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n({}^nE; F)$ e se $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n)$.

É importante mencionar que, como no caso dos operadores absolutamente somantes, a teoria dos operadores múltiplo somantes só faz sentido quando $q \geq p_j$, para todo $1 \leq j \leq n$; ou seja, se $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq n$ e $T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$, então, T será o operador nulo.

Além disso, tem-se de forma análoga também que $\pi_{q;p_1,...,p_n}$ define uma norma em $\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$. O espaço $\left(\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F), \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(.)\right)$ é um espaço de Banach e vale a seguinte relação entre as normas

$$\|T\| \leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T).$$

Como vimos nos operadores absolutamente somantes, podemos trabalhar com sequências tanto finitas como infinitas; a seguinte propriedade nos mostra que acontece o mesmo com os operadores múltiplo somantes:

Proposição 1.3.2 *Sejam $1 \leq p_1, ..., p_n \leq q < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T *é múltiplo* $(q;p_1,...,p_n)$*-somante.*
(ii) *Para cada escolha de sequências* $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\in\ell_{p_j}^w\left(E_j\right),$ *temos*

$$\left(T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n}^{\infty}\in\ell_q\left(\mathbb{N}^n;F\right).$$

Neste caso, o operador multilinear associado

$$\hat{T}:\ell_{p_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times\ell_{p_n}^w\left(E_n\right)\to\ell_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)$$

dado por

$$\hat{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)=\left(T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}$$

é contínuo e

$$\left\|\hat{T}\right\|=\pi_{(q;p_1,...,p_n)}\left(T\right).$$

Veja que para cada $T\in\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1,...,E_n;F)$, quando consideramos o operador multilinear contínuo associado

$$\hat{T}:\ell_{p_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times\ell_{p_n}^w\left(E_n\right)\to\ell_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)$$

dado por

$$\hat{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)=\left(T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty},$$

estamos induzindo uma aplicação

$$\begin{array}{rll}\overset{\wedge}{\theta}: & \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1,...,E_n;F) & \to\mathcal{L}^n\left(\ell_{p_1}^w\left(E_1\right),...,\ell_{p_n}^w\left(E_n\right);\ell_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)\right), \\ & T & \to\hat{T}\end{array}$$

que é linear e isométrica.

Um dos tópicos mais interessantes de estudo na teoria dos operadores absolutamente somantes é o dos resultados de coincidência, neste caso, quando a classe dos operadores multilineares contínuos em certos espaços de Banach coincide com a classe dos operadores múltiplo somantes.

Como exemplo, daremos dois teoremas. O primeiro é um dos principais resultados de coincidência, que é a versão multilinear do famoso Teorema de Grothendieck. O segundo envolve o famoso conceito de cotipo de um espaço de Banach.

Teorema 1.3.3 (Pérez-García) *Se* $1\leq p\leq 2,$ *então*

$$\Pi_p^n\left(\ell_1;\ell_2\right)=\mathcal{L}\left({}^n\ell_1;\ell_2\right).$$

Teorema 1.3.4 (Pérez-García; Souza) *Se F é um espaço com cotipo q, todo operador multilinear $T: E_1 \times ... \times E_n \rightarrow F$ é múltiplo $(q;1)$-somante. Ou seja,*

$$\Pi_{(q;1)}\left(E_1, ..., E_n; F\right) = \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; F\right)$$

O leitor interessado pode encontrar uma prova dos teoremas acima em [46, *Corolário* 5.24,] e [7, *Teorema* 2.2,] respectivamente. Para mais resultados de coincidência, recomendamos os trabalhos [10] e [9].

Capítulo 2

O Teorema de Bohnenblust-Hille

Frederick Bohnenblust e Einar Hille, em seu trabalho intitulado *On the absolute convergence of Dirichlet séries*, publicado em 1931 na prestigiosa revista *Annals of Mathematics*, conseguem solucionar o famoso problema da convergência absoluta de Bohr formulado em 1913. Embora esse seja o resultado principal desse artigo, neste eles conseguiram também uma generalização da famosa desigualdade de Littlewood 4/3, conhecida como a desigualdade de Bohnenblust-Hille, a qual será nosso foco de estudo neste capítulo e no próximo.

A desigualdade de J. E. Littlewood 4/3, demonstrada em [28], afirma que para toda forma bilinear $U : l_{\infty}^{N} \times l_{\infty}^{N} \to \mathbb{K}$ e para qualquer inteiro positivo N, existe uma constante $L_{\mathbb{K}} \geq 1$ que satisfaz a seguinte desigualdade

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq L_{\mathbb{K}} \|U\|$$

Bohnenblust e Hille perceberam imediatamente a importância desse resultado e, é claro, das técnicas utilizadas para demonstrá-lo, já que a generalização deste lhes permitiria assim solucionar o problema em questão, a saber: Qual a largura máxima da faixa vertical L no plano complexo na qual uma série de Dirichlet $\sum_{n} a_n \cdot n^{-s}$ converge uniformemente mas não absolutamente?

Assim, em [6], Bohnenblust-Hille provaram que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e todo inteiro positivo $m \geq 1$, existem escalares $B_{\mathbb{K},m} \geq 1$ tais que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left| U(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m} \sup_{z_1,\ldots,z_m \in \mathbb{D}^N} |U(z_1,\ldots,z_m)| \tag{2.1}$$

para toda forma m-linear $U : \mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo N, onde $(e_i)_{i=1}^N$ é a base canônica de $\mathbb{K}^N$ e $\mathbb{D}^N$ representa o polidisco unitário aberto em $\mathbb{K}^N$.

Observe que basta tomar $m = 2$ para obter o resultado de J. E. Littlewood. Para mais detalhes sobre esta desigualdade, recomendamos os artigos [17] e [28].

Desde a prova dada por H.F. Bohnenblust e E. Hille, sabe-se que o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo no sentido em que, para cada $m \in \mathbb{N}$, não podemos escolher um valor menor que $\frac{2m}{m+1}$ sem que a constante associada $B_{\mathbb{K},m}$ perca a indepêndecia do inteiro positivo N. Já, sobre os valores ótimos que satisfazem esta desigualdade, ou seja, sobre as menores constantes que satisfazem (2.1), denotadas ao longo deste trabalho por $K_{\mathbb{K},m}$, nada se sabia ao respeito; na prova mencionada, apenas estabeleceu-se que

$$K_{\mathbb{K},m} \leq m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Esta desigualdade foi esquecida por décadas, por exemplo no livro de Blei ([5, 2001]) este resultado é enunciado como a Desigualdadade de Littlewood $2n/n+1$ e nada é mencionado sobre o trabalho de Bohnenblust-Hille. Blei atribui este resultado a A. Davie ([14, 1973]), o qual demonstra esta desigualdade, aparentemente desconhecendo, que 40 anos antes já tinha sido demonstrada.

Recentemente, vários autores têm investigado as constantes $K_{\mathbb{K},m}$, veja por exemplo [15, 16, 17, 19, 20, 42]. Sabemos ([20]) que, para o caso dos reais,

$$K_{\mathbb{R},2} = \sqrt{2}.$$

Por outro lado, no caso dos complexos, tem-se

$$K_{\mathbb{C},2} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Para o caso geral, $m \geq 2$, as estimativas das constantes $K_{\mathbb{K},m}$ têm sido melhoradas ao longo do tempo; por exemplo, para o caso dos complexos,

- $K_{\mathbb{C},m} \leq m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$ (1931 - Bohnenblust e Hille [6]),
- $K_{\mathbb{C},m} \leq 2^{\frac{m-1}{2}}$ (70's - Kaijser [26] e Davie [14]),
- $K_{\mathbb{C},m} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$ (1995 - Queffélec [52]).

Atualmente sabemos que esta desigualdade tem aplicações em diferentes áreas da matemática como na teoria analítica dos números, análise harmônica, análise de Fourier, teoria dos operadores e, recentemente, na teoria da informação quântica. Em nosso tópico de interesse, que são os operadores multilineares múltiplo somantes, a desigualdade de Bohnenblust-Hille pode ser enunciada como segue:

Teorema 2.0.5 (Teorema de Bohnenblust-Hille) *Sejam $E_1, ..., E_m$ espaços de Banach. Cada operador multilinear $T : E_1 \times ... \times E_m \to \mathbb{K}$ é múltiplo $\left(\frac{2m}{m+1}, 1\right)$-somante e satisfaz*

$$\pi_{\left(\frac{2m}{m+1},1\right)}(\cdot) \leq K_{\mathbb{K},m} \left\|\cdot\right\|_{\mathcal{L}(E_1,...,E_m)}$$

É importante mencionar que este teorema nasce do fato de as seguintes afirmações serem equivalentes:

- Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $C_m > 0$ tal que, quaisquer que sejam o natural N e $Q \in \mathcal{L}\left({}^m l_\infty^N; \mathbb{K}\right)$,

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N} \left|Q\left(e_{i_1}, ..., e_{i_m}\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \left\|Q\right\|;$$

- Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $D_m > 0$ que cumpre, não importa quais sejam $X_1, ..., X_m$, o operador $R \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; \mathbb{K})$ e as sequências $\left(x_n^k\right)_n \in l_1^w(X_k)$, $k = 1, ..., m$,

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N} \left|R\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_m \left\|R\right\| \prod_{k=1}^{m} \left\|\left(x_n^k\right)_n\right\|_1^w$$

E, além disso, $C_m = D_m$, para todo m.

O Teorema de Bohnenblust-Hille, tal como foi escrito acima, foi enunciado e demonstrado por Pérez-García, veja [46, *Teorema* 5.5.]. Para mais detalhes sobre este resultado, olhe a dissertação [1].

Posteriormente, no ano 2010, A. Defant, D. Popa, e U. Schwarting em [16], exibem outra demonstração desse resultado e, um ano mais tarde, D. Pellegrino e J. Seoane-Sepúlveda observaram que, mediante algumas modificações da demonstração de [16, *Teorema* 4.1], conseguem-se obter constantes significativamente menores que satisfazem a desigualdade de Bohnenblust-Hille e que hoje são as menores constantes conhecidas. Este resultado encontra-se em [42, *Teorema* 2.2] e está dado da seguinte forma:

Teorema 2.0.6 (Pellegrino-Seoane, 2012) *Para todo inteiro* m *e* $X_1, ..., X_m$ *espaços de Banach, tem-se*

$$\Pi_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}\left(X_1, ..., X_m; \mathbb{R}\right) = \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; \mathbb{R}\right), \ e \ \pi_{\left(\frac{2m}{m+1}\right)}(\cdot) \leq C_{\mathbb{R},m} \left\|\cdot\right\|$$

com

$$C_{\mathbb{R},m} = \begin{cases} 1 & se\ m = 1, \\ \left(A^{m/2}_{\frac{2m}{m+2}}\right)^{-1} C_{\frac{m}{2}} & se\ m\ é\ par\ e \\ \left(A^{\frac{-1-m}{2}}_{\frac{2m-2}{m+1}} C_{\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(A^{\frac{1-m}{2}}_{\frac{2m+2}{m+3}} C_{\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} & se\ m\ é\ ímpar. \end{cases} \tag{2.2}$$

Onde

$$A_p := \sqrt{2}\left(\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/p}, \tag{2.3}$$

para $p > p_0 \approx 1.847$ *e*

$$A_p := 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

para $p \leq p_0 \approx 1.847$. *A definição exata de* p_0 *é dada mediante a seguinte igualdade:* $p_0 \in (1, 2)$ *é o único número real tal que*

$$\Gamma\left(\frac{p_0 + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

onde Γ *denota a função gamma.*

Estas constantes A_p, devidas a U. Haagerup [25], são as menores -as melhores- constantes que satisfazem a desigualdade de Khinchine.

Cabe salientar que originalmente, como foi dado em [42], as constantes anteriores foram dadas para ambos os casos, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, com umas pequenas modificações entre cada um dos casos, só que com um trabalho posterior devido a D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino e J. Seoane-Sepúlveda, [38], descobriu-se que, trabalhando com variavéis de Steinhaus, ao invés das funções de Rademarcher que foram usadas na demonstração de [42, *Teorema* 2.2.], obtinham-se constantes menores para o caso dos complexos. Eles usam o fato de que, no caso dos complexos, é válida a desigualdade de Khinchine com variáveis do tipo Steinhaus ao invés das funções de Rademacher, com constantes $\widetilde{A_p}$ maiores do que as A_p dadas como em (2.3) e (2.4) para $p \in (1, 2)$. Mais especificamente, para $p \in (1, 2)$,

$$\widetilde{A_p} := \left(\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} > A_p.$$

Desta forma, as menores constantes conhecidas para a desigualdade mutilinear de Bohnenblust-Hille, caso complexo, estão dadas da seguinte forma:

$$C_{\mathbb{C},m} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1, \\ \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2m}{m+2}}}\right)^{\frac{m}{2}}\right)^{-1} C_{\mathbb{C},\frac{m}{2}} & \text{se } m \text{ é par e} \\ \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2m-2}{m+1}}}\right)^{\frac{-1-m}{2}} C_{\mathbb{C},\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2m+2}{m+3}}}\right)^{\frac{1-m}{2}} C_{\mathbb{C},\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Observação 2.0.7 *É importante destacar que sempre que estivermos falando das "melhores constantes conhecidas", estaremos nos referindo às constantes (2.2) e (2.5), segundo seja o caso.*

Para observar numericamente as melhorias históricas das constantes, construímos a seguinte tabela comparativa para o caso dos complexos.

m	$C_{\mathbb{C},m}$[38][2013]	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$[52][1995]	$2^{\frac{m-1}{2}}$[26][1978]	$m^{\frac{m+1}{2m}}.2^{\frac{m-1}{2}}$[6][1931]
2	$1,12837$	$1,12837$	$1,41421$	$2,3784$
3	$1,23641$	$1,27323$	2	$4,1601$
4	$1,31555$	$1,43669$	$2,828$	$6,7271$
5	$1,39827$	$1,62113$	4	$10,5061$
6	$1,46375$	$1,82925$	$5,656$	$16,0877$
7	$1,52239$	$2,06409$	8	$24,3222$
8	$1,5714$	$2,329$	$11,313$	$36,442$
9	$1,6297$	$2,628$	16	$54,232$
10	$1,6799$	$2,965$	$22,627$	$80,283$
11	$1,7256$	$3,346$	32	$118,354$
12	$1,7658$	$3,775$	$45,425$	$173,869$
13	$1,8061$	$4,260$	64	$254,680$
14	$1,8422$	$4,807$	$90,509$	$372,128$
15	$1,8757$	$5,424$	128	$542,574$
25	$2,1806$	$18,151$	4096	21841
50	$2,6771$	$371,790$	23726566	174465514
100	$3,2968$	155973	$7,961 \times 10^{14}$	$8,146 \times 10^{15}$
500	$5,3487$	$1,496 \times 10^{26}$	$1,279 \times 10^{75}$	$2,878 \times 10^{76}$
1000	$6,6056$	$2,526 \times 10^{52}$	$2,314 \times 10^{150}$	$7,344 \times 10^{151}$
4000	$10,0791$	$5,85 \times 10^{209}$	12×10^{601}	13×10^{603}

Dorovante, em concordância com a notação utilizada em [42], escreveremos C_m e K_m para denotar as constantes $C_{\mathbb{K},m}$ e $K_{\mathbb{K},m}$ respectivamente. Além disso, usaremos $\widetilde{C}_m$ ao invés de $C_{\mathbb{C},m}$ para as melhores constantes conhecidas do caso complexo, seguindo a notação de [38].

Com o intuito de conhecer um pouco mais as constantes que aparecem em [42, *Teorema* 2.2.], destacamos as seguintes informações inerentes a estas constantes. Em [19], foi demonstrado que

- para m par,

$$\lim_{m\to\infty}\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}\right)^{-1}=\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}},$$

e, para m ímpar,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}\right)^{\frac{-(m+1)}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}}\left(\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}\right)^{\frac{-(m-1)}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}=\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}},$$

onde γ denota a famosa constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma:=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\log m\right)\approx 0.5772.$$

- Existe uma sequência de constantes $(\mathcal{C}_m)_{m=1}^{\infty}$ que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille, tanto para o caso real, como para os complexos, tal que $C_m\leq\mathcal{C}_m$ para todo $m\in\mathbb{N}$ e

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\mathcal{C}_{m+1}}{\mathcal{C}_m}=1. \tag{2.6}$$

Desta forma, as constantes $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ são subexponenciais e além disso, mostra-se que se existe um $L>0$ tal que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{K_{m+1}}{K_m}=L,$$

então, $L=1$.

Já, em [38], os autores mostram que

-

$$\lim_{m\to\infty}\left(\left(\widetilde{A_{\frac{2m}{m+2}}}\right)^{m/2}\right)^{-1}=\lim_{m\to\infty}\left(\left(\widetilde{A_{\frac{2m-2}{m+1}}}\right)^{\frac{-1-m}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}}\left(\left(\widetilde{A_{\frac{2m+2}{m+3}}}\right)^{\frac{1-m}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}=e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}$$

Na próxima seção, mostramos que a sequência $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ é crescente, respondendo assim um problema dado em [19]. É importante mencionar que primeiro trabalharemos no campo dos reais, logo faremos o análogo no caso dos complexos na *Seção 2.4*.

2.1 Primeiros resultados

Nosso primeiro resultado é crucial para nosso objetivo: a prova de que a sequência $\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2}\right)_{m=1}^{\infty}$ é crescente. Enfatizamos que este não é um resultado óbvio pois como

$$\left(A_{\frac{2m}{m+2}}\right)_{m=1}^{\infty} \subset (0,1)$$

é crescente, logo

$$\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{-1}\right)_{m=1}^{\infty} \subset (1,\infty)$$

é decrescente. Agora, como $(m/2)_{m=1}^{\infty}$ é crescente, nada podemos inferir sobre a monotonicidade de $\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2}\right)_{m=1}^{\infty}$.

O resultado chave usado na prova do seguinte lema é um teorema devido a F. Qi [53, *Teorema* 2], que afirma que a função

$$\left(\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(r)}\right)^{\frac{1}{s-r}}$$

cresce sempre que $r, s > 0$, *i.e.*, se $0 < s_1 \leq s_2$, então

$$\left(\frac{\Gamma(s_1)}{\Gamma(r)}\right)^{\frac{1}{s_1-r}} \leq \left(\frac{\Gamma(s_2)}{\Gamma(r)}\right)^{\frac{1}{s_1-r}};$$

analogamente para o caso $0 < r_1 \leq r_2$.

Lema 2.1.1 *A sequência* $\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2}\right)_{m=1}^{\infty}$ *é crescente. Em particular,*

$$C_{2m} \leq \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) C_m$$

para todo m.

Demonstração. Como

$$\frac{2m}{m+2} > p_0 \approx 1.847$$

para todo $m \geq 25$, a fórmula (2.3) vale somente para $m \geq 25$. Para $m < 25$, usamos (2.4) e, mediante um cálculo direto, vemos que $\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2}\right)_{m=1}^{\infty}$ é constante igual a $\sqrt{2}$ até $m < 25$.

Agora, para $m \geq 25$, note

$$\begin{aligned} A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3m+2}{2m+4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{\frac{m+2}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3m+2}{2m+4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{\frac{m+2}{4}}. \end{aligned}$$

De acordo com o resultado de F. Qi ([53]), sabemos que

$$\left(\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3m+2}{2m+4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{\frac{m+2}{-2}}\right)_{m=1}^{\infty}$$

é crescente; assim

$$\left(\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3m+2}{2m+4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{\frac{m+2}{2}}\right)_{m=1}^{\infty}$$

é decrescente. Portanto,

$$\left(\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3m+2}{2m+4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{\frac{m+2}{4}}\right)_{m=1}^{\infty}$$

é também descrescente; logo $\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}\right)_{m=1}^{\infty}$ é decrescente e, é claro, a sequência $\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2}\right)_{m=1}^{\infty}$ vai ser crescente. ■

Um primeiro resultado, consequência deste lema, responde uma questão aberta dada em [19] sobre a monotonicidade das constantes (2.2). Demonstramos que estas sequências são crescentes, tal como suspeitavam os autores em [19], provando assim que, de fato, $\mathcal{C}_m = C_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ (olhe 2.6) e, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{C_{m+1}}{C_m} = 1.$$

Proposição 2.1.2 *A sequência*

$$C_m = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1, \\ \left(A_{\frac{2m}{mn+2}}^{m/2}\right)^{-1} C_{\frac{m}{2}} & \text{se } m \text{ é par e} \\ \left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{-1-m}{2}} C_{\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{1-m}{2}} C_{\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é crescente.

Demonstração. Vamos demonstrar esta proposição por indução. Os primeiros valores são conferidos diretamente:

$$C_m = \begin{cases} 1,\ m = 1 \\ \sqrt{2},\ m = 2 \\ 2^{\frac{5}{6}},\ m = 3 \end{cases}$$

Vamos supor que o resultado vale para todo inteiro positivo menor ou igual que $m - 1$ e provemos o resultado para m.

Primeiro caso. m é par.

Note que

$$C_m \leq C_{m+1}$$

se, e somente se,

$$\frac{C_{m/2}}{A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}} \leq \left(\frac{C_{m/2}}{A_{\frac{2m}{m+2}}^{(m+2)/2}}\right)^{\frac{m}{2(m+1)}} \left(\frac{C_{\frac{m+2}{2}}}{A_{\frac{2m+4}{m+4}}^{m/2}}\right)^{\frac{m+2}{2(m+1)}}.$$

Observe que isto é equivalente a provar a seguinte desigualdade

$$\left(C_{m/2}\right)^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \left(\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}\right)^{-1}\right)^{\frac{m}{2(m+1)}} \leq \left(C_{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \left(\left(A_{\frac{2m+4}{m+4}}^{(m+2)/2}\right)^{-1}\right)^{\frac{m}{2(m+1)}},$$

que é valida. De fato, usando a hipótese de indução temos

$$C_{m/2} \leq C_{\frac{m+2}{2}}$$

e, usando o *Lema* 2.1.1, temos

$$\left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}\right)^{-1} \leq \left(A_{\frac{2m+4}{m+4}}^{(m+2)/2}\right)^{-1}.$$

Portanto, quando m for par, obtemos que $C_m \leq C_{m+1}$.

Segundo caso. m é ímpar.

Basta observar que

$$C_m \leq C_{m+1}.$$

se, e somente se,

$$\frac{\left(C_{(m-1)/2}\right)^{\frac{m-1}{2m}}}{\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{(m-1)/2}\right)^{\frac{m+1}{2m}}} \leq \frac{\left(C_{(m+1)/2}\right)^{\frac{m-1}{2m}}}{\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{(m+1)/2}\right)^{\frac{m+1}{2m}}}.$$

Usando os mesmos argumentos usados no caso anterior, tem-se facilmente que vale esta desigualdade, concluindo assim a demonstração. ■

A seguir, provaremos que a sequência

$$\left(\left(\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{m-1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \cdot \left(\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{m+1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m-1}{2m}}\right)_{m=1}^{\infty}$$

é crescente. Isto nos será muito útil na próxima seção para definirmos a sequência $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, as quais aparecerão novamente no *Capítulo 3,* e a sequência $(M_n)_{n=1}^{\infty}$.

Lema 2.1.3 *A sequência*

$$\left(\left(\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{m-1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \cdot \left(\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{m+1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m-1}{2m}}\right)_{m=1}^{\infty}$$

é crescente e limitada por

$$D := \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right).$$

Demonstração. Seja

$$X_m := A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2}$$

para todo m. Do *Lema* 2.1.1, sabemos que $(X_m)_{m=1}^{\infty}$ é crescente e limitada por D. Note que

$$\left(\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{m-1}{2}}\right)^{-1}\right) = X_{m-1} \leq X_{m+1} = \left(\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{m+1}{2}}\right)^{-1}\right).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{m-1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \left(\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{m+1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \\
&= \left(\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{m+1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{m-1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \\
&= (X_{m+1})^{\frac{m-1}{2m}} (X_{m-1})^{\frac{m+1}{2m}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$X_{m-1} \leq \left(\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{m-1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \left(\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{m+1}{2}}\right)^{-1}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \leq X_{m+1}.$$

Assim, como $(X_m)_{m=1}^{\infty}$ é crescente e limitada por D, temos o resultado desejado. ■

2.2 O Lema Fundamental

Nesta seção, vamos construir e provar o que chamamos de *Lema Fundamental*. Este lema nos provê constantes, que denotaremos por $(R_n)_{n=1}^{\infty}$, as quais satisfazem a desigualdade de Bohnenblust-Hille e cujo limite da diferença dos termos consecutivos é zero. Este resultado será muito útil, pois nos permitirá obter novas informações sobres as constantes ótimas, $(K_n)_{n=1}^{\infty}$, que satisfazem a desigualdade, a saber,

- *(Teorema 2.3.1)* Seja $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade de Bohnenblust-Hille. Se existe uma constante $L \in [-\infty, \infty]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (K_{n+1} - K_n) = L,$$

então, $L = 0$.

- *(Teorema 2.3.2 e Seção 2.4)* Seja $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille. Para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$K_{n+1} - K_n < \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) n^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)+\varepsilon} \text{ (caso real)}$$
$$K_{n+1} - K_n < \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{4}{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\sqrt{\pi}}\right) n^{\log_2\left(\frac{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}}{2}\right)+\varepsilon} \text{ (caso complexo)}$$

para infinitos n. Numericamente, escolhendo $\varepsilon > 0$, temos

$$K_{n+1} - K_n < \frac{0.87}{n^{0.473678}} \text{ (caso real)}$$
$$K_{n+1} - K_n < \frac{0.44}{n^{0.695025}} \text{ (caso complexo)}$$

- *(Corolário 2.3.3)* As contantes ótimas na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfazem

$$\liminf_{n} (K_{n+1} - K_n) \leq 0.$$

- *(Teorema 2.3.4 e Seeção 2.4)* As constantes ótimas $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille satisfazem

$$K_n < 1 + 0.87 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^{0.473678}} \text{ (caso real)}$$
$$K_n < 1 + 0.44 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^{0.695025}} \text{ (caso complexo)}$$

para todo $n \geq 2$.

- *(Corolário 2.3.5 e Seção 2.4)* As constantes ótimas $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille satisfazem

$$K_n < 1.65\,(n-1)^{0.526322} + 0.13 \text{ (caso real)}$$
$$K_n < 1.41\,(n-1)^{0.304975} - 0.04 \text{ (caso complexo)}$$

para todo $n \geq 2$.

Estes resultados complementam e completam recentes informações dadas em [37].

Vamos, então, construir as constantes $(R_n)_{n=1}^{\infty}$, as quais, lembremos, satisfazem

$$\lim_{n\to\infty} (R_{n+1} - R_n) = 0.$$

Começamos tomando o *Lema* 2.1.1 e o *Lema* 2.1.3 para definir as seguintes constantes

$$S_n = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} & \text{se } n = 1, 2 \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) S_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par e} \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) \left(S_{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(S_{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \tag{2.7}$$

Claramente, vamos ter que as constantes S_n satisfazem a desigualdade de Bohnenblust-Hille, são crescentes e $S_n \leq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, é importante mencionar que fórmulas fechadas para estas constantes encontram-se no *Capítulo* 3 e foi mediante estas fórmulas que tentamos demonstrar, sem êxito, que $\lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = 0$.

Agora, dado que as constantes $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ são crescentes, definimos as seguintes constantes

$$M_n = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} & \text{se } n = 1, 2 \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) M_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par e} \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) M_{\frac{n+1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases} \tag{2.8}$$

as quais satisfazem

$$C_n \leq S_n \leq M_n$$

e uma "perturbação uniforme" desta sequência $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ nos dará a sequência desejada. Tomamos

$$D := \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) \approx 1.4403.$$

e, para todo $k \geq 1$, considere o conjunto

$$B_k := \{2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k\}.$$

É facil observar que, para todo $n \geq 2$, temos

$$M_n = \sqrt{2} D^{k-1} \text{ sempre que } n \in B_k$$

e, por esta razão, o $\lim_{n\to\infty}(M_{n+1} - M_n)$ não existe; portanto fazendo uma perturbação nas constantes (2.8) obtemos

$$R_n := \sqrt{2}\left(D^{k-1} + (j_n - 1)\left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}}\right)\right), \text{ sempre que } n \in B_k \tag{2.9}$$

onde j_n é a posição de n na ordem dos elementos de B_k.

É claro que $M_n \leq R_n$ para todo $n \geq 3$ e, como veremos,

$$(R_{n+1} - R_n)_{n=1}^{\infty}$$

é decrescente (monótona e não-crescente). Usando a definição de $(R_n)_{n=1}^{\infty}$, com um tratamento cuidadoso das expressões envolvidas, não é dificil estimar como $R_{n+1} - R_n$ decresce para zero:

Teorema 2.2.1 (Lema Fundamental) *A sequência* (2.9) *satisfaz a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille e* $(R_{n+1} - R_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência decrescente que converge para zero. Mais ainda,*

$$R_{n+1} - R_n \leq \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) n^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)}$$

para todo n. *Numericamente,*

$$R_{n+1} - R_n < \frac{0.87}{n^{0.473678}}.$$

Demonstração. Claramente, $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille. Mostremos que $(R_{n+1} - R_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente. Seja $n \in B_k$. Observe que temos duas possibilidades:

Primeiro caso: $n + 1 \in B_k$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
&R_{n+1} - R_n = \\
&= \sqrt{2}D^{k-1} + \sqrt{2}\,(j_{n+1} - 1)\left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}}\right) - \left(\sqrt{2}D^{k-1} + \sqrt{2}\,(j_n - 1)\left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$

Segundo caso: $n + 1 \in B_{k+1}$. Neste caso, é claro que $n = 2^k$ e $n + 1 = 2^k + 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
&R_{n+1} - R_n = \\
&= \sqrt{2}D^k + \sqrt{2}\,(1 - 1)\left(\frac{D^{k+1} - D^k}{2^k}\right) - \left(\sqrt{2}D^{k-1} + \sqrt{2}\left(2^{k-1} - 1\right)\left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$

Observe que, tanto no primeiro como no segundo caso, a sequência $(R_{n+1} - R_n)_{n=1}^{\infty}$ dependerá somente da variável k; assim, como $D < 2$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}} > \frac{D^{k+1} - D^k}{2^k}$$

concluindo, deste modo, que $(R_{n+1} - R_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente. Considerando agora a subsequência

$$(R_{2^k+1} - R_{2^k})_{k=1}^{\infty},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} (R_{2^k+1} - R_{2^k}) &= \sqrt{2} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}} \right) \\ &= \sqrt{2}\,(D-1) \lim_{k\to\infty} \left(\frac{D}{2}\right)^{k-1} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} - R_n = 0.$$

Agora, estimemos a diferença $R_{n+1} - R_n$. Seja k tal que $n \in B_k$; claramente,

$$2^{k-1} + 1 \leq n \leq 2^k$$

e

$$\log_2\left(\frac{n}{2}\right) \leq \log_2\left(2^{k-1}\right) = k - 1.$$

Usando novamente que $D < 2$, concluímos que

$$R_{n+1} - R_n \leq \left(\frac{D}{2}\right)^{k-1} \sqrt{2}\,(D-1) \leq \left(\frac{D}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{2}\,(D-1)$$

e, mediante um cálculo direto, obtemos

$$R_{n+1} - R_n \leq \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) n^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)}.$$

■

Como sabemos, as constantes definidas em (2.9) são maiores que as constantes (2.2) e (2.7); mas, como veremos, estas constantes são "iguais"assintoticamente falando. Mais precisamente, os limites $\left(\frac{R_{2n}}{R_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ e $\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ são exatamente os mesmos de $\left(\frac{C_{2n}}{C_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ e $\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Além disto, recomendamos ver o parágrafo acima do *Corolário* 2.3.5.

Proposição 2.2.2 *A sequência* $\left(\frac{R_{2n}}{R_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *é decrescente e*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{2n}}{R_n}=\left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right). \tag{2.11}$$

Ademais,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n+1}}{R_n}=1. \tag{2.12}$$

Demonstração. Provemos primeiro que $\left(\frac{R_{2n}}{R_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente.

Vamos supor que n e $n+1$ estão em B_k, com j_n e j_n+1 as posições de n e $n+1$ respectivamente. Então $2n$ e $2(n+1)$ estão em B_{k+1} e $2j_n$, $2(j_n+1)$ são as posições de $2n$ e $2(n+1)$ respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned}R_{2n}&=D^{k+1}+(2j_n-1)\left(\frac{D^{k+2}-D^{k+1}}{2^k}\right)\\&=D^k\left[D+(2j_n-1)\left(\frac{D^2-D}{2^k}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_n&=D^k+(j_n-1)\left(\frac{D^{k+1}-D^k}{2^{k-1}}\right)\\&=D^k\left[1+(j_n-1)\left(\frac{D-1}{2^{k-1}}\right)\right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}R_{2(n+1)}&=D^{k+1}+(2(j_n+1)-1)\left(\frac{D^{k+2}-D^{k+1}}{2^k}\right)\\&=D^k\left[D+(2j_n+1)\left(\frac{D^2-D}{2^k}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{n+1}&=D^k+((j_n+1)-1)\left(\frac{D^{k+1}-D^k}{2^{k-1}}\right)\\&=D^k\left[1+j_n\left(\frac{D-1}{2^{k-1}}\right)\right].\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{R_{2n}}{R_n}>\frac{R_{2(n+1)}}{R_{n+1}} \tag{2.13}$$

se, e somente se,

$$\frac{D^k\left[D+(2j_n-1)\left(\frac{D^2-D}{2^k}\right)\right]}{D^k\left[1+(j_n-1)\left(\frac{D-1}{2^{k-1}}\right)\right]}>\frac{D^k\left[D+(2j_n+1)\left(\frac{D^2-D}{2^k}\right)\right]}{D^k\left[1+j_n\left(\frac{D-1}{2^{k-1}}\right)\right]},$$

isto é, se

$$\frac{2^k + (2j_n - 1)(D-1)}{2^k + 2(j_n - 1)(D-1)} - \frac{2^k + (2j_n + 1)(D-1)}{2^k + 2j_n(D-1)} > 0.$$

Agora, veja que

$$\frac{2^k + (2j_n + 1)(D-1)}{2^k + 2j_n(D-1)} = 1 + \frac{D-1}{2^k + 2j_n(D-1)}$$

e

$$\frac{2^k + (2j_n - 1)(D-1)}{2^k + 2(j_n - 1)(D-1)} = 1 + \frac{D-1}{2^k + 2j_n(D-1) - 2(D-1)}.$$

Como

$$\frac{D-1}{2^k + 2j_n(D-1) - 2(D-1)} > \frac{D-1}{2^k + 2j_n(D-1)},$$

então vale (2.13) sob as condições iniciais dadas. Agora, veja que se n está em B_k e $n+1$ está em B_{k+1}, então 2^{k-1} e 1 são as posições de n e $n+1$ respectivamente e $2n$ e $2(n+1)$ estão em B_{k+1} e B_{k+2} nas posições 2^k e 2 respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned} R_{2n} &= D^{k+1} + \left(2^k - 1\right)\left(\frac{D^{k+2} - D^{k+1}}{2^k}\right) \\ &= D^k\left[D + \left(2^k - 1\right)\left(\frac{D^2 - D}{2^k}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n &= D^k + \left(2^{k-1} - 1\right)\left(\frac{D^{k+1} - D^k}{2^{k-1}}\right) \\ &= D^k\left[1 + \left(2^{k-1} - 1\right)\left(\frac{D-1}{2^{k-1}}\right)\right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_{2(n+1)} &= D^{k+2} + (2-1)\left(\frac{D^{k+3} - D^{k+2}}{2^{k+1}}\right) \\ &= D^{k+1}\left[D + \left(\frac{D^2 - D}{2^{k+1}}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= D^{k+1} + (1-1)\left(\frac{D^{k+1} - D^k}{2^{k-1}}\right) \\ &= D^{k+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{R_{2n}}{R_n} > \frac{R_{2(n+1)}}{R_{n+1}}$$

se, e somente se,

$$2^k\left(3D^2+2D-D^3\right)+\left(2D^3-4D^2+2D\right)>0.$$

Como

$$3D^2+2D-D^3>0 \text{ e, } 2D^3-4D^2+2D>0,$$

segue, sobre as novas condições, que $\frac{R_{2n}}{R_n}>\frac{R_{2(n+1)}}{R_{n+1}}$ e, portanto, a sequência $\left(\frac{R_{2n}}{R_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente.

Vejamos agora seu comportamento assintótico.

Seja k tal que $2n\in B_k$; então, j_{2n} é par. Além disso, $n\in B_{k-1}$ e, claramente, $j_n=\frac{j_{2n}}{2}$. Daí

$$\frac{R_{2n}}{R_n}=\frac{\sqrt{2}\left(D^{k-1}+(j_{2n}-1)\left(\frac{D^k-D^{k-1}}{2^{k-1}}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(D^{k-2}+\left(\frac{j_{2n}}{2}-1\right)\left(\frac{D^{k-1}-D^{k-2}}{2^{k-2}}\right)\right)}.$$

Considerando a subsequência dada por $j_{2n}=2$, temos

$$\begin{aligned}\frac{D^{k-1}+(2-1)\left(\frac{D^k-D^{k-1}}{2^{k-1}}\right)}{D^{k-2}+(1-1)\left(\frac{D^{k-1}-D^{k-2}}{2^{k-2}}\right)} &= \frac{D^{k-1}+\left(\frac{D^k-D^{k-1}}{2^{k-1}}\right)}{D^{k-2}}\\ &= \frac{2^{k-1}D^{k-1}+D^k-D^{k-1}}{2^{k-1}D^{k-2}}\\ &= \frac{D^{k-2}\left(2^{k-1}D+D^2-D\right)}{2^{k-1}D^{k-2}}\\ &= \frac{2^{k-1}D+D^2-D}{2^{k-1}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} D.\end{aligned}$$

Combinando este resultado com a monotonicidade da sequência, obtemos (2.11).

Mediante um cálculo simples, é facil comprovar (2.12). ■

2.3 Sobre as constantes ótimas

Nesta seção continuaremos denotando $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência definida em (2.9). Como uma consequência do *Teorema* 2.2.1, temos o seguinte teorema, que nos permite conhecer um pouco mais sobre o crescimento das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade de Bohenenblust-Hille. Este resultado complementa, embora não generaliza formalmente, recentes resultados dados em [37]:

Teorema 2.3.1 *Seja* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade de Bohnenblust-Hille. Se existe uma constante* $M \in [-\infty, \infty]$ *tal que*

$$\lim_{n \to \infty} (K_{n+1} - K_n) = M,$$

então, $M = 0$.

Demonstração. O caso $M \in [-\infty, 0)$ é claramente impossível.

Vamos supor agora que $M \in (0, \infty)$. Seja n_0 um inteiro positivo tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow K_{n+1} - K_n > \frac{M}{2}$$

e n_1 um inteiro positivo tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow R_{n+1} - R_n < \frac{M}{4}.$$

Então, para $n \geq n_2 := \max\{n_1, n_0\}$, temos

$$K_n - K_{n_2} > \left(\frac{M}{2}\right)(n - n_2)$$

e

$$R_n - R_{n_2} < \left(\frac{M}{4}\right)(n - n_2).$$

Seja $N > n_2$ de tal forma que

$$\left(\frac{M}{2}\right)(N - n_2) + K_{n_2} > R_{n_2} + \left(\frac{M}{4}\right)(N - n_2).$$

Note que isto é possível, já que

$$\left(\frac{M}{2}\right)(n - n_2) - \left(\frac{M}{4}\right)(n - n_2) \underset{n \to \infty}{\to} \infty.$$

Para este N, temos

$$K_N > \left(\frac{M}{2}\right)(N - n_2) + K_{n_2} > R_{n_2} + \left(\frac{M}{4}\right)(N - n_2) > R_N,$$

o que seria uma contradição.

O caso $M = \infty$ é uma simples modificação do caso anterior. ■

Agora, provaremos um resultado que pode ser considerado como um dos principais resultados desta seção.

Teorema 2.3.2 *Seja $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille. Para todo $\varepsilon > 0$, temos*

$$K_{n+1} - K_n < \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) n^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)+\varepsilon} \tag{2.14}$$

para uma quantidade infinita de valores de n.

Demonstração. Na seção anterior, provamos que

$$R_{n+1} - R_n \leq \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) n^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)}$$

para todo n. Somando convenientemente na desigualdade acima, é claro que

$$R_n \leq 1 + \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) \sum_{j=1}^{n-1} j^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)}. \tag{2.15}$$

Agora, se $\varepsilon > 0$, definamos

$$T_n = 1 + \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) \sum_{j=1}^{n-1} j^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)+\varepsilon}.$$

Então,

$$T_{n+1} - T_n = \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) n^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)+\varepsilon}.$$

É facil ver que o conjunto

$$A_\varepsilon := \{n : K_{n+1} - K_n < T_{n+1} - T_n\}$$

é infinito. De fato, se A_ε é finito, tomamos n_ε como sendo o mínimo. Então, para todo $n > n_\varepsilon$ teremos

$$K_{n+1} - K_n \geq T_{n+1} - T_n.$$

Agora, para todo $N > n_\varepsilon + 1$, somamos em ambos os lados da desigualdade, desde $n = n_\varepsilon + 1$ até $n = N$, para obter

$$K_{N+1} - K_{n_\varepsilon+1} \geq T_{N+1} - T_{n_\varepsilon+1}.$$

Concluímos, assim,

$$K_{N+1} - T_{N+1} \geq K_{n_\varepsilon+1} - T_{n_\varepsilon+1},$$

que é contradição, já que

$$\begin{aligned} &K_{N+1} - T_{N+1} < R_{N+1} - T_{N+1} \leq \\ &\leq \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) \sum_{j=1}^{N} j^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)} - \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) \sum_{j=1}^{N} j^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)+\varepsilon} \end{aligned}$$

e esta última expressão tende para $-\infty$. ■

Estimando os valores em (2.14) e escolhendo um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos afirmar que

$$K_{n+1} - K_n < \frac{0.87}{n^{0.473678}}$$

para infinitos n. Parece bastante provável que as melhores constantes que satisfazem a desigualdade multilinear de Bohnenblust Hille tenham um crescimento uniforme. O teorema acima nos induz a conjectura de que a estimativa é válida para todo n.

Corolário 2.3.3 *As constantes ótimas* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille satisfazem*

$$\liminf_{n} (K_{n+1} - K_n) \leq 0.$$

Como consequência direta de (2.15), temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.4 *As contantes ótimas na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *satisfazem*

$$K_n < 1 + 0.87 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^{0.473678}}$$

para todo $n \geq 2$.

É importante mencionar que, em [37], uma das principais consequências do teorema principal é o fato de que as constantes ótimas K_n não podem ser assintoticamente iguais a n^r para todo $r > q := \log_2\left(\frac{e^{1-\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{2}}\right)$, isto é,

$$K_n \nsim n^r, \text{ para todo } r > q := \log_2\left(\frac{e^{1-\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{2}}\right). \tag{2.16}$$

O fato de que nossa perturbação não causa nenhum dano, assintoticamente falando, pode ser corroborado também mediante a seguinte generalização de (2.16). Repare que a potência de $n-1$ em (2.17) é exatamente o valor de q em (2.16), embora as abordagens sejam completamente diferentes.

Corolário 2.3.5 *Seja*

$$C_0 := 1 + \left(2^{\frac{3}{2}} - 4e^{\frac{\gamma}{2}-1}\right)\left(\frac{2^{-1/2}e^{1-\frac{\gamma}{2}}}{2^{-1} - \log_2 e^{1-\frac{\gamma}{2}}} + \left(1 + 2^{\frac{-3}{2}}e^{1-\frac{\gamma}{2}}\right)\right) \approx 0.122.$$

As constantes ótimas na desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille satisfazem

$$K_n < \left(\frac{2^{\frac{5}{2}} - 8e^{-1+\frac{\gamma}{2}}}{2\log_2\left(e^{1-\frac{\gamma}{2}}\right) - 1} \right) (n-1)^{\log_2\left(\frac{e^{1-\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{2}}\right)} + C_0 \tag{2.17}$$

para todo $n \geq 2$. Numericamente,

$$K_n < 1.65\,(n-1)^{0.526322} + 0.13. \tag{2.18}$$

Demonstração. Recordemos que

$$K_n < 1 + \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) \sum_{j=1}^{n-1} j^{\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)}.$$

Para simplificar cálculos futuros, vamos denotar

$$p = -\log_2\left(2^{-3/2}e^{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)$$

Note que, para $n \geq 3$, podemos majorar $\sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^p}$ por

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^p} &\leq \int_2^{n-1} x^{-p} dx + \left(1 + 2^{-p}\right) \\ &= \frac{1}{1-p}\,(n-1)^{1-p} + \left(\frac{2^{1-p}}{p-1} + \left(1 + 2^{-p}\right) \right). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$K_n < 1 + \left(2\sqrt{2} - 4e^{\frac{1}{2}\gamma - 1}\right) \left(\frac{1}{1-p}\,(n-1)^{1-p} + \left(\frac{2^{1-p}}{p-1} + \left(1 + 2^{-p}\right) \right) \right)$$

e, mediante um cálculo simples, obtemos (2.17) e (2.18). ■

2.4 Caso complexo - π, e e γ se encontram -

Para o caso dos escalares complexos, as melhores constantes conhecidas satisfazendo a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille são dadas por Núñez, Pellegrino e Seoane em [38]. Estas são dadas da seguinte forma

$$\widetilde{C}_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n}{n+2}}} \right)^{n/2} \right)^{-1} \widetilde{C}_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par e} \\ \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n-2}{n+1}}} \right)^{\frac{-1-n}{2}} \widetilde{C}_{\frac{n-1}{2}} \right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n+2}{n+3}}} \right)^{\frac{1-n}{2}} \widetilde{C}_{\frac{n+1}{2}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde
$$\widetilde{A_p} = \left(\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Vejamos como seriam os resultados da seção anterior para o caso dos complexos.

Começamos destacando que as novas constantes $\widetilde{A_p}$ dependem também da função gamma. Desta forma, usamos novamente o resultado de Feng Qi [53, *Teorema* 2] para provar que a sequência $\left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n}{n+2}}}\right)^{-n/2}\right)_{n=1}^{\infty}$ é crescente; só precisamos tomar $s = \frac{2n}{n+2}$ e $r = 2$ (veja a *Seção* 2.2). Em particular, conclui-se que
$$\widetilde{C}_{2n} \leq \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)\widetilde{C}_n$$
para todo n. E, de forma análoga, prova-se que a sequência
$$\left(\left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n-2}{n+1}}}\right)^{\frac{-1-n}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \cdot \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n+2}{n+3}}}\right)^{\frac{1-n}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}}\right)_{n=1}^{\infty}$$
é crescente e limitada por
$$\widetilde{D} := \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right).$$
De forma similiar, definimos a sequência
$$\widetilde{S}_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} & \text{se } n = 1, 2, \\ \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)\widetilde{S}_{n/2} & \text{para } n \text{ par}, \\ \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)\left(\widetilde{S}_{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}}\left(\widetilde{S}_{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{para } n \text{ ímpar}, \end{cases}$$
a qual é crescente e satisfaz a desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille. Logo, definimos
$$\widetilde{M_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} & \text{se } n = 1, 2 \\ \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)\widetilde{M_{\frac{n}{2}}} & \text{se } n \text{ é par e} \\ \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)\widetilde{M_{\frac{n+1}{2}}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$
e é claro que
$$\widetilde{C}_n \leq \widetilde{S}_n \leq \widetilde{M_n}.$$
Considerando o conjunto
$$B_k := \{2^{k-1}+1, \ldots, 2^k\}$$
para cada $k \geq 1$, temos
$$\widetilde{M_n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\widetilde{D}^{k-1} \text{ se } n \in B_k$$

e, mediante a perturbação uniforme de $\widetilde{M}_n$, obtemos

$$\widetilde{R}_n := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\widetilde{D}^{k-1} + (j_n - 1)\left(\frac{\widetilde{D}^k - \widetilde{D}^{k-1}}{2^{k-1}}\right)\right), \tag{2.19}$$

onde $n \in B_k$ e j_n é a posição de n em B_k. Como no caso dos reais, temos

$$\widetilde{R}_{n+1} - \widetilde{R}_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\widetilde{D}^k - \widetilde{D}^{k-1}}{2^{k-1}}\right)$$

e, dado que $\widetilde{D} < 2$, temos

$$\frac{\widetilde{D}^k - \widetilde{D}^{k-1}}{2^{k-1}} > \frac{\widetilde{D}^{k+1} - \widetilde{D}^k}{2^k},$$

isto é, $\left(\widetilde{R}_{n+1} - \widetilde{R}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente. Ademais,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\widetilde{R}_{n+1} - \widetilde{R}_n\right) = 0$$

e

$$\widetilde{R}_{n+1} - \widetilde{R}_n < 0.44 \cdot n^{-0.695025},$$

já que

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_{n+1} - \widetilde{R}_n &\leq \left(\frac{\widetilde{D}}{2}\right)^{k-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\widetilde{D} - 1\right) \leq \left(\frac{\widetilde{D}}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\widetilde{D} - 1\right) \\
&\leq \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{4}{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\sqrt{\pi}}\right) n^{\log_2\left(\frac{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}}{2}\right)} \\
&< 0.44 \cdot n^{-0.695025}.
\end{aligned}$$

Assim, somando na desigualdade acima desde $\left(\widetilde{R}_n - \widetilde{R}_{n-1}\right)$ até $\left(\widetilde{R}_2 - R_1\right)$, obtemos

$$\widetilde{R}_n \leq 1 + \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{4}{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\sqrt{\pi}}\right)\sum_{j=1}^{n-1} j^{\log_2\left(\frac{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}}{2}\right)} \tag{2.20}$$

para todo $n \geq 2$. Numericamente,

$$K_n < \widetilde{R}_n < 1 + 0.44 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j^{-0.695025}$$

para todo $n \geq 2$. Procedendo como na *Seção* 2.3, temos

$$K_n < \frac{\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{4}{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\sqrt{\pi}}\right)}{1 + \log_2\left(\frac{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}}{2}\right)}(n-1)^{\log_2\left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)} + C_0 \tag{2.21}$$

com

$$C_0 = \left(\frac{2e^{\frac{1}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{\pi}} \right) \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}} \ln 2 + (1-\gamma)\left(e^{\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}\gamma}\right)}{e^{\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}}(1-\gamma)} \right) + 1$$

para todo $n \geq 2$. Numericamente,

$$K_n < 1.41\,(n-1)^{0.304975} - 0.04$$

para todo $n \geq 2$.

Mais uma vez, lembremos que em [38] foi mostrado que

$$K_n \not\sim n^r \text{ para todo } r > q := \log_2\left(e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma}\right). \tag{2.22}$$

Em nossa expressão, o expoente de $(n-1)$ em (2.21) é precisamente o valor de q em (2.22), o que mostra que, também para o caso dos complexos, a perturbação feita não causa nenhum dano assintoticamente falando.

Finalmente, segue para todo $\varepsilon > 0$ a desigualdade

$$K_{n+1} - K_n < \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{4}{e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma}\sqrt{\pi}} \right) n^{\log_2\left(\frac{e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma}}{2}\right) + \varepsilon}$$

para infinitos valores de n.

2.5 Variações no Teorema de Bohnenblust-Hille

Muito recentemente, aplicações explícitas na Teoria de Informação Quântica sob o baixo crescimento das constantes no caso de escalares reais $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ (veja (2.2)), foram fornecidas por A. Montanaro em [36]. Diante deste novo panorama, consideramos que vale a pena mencionar que as técnicas utilizadas nas seções anteriores podem ser adaptadas a uma ampla gama de parâmetros. Mais precisamente, usando nossas técnicas, podemos estimar as constantes que satisfazem uma desigualdade do tipo Bohnenblust–Hille quando o expoente $\frac{2n}{n+1}$ é substituído por qualquer $q \in \left[\frac{2n}{n+1}, \infty\right)$. Uma vez que, para $q \geq 2$, as constantes são iguais a 1, os casos não triviais acontecerão para $q \in \left[\frac{2n}{n+1}, 2\right)$.

O caso da desigualdade de Littlewood $\frac{4}{3}$ foi recentemente estudada em [38]. Neste, as constantes ótimas $L_{\mathbb{R},r}$ satisfazendo

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq L_{\mathbb{R},r} \|U\| \tag{2.23}$$

foram obtidas. Mais precisamente, foi mostrado que

$$L_{\mathbb{R},r} = \begin{cases} 2^{\frac{2-r}{r}}, \text{ para todo } r \in \left[\frac{4}{3}, 2\right], \\ 1, \text{ para todo } r \geq 2. \end{cases}$$

Também, foram dadas as estimativas para o caso dos complexos e foi estabelecida uma relação entre as constantes reais e complexas, a saber, as constantes reais são sempre maiores que as constantes no caso dos complexos.

Vamos definir, para cada $t \in [1, 2)$,

$$E_{t,n} = \frac{2nt}{(n-1)\,t + 2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, quando tomarmos $t = 1$,

$$E_{1,n} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

teremos o expoente da desigualdade de Bohnenblust–Hille; além disso veja que, para cada $t \in (1, 2)$, temos

$$\frac{2nt}{(n-1)\,t + 2} > \left(\frac{2n}{n+1}\right).$$

Assim, existe uma constante $C_{n,t}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n}^{N} |U(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})|^{\frac{2nt}{(n-1)t+2}} \right)^{\frac{(n-1)t+2}{2nt}} \leq C_{n,t}^{\mathbb{K}} \|U\|, \tag{2.24}$$

para toda aplicação n-linear $U : \ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N \to \mathbb{K}$ e para todo inteiro positivo N, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A seguir, vamos mostrar a versão contínua dos resultados dados nas seções anteriores. Como as provas podem ser feitas mediante as técnicas usadas em ditas seções, somente enunciaremos os resultados. Contudo, com o objetivo de tornar o trabalho o mais completo possível, faremos a demonstração da versão correspondente do principal resultado de [42, *Teorema* 2.2].

Assim, utilizando as ideias de [42, *Teorema* 2.2] (no qual sabemos encontram-se as menores constantes conhecidas (2.2)), no *Teorema* 2.5.4 pretendemos dar uma sequência de constantes que satisfazem a nova desigualdade (2.24). Enunciemos antes os seguintes resultados auxiliares.

Lema 2.5.1 (Desigualdade de Khintchine) *Para todo* $0 < p < \infty$, *existem constantes* A_p *e* B_p *tais que, para toda sequência* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* l_2, *temos*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n (t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.25}$$

O seguinte resultado, tal como especificam em [42], é um caso particular de [16, *Lema* 2.2] para $Y = \mathbb{K}$,

Teorema 2.5.2 (Defant, et al.) *Seja* $1 \leq r \leq 2$ *e seja* $(y_{i_1 \dots i_m})_{i_1,\dots,i_m=1}^{N}$ *uma matriz em* $\mathbb{K}$. *Então, existe uma constante* $A_{2,r}$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} |y_{i_1 \dots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (A_{2,r})^m \left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_1} (t_1) \dots r_{i_m} (t_m) \, y_{i_1 \dots i_m} \right|^r dt_1, \dots, dt_m \right)^{\frac{1}{r}}$$

onde

$$(A_{2,r}) \leq A_r^{-1} \tag{2.26}$$

Teorema 2.5.3 (Blei, Defant et al.) *Sejam* A, B *dois conjuntos finitos não vazios, e* $(a_{ij})_{i,j \in A \times B}$ *uma matriz escalar com entradas positivas e colunas denotadas por* $\alpha_j = (a_{ij})_{i \in A}$ *e* $\beta_i = (a_{ij})_{j \in B}$. *Então, para* $q, r_1, r_2 \geq 1$, *com* $q > \max(r_1, r_2)$, *tem-se*

$$\left(\sum_{(i,j) \in A \times B} a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)} \right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}} \leq \left(\sum_{i \in A} \|\beta_i\|_q^{r_1} \right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}} \left(\sum_{j \in B} \|\alpha_j\|_q^{r_2} \right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}},$$

com

$$\omega : [1,q)^2 \to [0,\infty), \ \omega(x,y) := \frac{q^2 (x+y) - 2qxy}{q^2 - xy},$$
$$f : [1,q)^2 \to [0,\infty), \ f(x,y) := \frac{q^2 x - qxy}{q^2 (x+y) - 2qxy}.$$

Com o seguinte resultado, obtemos cotas superiores para $K_{n,t}$, para cada $t \in [1,2)$, no caso real.

Teorema 2.5.4 *Seja $t \in [1,2)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, ..., X_n$ espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$,*

$$\Pi_{\left(\frac{2nt}{(n-1)t+2};1\right)}(X_1, ..., X_n; \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; \mathbb{R}) \ \ e \ \ \|.\|_{\pi\left(\frac{2nt}{(n-1)t+2};1\right)} \leq C^{\mathbb{R}}_{n,t} \|.\|$$

com

$$C^{\mathbb{R}}_{n,t} = \begin{cases} 1, \ se \ n = 1 \\ \left(A^{-\frac{n}{2}}_{\frac{2nt}{(n-2)t+4}} C^{\mathbb{R}}_{\frac{n}{2},t}\right), \ se \ n \ \text{é par} \\ \left(A^{-(n+1)/2}_{\frac{2(n-1)t}{(n-3)t+4}} C^{\mathbb{R}}_{\frac{n-1}{2},t}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(A^{-(n-1)/2}_{\frac{2(n+1)t}{(n-1)t+4}} C^{\mathbb{R}}_{\frac{n+1}{2},t}\right)^{\frac{n+1}{2n}}, \ se \ n \ \text{é ímpar.} \end{cases} \tag{2.27}$$

Em particular,

$$C^{\mathbb{R}}_{n,t} = 2^{\frac{2-t}{2t}} \left(C^{\mathbb{R}}_{\frac{n}{2},t}\right)$$

se n é par e verifica

$$2 \leq n \leq \frac{-2tp_0 + 4p_0}{2t - p_0},$$

onde $1 < p_0 < 2$ é tal que

$$\Gamma\left(\frac{p_0 + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Demonstração. É fácil ver que $C^{\mathbb{R}}_{1,t} = 1$ para todo $t \geq 1$. Provaremos o caso geral por indução. Se n é par, queremos obter o caso n como combinação dos casos $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}$, como no *Teorema 2.2* de [42]. Vamos supor válido até $\frac{n}{2}$ e provar para n.

Seja $U \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; \mathbb{R})$ e N um inteiro positivo qualquer. Para cada $1 \leq k \leq n$ considere $x^{(k)}_1, ..., x^{(k)}_N \in X_k$ tais que

$$\left\| \left(x^{(k)}_j\right)^N_{j=1} \right\|^w_1 \leq 1,$$

para $k = 1, ..., n$. Considerando na notação do *Teorema* 2.5.3

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = \frac{2nt}{(n-2)t+4}, \\ q = 2, \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} \omega(s_1, s_2) = \frac{2nt}{(n-1)t+2}, \\ f(s_1, s_2) = 1/2. \end{cases}$$

Logo,

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_n}^{N}\left|U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right|^{E_{t,n}}\right)^{1/E_{t,n}} \leq \left(\sum_{i_1,\dots,i_{\frac{n}{2}}}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n=1}^{N}\right\|_2^{s_2}\right)^{f(s_2,s_1)/s_2} \cdot \left(\sum_{i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\dots,i_{\frac{n}{2}}=1}^{N}\right\|_2^{s_1}\right)^{f(s_1,s_2)/s_1}.$$

Precisamos calcular cada um dos fatores acima. Começamos tomando o segundo fator e, por simplicidade, escrevemos $dt := dt_1 \dots dt_{\frac{n}{2}}$.

Fixados $i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n$, do *Teorema* 2.5.2, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\dots,i_{\frac{n}{2}}=1}^{N}\right\|_2^{s_1}\\
&\leq \left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)^{s_1}\int\limits_{[0,1]^{n/2}}\left|\sum_{i_1,\dots,i_{\frac{n}{2}}=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\dots r_{i_{\frac{n}{2}}}(t_{\frac{n}{2}})U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right|^{s_1}dt\\
&= \left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)^{s_1}\int\limits_{[0,1]^{n/2}}\left|U\left(\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)x_{i_1}^1,\dots,\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{N} r_{i_{\frac{n}{2}}}(t_{\frac{n}{2}})x_{i_{\frac{n}{2}}}^{\frac{n}{2}},x_{i_{\frac{n}{2}+1}}^{\frac{n}{2}+1},\dots,x_{i_n}^n\right)\right|^{s_1}dt
\end{aligned}$$

Somando esta desigualdade sobre $i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n = 1,\dots,N$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\dots,i_{\frac{n}{2}}=1}^{N}\right\|_2^{s_1}\\
&\leq \left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)^{s_1}\int\limits_{[0,1]^{n/2}}\sum_{i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n}^{N}\left|U\left(\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)x_{i_1}^1,\dots,\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{N} r_{i_{\frac{n}{2}}}(t_{\frac{n}{2}})x_{i_{\frac{n}{2}}}^{\frac{n}{2}},x_{i_{\frac{n}{2}+1}}^{\frac{n}{2}+1},\dots,x_{i_n}^n\right)\right|^{s_1}dt
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a hipótese de indução sobre o integrando, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\dots,i_{\frac{n}{2}}=1}^{N}\right\|_2^{s_1}\\
&\leq \left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)^{s_1}\int\limits_{[0,1]^{\frac{n}{2}}}\left\|U\left(\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)x_{i_1}^1,\dots,\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{N} r_{i_{\frac{n}{2}}}(t_{\frac{n}{2}})x_{i_{\frac{n}{2}}}^{\frac{n}{2}},\cdot,\dots,\cdot\right)\right\|_{\pi(s_1;1)}^{s_1}\prod_{j=\frac{n}{2}+1}^{n}\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{N}\right\|_1^{w}dt\\
&\leq \left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)^{s_1}\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)^{s_1}\|U\|^{s_1},
\end{aligned}$$

onde $\pi(s_1;1)$ denota a norma múltiplo $(s_1;1)$-somante. Deste modo,

$$\left(\sum_{i_{\frac{n}{2}+1},\dots,i_n}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\dots,i_{\frac{n}{2}}=1}^{N}\right\|_2^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq \left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)\|U\|.$$

Como $s_1 = s_2$, a outra estimativa é análoga. Desta forma; combinando ambas estimativas, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n}^{N} \left|U\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n\right)\right|^{E_{t,n}}\right)^{1/E_{t,n}} &\leq \left(\left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)\|U\|\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)\|U\|\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)\|U\|\right).\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}C_{n,t}^{\mathbb{R}} &= \left(A_{2,s_1}^{n/2}\right)\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right) \\ &\leq \frac{C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}}{A_{s_1}^{n/2}}.\end{aligned}$$

Agora, como

$$A_{s_1} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{s_1}}, \text{ para } s_1 \leq p_0 \approx 1.8474$$

então, temos

$$A_{s_1} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{s_1}}, \text{ sempre que } n \leq \frac{-2tp_0 + 4p_0}{2t - p_0}.$$

Assim, procedendo como em [42], sabemos que

$$A_{2,s_1} \leq A_{s_1}^{-1} = 2^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{s_1}},$$

logo

$$\begin{aligned}C_{n,t}^{\mathbb{R}} &\leq 2^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{s_1}\right)\frac{n}{2}}\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right) \\ &= 2^{\frac{2-t}{2t}}\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)\end{aligned}$$

sempre que $n \leq \frac{-2tp_0+4p_0}{2t-p_0}$ e, além disso,

$$C_{n,t}^{\mathbb{R}} \leq \left(\sqrt{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{s_1}}\right)^{-\frac{n}{2}}\left(C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)$$

para $n > \frac{-2tp_0+4p_0}{2t-p_0}$.

Vejamos agora o caso n ímpar. De novo procedemos por indução, agora obtendo n como combinação dos casos $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$.

Considerando na notação do *Teorema* 2.5.3

$$\begin{cases} s_1 = \frac{2(n-1)t}{(n-3)t+4}, \\ s_2 = \frac{2(n+1)t}{(n-1)t+4} \\ q = 2. \end{cases}$$

temos

$$\omega(s_1, s_2) = \frac{2nt}{(n-1)\,t+2}.$$

Procedendo como acima, temos

$$\begin{aligned} C_{n,t}^{\mathbb{R}} &= \left(\left(A_{2,s_1}^{(n+1)/2}\right)\left(C_{\frac{n-1}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)\right)^{f(s_1,s_2)}\left(\left(A_{2,s_2}^{(n-1)/2}\right)\left(C_{\frac{n+1}{2},t}^{\mathbb{R}}\right)\right)^{f(s_2,s_1)} \\ &\leq \left(\frac{C_{\frac{n-1}{2},t}^{\mathbb{R}}}{A_{s_1}^{(n+1)/2}}\right)^{f(s_1,s_2)}\left(\frac{C_{\frac{n+1}{2},t}^{\mathbb{R}}}{A_{2,s_2}^{(n-1)/2}}\right)^{f(s_2,s_1)}. \end{aligned}$$

■

Desta forma, encontramos limitantes superiores para as constantes ótimas $K_{n,t}^{\mathbb{R}}$ da desigualdade (2.24).

A seguir, estabeleceremos a aplicação das versões contínuas de nossos resultados ao caso dos escalares reais. Sempre, quando $t = 1$, recuperamos os resultados originais dados nas seções anteriores.

Teorema 2.5.5 (Lema Fundamental. Versão contínua) *Para cada $t \in [1, 2)$, existe uma sequência $(R_{n,t})_{n=1}^{\infty}$ satisfazendo (2.24) tal que $(R_{n+1,t} - R_{n,t})_{n=1}^{\infty}$ é decrescente e converge para zero. Mais ainda,*

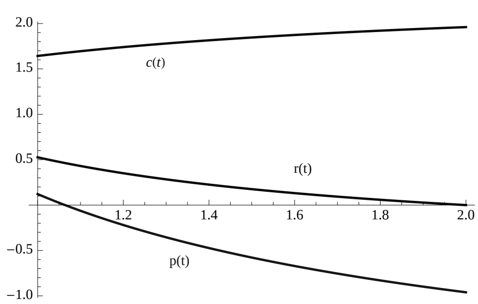
$$R_{n+1,t} - R_{n,t} \leq \left(2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{t+1}{t}} e^{\frac{t-2}{t}+\frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right) n^{\log_2\left(2^{\frac{-t-2}{2t}} e^{\frac{2-t}{t}-\frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right)} \tag{2.28}$$

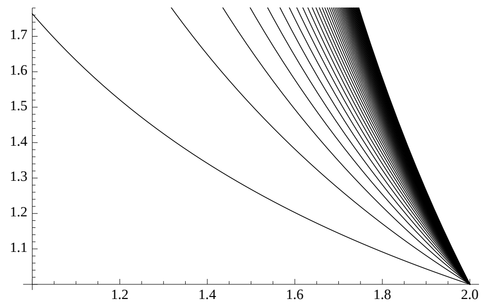
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5.6 *Para cada $t \in [1, 2)$, seja $\left(K_{n,t}^{\mathbb{R}}\right)_{n=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas satisfazendo (2.24). Se existe uma constante $M_t \in [-\infty, \infty]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(K_{n+1,t}^{\mathbb{R}} - K_{n,t}^{\mathbb{R}}\right) = M_t,$$

então, $M_t = 0$.





(a) Gráfica de $p(t), c(t)$, e $r(t)$ para $t \in [1,2)$. (b) $K^{\mathbb{R}}_{n,t}$ para $2 \leq n \leq 50$.

Teorema 2.5.7 *Para cada $t \in [1,2)$, seja $\left(K^{\mathbb{R}}_{n,t}\right)_{n=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas satisfazendo (2.24). Para todo $\varepsilon > 0$, temos*

$$K^{\mathbb{R}}_{n+1,t} - K^{\mathbb{R}}_{n,t} < \left(2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{t+1}{t}} e^{\frac{t-2}{t} + \frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right) n^{\log_2\left(2^{\frac{-t-2}{2t}} e^{\frac{2-t}{t} - \frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right) + \varepsilon} \tag{2.29}$$

para uma quantidade infinita de n.

Teorema 2.5.8 *Para cada $t \in [1,2)$, as constantes ótimas que satisfazem (2.24) cumprem*

$$K^{\mathbb{R}}_{n,t} < 1 + \left(2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{t+1}{t}} e^{\frac{t-2}{t} + \frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right) \sum_{j=1}^{n-1} j^{\log_2\left(2^{\frac{-t-2}{2t}} e^{\frac{2-t}{t} - \frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right)}.$$

para todo $n \geq 2$.

Corolário 2.5.9 *Para cada $t \in [1,2)$, vale para as constantes ótimas que satisfazem (2.24) a seguinte limitação:*

$$K^{\mathbb{R}}_{n,t} < c\,(t)\,(n-1)^{r(t)} + p\,(t)\,, \tag{2.30}$$

onde (veja a figura 2.5):

- $p(t) = 1 - \left(2^{3/2} - 2^{\frac{t+1}{t}} e^{\frac{t-2}{t} + \frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right)\left(\frac{2^{\frac{3t-2}{2t}} t e^{\frac{2-t}{t} - \frac{(2-t)\gamma}{2t}}}{t-2+2t\log_2 e^{\frac{2-t}{t} - \frac{(2-t)\gamma}{2t}}} - 1 - 2^{\frac{-t-2}{2t}} e^{\frac{2-t}{t} - \frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right)$,

- $c(t) = \frac{4t\left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{t}} e^{\frac{t-2}{t} + \frac{(2-t)\gamma}{2t}}\right)}{t-2+2t\log_2 e^{\frac{2-t}{t} - \frac{(2-t)\gamma}{2t}}}$, *e*

- $r(t) = \frac{t-2}{2t} + \log_2 e^{\frac{2-t}{t} - \frac{(2-t)\gamma}{2t}}$.

Finalmente, combinaremos os procedimentos utilizados em [20] e [38], com o intuito de obter estimativas inferiores para as constantes $K^{\mathbb{R}}_{n,t}$.

Em [38], para o caso $n = 2$, os autores demonstram que, para todo $t \in [1, 2)$, utilizando o operador $U_2 : \ell_\infty^2 \times \ell_\infty^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$U_2(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2, \tag{2.31}$$

vale a seguinte limitação inferior

$$K_{2,t}^{\mathbb{R}} \geq \frac{4^{\frac{1}{E_{t,n}}}}{\|U_2\|} = \frac{4^{\frac{t+2}{4t}}}{\|U_2\|} = \frac{2^{\frac{t+2}{2t}}}{\|U_2\|} = 2^{\frac{2-t}{2t}},$$

pois $\|U_2\| = 2$,

Seguindo as ideias de [20], para o caso $n = 3$ definimos o operador 3-linear

$$\begin{aligned}
&U_3(x, y, z) \\
&= (z_1 + z_2)(x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2) + (z_1 - z_2)(x_3 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_3 - x_4 y_4) \\
&= (z_1 + z_2) U_2(x, y) + (z_1 - z_2) U_2\left(B^2(x), B^2(y)\right)
\end{aligned}$$

onde B é o operador shift à esquerda. Assim $\|U_3\| = 4$, e

$$K_{3,t}^{\mathbb{R}} \geq \frac{16^{\frac{1}{E_{t,3}}}}{\|U_3\|} = \frac{16^{\frac{1}{3^{\frac{t}{t+1}}}}}{\|U_3\|} = 2^{\frac{4-2t}{3t}}$$

Para o caso geral, de igual forma seguindo as ideias de [20], definimos indutivamente o operador

$$U_n : \ell_\infty^{2^{n-1}} \times \overset{n}{\cdots} \times \ell_\infty^{2^{n-1}} \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\begin{aligned}
U_n(x_1, ..., x_n) = &\left(x_n^1 + x_n^2\right) U_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) \\
&+ \left(x_n^1 - x_n^2\right) U_{n-1}\left(B^{2n-2}(x_1), B^{2n-2}(x_2), B^{2n-3}(x_3), ..., B^2(x_{n-1})\right)
\end{aligned}$$

onde B é o operador shift para esquerda em $\ell_\infty^{2^{n-1}}$e $x_k = (x_k^m)_m \in \ell_\infty^{2^{n-1}}$ para $1 \leq k \leq n$, $1 \leq m \leq 2^{n-1}$.

E, como em [20] foi provado que $\|U_n\| = 2^{n-1}$, obtemos

$$K_{n,t}^{\mathbb{R}} \geq \frac{\left(4^{n-1}\right)^{\frac{1}{E_{t,n}}}}{\|U_n\|} = 2^{\frac{(n-1)(2-t)}{nt}}.$$

Deste modo, fica provado o seguinte teorema.

Teorema 2.5.10 *Para todo $t \in [1,2)$ e $n \in \mathbb{N}$, vale*

$$K_{n,t}^{\mathbb{R}} \geq 2^{\frac{(n-1)(2-t)}{nt}}.$$

Obviamente, todos estes resultados têm seu respectivo análogo para o caso de escalares complexos, os quais enunciaremos a continuação:

Teorema 2.5.11 *Seja $t \in [1,2)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$ espaços de Banach complexos,*

$$\Pi_{\left(\frac{2nt}{(n-1)t+2};1\right)}\left(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{C}\right) = \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{C}\right) \text{ e } \|.\|_{\pi\left(\frac{2nt}{(n-1)t+2};1\right)} \leq C_{n,t}^{\mathbb{C}} \|.\|$$

onde

$$C_{n,t}^{\mathbb{C}} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ \dfrac{C_{\frac{n}{2},t}^{\mathbb{C}}}{\left(\widetilde{A_{\frac{2nt}{(n-2)t+4}}}\right)^{n/2}} & \text{se } n \text{ é par e} \\ \left(\dfrac{C_{\frac{n-1}{2},t}^{\mathbb{C}}}{\left(\widetilde{A_{\frac{2(n-1)t}{(n-3)t+4}}}\right)^{(n+1)/2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(\dfrac{C_{\frac{n+1}{2},t}^{\mathbb{C}}}{\left(\widetilde{A_{\frac{2(n+1)t}{(n-1)t+4}}}\right)^{(n-1)/2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Teorema 2.5.12 (Lema Fundamental. Versão contínua) *Para cada $t \in [1,2)$, existe uma sequência $\left(\widetilde{R}_{n,t}\right)_{n=1}^{\infty}$ satisfazendo (2.24) e tal que $\left(\widetilde{R}_{n+1,t} - \widetilde{R}_{n,t}\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência decrescente que converge para zero. Mais ainda,*

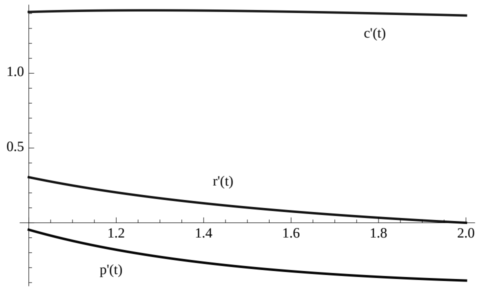
$$\widetilde{R}_{n+1,t} - \widetilde{R}_{n,t} \leq \left(\frac{2\left(\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)\right)^{\frac{-1}{t}}\left(e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)} - 1\right)}{e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}}\right) n^{\log_2\left(\frac{e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}}{2}\right)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

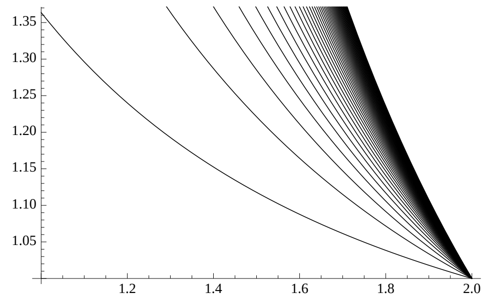
Teorema 2.5.13 *Para cada $t \in [1,2)$, seja $\left(K_{n,t}^{\mathbb{C}}\right)_{n=1}^{\infty}$ a sequência das constantes ótimas satisfazendo (2.24). Se existe uma constante $M_t \in [-\infty, \infty]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(K_{n+1,t}^{\mathbb{C}} - K_{n,t}^{\mathbb{C}}\right) = M_t,$$

então, $M_t = 0$.



(a) Gráfica de $p'(t), c'(t)$, e $r'(t)$ para $t \in [1, 2)$.



(b) $K_{n,t}^{\mathbb{C}}$ para $2 \leq n \leq 50$.

Teorema 2.5.14 *Para cada* $t \in [1, 2)$, *seja* $\left(K_{n,t}^{\mathbb{C}}\right)_{n=1}^{\infty}$ *a sequência das constantes ótimas que satisfazem* (2.24). *Para todo* $\varepsilon > 0$, *temos que vale a seguinte desigualdade para uma quantidade infinita de* n :

$$K_{n+1,t}^{\mathbb{C}} - K_{n,t}^{\mathbb{C}} < \left(\frac{2\left(\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)\right)^{\frac{-1}{t}} \left(e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)} - 1\right)}{e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}} \right) n^{\log_2\left(\frac{e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}}{2}\right)+\varepsilon}.$$

Teorema 2.5.15 *Para cada* $t \in [1, 2)$, *as constantes ótimas na desigualdade* (2.24) *satisfazem*

$$K_{n,t}^{\mathbb{C}} < 1 + \frac{2\left(\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)\right)^{\frac{-1}{t}} \left(e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)} - 1\right)}{e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}} \sum_{j=1}^{n-1} j^{\log_2 \frac{e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}}{2}}$$

para todo $n \geq 2$.

Corolário 2.5.16 *Para cada* $t \in [1, 2)$, *tem-se a seguinte limitação para as constantes ótimas que satisfazem* (2.24)

$$K_{n,t}^{\mathbb{C}} < c'(t)\,(n-1)^{r'(t)} + p'(t),$$

onde (olhe a Figura 2.5):

- $p'(t) = 1 + \dfrac{\left(\dfrac{-2}{\log_2 e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}} + \dfrac{2}{e^{\left(\frac{1}{4t}(\gamma-1)(2t-4)\right)}} + 1\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{t}} \left(e^{\left(\frac{(\gamma-1)(2t-4)}{4t}\right)} - 1\right)^{-1}}$

- $c'(t) = \dfrac{2\left(\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)\right)^{\frac{-1}{t}} \left(e^{\left(\frac{(\gamma-1)(2t-4)}{4t}\right)} - 1\right)}{\left(\log_2 e^{\left(\frac{(\gamma-1)(2t-4)}{4t}\right)}\right) e^{\left(\frac{(\gamma-1)(2t-4)}{4t}\right)}}$, *e*

- $r'(t) = \log_2 e^{\left(\frac{(\gamma-1)(2t-4)}{4t}\right)}$.

Capítulo 3

Uma fórmula fechada para as constantes recursivas do Teorema de Bohnenblust-Hille.

Lembremos que as melhores constantes conhecidas, (2.2) e (2.5), estão dadas de forma recursiva e, além disso, dependem da função gamma, dificultando assim seu cálculo. Repare que, somente para conhecer a constante C_{100}, precisaríamos realizar dezessete cálculos; mais especificamente, calcular as seguintes constantes e, em cada uma delas, a respectiva constante A_p :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & C_4 & \to & C_7 & \to & C_{13} & \to & C_{25} & \to & C_{50} & \to & C_{100} \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
C_2 & \to & C_3 & \to & C_6 & \to & C_{12} & & & & & & \\
C_1 & \nearrow & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Nosso objetivo então é claro: dar uma fórmula fechada que satisfaça a desigualdade de Bohnenblust-Hille o mais perto possível das melhores constantes conhecidas, não só pelo interesse matemático intrínseco, senão também pelas recentes aplicações de $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\left(\tilde{C}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ na teoria da informação quântica.

Agora, é importante recordar que no capítulo anterior demos duas fórmulas fechadas que satisfazem a desigualdade de Bohnenblust-Hille. As constantes

$$R_n := \sqrt{2}\left(D^{k-1} + (j_n - 1)\left(\frac{D^k - D^{k-1}}{2^{k-1}}\right)\right), \text{ sempre que } n \in B_k$$

onde j_n é a posição de n na ordem dos elementos de B_k, e as constantes

$$J_n := 1.65\,(n-1)^{0.526322} + 0.13.$$

O "problema"destas constantes reside em que, pela forma em que foram construidas, elas podem se afastar muito das constantes (2.2) e (2.5), o que não é muito conveniente para nosso objetivo. Assim, se lembrarmos a *Seção* 2.2, as constantes mais próximas de $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\left(\tilde{C}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ são as constantes

$$S_n = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} & \text{se } n = 1, 2 \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) S_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par, e} \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)\left(S_{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}}\left(S_{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

e

$$\widetilde{S}_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} & \text{se } n = 1, 2, \\ \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right) \widetilde{S}_{n/2} & \text{para } n \text{ par, e} \\ \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)\left(\widetilde{S}_{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}}\left(\widetilde{S}_{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

respectivamente. Desta forma, o seguinte teorema e resultado principal desta seção, nos provê uma fórmula fechada destas constantes, conseguindo assim nosso objetivo.

Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, sabemos que ele pode ser escrito, de forma única, como

$$n = 2^k - l, \tag{3.1}$$

onde k é o menor inteiro positivo tal que $2^k \geq n$ e $0 \leq l < 2^{k-1}$.

Teorema 3.0.17 *Se $n \geq 3$ é escrito como em (3.1), então,*

$$S_n = \begin{cases} \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{n-l}{n}}, \text{ se } l \leq 2^{k-2} \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n(k-1)+2^{k-1}-2l}{n}}\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2^{k-1}}{n}}, \text{ se } 2^{k-2} < l < 2^{k-1} \end{cases}$$

no caso dos reais e

$$S_n = \begin{cases} \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{n-l}{n}}, \text{ se } l \leq 2^{k-2} \\ \left(e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma}\right)^{\frac{n(k-1)+2^{k-1}-2l}{n}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2^{k-1}}{n}}, \text{ se } 2^{k-2} < l < 2^{k-1} \end{cases}$$

no caso dos complexos.

Demonstração. Observe que, como $n \geq 3$, k será sempre maior o igual a 2.

Esta demonstração será feita por indução e, para simplificar a notação, escrevemos

$$D = \begin{cases} \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}} \text{ no caso real} \\ e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma} \text{ no caso complexo} \end{cases}$$

e

$$S_2 = \begin{cases} \sqrt{2} \text{ no caso real} \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ no caso complexo.} \end{cases}$$

Também, para futuras referências, designamos as seguintes numerações,

$$S_n = D^{k-1} \cdot S_2^{\frac{n-l}{n}} \tag{3.2}$$

se $l \leq 2^{k-2}$, e

$$S_n = D^{\frac{n(k-1)+2^{k-1}-2l}{n}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}}{n}} \tag{3.3}$$

se $2^{k-2} < l < 2^{k-1}$. Agora, suponha que o resultado vale para todo $m \leq n$ e seja

$$n + 1 = 2^k - l$$

com l e k como descritos em (3.1)

- **Primeiro caso:** l é par.

Neste caso, $n + 1$ é par e, de (3),

$$S_{n+1} = D \left(S_{\frac{n+1}{2}} \right) \tag{3.4}$$

com

$$\frac{n+1}{2} = 2^{k-1} - \frac{l}{2}.$$

Pela hipótese de indução, o resultado é valido para $S_{\frac{n+1}{2}}$. Observemos, então, que temos duas possibilidades sobre o comportamento de $\frac{l}{2}$.

Subcaso 1a -

$$\frac{l}{2} \leq 2^{(k-1)-2} = 2^{k-3}.$$

Subcaso 1b -

$$2^{(k-1)-2} < \frac{l}{2} < 2^{(k-1)-1},$$

i.e.,

$$2^{k-3} < \frac{l}{2} < 2^{k-2}.$$

No primeiro caso, note que $l \leq 2^{k-2}$ e, assim, substituindo em (3.4), temos

$$S_{n+1} = D\left(D^{k-2} \cdot S_2^{\frac{n+1-l}{n+1}}\right) = D^{k-1} \cdot S_2^{\frac{(n+1)-l}{n+1}},$$

isto é, o resultado desejado.

Agora, no segundo caso, observe que $2^{k-2} < l < 2^{k-1}$; logo, de (3.4), temos

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= D\left(S_{\frac{n+1}{2}}\right) \\ &= D\left(D^{\frac{(n+1)(k-2)+2^{k-1}-2l}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}}{n+1}}\right) \\ &= D^{\frac{(n+1)(k-1)+2^{k-1}-2l}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}}{n+1}}, \end{aligned}$$

conseguindo novamente o resultado desejado.

- **Segundo caso:** l é par.

Neste caso, $n+1$ é ímpar e, portanto, S_{n+1} é da forma

$$S_{n+1} = D\left(S_{\frac{(n+1)-1}{2}}\right)^{\frac{\frac{(n+1)-1}{2}}{n+1}} \left(S_{\frac{(n+1)+1}{2}}\right)^{\frac{\frac{(n+1)+1}{2}}{n+1}} = D\left(S_{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{(n+1)}} \left(S_{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{\frac{n+2}{2}}{(n+1)}}. \tag{3.5}$$

Como $n+1 = 2^k - l$, então

$$n = 2^k - (l+1)$$

e

$$n+2 = 2^k - (l-1).$$

Como $0 \leq l < 2^{k-1}$ e l é ímpar, então,

$$0 \leq l+1 < 2^{k-1} \quad \text{ou} \quad l+1 = 2^{k-1},$$

o que nos leva a dois subcasos:

<u>**Subcaso 2a -**</u>

$$n = 2^{k-1} - 0 \ \text{ e } n+2 = 2^k - (l-1), \tag{3.6}$$

quando

$$l = 2^{k-1} - 1.$$

Subcaso 2b -

$$n = 2^k - (l+1) \quad \text{e} \quad n+2 = 2^k - (l-1)\,, \tag{3.7}$$

se

$$l < 2^{k-1} - 1.$$

Se vale (3.6), ou seja, se $l = 2^{k-1} - 1$, então,

$$\frac{n}{2} = 2^{k-2}$$

e, assim, $S_{\frac{n}{2}}$ é da forma (3.2); isto é

$$S_{\frac{n}{2}} = D^{(k-2)-1} \cdot S_2.$$

Por outro lado, como

$$\frac{n+2}{2} = 2^{k-1} - \frac{(l-1)}{2} \quad \text{e } 2^{k-3} < \frac{l-1}{2} < 2^{k-2},$$

então $S_{\frac{n+2}{2}}$ é da forma (3.3), resultando

$$S_{\frac{n+2}{2}} = D^{\frac{\frac{n+2}{2}(k-2)+2^{(k-1)-1}-2\left(\frac{l-1}{2}\right)}{\frac{n+2}{2}}} \cdot S_2^{\frac{2^{(k-1)-1}}{\frac{n+2}{2}}}.$$

Logo, de (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= D\left(S_{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{(n+1)}} \left(S_{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{\frac{n+2}{2}}{(n+1)}} \\
&= D\left(D^{k-3} \cdot S_2\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{(n+1)}} \left(D^{\frac{\frac{n+2}{2}(k-2)\ +\frac{2^{k-1}}{2}\ -2\left(\frac{l-1}{2}\right)}{\frac{n+2}{2}}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-2}}{\frac{n+2}{2}}}\right)^{\frac{\frac{n+2}{2}}{(n+1)}} \\
&= D^{\frac{(n+1)(k-1)+2^{k-1}-2l}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}}{n+1}},
\end{aligned}$$

isto é, S_{n+1} da forma (3.3).

No caso em que (3.7) vale, temos

$$l+1 < 2^{k-1},$$

$$\frac{n}{2} = 2^{k-1} - \frac{(l+1)}{2}$$

e

$$\frac{n+2}{2} = 2^{k-1} - \frac{(l-1)}{2}.$$

Assim, temos três possíveis sub-subcasos:

Sub-subcaso 2ba -

$$2^{k-2} < l+1 < 2^{k-1} \ \text{ e } 2^{k-2} < l-1 < 2^{k-1}. \tag{3.8}$$

Sub-subcaso 2bb -

$$2^{k-2} < l+1 < 2^{k-1} \ \text{ e } l-1 = 2^{k-2}. \tag{3.9}$$

Sub-subcaso 2bc -

$$l-1 < l+1 \leq 2^{k-2}. \tag{3.10}$$

Se acontecer (3.9), note que

$$2^{k-2} < l-1 < l < l+1 < 2^{k-1},$$

isto é, a constante S_{n+1} é do tipo (3.3). Como

$$2^{k-3} < \frac{l+1}{2} < 2^{k-2} \ \text{ e } \ 2^{k-3} < \frac{l-1}{2} < 2^{k-2},$$

as constantes $S_{\frac{n}{2}}$ e $S_{\frac{n+2}{2}}$ são escritas da forma (3.3); portanto, de (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= D\left(S_{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{(n+1)}} \left(S_{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{\frac{n+2}{2}}{(n+1)}} \\
&= D\left(D^{\frac{\frac{n}{2}(k-2)+2^{k-2}-2\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\frac{n}{2}}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-2}}{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n+1}} \left(D^{\frac{\frac{n+2}{2}(k-2)+2^{k-2}-2\left(\frac{l-1}{2}\right)}{\frac{n+2}{2}}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-2}}{\frac{n+2}{2}}}\right)^{\frac{\frac{n+2}{2}}{n+1}} \\
&= D^{\frac{(n+1)(k+1)+2^{k-1}-2l}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}}{n+1}}.
\end{aligned}$$

Se tivermos (3.9), veja que

$$2^{k-2} = l-1 < l < l+1 < 2^{k-1},$$

logo, queremos que S_{n+1} seja do tipo (3.3). Partindo das desigualdades

$$2^{k-3} < \frac{l+1}{2} < 2^{k-2} \ \text{ e } \frac{l-1}{2} = 2^{k-3}$$

vemos que $S_{\frac{n}{2}}$ é representada por (3.3) e $S_{\frac{n+2}{2}}$ por (3.2). Assim, usando novamente (3.5), temos

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= D\left(D^{\frac{\frac{n}{2}(k-2)+2^{k-2}-2\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\frac{n}{2}}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-2}}{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n+1}} \left(D^{k-2} \cdot S_2^{\frac{\frac{n+2}{2}-2^{k-3}}{\frac{n+2}{2}}}\right)^{\frac{\frac{n+2}{2}}{n+1}} \\
&= D \cdot D^{\frac{\frac{n}{2}(k-2)+2^{k-2}-(l+1)}{n+1}} \cdot D^{\frac{(k-2)\left(\frac{n+2}{2}\right)}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-2}}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{\frac{n+2}{2}-2^{k-3}}{n+1}} \\
&= D^{\frac{(n+1)+(k-2)(n+1)+2^{k-2}-2^{k-2}-2}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-3}+\frac{n+2}{2}}{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Agora, dado que

$$2^{k-1} - 2l = 2^{k-1} - 2\left(2^{k-2}+1\right) = -2$$

e

$$\frac{n+2}{2} = 2^{k-1} - \left(\frac{l-1}{2}\right) = 2^{k-1} - 2^{k-3},$$

então,

$$S_{n+1} = D^{\frac{(n+1)(k-1)+2^{k-1}-2l}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}}{n+1}}.$$

Finalmente, partimos do fato (3.10), isto é,

$$l-1 < l < l+1 \leq 2^{k-2},$$

o que implica, para concluir nossa demonstração, que S_{n+1} seja da forma (3.2). Como

$$\frac{l-1}{2} < \frac{l+1}{2} \leq 2^{k-3},$$

então, $S_{\frac{n}{2}}$ e $S_{\frac{n+2}{2}}$ são escritas como em (3.2). Assim, substituindo novamente em (3.5), temos

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= D\left(D^{k-2} \cdot S_2^{\frac{\frac{n}{2}-\frac{l+1}{2}}{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n+1}} \left(D^{k-2} \cdot S_2^{\frac{\frac{n+2}{2}-\frac{l-1}{2}}{\frac{n+2}{2}}}\right)^{\frac{\frac{n+2}{2}}{n+1}} \\
&= D \cdot D^{\frac{(k-2)\frac{n}{2}}{n+1}} \cdot D^{\frac{(k-2)\frac{n+2}{2}}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{\frac{n}{2}-\frac{l+1}{2}}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{\frac{n+2}{2}-\frac{l-1}{2}}{n+1}} \\
&= D^{\frac{(n+1)+(k-2)\left(\frac{n}{2}+\frac{n+2}{2}\right)}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}-\left(\frac{l+1}{2}\right)-\left(\frac{l+1}{2}\right)}{n+1}} \cdot S_2^{\frac{2^{k-1}-\left(\frac{l-1}{2}\right)-\left(\frac{l-1}{2}\right)}{n+1}} \\
&= D^{k-1} \cdot S_2^{\frac{(n+1)-l}{n+1}},
\end{aligned}
$$

com o que completamos a demonstração. ■

3.1 Melhorando o resultado para as constantes reais

Conforme visto no *Capítulo* 2 para o caso dos reais e $n \in \{2, ..., 24\}$,

$$\left(A_{\frac{2n}{n+2}}\right)^{-\frac{n}{2}} = \sqrt{2}.$$

Assim, podemos reescrever as constantes (2.2) como

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 2^{\frac{nk-l}{2n}} & \text{se } n \in \{2, ..., 24\}, \\ \left(A_{\frac{2n}{n+2}}^{n/2}\right)^{-1} C_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par, e} \\ \left(A_{\frac{2n-2}{n+1}}^{\frac{-1-n}{2}} C_{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(A_{\frac{2n+2}{n+3}}^{\frac{1-n}{2}} C_{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

ou seja, estamos dando uma fórmula fechada exata até $n = 24$, mas o importante a ressaltar aqui é que, usando as mesmas ideias em que as constantes $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ foram construídas, definimos

$$P_n = \begin{cases} 2^{\frac{nk-l}{2n}} & \text{se } n \leq 24 \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) P_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par e} \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right) \left(P_{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(P_{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim, com a seguinte fórmula fechada das constantes $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, conseguimos melhorar o *Teorema 3.0.17* no caso das constantes reais:

Teorema 3.1.1 *Se $n \geq 25$ é escrito como em (3.1) e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então*

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)^{k-4} \cdot 2^{\frac{4n-l}{2n}}, \ \textit{se } 0 \leq l \leq 7 \cdot 2^{k-5} \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2^{k-2}(4k+5)-l(20+k)}{n}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19n}{2n}}, \ \textit{se } 7 \cdot 2^{k-5} < l < 2^{k-2} \\ \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}\right)^{k-5} \cdot 2^{\frac{2n+2^{k-1}-l}{n}}, \ \textit{se } 2^{k-2} \leq l \leq 2^{k-1} - 1 \end{cases}$$

Demonstração. Como no *Teorema 3.0.17,* escrevemos

$$D = \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}.$$

É facil comprovar que o resultado vale para $k = 5$ e $k = 6$, i.e., para $n \in \{25, 26, ..., 64\}$. Agora, suponha que o teorema vale para todo $m \leq n$ e provemos o resultado para $n+1$.

Seja

$$n + 1 = 2^k - l$$

com $k\,,l$ como em (3.1) e, para futuras referências, definimos as seguintes numerações

$$P_n = D^{k-4} \cdot 2^{\frac{4n-l}{2n}} \tag{3.11}$$

se $0 \leq l \leq 7 \cdot 2^{k-5}$,

$$P_n = D^{\frac{2^{k-2}(4k+5)-l(20+k)}{n}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19n}{2n}} \tag{3.12}$$

se $7 \cdot 2^{k-5} < l < 2^{k-2}$ e

$$P_n = D^{k-5} \cdot 2^{\frac{2n+2^{k-1}-l}{n}} \tag{3.13}$$

se $2^{k-2} \leq l \leq 2^{k-1} - 1$.

- **Primeiro caso**. l é par.

Se l é par, então $n+1$ é par e, assim,

$$P_{n+1} = D\left(P_{\frac{n+1}{2}}\right) \tag{3.14}$$

e

$$\frac{n+1}{2} = 2^{k-1} - \frac{l}{2}.$$

Como o resultado vale para $P_{\frac{n+1}{2}}$, temos três eventualidades:

<u>**Subcaso 1a -**</u> o parâmetro l é tal que

$$0 \leq \frac{l}{2} \leq 7 \cdot 2^{k-6}.$$

Assim, P_{n+1} é da forma (3.11) e, de (3.14), temos

$$P_{n+1} = D\left(D^{(k-1)-4} \cdot 2^{\frac{4\left(\frac{n+1}{2}\right)-\frac{l}{2}}{2\left(\frac{n+1}{2}\right)}}\right) = D^{k-4} \cdot 2^{\frac{4(n+1)-l}{2(n+1)}}.$$

<u>**Subcaso 1b -**</u> O parâmetro l é tal que

$$7 \cdot 2^{k-6} < \frac{l}{2} < 2^{k-3}.$$

Logo, P_{n+1} é da forma (3.12) e, de (3.14), temos

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= D\left(D^{\frac{2^{(k-1)-2}(4(k-1)+5)-\frac{l}{2}(20+(k-1))}{\frac{n+1}{2}}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{(k-1)-2}\right)-19\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\left(\frac{n+1}{2}\right)}}\right) \\ &= D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-l(19+k)+n+1}{n+1}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+1)}{2(n+1)}} \\ &= D^{\frac{2^{k-2}(4k+5)-l(20+k)}{n+1}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+1)}{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

<u>Subcaso 1c -</u> O parâmetro l é tal que

$$2^{k-3} \leq \frac{l}{2} < 2^{k-2} - 1.$$

Neste caso, P_{n+1} é da forma (3.13) e, analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= D\left(D^{(k-1)-5} \cdot 2^{\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)+2^{(k-1)-1}-\frac{l}{2}}{\frac{n+1}{2}}}\right) \\
&= D^{k-5} \cdot 2^{\frac{2(n+1)+2^{k-1}-l}{n+1}}.
\end{aligned}$$

- **Segundo caso**. l é ímpar.

Neste caso, $n+1$ é ímpar, portanto,

$$P_{n+1} = D\left(P_{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \left(P_{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}}. \tag{3.15}$$

Como $n = 2^k - (l+1)$ e, como $0 \leq l < 2^{k-1}$ e l é ímpar, então, $0 \leq l+1 \leq 2^{k-1}$. Por conseguinte, temos duas opções para l:

<u>Subcaso 2a -</u> A variável l satisfaz

$$l + 1 = 2^{k-1}. \tag{3.16}$$

<u>Subcaso 2b -</u> A variável l satisfaz

$$l + 1 < 2^{k-1}. \tag{3.17}$$

Se (3.16) vale então,

$$n = 2^{k-1} \text{ e } n+2 = 2^k - (l-1)$$

com P_n como em (3.11) e P_{n+1}, P_{n+2} escritas como (3.13); daí, de (3.15) temos

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= D\left(D^{k-6} \cdot 2^2\right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \left(D^{k-6} \cdot 2^{\frac{2(n+2)+2^{k-1}-(l-1)}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \\
&= D^{k-5} \cdot 2^{\frac{2n+2(n+2)+2^{k-1}-(l-1)}{2(n+1)}} \\
&= D^{k-5} \cdot 2^{\frac{2(n+1)+1}{n+1}},
\end{aligned}$$

e a prova está feita. Se temos (3.17), então

$$\frac{n}{2} = 2^{k-1} - \left(\frac{l+1}{2}\right), \text{ e } \frac{n+2}{2} = 2^{k-1} - \left(\frac{l-1}{2}\right)$$

e obtemos três subcasos:

Sub-subcaso 2ba -

$$0 < l+1 \leq 7 \cdot 2^{k-5}.$$

Neste caso

$$0 \leq l-1 < l < l+1 \leq 7 \cdot 2^{k-5},$$

ou seja, $P_{\frac{n}{2}}$ e $P_{\frac{n+2}{2}}$ são da forma (3.11); assim,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= D\left(D^{k-5} \cdot 2^{\frac{4n-(l+1)}{2n}}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \left(D^{k-5} \cdot 2^{\frac{4(n+2)-(l-1)}{2(n+2)}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \\ &= D\left(D^{\frac{(k-5)n}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{4n-(l+1)}{4(n+1)}}\right)\left(D^{\frac{(k-5)(n+2)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{4(n+2)-(l-1)}{4(n+1)}}\right) \\ &= D^{k-4} \cdot 2^{\frac{4n-(l+1)+4(n+2)-(l-1)}{4(n+1)}} \\ &= D^{k-4} \cdot 2^{\frac{4(n+1)-2l}{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

Sub-subcaso 2bb -

$$7 \cdot 2^{k-5} < l+1 < 2^{k-2}. \tag{3.18}$$

Neste caso, temos mais duas possibilidades:

Sub-sub-subcaso 2bba-

$$7 \cdot 2^{k-5} < l-1 < l < l+1 < 2^{k-2}. \tag{3.19}$$

Sub-sub-subcaso 2bbb-

$$l-1 = 7 \cdot 2^{k-5}. \tag{3.20}$$

Se tivermos (3.19), então,

$$\begin{aligned} &P_{n+1} = \\ &= D\left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l+1)(19+k)}{n}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19n}{2n}}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l+1)(19+k)}{n+2}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+2)}{2(n+2)}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \\ &= D\left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l+1)(19+k)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19n}{4(n+1)}}\right)\left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l-1)(19+k)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+2)}{4(n+1)}}\right) \\ &= D^{\frac{2^{k-1}(4k+1)-2l(19+k)+2^{k+1}-2l}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+1)}{2(n+1)}} \\ &= D^{\frac{2^{k-2}(4k+5)-l(20+k)}{(n+1)}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+1)}{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

Se vale (3.20), então

$$7 \cdot 2^{k-5} < l < l+1 < 2^{k-2}$$

e, substituindo em (3.15),

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= D\left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l+1)(19+k)}{n}} \cdot 2^{\frac{71.\left(2^{k-2}\right)-19(n)}{2n}}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \left(D^{k-5} \cdot 2^{\frac{4(n+2)-(l-1)}{2(n+2)}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \\
&= D\left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l+1)(19+k)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{71.\left(2^{k-2}\right)-19n}{4(n+1)}}\right)\left(D^{\frac{(k-5)(n+2)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{4(n+2)-(l-1)}{4(n+1)}}\right) \\
&= D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l+1)(19+k)+(k-5)(n+2)+2(n+1)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19n+4(n+2)-(l-1)}{4(n+1)}}.
\end{aligned}
$$

Rescrevendo esta última expresão em termos de k, temos

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= D^{\frac{2^{k-2}(4k+5)-\left(7\left(2^{k-5}\right)+1\right)(20+k)}{2^{k}-(7(2^{k-5})+1)}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19\left(2^{k}-\left(7\left(2^{k-5}\right)+1\right)\right)}{2(2^{k}-(7(2^{k-5})+1))}} \\
&= D^{\frac{2^{k-2}(4k+5)-l(20+k)}{n+1}} \cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+1)}{2(n+1)}},
\end{aligned}
$$

como desejado.

Sub-subcaso 2bc-

$$2^{k-2} \leq l+1 < 2^{k-1}-1. \tag{3.21}$$

Mais uma vez, temos duas possibilidades

Sub-sub-subcaso 2bca-

$$2^{k-2} \leq l-1 < l < l+1 < 2^{k-1}-1. \tag{3.22}$$

Sub-sub-subcaso 2bcb-

$$l+1 = 2^{k-2}. \tag{3.23}$$

Se (3.22) é válido, então,

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= D\left(D^{k-6} \cdot 2^{\frac{2n+2^{k-1}-(l+1)}{n}}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \left(D^{k-6} \cdot 2^{\frac{2(n+2)+2^{k-1}-(l-1)}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \\
&= D\left(D^{\frac{n(k-6)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{2n+2^{k-1}-(l+1)}{2(n+1)}}\right)\left(D^{\frac{(n+2)(k-6)}{2(n+1)}} \cdot 2^{\frac{2(n+2)+2^{k-1}-(l-1)}{2(n+1)}}\right) \\
&= D^{k-5} \cdot 2^{\frac{2n+2^{k-1}-(l+1)+2(n+2)+2^{k-1}-(l-1)}{2(n+1)}} \\
&= D^{k-5} \cdot 2^{\frac{2(n+1)+2^{k-1}-l}{(n+1)}}.
\end{aligned}
$$

Se acontecer (3.23), temos

$$7 \cdot 2^{k-5} < l-1 < l < 2^{k-2}.$$

Portanto, de (3.12), (3.13) e (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= D\left(D^{k-6}\cdot 2^{\frac{2n+2^{k-1}-2^{k-2}}{n}}\right)^{\frac{n}{2(n+1)}}\left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l-1)(19+k)}{n+2}}\cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+2)}{2(n+2)}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}}\\
&= D\left(D^{\frac{n(k-6)}{2(n+1)}}\cdot 2^{\frac{2n+2^{k-1}-2^{k-2}}{2(n+1)}}\right)\left(D^{\frac{2^{k-2}(4k+1)-(l-1)(19+k)}{2(n+1)}}\cdot 2^{\frac{71\left(2^{k-2}\right)-19(n+2)}{4(n+1)}}\right)\\
&= D^{\frac{n(k-6)+2^{k-2}(4k+1)-(l-1)(19+k)+2(n+1)}{2(n+1)}}\cdot 2^{\frac{4n+2^{k}-2^{k-1}+71\left(2^{k-2}\right)-19(n+2)}{4(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Observando (3.23), segue que n e l podem ser escritos em termos do parâmetro k e um cálculo delicado nos dá

$$P_{n+1} = D^{\frac{4k+3\left(2^{k}k\right)-15\left(2^{k}\right)+80}{3\left(2^{k}\right)+4}}\cdot 2^{\frac{7\left(2^{k}\right)-38}{3\left(2^{k}\right)+4}},$$

i.e., a expressão de P_{n+1} na forma (3.12) usando somente a variável k, finalizando assim a demonstração. ■

3.2 Comparando as constantes.

Vamos retomar as constantes $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ as quais, como mencionamos, são duas fórmulas fechadas de crescimento subpolinomial. Continuando com a notação

$$D = \begin{cases} \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}} & \text{no caso real}\\ e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma} & \text{no caso complexo,}\end{cases}$$

rescrevemos as constantes $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ seguindo as ideias deste capítulo, isto é

$$R_n := D^{k-1}\cdot\sqrt{2}\left(1+\left(2^{k-1}-(l+1)\right)\left(\frac{D-1}{2^{k-1}}\right)\right), \tag{3.24}$$

com k e l como em (3.1).

Como veremos nas seguintes tabelas, as fórmulas dos *Teorema 3.0.17* e *Teorema 3.1.1,* tanto para o caso real como para o complexo, conforme seja o caso, são melhores - menores - que as dadas por R_n e J_n. Mais precisamente, para o caso dos reais, tomamos

$$J_n := 1.65\,(n-1)^{0.526322} + 0.13$$

e substituimos em (3.24) o respectivo D. Desta forma, obtemos os seguintes valores:

n	C_n (2.2)	P_n (*Teorema* 3.1.1)	S_n (*Teorema* 3.0.17)	R_n	J_n
3	1.78	1.78	1.81	2.04	2.51
5	2.30	2.30	2.36	2.93	3.55
10	3.25	3.25	3.41	4.46	5.37
50	7.33	7.53	7.96	10.81	12.92
100	10.51	10.84	11.46	15.66	18.66
200	15.10	15.62	16.51	22.62	26.88
500	23.90	24.58	25.97	37.12	43.54
1000	34.41	35.40	37.40	53.50	62.68
10000	118.11	120.90	129.15	178.33	210.39
20000	170.11	174.13	186.03	256.40	302.96

Outro detalhe a se observar nesta tabela, é a melhoria das fórmulas fechadas dadas pelo *Teorema* 3.0.17 e pelo *Teorema* 3.1.1.

Agora, para o caso dos complexos, tomamos

$$J_n := 1.41\,(n-1)^{0.304975} - 0.04,$$

e, mais uma vez, substituindo em (3.24) o respectivo D, obtemos a seguinte tabela,

n	C_n (2.5)	S_n (*Teorema* 3.0.17)	R_n	J_n
3	1.24	1.34	1.39	1.70
5	1.40	1.54	1.72	2.11
10	1.68	1.91	2.19	2.71
50	2.68	3.14	3.65	4.58
100	3.30	3.88	4.53	5.68
200	4.07	4.79	5.60	7.04
500	5.35	6.10	7.49	9.34
1000	6.60	7.54	9.26	11.55
10000	13.39	15.65	18.55	23.35
20000	16.55	19.33	22.89	28.86

Capítulo 4

Operadores multilineares absolutamente $\gamma_{(s;s_1,\dots,s_m)}$-somantes

Na década dos 70, M. Ramanujan, em [54], introduziu uma versão abstrata dos operadores absolutamente somantes. Ele define basicamente que um operador linear contínuo $T : E \to F$, onde E e F são espaços de Banach, é absolutamente λ-somante se, para cada $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \lambda(E)$, tem-se que $T(x) = (Tx_i) \in \lambda[F]$, onde $\lambda(E)$ e $\lambda[F]$ são espaços de sequências especificados em seu trabalho, tendo-se como caso particular, quando $l_p = \lambda$, os operadores absolutamente p-somantes.

A seguir, pretendemos dar uma versão geral abstrata dos operadores multilineares absolutamente $(p; q_1, ..., q_m)$-somantes na qual são preservadas várias das propriedades dos operadores multilineares absolutamente somantes; além disso, mostraremos na seção 4.1 que esta versão contém outras classes particulares de operadores que vêm sendo estudadas recentemente.

Começaremos definindo os espaços de sequências com os quais trabalharemos.

Definição 4.0.1 *Seja E um espaço de Banach. Um espaço de sequências em E é um espaço vetorial $\gamma(E) \subset E^{\mathbb{N}}$ munido com uma norma, $\|\cdot\|_{\gamma(E)}$, completa. Ao longo desta seção, nossos espaços de sequências $\gamma(E)$ usufruirão das seguintes propriedades*

(P1) $\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\gamma(E)} = \sup_n \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{\gamma(E)}$.

(P2) $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\gamma(E)} = \|x_k\|_E$, *para todo* $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (0, ..., 0, x_k, 0, ...)$.

A seguinte definição é uma abordagem abstrata do conceito de somabilidade num ponto dado.

Definição 4.0.2 *Sejam* $m \in \mathbb{N}$*, e* $E_1, ..., E_m$*,* F *espaços de Banach.* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ *é* $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$*-somante em* $(a_1, ..., a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ *sempre que*

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - T(a_1, ..., a_m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F),$$

com $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r)$*,* $r = 1, ..., m$*.*

O espaço dos operadores $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$-somantes em a será denotado por $\Pi^a_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$. É fácil ver que $\Pi^a_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. Quando a for a origem, escrevemos $\Pi_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$ e se T for $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$-somante em todo ponto $(a_1, ..., a_m)$, escreveremos $T \in \Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$. Ademais, quando $s_1 = \cdots = s_m$, escreveremos $\Pi_{\gamma_{(s;s_1)}}(E_1, ..., E_m; F)$ ou $\Pi^a_{\gamma_{(s;s_1)}}(E_1, ..., E_m; F)$ ou $\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1)}}(E_1, ..., E_m; F)$ respectivamente.

O seguinte resultado é uma versão abstrata da *Proposição* 1.2.2. Este nos permite caraterizar os operadores $T \in \Pi_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$

Proposição 4.0.3 $T \in \Pi_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$ *se, e somente se, existe uma constante* $C > 0$*, tal que*

$$\left\|T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C \prod_{r=1}^{m} \left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} \tag{4.1}$$

para todo $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r)$*,* $r = 1, ..., m$*. Mais ainda, a menor constante* C *que satisfaz (4.1), denotada por* $\pi(\cdot)$*, define uma norma em* $\Pi_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$*.*

Demonstração. Vamos considerar $\hat{T} : \gamma_{s_1}(E_1) \times \cdots \times \gamma_{s_m}(E_m) \to \gamma_s(F)$ dado por

$$\hat{T}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Seja $\left(\left(\left(x_{n,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_{n,j}^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\gamma_{s_1}(E_1) \times \cdots \times \gamma_{s_m}(E_m)$ convergindo para

$$x = \left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)$$

e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{T}\left(\left(\left(\left(x_{n,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_{n,j}^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)_{n=1}^{\infty}\right) = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F).$$

Provemos que $(z_j)_{j=1}^{\infty} = \hat{T}(x)$. Começamos observando que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\hat{T}\left(\left(x_{n,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_{n,j}^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(T\left(x_{n,j}^{(1)}, ..., x_{n,j}^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} = (z_j)_{j=1}^{\infty} \quad (4.2)$$

e, daí, dado que $\left(T\left(x_{n,j}^{(1)}, ..., x_{n,j}^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\left(T\left(x_{n,j}^{1}, ..., x_{n,j}^{m}\right)\right)_{j=1}^{\infty} - (z_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$; logo, usando *(P1)*,

$$\sup_k \left\|\left(T\left(x_{n,j}^{1}, ..., x_{n,j}^{m}\right) - z_j\right)_{j=1}^{k}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e, como

$$\begin{aligned}\sup_k \left\|\left(T\left(x_{n,j}^{1}, ..., x_{n,j}^{m}\right) - z_j\right)_{j=1}^{k}\right\|_{\gamma_s(F)} &\geq \left\|T\left(x_{n,j}^{1}, ..., x_{n,j}^{m}\right) - z_j\right\|_{\gamma_s(F)} \\ &\overset{(P2)}{=} \left\|T\left(x_{n,j}^{1}, ..., x_{n,j}^{m}\right) - z_j\right\|_{F}\end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, então,

$$T\left(x_{n,j}^{1}, ..., x_{n,j}^{m}\right) \underset{n\to\infty}{\to} z_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Note que

$$\|x_n - x\| = \max_{1\leq s\leq m}\left\|\left(x_{n,j}^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x_{j}^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} \geq \left\|\left(x_{n,j}^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x_{j}^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)}$$

para todo $s = 1, ..., m$. Daí,

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_{n,j}^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} = \left(x_{j}^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}, \; r = 1, ..., m.$$

Assim, analogamente ao que foi feito em (4.3), temos

$$x_{n,j}^{(r)} \to x_{j}^{(r)}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, e $r = 1, ..., m$. Logo, pela continuidade de T, segue que

$$\lim_{n\to\infty} T\left(x_{n,j}^{(1)}, ..., x_{n,j}^{(m)}\right) = T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right). \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4), temos

$$T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right) = z_j \tag{4.5}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$; logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \hat{T}\left(\left(x_{n,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_{n,j}^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(T\left(x_{n,j}^{(1)}, ..., x_{n,j}^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&\overset{(4.2)}{=} (z_j)_{j=1}^{\infty} \\
&\overset{(4.5)}{=} \left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \hat{T}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right).
\end{aligned}$$

Desse modo, pelo Teorema do Gráfico Fechado, segue que $\hat{T}$ é contínua.

Portanto, para $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r)$, $r = 1, ..., m$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \left\|\hat{T}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \left\|\hat{T}\right\| \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} \cdots \left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_m}(E_m)}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

A recíproca é clara.

Além disso, é claro que

$$\pi(T) \leq \left\|\hat{T}\right\|.$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{T}\right\| &= \sup_{\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} \leq 1} \left\|\hat{T}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \sup_{\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} \leq 1} \left\|\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \sup_{\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} \leq 1} \pi(T) \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} \cdots \left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_m}(E_m)} \\
&\leq \pi(T),
\end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\pi(T) = \left\| \hat{T} \right\|.$$

■

O seguinte lema segue as linhas de [12, *Lema 9.2*]. Vamos escrevê-lo em nosso contexto.

Lema 4.0.4 *Se* $T \in \Pi_{\gamma(s;s_1,\ldots,s_m)}(E_1,...,E_m;F)$ *e* $(a_1,...,a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$*, então, existe uma constante* $C_{a_1,\ldots,a_m} \geq 0$ *tal que*

$$\left\| \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - T(a_1,...,a_m) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} \leq C_{a_1,\ldots,a_m}$$

para qualquer $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r)$ *com* $\left\| \left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} \leq 1,\ r = 1,...,m.$

Antes de demonstrar este lema, para $i < m$ definimos o conjunto $\mathcal{C}[i,...,m]$ de amostras ordenadas σ, seguindo a ordem natural, de comprimento menor o igual a $m - i$. Por exemplo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[2,3,4] &\ni (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (2),\ \ (3),\ (4) \\ &\not\ni (3,2),\ (2,3,4),\ (4,3) \end{aligned}$$

Tomando σ , $\lambda \in \mathcal{C}[1,...,m]$ tais que

$$\sigma = (j_1,...,j_r)\,;\ j_1 \leq ... \leq j_r$$
$$\lambda = (k_1,...,k_t)\,;\ k_1 \leq ... \leq k_t$$

e

$$\sigma \cup \lambda = \{1,...,m\}\,,\ \sigma \cap \lambda = \varnothing,$$

definimos os operadores

$$T_{a_\sigma} : E_\lambda \to F$$

onde

- $E_\lambda = E_{k_1} \times ... \times E_{k_t}$
- $a_\sigma = a_{j_1},...,a_{j_r} \in E_\sigma$, e $x_\lambda = x_{k_1},...,x_{k_t} \in E_\lambda$

- $s_\lambda = s_{k_1}, ..., s_{k_t}$

- $T_{a_\sigma}(x_\lambda) = T(\tilde{a}_\sigma + \tilde{x}_\lambda)$, onde $\tilde{a}_\sigma = (a_1, ..., a_m) \in E_1 \times ... \times E_m$ é tal que $a_k = 0$ se $k \notin \sigma$, caso contrário a_k é o a_{j_i} respectivo. (Idem para $\tilde{x}_\lambda$)

Por exemplo, se $\sigma = \{1, ..., \hat{\imath}, ..., m\}$ e $\lambda = \{i\}$, então

$$\begin{aligned} T_{a_1,...,\hat{a}_i,...,a_m} \quad &: E_i \to F \\ &(x_i) \to T_{a_1,...,\hat{a}_i,...,a_m}(x_i) \\ &\qquad = T((a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_m) + (0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)) \\ &\qquad = T(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_m) \end{aligned}$$

Por meio destes operadores, mostraremos o seguinte resultado que nos ajudará na demonstração do *Lema* 4.0.4.

Lema 4.0.5 *Se $T \in \Pi^a_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$ e $a = (a_1, ..., a_m)$, então $T_{a_{j_1},...,a_{j_r}} \in \Pi_{\gamma_{\left(s;s_{k_1},...,s_{k_t}\right)}}(E_{k_1}, ..., E_{k_t}; F)$ sempre que*

$$\{1, ..., m\} = \{j_1, ..., j_r\} \cup \{k_1, ..., k_t\}.$$

Demonstração. Procederemos por indução. Vamos supor que o comprimento de λ é 1, então, o comprimento de σ é $m-1$. Tomamos, sem perda de generalidade, $\sigma = \{a_1, ..., a_{m-1}\}$; assim, temos o operador linear $T_{a_1,...,a_{m-1}}$ e veja que

$$\left(T_{a_1,...,a_{m-1}}\left(x_j^m\right)\right)_{j=1}^\infty = \left(T\left(a_1, ..., a_{m-1}, a_m + x_j^m\right) - T(a_1, ..., a_{m-1}, a_m)\right)_{j=1}^\infty.$$

Como $T \in \Pi^a_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$ então, $T_{a_1,...,a_{m-1}} \in \Pi_{\gamma_{(s;s_m)}}(E_m; F)$.

Agora, para λ de comprimento 2, tomamos, mais uma vez sem perda de generalidade $T_{a_1,...,a_{m-2}}$ e observe que

$$\begin{aligned} &\left(T_{a_1,...,a_{m-2}}\left(x_j^{(m-1)}, x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^\infty \qquad (4.7) \\ &= \left(T\left(a_1+0, a_2+0, ..., a_{m-2}+0, a_{m-1}+x_j^{(m-1)}, a_m+x_j^{(m)}\right) - T(a_1, ..., a_m)\right)_{j=1}^\infty \\ &- \left(T\left(a_1, a_2, ..., a_{m-1}, x_j^{(m)}\right) + T\left(a_1, a_2, ..., a_{m-2}, x_j^{(m-1)}, a_m\right)\right)_{j=1}^\infty \\ &= \left(T\left(a_1+0, a_2+0, ..., a_{m-2}+0, a_{m-1}+x_j^{(m-1)}, a_m+x_j^{(m)}\right) - T(a_1, ..., a_m)\right)_{j=1}^\infty \\ &- \left(T_{a_1,...,a_{m-1}}\left(x_j^{(m)}\right) + T_{a_1,...,a_{m-2},a_m}\left(x_j^{(m-1)}\right)\right)_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Como $T \in \Pi^a_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1,...,E_m;F)$, $T_{a_1,...,a_{m-1}} \in \Pi_{\gamma_{(s;s_m)}}(E_m;F)$ e, $T_{a_1,...,a_{m-2},a_m} \in \Pi_{\gamma_{(s;s_{m-1})}}(E_{m-1};F)$, temos que $T_{a_1,...,a_{m-2}} \in \Pi_{\gamma_{(s;s_{m-1},s_m)}}(E_{m-1},E_m;F)$.

Assim, trabalhando por indução, supomos certo para λ de comprimento $m-2$ e provemos para λ de comprimento $m-1$. Suponhamos $a_{j_1} = a_1$ e observemos que

$$\left(T_{a_{j_1}}\left(x_j^{(2)},...,x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(T\left(a_1, a_2 + x_j^{(2)},...,a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1,...,a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} - \sum_{\sigma\in\mathcal{C}[2,...,m]} T_{a_1,a_\sigma}$$

Como $T \in \Pi^a_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1,...,E_m;F)$ e $T_{a_1,a_\sigma} \in \Pi_{\gamma_{(s;s_\lambda)}}(E_\lambda;F)$ para todo $\sigma \in \mathcal{C}[2,...,m]$, então temos o resultado desejado. ■

Com este resultado, veja que se $T \in \Pi^a_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1,...,E_m;F)$, então $T \in \Pi_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1,...,E_m;F)$. De fato, veja que

$$\left(T\left(x_j^1,...,x_j^m\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(T\left(a_1 + x_j^1,...,a_m + x_j^m\right) - T\left(a_1,...,a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} - \sum_{\sigma\in\mathcal{C}[a_1,...,a_m]} T_{a_\sigma},$$

e, claramente, esta última expresão está em $\gamma_s(F)$ e, portanto, $T \in \Pi_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1,...,E_m;F)$.

Agora podemos demonstrar o *Lema* 4.0.4:

Demonstração. Seja $T \in \Pi_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1,...,E_m;F)$ e $(a_1,...,a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Pelo feito anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(a_1 + x_j^1,...,a_m + x_j^m\right) - T\left(a_1,...,a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \left\|\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{C}[a_1,...,a_m]} T_{a_\sigma}\left(x_\lambda\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} + \left\|\left(T\left(x_j^1,...,x_j^m\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{C}[a_1,...,a_m]} C_\sigma \prod_{t\in\lambda}\left\|\left(x_j^{(t)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_\lambda}(E_\lambda)} + C\prod_{r=1}^{m}\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} \\
&\leq C_{a_1,...,a_m}
\end{aligned}$$

sempre que $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_r}}(E_r)$. ■

Como na *Proposição* 4.0.3, vamos dar uma caracterização para os operadores $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$-somantes em todo ponto. O argumento usado na prova do seguinte teorema é uma adaptação do argumento usado por M.C. Matos em [32].

Teorema 4.0.6 *Para $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $T \in \Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m) \right)_{j=1}^n \right\|_{\gamma_s(F)}$$
$$\leq C \left(\|b_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^n \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} \right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^n \right\|_{\gamma_{s_m}(E_m)} \right).$$

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m) \right)_{j=}^\infty \right\|_{\gamma_s(F)} \tag{4.8}$$
$$\leq C \left(\|b_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} \right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty \right\|_{\gamma_{s_m}(E_m)} \right).$$

Para todo $(b_1, ..., b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty \in \gamma_{s_r}(E_r)$, $r = 1, ..., m$. Ademais, a menor das constantes C que satisfaz (4.8) define uma norma em $\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$, a qual denotaremos por $\pi^{ev}(\cdot)$.

Demonstração. $(iii) \Rightarrow (ii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$ são imediatas.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Observe que é uma consequência direta de *(P1)*, pois

$$\left\| \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m) \right)_{j=}^\infty \right\|_{\gamma(F)}$$
$$= \sup_n \left\| \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m) \right)_{j=}^n \right\|_{\gamma(F)}$$
$$\leq C \sup_n \left(\left(\|b_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^n \right\|_{\gamma(E_1)} \right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^n \right\|_{\gamma(E_m)} \right) \right)$$
$$\leq C \left(\left(\|b_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty \right\|_{\gamma(E_1)} \right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty \right\|_{\gamma(E_m)} \right) \right)$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Definamos $G_r = E_r \times \gamma_{s_r}(E_r)$, $r = 1, ..., m$, com a norma da soma. Para simplificar a notação, escrevemos, para todo $k \in \{1, ..., m\}$,

$$\left(b_k, \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^n \right) := \left(b_k, x_n^{(k)}\right)$$

e consideramos o operador $m-$linear

$$\Phi(T) : G_1 \times \cdots \times G_m \longrightarrow \gamma_s(F)$$

dado por

$$\left(\left(b_1, x_\infty^{(1)}\right), ..., \left(b_m, x_\infty^{(m)}\right)\right) \longrightarrow \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(b_1, ..., b_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Tomamos

$$\begin{aligned} & F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}} \\ & = \left\{(b_1, ..., b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m; \left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(b_1, x_\infty^{(1)}\right), ..., \left(b_m, x_\infty^{(m)}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k\right\} \end{aligned}$$

onde $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_r}(E_r)}, r = 1, ..., m$. Para todo inteiro positivo n, seja

$$\begin{aligned} & F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}} \\ & = \left\{(b_1, ..., b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m; \left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(b_1, x_n^{(1)}\right), ..., \left(b_m, x_n^{(m)}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k\right\}, \end{aligned}$$

assim,

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}.$$

De fato, veja que se

$$(b_1, ..., b_m) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}},$$

então $(b_1, ..., b_m) \in F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\ & \overset{(P1)}{=} \sup_n \left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right), ..., \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\ & \leq k, \end{aligned}$$

isto é,

$$(b_1, ..., b_m) \in F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}}.$$

Agora, se $(b_1, ..., b_m) \in F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}}$, então,

$$\left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k,$$

logo, de *(P1)*,

$$\sup_n \left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right), ..., \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k.$$

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned}
&\left\| \Phi(T)\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right), ..., \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \sup_n \left\| \Phi(T)\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right), ..., \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)},
\end{aligned}$$

então, $(b_1, ..., b_m) \in F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, para todo $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_r}(E_r)}$, $r = 1, ..., m$ e k fixo, consideremos

$$D_k : E_1 \times \cdots \times E_m \to [0, \infty)$$

dado por

$$D_k(b_1, ..., b_m) = \left\| \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m)\right)_{j=1}^{k} \right\|_{\gamma_s(F)}.$$

Vejamos que D_k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $b_n = (b_n^1, ..., b_n^m)$ uma sequência em $E_1 \times \cdots \times E_m$ convergindo para $b = (b_1, ..., b_m)$. Observemos que

$$D_k\left(b_n^1, ..., b_n^m\right) \underset{n\to\infty}{\to} D_k(b_1, ..., b_m)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} D_k\left(b_n^1, ..., b_n^m\right) = \left\| \lim_{n\to\infty} \left(T\left(b_n^1 + x_j^{(1)}, ..., b_n^m + x_j^{(m)}\right) - T\left(b_n^1, ..., b_n^m\right)\right)_{j=1}^{k} \right\|_{\gamma_s(F)}. \tag{4.9}$$

Para simplificar a escrita, vamos considerar as notações

$$h_n^j := \left(T\left(b_n^1 + x_j^{(1)}, ..., b_n^m + x_j^{(m)}\right) - T\left(b_n^1, ..., b_n^m\right)\right)$$

e

$$h_j := \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m)\right).$$

Assim, dado que T é limitada, para cada $j \in \{1, ..., k\}$ temos que $h_n^j \underset{n\to\infty}{\to} h_j$, i.e.,

$$\left\| h_n^j - h_j \right\|_F < \frac{\varepsilon}{k},$$

para todo $n \geq n_0^j$ e para todo $j \in \{1, ..., k\}$. Agora, como

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(h_n^1 - h_1, ..., h_n^k - h_k, 0, ...\right) \right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \left\| \left(h_n^1 - h_1, 0, ...\right) \right\|_{\gamma_s(F)} + ... + \left\| \left(0, ..., 0, h_n^k - h_k, 0, ...\right) \right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\overset{(P2)}{=} \left\| h_n^1 - h_1 \right\|_F + ... + \left\| h_n^k - h_k \right\|_F \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $n \geq \tilde{n}_0$, onde $\tilde{n}_0 = \max\{n_0^j\}$, então, temos

$$\left\| \left(h_n^1, ..., h_n^k\right) - (h_1, ..., h_k) \right\|_{\gamma_s(F)} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq \tilde{n}_0$. Assim, considerando (4.9), obtemos

$$\lim_{n \to \infty} D_k \left(b_n^1, ..., b_n^m\right) = D_k \left(b_1, ..., b_m\right).$$

Consequentemente, $F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^n, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^n}$ é fechado, já que

$$F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^n, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^n} = D_n^{-1} \left([0, k]\right)$$

e, portanto, $F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty}$ é fechado.

Definamos agora

$$F_k := \bigcap F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty}$$

com a interseção tomada sobre todas $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty$ $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\gamma_{s_r}(E_r)},\ r = 1, ..., m$. Do *Lema* 4.0.4, temos

$$E_1 \times \cdots \times E_m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k,$$

pois se $(b_1, ..., b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ então, existe uma constante $C_{b_1, ..., b_n} \geq 0$ tal que

$$\left\| \left(T \left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T \left(b_1, ..., b_m\right) \right)_{j=1}^\infty \right\|_{\gamma_s(F)} \leq C_{b_1, ..., b_n},$$

assim, teríamos que $(b_1, ..., b_m) \in F_{[C_{b_1, ..., b_n}]}$. Logo, pelo Lema de Baire, sabemos que existe $(b_1, ..., b_m)$ no interior de F_{k_0} para algum k_0, isto é; existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que

$$\left\| \Phi\left(T\right) \left(\left(c_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty\right), ..., \left(c_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty\right) \right) \right\|_{\gamma(F)} \leq k_0 \tag{4.10}$$

sempre que $\|c_r - b_r\| < \varepsilon$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\gamma(E_r)},\ r = 1, ..., m$.

Se

$$\left\| \left(v_r, \left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty\right) \right\| < \varepsilon$$

para todo $r = 1, ..., m$, temos

$$\|v_r\| < \varepsilon \text{ e } \left\| \left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty \right\|_{\gamma(E_r)} < \varepsilon < 1.$$

Logo, usando (4.10), segue que

$$\left\|\Phi\left(T\right)\left[\left(b_1+v_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m+v_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right]\right\|_{\gamma(F)}\leq k_0.$$

Portanto, $\Phi\left(T\right)$ é limitada na bola de raio ε e centro no ponto

$$\left(\left(b_1,(0)_{j=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,(0)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\in G_1\times\cdots\times G_m,$$

e, deste modo $\Phi\left(T\right)$ é contínua. Finalmente, tomando $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_r}\left(E_r\right),\ r=1,...,m$, temos

$$\begin{aligned}&\left\|\left(T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T\left(b_1,...,b_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\ &=\left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(b_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\| \\ &\leq\left\|\Phi\left(T\right)\right\|\left(\left\|b_1\right\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)}\right)\cdots\left(\left\|b_m\right\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_m}(E_m)}\right).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Verifica-se, da definição de $\Phi(T)$, que

$$\pi^{ev}\left(T\right)=\left\|\Phi\left(T\right)\right\|$$

e o ínfimo em (4.8) é atingido. ■

É sabido que a Análise Funcional tem especial interesse nos espaços normados completos. Como veremos, o espaço $\left(\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}\left(E_1,...,E_m;F\right),\pi^{ev}\left(\cdot\right)\right)$ usufrui desta propriedade, e mais do que isso, ele é um ideal completo de aplicações multilineares, no sentido de Floret-Carcía [22].

Começaremos demonstrando a completude de $\left(\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}\left(E_1,...,E_m;F\right),\pi^{ev}\left(\cdot\right)\right)$, mas antes, um pequeno resultado, já conhecido, será necessário:

Lema 4.0.7 *Sejam E é um espaço vetorial, F um espaço de Banach e $f:E\to F$ uma aplicação linear injetiva com imagem fechada em F. Então, a aplicação*

$$\left\|\cdot\right\|_E:E\longrightarrow[0,+\infty):\left\|x\right\|_E=\left\|f\left(x\right)\right\|$$

define uma norma em E e, além disso, $(E,\left\|\cdot\right\|_E)$ é um espaço completo.

Demonstração. Fácilmente verifica-se as propriedades da norma.

Agora, tomamos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Claramente $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F, logo

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in F.$$

Como a imagem de f é fechada, segue que existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$, logo

$$\|x_n - x\|_E = \|f(x_n - x)\| = \|f(x_n) - y\|;$$

isto é, $(E, \|\cdot\|_E)$ é um espaço de Banach ■

Proposição 4.0.8 *A aplicação*

$$\Phi : \Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,\ldots,s_m)}}(E_1,...,E_m;F) \longrightarrow \mathcal{L}(G_1,...,G_m;\gamma_s(F))$$

é linear, injetiva e tem imagem fechada em $\mathcal{L}(G_1,...,G_m;\gamma_s(F))$.

A prova desta proposição segue as ideias da prova feita por G. Botelho e outros em [12, *Proposition* 9.4] para o caso de $\left(\mathcal{L}^{ev}_{as,(p;q)}(E_1,...,E_m;F), \|\cdot\|_{ev}\right)$. Para fazer o trabalho mais auto-suficiente, vamos escrevê-la em nosso contexto.

Demonstração. Φ está bem definida pelo Teorema 4.0.6. É facil verificar que Φ é linear e injetiva.

Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,\ldots,s_m)}}(E_1,...,E_m;F)$ tal que $\Phi(T_n)$ converge para A em $\mathcal{L}(G_1,...,G_m;\gamma_s(F))$, logo

$$\Phi(T_n)(x) \to A(x) \text{ para todo } x \in G_1 \times \cdots \times G_m.$$

Note, sem perda de generalidade, que

$$\Phi(T_n)((0,(x_1,0,0,...),...,(0,(x_m,0,0,...)) = (T_n(x_1,...,x_m),0,0,...).$$

Se, para cada $j \in \mathbb{N}$, π_j é a projeção na j-ésima coordenada, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T_n(x_1,...,x_m) &= \lim_{n\to\infty} \pi_1((T_n(x_1,...,x_m),0,0,...)) \qquad (4.12)\\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(\Phi(T_n)((0,(x_1,0,0,...),...,(0,(x_m,0,0,...)))\\
&= \pi_1\left(\lim_{n\to\infty}[\Phi(T_n)((0,(x_1,0,0,...),...,(0,(x_m,0,0,...))]\right)\\
&= \pi_1(A((0,(x_1,0,0,...),...,(0,(x_m,0,0,...))).
\end{aligned}$$

Assim, podemos definir $T \in L(E_1, ..., E_m; F)$ por

$$T(x_1, ..., x_m) := \lim_{n\to\infty} T_n(x_1, ..., x_m).$$

De (4.12), segue que T está bem definida e é fácil ver que T é m-linear. Agora, veja que a continuidade de T embora não seja clara inicialmente, o Teorema de Banach-Steinhauss para aplicações multilineares a garante.

Sejam $(b_1, ..., b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r), r = 1, ..., m$. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m)\right)_{j=1}^{k}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\left(T_n\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_n(b_1, ..., b_m)\right)_{j=1}^{k}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\Phi(T_n)\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{k}\right), ..., \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{k}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\|\Phi(T_n)\|\prod_{r=1}^{m}\left(\|b_r\| + \left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{k}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)}\right) \\
&= \|A\|\prod_{r=1}^{m}\left(\|b_r\| + \left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{k}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)}\right)
\end{aligned}$$

mostrando, pelo Teorema 4.0.6, que $T \in \Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1, ..., E_m; F)$. Por outro lado, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
&\pi_j\left[A\left(\left(b_1, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m, \left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right)\right] \\
&= \pi_j\left[\lim_{n\to\infty}\Phi(T_n)\left(\left(b_1, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m, \left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right)\right] \\
&= \pi_j\left[\lim_{n\to\infty}\left(T_n\left(b_1 + x_i^{(1)}, ..., b_m + x_i^{(m)}\right) - T_n(b_1, ..., b_m)\right)_{i=1}^{\infty}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\pi_j\left(\left(T_n\left(b_1 + x_i^{(1)}, ..., b_m + x_i^{(m)}\right) - T_n(b_1, ..., b_m)\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[T_n\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_n(b_1, ..., b_m)\right] \\
&= T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m)
\end{aligned}$$

logo,

$$A\left(\left(b_1, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m, \left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right) = \Phi(T)\left(\left(b_1, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m, \left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right),$$

isto é, $\Phi(T) = A$, e portanto A pertence à imagem de Φ. ■

Usando o *Teorema* 4.0.6, a *Proposição* 4.0.8 e o *Lema* 4.0.7, segue que a correspondência

$$T \in \Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F) \mapsto \pi^{ev}(T) = \|\Phi(T)\|$$

torna $\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F)$ um espaço de Banach.

Agora, queremos ver que $\left(\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F), \pi^{ev}(T)\right)$ é um ideal normado completo. Para isso, lembremos primeiro a definição dada por Floret-García em [22].

Definição 4.0.9 *Um ideal normado de aplicações multilineares* $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *é um ideal de aplicações multilineares, munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty)$, *tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ *restrita a* $\mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* $E_1,...,E_m$ *e* F *e todo* $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} = 1$, *onde* $id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$ *é dada por* $id_{\mathbb{K}^m}(x_1,...,x_m) = x_1 \cdots x_m$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$;

(iii) Se $M \in \mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j,E_j)$ *para* $j = 1,...,m$ *e* $t \in \mathcal{L}(F;H)$, *então*

$$\|tM(u_1,...,u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \|M\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| \cdots \|u_m\|.$$

Se as componentes $\mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$ *são completas com respeito a* $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, *dizemos que* $\mathcal{M}$ *é um ideal completo de aplicações multilineares.*

Claramente, basta-nos comprovar os itens $ii)$ e $iii)$ para vermos que $(\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}, \pi^{ev}(\cdot))$ é um ideal normado completo. Começaremos demonstrando que

$$\pi^{ev}(id_{\mathbb{K}^m}) = 1.$$

Primeiro, note que

$$\pi^{ev}(id_{\mathbb{K}^m}) \geq \|id_{\mathbb{K}^m}\| = 1.$$

Assim, basta provar a desigualdade contrária. Com este objetivo, tomamos novamente o conjunto de amostras ordenadas $\mathcal{C}[i,...,m]$, e definimos

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= a_{j_1} \cdot ... \cdot a_{j_r} \\ \lambda(x_j) &= x_j^{(k_1)} \cdot ... \cdot x_j^{(k_t)} \end{aligned}$$

onde $\sigma = \{j_1,...,j_r\}$, $\lambda = \{k_1,...,k_t\}$, $\{j_1,...,j_r\} \cap \{k_1,...,k_t\} = \varnothing$ e $\{j_1,...,j_r\} \cup \{k_1,...,k_t\} = \{1,...,m\}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\left\| id_{\mathbb{K}^m}\left(a_1 + x_j^{(1)},...,a_m + x_j^{(m)}\right) - id_{\mathbb{K}^m}\left(a_1,...,a_m\right)\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \\
= &\left\| \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{C}[1,...,m]} \sigma(a)\,\lambda(x_j) + a_1 \cdot ... \cdot a_m \right) - a_1 \cdot ... \cdot a_m \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \\
\leq &\sum_{\sigma \in \mathcal{C}[1,...,m]} |\sigma(a)| \prod_{t \in \lambda} \left\| \left(x_j^{(t)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \\
= &\left(|a_1| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \right) \cdot ... \cdot \left(|a_m| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \right) - |a_1 \cdot ... \cdot a_m| \\
\leq &\left(|a_1| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \right) \cdot ... \cdot \left(|a_m| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \right)
\end{aligned}$$

Logo, segue que $\pi^{ev}\left(id_{\mathbb{K}^m}\right) \leq 1$.

Proposição 4.0.10 $(\Pi^{ev}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}, \pi^{ev}(\cdot))$ *é um ideal completo de aplicações multilineares.*

Demonstração. Provaremos que $\Pi^{a}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$ satisfaz a propriedade de ideal e a desigualdade (iii) da *Definição* 4.0.9.

Sejam $u_j \in \mathcal{L}\left(G_j;E_j\right), j = 1,...,m$, $T \in \Pi^{a}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$, $t \in \mathcal{L}\left(F;H\right)$ e $(a_1,...,a_m) \in G_1 \times \cdots \times G_m$. Então

$$\begin{aligned}
&\left\| t \circ T \circ (u_1,...,u_m)\left(a_1 + x_j^{(1)},...,a_m + x_j^{(m)}\right) - t \circ T \circ (u_1,...,u_m)(a_1,...,a_m) \right\|_{\gamma_s(H)} \\
&\leq \|t\| \left\| T\left(u_1\left(a_1 + x_j^{(1)}\right),...,u_m\left(a_m + x_j^{(m)}\right)\right) - T\left(u_1(a_1),...,u_m(a_m)\right) \right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \pi^{ev}(T)\,\|t\| \left(\|u_1(a_1)\| + \left\| \left(u_1\left(x_j^{(1)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(E_1)} \right) \cdots \left(\|u_m(a_m)\| + \left\| \left(u_m\left(x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(E_m)} \right) \\
&\leq \pi^{ev}(T)\,\|t\|\,\|u_1\| \cdots \|u_m\| \left(\|a_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(E_1)} \right) \cdots \left(\|a_m\| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(E_m)} \right).
\end{aligned}$$

Segue que $\Pi^{a}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$ satisfaz a propriedade de ideal e que

$$\pi^{ev}\left(t \circ T \circ (u_1,...,u_m)\right) \leq \pi^{ev}(T)\,\|t\|\,\|u_1\| \cdots \|u_m\|.$$

■

Na seguinte seção veremos que algumas classes de operadores conhecidas seriam, considerando os espaços de sequências adecuados, um caso particular dos operadores multilineares $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$-somantes.

4.1 Aplicações

O objetivo desta seção é claro: mostrar que nossa versão abstrata abrange outro tipo de operadores no contexto multilinear dos operadores absolutamente somantes. Para isto, mostraremos três classes de operadores multilineares que pertencem aos operadores $\gamma_{(s;s_1,\ldots,s_m)}$-somantes. Em cada um deles, mostraremos alguns resultados que conseguimos resgatar de trabalhos anteriores. As referências a seguir serão mais precisas que as palavras.

- **Operadores multilineares absolutamente somantes.**

  O conceito de operadores multilineares absolutamente somante em todo ponto, foi introduzido por M.C. Matos [32] e explorado em [4].

  Só precisamos considerar

  $$\gamma_{s_k}(E_k) = \ell_{q_k}^u(E_k), \text{ para todo } k = 1, ..., m$$

  e

  $$\gamma_s(F) = \ell_p(F),$$

  com $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_m}$, para resgatar a definição dada em [4, Pag. 221]. Dado que as sequências mencionadas anteriormente satisfazem *(P1)* e *(P2)*, tem-se, então, que nossa abordagem recupera os resultados tratados em [4, *Teorema*4.1] e [12, *Lema* 9.2 *e Proposição* 9.4.].

- **Operadores multilineares quase somantes.**

  A noção de operadores multilineares quase somantes em todo ponto foi introduzido em [40] e explorado em [43]. Basta considerar

  $$\gamma_{s_k}(E_k) = \ell_{p_k}^u(E_k), \quad \text{para todo } k = 1, ..., m,$$

  e

  $$\gamma_s(F) = Rad(F)$$

  para obter a definição dada em [43, *Seção 3*].

  Lembremos que, para $1 \leq p < \infty$,

  $$l_p^u(X) = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)\,;\ \lim_{n\to\infty} \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_p^w = 0\};$$

$l_p^u(X)$ é um subespaço fechado de $l_p^w(X)$, sendo assim, um espaço de Banach. Por outro lado, lembremos que para $0 < p < \infty$, uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(X)$, se $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j(\cdot)\, x_j$ converge em $L_p(X) = L_p([0,1]; X)$, com r_j denotando as funções de Rademacher. Sabe-se que $Rad(X)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Rad(X)} := \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comprova-se facilmente que $Rad(F)$ satisfaz *(P1)* e *(P2)*, já que, tomando $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$, temos, usando o principio de contração de Kahane, que

$$\begin{aligned}
\sup_n \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Rad(E)} &= \sup_n \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Rad(E)}.
\end{aligned}$$

E se $(x_j)_{j=1}^{\infty} = (0, ..., 0, x_j, 0, ...)$, obviamente vamos ter *(P2)*.

Claramente, o espaço de sequências $l_p^u(E)$ também satisfaz *(P1)* e *(P2)*.

Desta forma, o *Teorema* 4.0.6 e a *Proposição* 4.0.10 recuperam [43, *Teorema* 3.7 e *Teorema* 4.4], respectivamente.

- **Operadores multilineares Cohen fortemente somantes.**

O espaço dos operadores multilineares Cohen fortemente p-somantes, denotado por $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, ..., E_m; F)$, é introduzido em [13]. Tomamos

$$\gamma_{s_k}(E_k) = \ell_p(E_k), \text{ para todo } k = 1, ..., m$$

e

$$\gamma_s(F) = \ell_p\langle F\rangle,$$

onde $l_p \langle F \rangle$ denota o espaço das sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in F$, tal que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n)|$ converge para toda $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p'}^{w}(F')$.

Verifica-se facilmente, usando o teorema de Hahn-Banach, que este espaço satisfaz *(P1)* e *(P2)*. Desta forma temos estes operadores como um caso particular dos operadores $\gamma_{(s;s_1,\ldots,s_m)}$-somante num ponto e resgatamos [13, *Proposição* 6.1.10, *Teorema* 6.1.12 e *Proposição* 6.2].

Uma coisa a se observar nestes operadores é que o *Teorema* 4.0.6 difere um pouco da caracterização dos operadores Cohen fortemente $p-$somantes em todo ponto, dada em [13]. Assim, estaríamos dando mais duas ferramentas para provar que um espaço é Cohen fortemente somante. Mais ainda, o *Teorema* 4.0.6, no contexto dos $\mathcal{L}_{Coh,p}^{ev}(E_1,\ldots,E_m;F)$, permite provar que a *Proposição* 4.0.10 é valida no mesmo contexto e, a partir disto, concluir que $(\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_m;F), \|\cdot\|_{ev})$ é um espaço de Banach, o que representa um pequeno avanço, pois com a caracterização dos operadores Cohen fortemente $p-$somantes em todo ponto dada em [13], a *Proposição* 4.0.10 associada, apresentava certa dificuldade para ser provada e não tinha se exibido uma prova da completeza de $(\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_m;F), \|\cdot\|_{ev})$.

4.2 Resultados do tipo Dvoretzky-Rogers

É importante lembrar que os operadores absolutamente somantes são considerados como os operadores que melhoram a convergência de séries, já que tomam séries incondicionalmente convergentes e as "transformam"em séries absolutamente convergentes. Assim, se tivermos um espaço de Banach qualquer E, o famoso resultado de Dvoretzky-Rogers nos diz que o operador identidade em E vai ser absolutamente somante se, e somente se, o espaço E tem dimensão finita. Um resultado deste tipo, no contexto dos operadores multilineares absolutamente $(p;q_1,\ldots,q_m)$-somantes, é o seguinte teorema dado em [4].

Teorema 4.2.1 *Sejam E um espaço de Banach, $n \geq 2$ e $p \geq 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

$i)$ E tem dimensão finita

ii) $\mathcal{L}^{a}_{as,p}\left({}^{n}E,E\right)\neq\mathcal{L}^{n}\left(E,E\right)$ *para todo* $(a_1,...,a_m)\in E^n$ *onde* $a_i\neq 0$ *para todo* i *ou* $a_i=0$ *para um único* i.

iii) $\mathcal{L}^{a}_{as,p}\left({}^{n}E,E\right)\neq\mathcal{L}\left({}^{n}E,E\right)$ *para algum* $(a_1,...,a_m)\in E^n$ *onde* $a_i\neq 0$ *para todo* i *ou* $a_i=0$ *para um único* i.

Nesta seção, vamos observar que se houver um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para operadores lineares absolutamentes $\gamma_{(s;s_1)}$-somantes, então, este será herdado pela classe destes operadores no contexto multilinear. Desta forma, admitamos que vale o seguinte resultado: os operadores lineares absolutamente $\gamma_{(s;s_1)}$-somantes satisfazem um teorema de tipo Dvorteszky-Rogers, isto é,

$$E \text{ tem dimensão finita} \Longleftrightarrow \Pi_{\gamma_{(s,s_1)}}\left(E;E\right)=\mathcal{L}\left(E;E\right).$$

De agora em diante, vamos supor implicitamente que o espaço $\Pi_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}\left(E_1,...,E_m;F\right)$ é não trivial, i.e., contém os operadores m-lineares de tipo finito.

Com algum esforço pode-se obter o seguinte teorema do tipo Dvoretzky-Rogers em nossa versão abstrata que, como mencionaremos, recupera vários resultados específicos.

Teorema 4.2.2 (Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para operadores γ-somantes) *Seja* E *um espaço de Banach e* $m\geq 2$. *As afirmações a seguir são equivalentes:*

i) E *tem dimensão finita*

ii) $\Pi^{a}_{\gamma_{(s,s_1)}}\left({}^{m}E;E\right)\neq\mathcal{L}\left({}^{m}E,E\right)$ *para todo* $(a_1,...,a_m)\in E^m$, *com* $a_i\neq 0$ *para todo* i *ou* $a_i=0$ *para um único* i.

iii) $\Pi^{a}_{\gamma_{(s,s_1)}}\left({}^{m}E;E\right)\neq\mathcal{L}\left({}^{n}E,E\right)$ *para algum* $(a_1,...,a_m)\in E^m$ *com* $a_i\neq 0$ *para todo* i *ou* $a_i=0$ *para um único* i.

Demonstração. $(ii)\Rightarrow(iii)$ Óbvio.

$(iii)\Rightarrow(i)$ Suponha que a dimensão de E seja finita. Sejam $\{e_1,...,e_n\}$ e $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ bases de E e E' respectivamente, onde $\varphi_j\left(e_k\right)=\delta_{jk}$. Cada $x\in E$ pode ser escrito por

$$x=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(x\right)e_j.$$

Daí, se $T\in\mathcal{L}\left({}^{m}E;E\right)$, teremos

$$\begin{aligned}T\left(x_1,...,x_m\right)&=T\left(\sum_{j_1=1}^{n}\varphi_{j_1}\left(x_1\right)e_{j_1},...,\sum_{j_m=1}^{n}\varphi_{j_m}\left(x_m\right)e_{j_m}\right)\\&=\sum_{j_1,...,j_m=1}^{n}\varphi_{j_1}\left(x_1\right)\cdots\varphi_{j_m}\left(x_m\right)T\left(e_{j_1},...,e_{j_m}\right).\end{aligned}$$

Isto é, T é de tipo finito e, pelo visto anteriormente, temos que T é $\gamma_{(s,s_1)}$-somante em todo ponto o que contradiz (iii).

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $a = (a_1, ..., a_m) \in E^m$com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para um único i. Fixe $k \in \{1, ..., m\}$ tal que $a_i \neq 0$ para todo $i \neq k$. Para cada $i \neq k$, escolha $\varphi_i \in E'$ com $\varphi_i(a_i) = 1$ e defina $T \in \mathcal{L}(^mE; E)$ por

$$T(x_1, ..., x_m) = \varphi_1(x_1) \overset{[k]}{\cdots} \varphi_m(x_m) x_k.$$

Note que $T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_m}(x) = T(a_1, ..., a_{k-1}, x, a_{k+1}, ..., a_m) = x$ para qualquer $x \in E$. Logo, pelo Teorema de Dvoretzky-Rogers caso linear, $T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_m}$ não é $\gamma_{(s,s_1)}$-somante e, portanto, T não é $\gamma_{(s,s_1)}$-somante em a. ■

Corolário 4.2.3 *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita, $a = (a_1, ..., a_m) \in E^m$, $m \geq 2$. Se $\Pi^a_{\gamma_{(s,s_1)}}(^mE; E) = \mathcal{L}(^mE; E)$, então, card $\{i : a_i = 0\} \geq 2$. Em particular, se $\Pi^a_{\gamma_{(s,s_1)}}(^2E; E) = \mathcal{L}(^2E; E)$, então, a é a origem.*

Retomando os operadores mencionados na seção anterior, como aplicações de nossa versão abstracta, sabemos, por meio das seguintes referencias, que cada um deles admite um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers.

- **Operadores multilineares absolutamente somantes.** Ver [4].
- **Operadores multilineares quase somantes**. Ver [43].
- **Operadores multilineares Cohen fortemente somantes.** Ver a Tese [13].

Referências Bibliográficas

[1] N. Albuquerque, *Bohnenblust-Hille: recentes estimativas com comportamento assintótico ótimo*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2012.

[2] R. Alencar and M. Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces.* Publ. Dep. Analisis Mat. Universidad Complutense de Madrid **12** (1989), 1–34.

[3] S. Banach, *Theorie de operations lineaires.* Chelsea Publishing Company, (1932)

[4] J.A. Barbosa, G. Botelho, D. Diniz, D. Pellegrino, *Spaces of absolutely polynomials.* Math. Scand. 101 (2007), 219–237.

[5] R. Blei, *Analysis in integer and fractional dimensions*, Cambridge Studies in Advances Mathematics, 2001.

[6] H.F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet séries*, Ann. of Math. (2) **32** (1931), 600–622.

[7] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials,* Procc. of the Royal Irish Acad. Section A: Math. and Phys. Sciences, Vol. 97A, No. 2 (1997), 145-153.

[8] G. Botelho: *Almost summing polynomials*, Math. Nachr. 211 (2000), 25-36

[9] G. Botelho and D. Pellegrino, *Coincidences for multiple summing mappings,* In: II ENAMA, 27–28,. João Pessoa, Brazil (2008).

[10] G. Botelho and D. Pellegrino, *When every multilinear mapping is multiple summing*. Math.Nachr. **282** (2009), 1414–1422.

[11] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek, *Almost p-summing polynomials and multilinear mappings*. Arch. Math. 76 (2001), 109-118

[12] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek, D. Pellegrino, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*. Studia Math. 177 (1) (2006), 43–65.

[13] J.R. Campos, *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*. Tese, Univ. Fed. da Paraíba, (2013)

[14] A.M. Davie, *Quotient algebras of uniform algebras*, J. London Math. Soc. **7** (1973), 31–40.

[15] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdá, M. Ounaïes and K. Seip, *The polynomial Bohnenblust–Hille inequality is hypercontractive*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), 485–497.

[16] A. Defant, D. Popa and U. Schwarting, *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 220–242.

[17] A. Defant and P. Sevilla-Peris, *A new multilinear insight on Littlewood's* 4/3-*inequality*, J. Funct. Anal. **256** (2009), 1642–1664.

[18] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol 43, Cambridge University Press, 1995.

[19] D. Diniz, G.A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda, *The asymptotic growth of the constants in the Bohnenblust–Hille inequality is optimal,* J. Funct. Anal. **263** (2012), 415–428.

[20] D. Diniz, G.A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda, *Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars*, Proc. Amer. Math. Soc.**142**(2014), 575–580.

[21] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 192–197.

[22] K. Floret, D. García: *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces*, Arch. Math. 81 (2003), 300-308.

[23] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Memoirs Acad. Math. Soc. **16**, (1955).

[24] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1–79.

[25] U. Haagerup, *The best constants in the Khinchin inequality*, Studia Math. **70** (1982), 231–283.

[26] S. Kaijser, *Some results in the metric theory of tensor products*, Studia Math. **63** (1978), 157–170.

[27] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications,* Studia Math. **29** (1968), 276-326.

[28] J.E. Littlewood, *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables,* Quart. J. Math. Oxford, **1** (1930), 164–174.

[29] M.S. Macphail, *Absolutely and unconditional convergence*. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 121–123.

[30] M.C. Matos, *Strictly absolutely summing multilinear mappings*. Relatório Técnico 03/92, Unicamp, 1992.

[31] M. C. Matos. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings,* Collect. Math. **54** (2003) 111-136.

[32] M.C. Matos, *Nonlinear absolutely summing mappings*. Math. Nachr 258 (2003), 71 – 89.

[33] M. C. Matos, D. Pellegrino, *Fully summing mappings between Banach spaces*. Studia Math. **178** (2007), 47–61.

[34] R. D. Maudlin, *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café*, Birkhauser Verlag, Boston-Basel-Stuttgart (1981)

[35] B. Mitjagin and A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension.* Proc. of ICM, Moscow, (1966), 366–372.

[36] A. Montanaro, *Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory*, J. Math. Phys. 53, 122206 (2012); doi: 10.1063/1.4769269.

[37] D. Nuñez-Alarcón *On the growth of the optimal constants of the multilinear Bohnenblust-Hille inequality.* Linear Alg. Appl. 439 (2013), 2494-2499.

[38] D. Nuñez-Alarcón, D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda, *On the Bohnenblust-Hille inequality and a variant to Littlewood's 4/3 inequality*, J. Funct. Anal. 264 (2013), 326–336

[39] D. Nuñez-Alarcón, D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda, D.M. Serrano-Rodríguez, *There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants* $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ *with* $\lim_{n\to\infty}(C_{n+1}-C_n)=0$, J. Funct. Anal. 264 (2013) 429–463

[40] D. Pellegrino, *Almost summing mappings,* Arch. Math. 82 (2004), 68–80.

[41] D. Pellegrino, J. Santos, *Absolutely summing multilinear operators: a panorama*, Quaestiones Mathematicae. 34(2011), 447–478.

[42] D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda, *New upper bounds for the constants in the Bohnenblust Hille inequality*, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 300–307.

[43] D. Pellegrino, J. Ribeiro, *On almost summing polynomials and multilinear mappings.* Linear and Multilinear Algebra Vol. 60, No. 4, (2012), 397–413

[44] D. Pellegrino, J. Santos, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Some techniques on nonlinear analysis and applications.* Adv. Math. **229** (2012), 1235–1265.

[45] D. Pellegrino, J. Santos, J.B. Seoane-Sepúlveda, *A general Extrapolation Theorem for absolutely summing operators.* Bull. Lond. Math. Soc. **44** (2012), 1292–1302.

[46] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes.* Tese, Univ. Complut. de Madrid, (2003).

[47] D. Pérez-García, *The inclusion theorem for multiple summing operators,* Studia Math. **165** (2004), 275-290.

[48] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Raumen.* Studia Math. **27** (1967), 333–353.

[49] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983

[50] D. Popa, *Reverse inclusions for multiple summing operators,* J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 360-368.

[51] D. Popa, *Multilinear variants of Pietsch's composition theorem.* J. Math. Anal. Appl. **370** (2010), 415–430.

[52] H. Queffélec, *H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet séries: old and new results*, J. Anal. **3** (1995), 43–60.

[53] F. Qi, *Monotonicity results and inequalities for the gamma and incomplete gamma functions*, Mathematical Inequalities & Applications **5** (2002), 61–67.

[54] M.S. Ramanujan. *Absolutely $\lambda-$ Summing Operators, λ a Symmetric Sequence Space*. Math. Z. 114, (1970), 187–193.

[55] M. L. V. Souza, *Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes,* Tese, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2003.

[56] D. M. Serrano-Rodríguez, *Resultados de coincidência para operadores multilineares múltiplo somantes,* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2011.

[57] D.M. Serrano-Rodríguez, *Absolutely $\gamma-$ summing multilinear operators*, Linear Algebra and its Applications, 439 (2013) 4110–4118

[58] D.M. Serrano-Rodríguez, *Improving the closed formula for subpolynomial constants in the multilinear Bohnenblust–Hille inequalities*, Linear Algebra and its Applications, 438 (2013) 3124–3138