Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre uma classe de equações semilineares do tipo logística

por

Adriano Alves de Medeiros

sob a orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

julho/2010
João Pessoa - PB

Sobre uma classe de equações semilineares do tipo logística

por

Adriano Alves de Medeiros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros-UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva-UnB

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza-UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

16 de Julho de 2010

Agradecimentos

- À Deus, pois tudo o que acontece em minha vida é devido a Ele. Sempre tive dificuldades, mas graças a Deus tive força para lutar e contornar-las.

- Aos meus pais, Felix Nóbrega de Medeiros e Luzimar Alves de Medeiros, a minha irmã Alixandra e a meu tio Martim por estarem presentes em todos os momentos de dificuldade.

- À minha esposa, Jucilene Carvalho Souza de Medeiros, pelo amor, pelas orações, pela compreensão e fé, sempre crendo em mais um desfecho vitorioso de minha vida.

- Aos meus irmãos na fé, o ministério de música Amigos do Altar, pelo amor sincero, pelas orações e comunhão.

- Aos Professores Everaldo Souto de Medeiros e Uberlandio Batista Severo, por terem sido, além de dois grandes orientadores nos meus estudos, verdadeiros amigos que me ajudaram a enfrentar através de conselhos todas as dificulades que surgiram durante a graduação e o mestrado.

- Aos professores de graduação e pós-graduação, em especial Marivaldo Matos e Nelson Nery, que durante a graduação deram grandes contribuições para minha formação matemática, além dos professores João Marcos e Flávia que me deram a oportunidade de ingressar no projeto Milênio, ingresso este que, além de me possibilitar um auxílio financeiro, me possibilitou trabalhar com o professor Everaldo.

- Aos colegas do mestrado, em especial Disson, Roberto Capistrano, Alselmo, Simeão, Diego, Maurício, Andréia, Elano, Eduardo, Elielson, Hudson, pela amizade, troca de experiências e companheirismo. Que Deus abençoe a todos!

- Ao CNPq, pelo apoio financeiro e à UFPB; particularmente, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática.

- Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

A minha esposa Jucilene e a minha família.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma classe de equações semilineares do tipo logística. Mais precisamente, consideramos os casos homogêneo e não homogêneo. No caso homogêneo, discutimos questões relacionadas a existência, não existência e unicidade de solução positiva e por fim, mostramos que o decaimento da solução no infinito é do tipo polinomial. A existência de solução é obtida via método de sub e supersolução enquanto que o comportamento é obtido por argumentos de comparação. No caso não homogêneo, estudamos questões relacionadas a existência de solução positiva bem como o seu comportamento no infinito. A existência de solução é obtida usando argumentos de minimização, mais precisamente, o método direto do cálculo das variações.

Abstract

In this work we study a class of semilinear equations of the logistic type. More precisely, we consider the homogeneous and inhomogeneous cases. In the homogeneous case, we discuss the existence, nonexistence and uniqueness of positive solution as well the decay at infinity. The existence is obtained by using the method of sub-super solutions. In the inhomogeneous case, we discuss the existence of positive solution and show that the decay at infinity is not exponential. The existence is obtained by using minimizes arguments, more precisely, the Direct Method of Calculus of Variations.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos a seguinte classe de problemas elípticos semilineares

$$-\Delta u = f(\lambda, \mu, u, x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $N \geq 3$, λ e μ são parâmetros reais e a não linearidade $f(\lambda, \mu, s, x)$ será considerada em dois casos particulares, a saber: o caso homogêneo e o caso não homogêneo.

Inicialmente estudamos o caso homogêneo, o qual é baseado no artigo de Rădulescu-Repovš [15]. Mais precisamente tratamos o seguinte problema

$$-\Delta u = \lambda(V(x)u - g(u)) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{P_λ}$$

onde o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função que muda de sinal e satisfaz alguma condição de integrabilidade e a não linearidade $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função suave.

O problema (P_λ) está relacionado com certos problemas físicos tais como: teoria de combustão, supercondutividade, superfluidos e oscilações em circuitos elétricos.

Baseado no artigo de Costa-Drábek-Tehrani [5], estudamos o caso não homogêneo do problema (1). Mais precisamente, consideramos o seguinte problema

$$-\Delta u = a(x)(\lambda u - g(u)) - \mu h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{$P_{\mu,\lambda}$}$$

onde $N \geq 3$, λ e μ são parâmetros reais, $a, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções não negativas que satisfazem algumas condições de integrabilidade e a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tem crescimento superquadrático.

Nos últimos anos o interesse nesse tipo de problema vem se renovando. Mais especificamente, problemas da forma

$$-\Delta u = f(u) - \mu h(x) \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, a não linearidade $f(u)$ comporta-se como o termo logístico $\lambda u(1-u)$ e $\mu h(x)$ é o termo de colheita, ver Shi [17]. Pode-se pensar o problema elíptico semilinear acima como um estado estacionário do problema correspondente de reação e difusão:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f(u) - \mu h(x), & \text{em} & \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & \text{para} & x \in \Omega \\ u(x, t) &= 0, & \text{para} & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty). \end{cases}$$

Do ponto de vista prático, tais problemas podem fornecer modelos para a pesca. Aqui $u(t, x)$ é a densidade populacional de uma espécie de peixe, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é o habitat dos peixes e $h(x)$ é o termo de colheita.

Este trabalho está escrito em três capítulos como segue.

No Capítulo 1, estabelecemos alguns resultados auxiliares referentes a: problemas de autovalores com peso, o método de sub e super solução, regularidade e comportamento assintótico da solução fundamental do problema

$$-\Delta w = f(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

onde a função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ atende a certas hipóteses que são especificadas no capítulo. Estes resultados serão utilizados nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 2, estudamos a existência de solução positiva para o problema (P_λ). Mais precisamente, tratamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda(V(x)u - g(u)) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad u &> 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2}$$

onde $N \geq 3$, λ é um parâmetro real e o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua que muda de sinal, ou seja, $V = V^+ - V^-$ e $V^+ \neq 0$, onde $V^+(x) = \max\{V(x), 0\}$ e $V^-(x) = \max\{-V(x), 0\}$. Ainda sobre o potencial V consideramos as seguintes hipóteses:

$(V1)$ $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $V^+ = V_1 + V_2$, onde $V_1 \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x|^2 V_2(x) = 0$;

$(V2)$ Existem $A, \alpha > 0$ tais que

$$V^+(x) \leq A|x|^{-2-\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Vamos assumir que o termo de absorção não linear $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 que satisfaz as seguintes hipóteses:

(g_1) $g(0) = g'(0) = 0$ e $\liminf\limits_{t\to 0} \dfrac{g'(t)}{t} > 0$;

(g_2) A aplicação $t \mapsto g(t)/t$ é crescente em $(0, +\infty)$;

(g_3) g tem crescimento superlinear no infinito, isto é

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} > \|V\|_\infty.$$

Os principais resultados deste capítulo são:

Teorema 1 *Suponha que as funções V e g satisfazem as condições $(V1)$, (g_1), (g_2) e (g_3). Então o problema (P_λ) tem uma solução positiva, para qualquer $\lambda > \lambda^* := \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_1(B_{R_n})$, onde*

$$\lambda_1(B_{R_n}) := \inf_{u\in H_0^1(B_{R_n})} \left\{ \int_{B_{R_n}} |\nabla u|^2 dx;\ \int_{B_{R_n}} V(x)u^2 dx = 1 \right\}.$$

Em adição, assumindo a condição de decaimento (V_2), temos o seguinte resultado:

Teorema 2 *Suponha que* V *e* g *satisfazem as hipóteses* $(V1)$, $(V2)$, (g_1), (g_2) *e* (g_3). *Então,*

(i) *o problema* (P_λ) *tem uma única solução positiva para qualquer* $\lambda > \lambda^*$. *Além disso, a solução satisfaz*

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0;$$

(ii) *o problema* (P_λ) *não tem solução para qualquer* $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$.

A existência de solução para o problema (P_λ) será obtida via método de interação monotônica (também conhecido como método de sub e super solução). Desde que não estamos assumindo condições de crescimento do tipo subcrítico ou crítico sob g não podemos aplicar técnicas variacionais.

Finalmente, no Capítulo 3, estudamos a existência de solução positiva para o problema $(P_{\mu,\lambda})$. Mais precisamente, tratamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= a(x)(\lambda u - g(u)) - \mu h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad u &> 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3}$$

onde $N \geq 3$, λ e μ são parâmetros reais, $a, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções positivas e a não linearidade $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tem crescimento superlinear. Sobre o potencial a consideramos a seguinte hipótese

(a_1) $0 < a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

A não linearidade g atende as hipóteses:

(g_1) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua com $g(0) = g'(0) = 0$;

(g_2) $0 < \alpha_1 := \liminf\limits_{s\to+\infty} \dfrac{g(s)}{s^p} \leq \alpha_2 := \limsup\limits_{s\to+\infty} \dfrac{g(s)}{s^p} < \infty$, $p > 1$;

(g_3) $s \mapsto \dfrac{g(s)}{s}$ é uma função não decrescente.

Por fim, sobre h assumimos que

(h_1) $0 < h \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\sigma = 1 + |x|^2$;

(h_2) $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $|x|^{\frac{N}{r}} |h|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_{|x|}(0))} \leq C$, com $r > \frac{N}{2}$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$.

O principal resultado deste capítulo nos dirá sob quais condições dos parâmetros reais λ e μ o problema $(P_{\mu,\lambda})$ tem solução positiva. Mais precisamente temos

Teorema 3 *Sejam* $p > 1$, $N \geq 3$, a, h *e* g *funções satisfazendo as hipóteses* (a_1), $(g_1) - (g_3)$, $(h_1) - (h_2)$. *Então, para cada* $\lambda > \lambda_1 = \lambda_1(a)$, *existe* $\hat{\mu} = \hat{\mu}(\lambda) > 0$ *tal que, para* $0 < \mu < \hat{\mu}$, *o problema* $(P_{\mu,\lambda})$ *tem uma solução positiva* u_μ *satisfazendo*

$$u_\mu(x) \geq \frac{C}{|x|^{N-2}}, \quad \textit{para } |x| \textit{ grande}, \tag{4}$$

onde $\lambda_1(a)$ *denota o autovalor principal do problema*

$$-\Delta u = \lambda a(x) u \quad \textit{em } \mathbb{R}^N. \tag{5}$$

A existência de solução para o problema $(P_{\mu,\lambda})$ será obtida via método de minimização. Note que para justificar que a solução u_μ do problema $(P_{\mu,\lambda})$ é positiva não podemos utilizar a princípio do máximo, tendo em vista que estamos estudando o problema em todo o $\mathbb{R}^N$. Com isso, temos que o estudo deste problema é bastante relevante.

Com o objetivo de tornar os capítulos independentes da introdução, enunciaremos novamente os resultados principais em cada capítulo.

Capítulo 1

Resultados auxiliares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que serão necessários para o estudo que será feito nos capítulos subsequentes.

1.1 Resultados de regularidade

Nesta seção enunciaremos alguns resultados de regularidade. Começamos enunciando o princípio do máximo.

Teorema 1.1 ([10], Corolário 3.2) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Considere o operador*

$$Lu = \Delta u + cu,$$

onde c é uma constante não positiva. Seja $u \in C(\overline{\Omega})$. Se

$$Lu \geq 0 (\leq 0),$$

então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Se $Lu = 0$ em Ω, então

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

A seguir enunciamos uma desigualdade muito útil para mostrar que uma solução de um determinado problema é positiva, na literatura é conhecida como desigualdade de Hanack. Aqui, apresentaremos uma versão fraca.

Teorema 1.2 ([10], Teorema 8.20) *Considere o operador $Lu = -\Delta u + cu$, onde $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma função não negativa satisfazendo no sentido fraco:*

$$Lu = 0 \quad em\ \Omega,$$

então, para qualquer bola $B_{4R}(y) \subset \Omega$, temos

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u, \tag{1.1}$$

onde $C = C(N, R)$.

O próximo resultado que apresentaremos é uma consequência das estimativas interiores de Schauder.

Teorema 1.3 ([10], Corolário 6.3) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Se $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazem*

$$Lu = f \quad em\ \Omega,$$

onde L é um operador elíptico com coeficientes em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, e $\Omega' \subset\subset \Omega$ com $dist(\Omega', \partial\Omega) \geq d$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$d\|Du\|_{C(\Omega')} + d^2\|D^2u\|_{C(\Omega')} + d^{2+\alpha}\|D^2u\|_{C^{\alpha}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{C(\Omega)} + \|f\|_{C^{\alpha}(\Omega)}).$$

Teorema 1.4 ([10], Lema 4.2) *Seja f uma função limitada e localmente Hölder contínua em Ω, e seja w o potencial Newtoniano de f. Então, $w \in C^2(\Omega)$ e satisfaz a equação*

$$-\Delta w = f \quad em\ \Omega.$$

Teorema 1.5 ([10], Teorema 6.13) *Seja L uma operador estritamente elíptico num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Suponha que f e os coeficientes de L estão em $L^{\infty}(\Omega) \cap C^{\alpha}(\Omega)$ e que Ω satisfaz a condição da esfera exterior para todo ponto da fronteira. Se φ é contínua sobre $\partial\Omega$, então o problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} Lu &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= \varphi \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

O teorema seguinte nos fornece estimativas interiores para funções em L^p.

Teorema 1.6 ([10], Teorema 9.11) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e L um operador estritamente elíptico. Se $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, é uma solução forte da equação*

$$Lu = f \quad em\ \Omega, \tag{1.2}$$

ou seja, u é uma função duas vezes fracamente diferenciável e satisfaz (1.2) em quase todo ponto (q.t.p), onde os coeficientes de L são contínuos e limitados e $f \in L^p(\Omega)$, então, para qualquer domínio $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $C = C(N, p, \Omega', \Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}).$$

O Teorema seguinte nos fornece uma desigualdade de Sobolev geral.

Teorema 1.7 ([8], Teorema 6, p.270) *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira de classe C^1. Suponha que $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(i) *Se $k < \frac{N}{p}$, então $u \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$. Além disso, temos a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(k, p, N, \Omega) > 0$.

(ii) *Se $k > \frac{N}{p}$, então $u \in C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde*

$$\alpha = \begin{cases} \left[\frac{N}{p}\right] + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ não é um inteiro} \\ \text{qualquer } \gamma < 1, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ é um inteiro.} \end{cases}$$

Além disso, temos a estimativa

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(k, p, N, \alpha, \Omega) > 0$.

Em seguida apresentaremos um resultado de regularidade interior para soluções fracas $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega, \tag{1.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado, e o operador L tem a seguinte forma divergente

$$Lu = -\Delta u + c(x)u.$$

Mais precisamente, temos

Teorema 1.8 ([8], Teorema 1, p. 309) *Suponha que $c \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Se $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1.3), então $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e para cada aberto $V \subset\subset \Omega$, temos a estimativa*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

onde a constante $C > 0$ depende apenas de V, Ω e dos coeficientes de L.

Teorema 1.9 ([18], Lema B.3) *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que*

$$|g(x, u)| \leq c(x)(1 + |u|) \quad q.t.p \ \text{ em } \Omega,$$

com $c \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. Se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = g(x, u) \quad \text{em } \Omega,$$

então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para qualquer $q < \infty$. Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $c \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$ para qualquer $q < \infty$.

Teorema 1.10 ([10], Teorema 8.17) *Seja $q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e limitada e $h \in L^{s/2}(\mathbb{R}^N)$ uma função suave com $s > N$. Fixado $R > 0$ e $p > 1$, existe $C > 0$, $C = C(N, R, p, \|q\|_\infty)$, tal que, se $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma subsolução (supersolução) de*

$$-\Delta u + q(x)u = h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

então,

$$\sup_{y \in B_R(x)} u(-u) \leq C\left\{R^{-N/p}\|u^+(u^-)\|_{L^p(B_{2R}(x))} + R^{2\delta}\|h\|_{L^{s/2}}\right\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde $\delta = 1 - (N/s)$.

1.2 O espaço $D^{1,2}$

Nesta seção, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $N \geq 3$. Para maiores detalhes veja [2]. Definimos o espaço $D^{1,2}(\Omega)$ como sendo

$$D^{1,2}(\Omega) := \left\{u \in L^{2^*}(\Omega) : |\nabla u| \in L^2(\Omega)\right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{D^{1,2}} := \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Definimos $D_0^{1,2}(\Omega)$ como sendo o completamento de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|u\|_{D^{1,2}}$.

Temos que os espaços $D^{1,2}(\Omega)$ e $D_0^{1,2}(\Omega)$ são espaços de Hilbert e separáveis. Sobre $D_0^{1,2}(\Omega)$ introduzimos uma seminorma $\|\cdot\|_{D_0^{1,2}}$ definida por

$$\|u\|_{D_0^{1,2}} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Devido à imersão de Sobolev (ver [8, Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev], que pode ser estendida por densidade a $D_0^{1,2}(\Omega)$, concluímos que esta seminorma é realmente uma norma e, além disso, é equivalente à norma $\|u\|_{D^{1,2}}$ sobre $D_0^{1,2}(\Omega)$. Assim, podemos considerar o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma

$$\|u\|_{D^{1,2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Pela imersão de Sobolev, existe $K > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq K\|u\|_{D^{1,2}}\ , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.5}$$

Portanto, $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.11 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto de medida finita com fronteira de classe C^1, temos*

$$W^{1,2}(\Omega) = D^{1,2}(\Omega) \quad \subset\subset \quad L^p(\Omega), \qquad \forall\ p \in [1, 2^*),$$

onde $\subset\subset$ denota imersão compacta.

A seguir apresentamos a desigualdade de Hardy, que é devida a García Azorero-Peral [9].

Lema 1.12 (Desigualdade de Hardy) *Se $N \geq 3$ e $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então*

(1)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq C_N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \tag{1.6}$$

e, consequentemente, $\frac{u}{|x|} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, onde $C_N = \left(\frac{2}{N-2}\right)^2$;

(2) $C_N = \left(\frac{2}{N-2}\right)^2$ *é a constante ótima, ou seja, é a menor constante que satisfaz a desigualdade. Assim,*

$$C_N = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left\{ C > 0;\ \frac{1}{C} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx} \right\}.$$

Demonstração: prova de (1): Desde que o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com a norma $\|\cdot\|_{D^{1,2}}$, vamos mostrar inicialmente que a desigualdade é válida para as funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então para $|x|$ suficientemente grande $u(x) = 0$. Desta forma,

$$|u(x)|^2 = -\int_1^{+\infty} \frac{d}{dt}|u(tx)|^2 dt = -\int_1^{+\infty} 2u(tx)\frac{d}{dt}(u(tx))dt.$$

Considere $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = u(tx)$, então

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(tx + hx) - u(tx)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(tx) = \langle \nabla u(tx), x \rangle.$$

Assim,

$$|u(x)|^2 = -2\int_1^{+\infty} u(tx) \langle \nabla u(tx), x \rangle \, dt.$$

Desta forma, usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx = -2\int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(tx)}{|x|} \left\langle \frac{x}{|x|}, \nabla u(tx) \right\rangle dx dt.$$

Agora, façamos a mudança de variável $y = tx$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx &= -2\int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)}{|y/t|} \left\langle \frac{y/t}{|y/t|}, \nabla u(y) \right\rangle \frac{1}{t^N} dy dt \\ &= -2\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)}{|y|} \frac{\partial u}{\partial r}(y) dy \\ &= -\frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)}{|y|} \frac{\partial u}{\partial r}(y) dy \\ &\leq \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|}{|y|} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| dy, \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde $r = y/|y|$.

Note que $|u(y)|/|y| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. De fato, desde que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $R > 0$ tal que $supp\, u \subset B_R(0)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|y|^2} dy = \int_{B_R(0)} \frac{|u|^2}{|y|^2} dy \leq \|u\|_\infty^2 \int_{B_R(0)} \frac{1}{|y|^2},$$

usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|y|^2}dy &\leq \|u\|_\infty^2 \int_0^R \int_{S_r} \frac{1}{r^2} d\theta dr \\ &= \|u\|_\infty^2 N w_N \int_0^R r^{N-3} dr \\ &= \left[\frac{N w_N \|u\|_\infty^2}{N-2} r^{N-2} \right]_0^R \\ &= \frac{N w_N R^{N-2} \|u\|_\infty^2}{N-2} < +\infty,\end{aligned}$$

mostrando o desejado. Além disso, observe que o fato de $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, implica que $\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, usando a desigualdade de Hölder em (1.7), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2}dx \leq \frac{2}{N-2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|y|^2} dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2}.$$

De onde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2}dx \leq \left(\frac{2}{N-2} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.8}$$

Provando que a desigualdade de Hardy é válida para $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Agora, considere $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, existe uma sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \tag{1.9}$$

isto é,

$$|\nabla u_n| \to |\nabla u| \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N). \tag{1.10}$$

Assim, da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, segue que

$$u_n \to u \quad \text{em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \tag{1.11}$$

e, consequentemente,

$$u_n \to u \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{1.12}$$

Desde que $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n|^2}{|x|^2}dx \leq \left(\frac{2}{N-2} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx. \tag{1.13}$$

Note que de (1.12), segue que

$$\frac{|u_n(x)|^2}{|x|^2} \to \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{1.14}$$

Daí, usando o Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n|^2}{|x|^2} dx. \tag{1.15}$$

Desta forma, passando o lim inf em (1.13) e usando (1.10) e (1.15), obtemos que (1.6) é válido para toda $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Prova de (2): Dado $\epsilon > 0$, considere a função radial

$$U(r) = \begin{cases} A_{N,\epsilon}, & \text{se } r \in [0,1] \\ A_{N,\epsilon} r^{\frac{2-N}{2} - \epsilon}, & \text{se } r > 1, \end{cases} \tag{1.16}$$

onde $A_{N,\epsilon} = \frac{2}{N-2+2\epsilon}$. Derivando, obtemos

$$U'(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \in [0,1] \\ -r^{-\frac{N}{2} - \epsilon}, & \text{se } r > 1. \end{cases} \tag{1.17}$$

Afirmamos que $U \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |U(x)|^{2^*} dx &= \omega_N \left\{ \int_0^1 A_{N,\epsilon}^{2^*} r^{N-1} dr + \int_1^{+\infty} A_{N,\epsilon}^{2^*} \left(r^{\frac{2-N}{2} - \epsilon} \right)^{\frac{2N}{N-2}} r^{N-1} dr \right\} \\
&= \frac{\omega_N A_{N,\epsilon}^{2^*}}{N} + \omega_N A_{N,\epsilon}^{2^*} \int_1^{+\infty} r^{-\frac{2N}{N-2}\epsilon - 1} dr \\
&= \frac{\omega_N A_{N,\epsilon}^{2^*}}{N} + \frac{\omega_N A_{N,\epsilon}^{2^*} (2-N)}{2N\epsilon} \left[r^{-\frac{2N}{N-2}\epsilon} \right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{\omega_N A_{N,\epsilon}^{2^*}}{N} + \frac{(N-2)}{2N\epsilon} \omega_N A_{N,\epsilon}^{2^*} < +\infty,
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Mostrando que $U \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Para concluirmos nossa afirmação devemos mostrar que $|\nabla U| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx &= \omega_N \int_1^{+\infty} r^{-N-2\epsilon} r^{N-1} dr \\
&= \omega_N \int_1^{+\infty} r^{-(1+2\epsilon)} dr \\
&= \omega_N \left[\frac{r^{-2\epsilon}}{-2\epsilon} \right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{\omega_N}{2\epsilon} < +\infty.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que $U \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e, assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2} dx \leq C_N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx. \tag{1.18}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2} dx = \int_{B_1(0)} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2} dx.$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2}dx &= \omega_N A_{N,\epsilon}^2 \left\{ \int_0^1 r^{N-3}dr + \int_1^{+\infty} \frac{r^{2-N-2\epsilon} r^{N-1}}{r^2} dr \right\} \\
&= \omega_N A_{N,\epsilon}^2 \left\{ \int_0^1 r^{N-3}dr + \int_1^{+\infty} r^{-(1+2\epsilon)} dr \right\} \\
&= \omega_N A_{N,\epsilon}^2 \int_0^1 r^{N-3}dr + \omega_N A_{N,\epsilon}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx \\
&= \frac{\omega_N A_{N,\epsilon}^2}{N-2} + \omega_N A_{N,\epsilon}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Desde que $\frac{\omega_N A_{N,\epsilon}^2}{N-2} > 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2}dx \geq \omega_N A_{N,\epsilon}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx,$$

para todo $\epsilon > 0$. Passando ao limite quando $\epsilon \to 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2}dx \geq C_N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx. \tag{1.19}$$

Assim, de (1.18) e (1.19), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|U(x)|^2}{|x|^2}dx = C_N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx.$$

Concluindo nossa demonstração.

■

Observação 1.13 *Gostaríamos de destacar que a desigualdade de Hardy, também é válida para funções em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, já que na demonstração usamos o fato de que espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. No entanto, não conseguimos mostrar que a melhor constante é atingida.*

1.3 Um problema de autovalor com peso indefinido para o Laplaciano

Nesta seção vamos estudar o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda V(x) u \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.20}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, λ é um parâmetro real e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua que muda de sinal, ou seja, $V = V^+ - V^-$ e $V^+ \neq 0$, onde $V^+(x) = \max\{V(x), 0\}$ e $V^-(x) = \max\{-V(x), 0\}$. Ainda sobre o potencial V vamos assumir as seguintes hipóteses:

(V1) $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ e $V^+ = V_1 + V_2$, onde $V_1 \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x|^2 V_2(x) = 0$;

(V2) Existem $A, \alpha > 0$ tais que

$$V^+(x) \leq A|x|^{-2-\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma autofunção do problema (1.20) associada ao autovalor λ se

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi dx = \lambda \int_{\Omega} V(x) u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.21}$$

O problema (1.20) foi estudado de forma mais geral pela Mabel Cuesta em [7]. Voltando ao nosso estudo, vamos mostrar inicialmente que o número

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx; \int_{\Omega} V(x)|u|^2 dx = 1 \right\} \tag{1.22}$$

é um autovalor positivo do problema (1.20). Em seguida, estudaremos o sinal e a regularidade das autofunções do problema (1.20) associadas a $\lambda_1(\Omega)$ e, por fim, observaremos a monotonicidade do autovalor $\lambda_1(\Omega)$ relacionada a subdomínios. Feito isto, teremos condições de mostrar o principal resultado desta seção que é provar que o número

$$\lambda^* := \lim_{n\to+\infty} \lambda_1(B_{R_n}) \tag{1.23}$$

está bem definido e é positivo, onde

$$\lambda_1(B_{R_n}) = \inf_{u \in H_0^1(B_{R_n})} \left\{ \int_{B_{R_n}} |\nabla u|^2 dx; \int_{B_{R_n}} V(x) u^2 dx = 1 \right\}. \tag{1.24}$$

Mais precisamente temos o seguinte resultado devido a Rădulescu-Repovš [15].

Teorema 1.14 *Suponha que V satisfaz a condição $(V1)$. Então, $\lambda^* > 0$.*

O resultado que apresentaremos a seguir mostrará que $\lambda_1(\Omega)$ é um autovalor positivo para o problema (1.20). Para simplificar a notação, em toda esta seção, denotaremos $\lambda_1(\Omega)$ por λ_1, exceto quando haja necessidade de especificar o domínio Ω.

Proposição 1.15 *O número λ_1 definido em (1.22) é um autovalor positivo para o problema (1.20).*

Demonstração: Para provar esta proposição iremos utilizar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver [11, Proposição 14.3]). Considere os funcionais $J, F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$J(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \;\text{ e }\; F(u) := \int_{\Omega} V(x)|u|^2 dx - 1. \tag{1.25}$$

Note que $J, F \in C^1(H_0^1(\Omega);\mathbb{R})$ (ver [14, Apêndice B]) com

$$J'(u)\varphi = 2\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \quad \text{e} \quad F'(u)\varphi = 2\int_\Omega V(x)u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Consideremos o vínculo

$$M := \{u \in H_0^1(\Omega); F(u) = 0\}. \tag{1.26}$$

Observe que M é uma variedade de classe C^1. De fato, basta observar que dado $u \in M$, temos

$$F'(u)u = 2\int_\Omega V(x)u^2 dx = 2 \neq 0.$$

Observe também que $J|_M$ é claramente limitado inferiormente, pois

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 0, \quad \forall u \in M.$$

Portanto, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in M} J(u). \tag{1.27}$$

Note que $\lambda_1 > 0$. De fato, seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante, isto é,

$$J(u_n) = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \to \lambda_1 \quad \text{e} \quad F(u_n) = 0.$$

Suponha que $\lambda_1 = 0$, então

$$\int_\Omega V(x)u_n^2 dx = 1 \quad \text{e} \quad \|u_n\|^2 \to 0. \tag{1.28}$$

Por outro lado, usando o fato de $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e a imersão de Sobolev, temos

$$\left|\int_\Omega V(x)u_n^2 dx\right| \leq \int_\Omega |V||u_n|^2 dx \leq \|V\|_\infty \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|V\|_\infty \|u_n\|^2 \to 0.$$

O que contradiz o fato de $\int_\Omega V(x)u_n^2 dx = 1$. De onde segue a afirmação.

Afirmamos que λ_1 é atingido, ou seja, existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \lambda_1$. De fato, desde que a sequência $(\|u_n\|^2)$ é converge, existe $K > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, segue que existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega). \tag{1.29}$$

Desde que a norma é fracamente semi contínua inferiormente (s.c.i), temos

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \geq \|u_0\|^2. \tag{1.30}$$

Agora usando a imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \ \ L^2(\Omega),$$

implicando que

$$u_n(x) \to u_0(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

e existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$1 = \int_\Omega V u_n^2 dx \to \int_\Omega V u_0^2 dx. \tag{1.31}$$

De onde segue que $u_0 \in M$, pois $\int_\Omega V u_0^2 dx = 1$. Além disso, de (1.30), obtemos

$$\lambda_1 \leq J(u_0) = \|u_0\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \lambda_1.$$

Mostrando que

$$J(u_0) = \lambda_1. \tag{1.32}$$

Desta forma, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \beta F'(u_0), \tag{1.33}$$

ou seja,

$$J'(u_0)\varphi = \beta F'(u_0)\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo $\varphi = u_0$, obtemos

$$2J(u_0) = 2\beta \int_\Omega V(x) u_0^2 dx.$$

De onde segue que $\lambda_1 = \beta$. Note que podemos supor $u_0 \geq 0$, pois se u_0 satisfaz (1.32), temos que $|u_0|$ também satisfaz. Além disso, $u_0 \neq 0$, já que $u_0 \in M$. Portanto, λ_1 é um autovalor positivo para o problema (1.20).

■

O resultado seguinte nos fornecerá uma informação sobre o sinal das autofunções associadas ao autovalor λ_1.

Proposição 1.16 *As autofunções associadas ao autovalor λ_1 tem sinal definido, isto é, são positivas ou negativas em Ω.*

Demonstração: Note que da demonstração do prova anterior temos que se φ é uma autofunção do problema (1.20) associada a λ_1, podemos supor que $\varphi \geq 0$ em Ω. Assim, vamos mostrar que

$$\varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = 0$ e considere o conjunto $A = \{x \in \Omega;\ \varphi(x) = 0\}$. Assim, temos que $A \neq \emptyset$. Note que A é fechado. De fato, seja $x_1 \in \Omega \backslash A$, então $\varphi(x_1) > 0$. Desde que Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x_1, 4r) \subset \Omega$. Daí, pelo Teorema 1.2 (desigualdade de Hanack), existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{\overline{B}(x_1,r)} \varphi \leq C \inf_{\overline{B}(x_1,r)} \varphi,$$

implicando que $\varphi(x) > 0$ em $\overline{B}(x_1, r)$ e, portanto, $\Omega \backslash A$ é aberto, seguindo que A é fechado. Usando um raciocínio análogo mostramos que A é aberto. Desde que Ω é conexo, teríamos $\Omega = A$, o que é um absurdo, pois $u_0 \neq 0$. Logo, $\varphi(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$.

■

Outro ponto importante no estudo das autofunções associadas a λ_1 é quanto a sua regularidade. Neste sentido temos o seguinte resultado:

Proposição 1.17 *Seja $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma autofunção do problema* (1.20) *associada a λ_1. Então, $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Para provarmos este resultado vamos utilizar o Teorema 1.9, com $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, \varphi) := \lambda_1 V(x)\varphi$. Assim,

$$|g(x, \varphi)| \leq \lambda_1 \|V\|_\infty |\varphi| \leq \lambda_1 \|V\|_\infty (1 + |\varphi|).$$

Desta forma, aplicando o Teorema 1.9, obtemos

$$\varphi \in L^p(\Omega), \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty.$$

Daí, desde que $V \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$V\varphi \in L^p(\Omega), \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty.$$

Implicando que

$$\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < +\infty.$$

Assim, escolhendo p de modo que $p > N$, segue do Teorema 1.7 que $\varphi \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = 1 - N/p$. Daí, segue que $V\varphi \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e, portanto, aplicando o Teorema 1.5, temos que $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

■

Na sequência, faremos um resultados que nos permitirá comparar o valor do autovalor λ_1 para subdomínios. Neste caso, para especificar o domínio vamos utilizar a notação $\lambda_1(\Omega)$, quando o domínio considerado for Ω.

Proposição 1.18 *Seja Ω_1 um subconjunto aberto próprio de um domínio $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$. Então,*

$$\lambda_1(\Omega_2) \leq \lambda_1(\Omega_1). \tag{1.34}$$

Demonstração: Seja $\varphi \in H_0^1(\Omega_1)$ uma autofunção positiva do problema (1.20) associada ao autovalor $\lambda_1(\Omega_1)$. Estendendo a função como segue

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi, & \text{se } x \in \Omega_1 \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_2 \backslash \Omega_1, \end{cases}$$

temos que $\widetilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega_2)$. Além disso,

$$\lambda_1(\Omega_2) \leq \frac{\int_{\Omega_2} |\nabla \widetilde{\varphi}|^2 dx}{\int_{\Omega_2} V(x)\widetilde{\varphi}^2 dx} = \frac{\int_{\Omega_1} |\nabla \varphi|^2 dx}{\int_{\Omega_1} V(x)\varphi^2 dx} = \lambda_1(\Omega_1).$$

■

Uma consequência direta da Proposição 1.18 é que o número λ^* está bem definido. De fato, se considerarmos uma sequência crescente (R_n) de números reais positivos tal que

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = +\infty,$$

temos, devido a Proposição 1.18, que a sequência de números reais positivos $(\lambda_1(B_{R_n}))$ é monótona decrescente, onde

$$\lambda_1(B_{R_n}) = \inf_{u \in H_0^1(B_{R_n})} \left\{ \int_{B_{R_n}} |\nabla u|^2 dx; \int_{B_{R_n}} V(x) u^2 dx = 1 \right\}. \tag{1.35}$$

e, assim, mostramos que o número λ^* está bem definido.

Para concluir esta seção vamos apresentar a prova do Teorema 1.14.

Demonstração do Teorema 1.14: Para qualquer $R > 0$, fixe $u \in H_0^1(B_R)$ tal que $\int_{B_R} V(x)u^2 dx = 1$. Temos

$$\begin{aligned} 1 = \int_{B_R} V(x)u^2 dx &= \int_{B_R} (V^+ - V^-)u^2 dx \\ &\leq \int_{B_R} V^+(x)u^2 dx \\ &= \int_{B_R} V_1(x)u^2 dx + \int_{B_R} V_2(x)u^2 dx. \end{aligned}$$

Por (V1), temos $V_1 \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, já da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(B_R) \hookrightarrow L^{2^*}(B_R)$, $u^2 \in L^{\frac{N}{N-2}}(B_R)$. Assim, segue da desigualdade de Hölder e da imersão de Sobolev, que

$$\int_{B_R} V_1(x)u^2 dx \leq \|V_1\|_{L^{N/2}(B_R)} \|u\|^2_{L^{2^*}(B_R)} \leq C_1 \|V_1\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.36}$$

Novamente utilizando a hipótese $(V1)$, temos que fixado $\epsilon > 0$, existem números positivos R_1 e R com $R_1 < R$ tais que, se $|x| \geq R_1$, então

$$|x|^2 V_2(x) \leq \epsilon.$$

Desta forma, usando as desigualdades de Hölder e de Hardy, obtemos

$$\int_{B_R \setminus \overline{B_{R_1}}} V_2(x)u^2 dx \leq \epsilon \int_{B_R \setminus \overline{B_{R_1}}} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq C_2 \epsilon \int_{B_R \setminus \overline{B_{R_1}}} |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \epsilon \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.37}$$

Para concluirmos nossas estimativas, observe que o fato de $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ implica que $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, assim, segue das imersões de Sobolev que

$$\int_{B_{R_1}} V_2(x)u^2 dx \leq C\|V_2\|_\infty \left(\int_{B_{R_1}} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C_3 \|V_2\|_\infty \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.38}$$

Desta forma, segue de (1.36), (1.37) e (1.38) que

$$\lambda_1(R) \geq \{C_1 \|V_1\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)} + C_2 \epsilon + C_3 \|V_2\|_\infty\}^{-1}.$$

Assim, passando ao limite quando $R \to \infty$, temos

$$\lambda^* \geq \{C_1 \|V_1\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)} + C_2 \epsilon + C_3 \|V_2\|_\infty\}^{-1} > 0.$$

■

1.4 Um problema de autovalor envolvendo um operador mais geral

Nesta seção vamos estudar o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda V(x) u &= \mu u \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.39}$$

onde $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, λ é um número real positivo e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função como na seção anterior.

Diremos que $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ é uma autofunção do problema (1.39) associada ao autovalor μ se

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - \lambda V(x) u \varphi) \, dx = \mu \int_\Omega u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.40}$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\mu_1 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda V(x) u^2 \right) dx; \int_\Omega |u|^2 dx = 1 \right\} \tag{1.41}$$

é um autovalor do problema (1.20). Neste sentido temos o seguinte resultado.

Proposição 1.19 *μ_1 é um autovalor do problema* (1.39). *Além disso, $\mu_1 < 0$ para $\lambda > \lambda_1(\Omega)$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é definido por* (1.22).

Demonstração: Para provar esta proposição iremos utilizar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Considere os funcionais $J, F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$J(u) := \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda V(x)u^2\right) dx \quad \text{e} \quad F(u) := \int_\Omega |u|^2 dx - 1. \tag{1.42}$$

Note que $J, F \in C^1(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})$ (ver [14, Apêndice B]) com

$$J'(u)\varphi = 2\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - \lambda V(x)u\varphi)\, dx \text{ e } F'(u)\varphi = 2\int_\Omega u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Consideremos o vínculo

$$M = \{u \in H_0^1; F(u) = 0\}.$$

Observe que M é uma variedade de classe C^1. De fato, basta observar que dado $u \in M$, temos

$$F'(u)u = 2\int_\Omega u^2 dx = 2 \neq 0,$$

ou seja, $F'(u) \neq 0$ para todo $u \in M$.

Afirmamos que $J|_M$ é limitado inferiormente. De fato, usando o fato de que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que para qualquer $u \in M$

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega V(x)u^2 dx \geq -\lambda \|V\|_\infty \int_\Omega u^2 dx \geq -\lambda \|V\|_\infty.$$

Portanto, existe $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mu_1 = \inf_{u \in M} J(u).$$

Afirmamos que μ_1 é atingido, ou seja, existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \mu_1$. De fato, seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante, isto é,

$$J(u_n) \to \mu_1,$$

ou seja,

$$\|u_n\|^2 - \lambda \int_\Omega V u_n^2 dx \to \mu_1.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|^2 - \lambda \left| \int_\Omega V u_n^2 dx \right| \leq \left| \|u_n\|^2 - \lambda \int_\Omega V u_2^2 dx \right| \leq K.$$

Daí,

$$\|u_n\|^2 \leq K + \lambda \|V\|_\infty \int_\Omega |u_n|^2 dx = K + \lambda \|V\|_\infty = K_1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando que a sequência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Desde que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Desde que a norma é fracamente s.c.i, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \geq \|u_0\|^2. \tag{1.43}$$

Agora usando a imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

De onde segue que $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, implicando que $u_0 \in M$. Além disso, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue juntamente com (1.43) implica que:

$$\begin{aligned}
\mu_1 \leq J(u_0) &= \|u_0\|^2 - \lambda \int_\Omega V(x) u_0^2 dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 - \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_\Omega V(x) u_n^2 dx \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \left(\|u_n\|^2 - \lambda \int_\Omega V(x) u_n^2 dx \right) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} J(u_n) \\
&= \mu_1.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \beta F'(u_0), \tag{1.44}$$

isto é,

$$J'(u_0)\varphi = \beta F'(u_0)\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo $\varphi = u_0$, obtemos

$$2J(u_0) = 2\beta \int_\Omega u_0^2 dx.$$

De onde segue que $\mu_1 = \beta$, ou seja, μ_1 é um autovalor para o problema (1.39). Note que podemos supor $u_0 \geq 0$, pois se u_0 satisfaz (1.32), então $|u_0|$ também satisfaz. Além disso, $u_0 \neq 0$, já que $u_0 \in M$.

Agora, vamos provar que $\mu_1 < 0$ para $\lambda > \lambda_1 := \lambda_1(\Omega)$. De fato, seja $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ uma autofunção associada a λ_1, ou seja,

$$\lambda_1 \int_\Omega V \varphi_1^2 dx = \int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2 dx.$$

Isto juntamente com a caracterização de μ_1 implica que

$$\begin{aligned}
\mu_1 \int_\Omega V \varphi_1^2 dx &\leq \int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2 dx - \lambda \int_\Omega V \varphi_1^2 dx \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2 dx \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu_1 < 0$, concluindo a demonstração da proposição.

■

O resultado seguinte nos fornecerá uma informação sobre o sinal das autofunções associadas ao autovalor μ_1.

Proposição 1.20 *As autofunções associadas ao autovalor μ_1 tem sinal definido, isto é, são positivas ou negativas em Ω.*

Demonstração: A prova deste fato segue usando o mesmo argumento usado na demonstração da Proposição 1.16.

■

Um outro ponto importante no estudo das autofunções do problema (1.39) é quanto a sua regularidade. Neste sentido temos o seguinte resultado.

Proposição 1.21 *Seja $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ uma autofunção do problema* (1.39) *associada a μ_1. Então, $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Para demonstrarmos este resultado vamos utilizar o Teorema 1.9, com $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, \varphi) = (\lambda V(x) + \mu_1)\varphi$. Assim,

$$|g(x, \varphi)| \leq (\lambda \|V\|_\infty + |\mu_1|)(1 + |\varphi|).$$

Desta forma, aplicando o Teorema 1.9, obtemos

$$\varphi \in L^p(\Omega), \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty.$$

Daí, desde que $V \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$(\lambda V + \mu_1)\varphi \in L^p(\Omega), \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty.$$

Implicando que

$$\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < +\infty.$$

Assim, escolhendo p de modo que $p > N$, segue do Teorema 1.7(ii) que $\varphi \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = 1 - N/p$. Daí, segue que $(\lambda V + \mu_1) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e, portanto, aplicando o Teorema 1.5, temos que $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

■

1.5 Um problema de autovalor em $\mathbb{R}^N$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados referentes ao seguinte problema de autovalor

$$-\Delta u = \lambda a(x) u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{1.45}$$

onde $N \geq 3$, λ é um parâmetro real e $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função positiva satisfazendo a seguinte hipótese:

(a_1) $a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, usando a desigualdade de Hölder e a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |a| u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,$$

para todo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, temos que a expressão

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N} gu^2 dx.$$

define uma norma equivalente a norma usual em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos o operador $T : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$(Tu, v) = \int_{\mathbb{R}^N} auvdx, \quad \forall u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Podemos verificar que o operador T está bem definido, autoadjunto e compacto, ver Brown [3]. Assim, usando a Teoria Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos, ver Brezis [4], existe uma sequência (μ_n) de autovalores positivos tais que

$$\mu_n \to 0,$$

Assim, se $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, então

$$-\Delta u = \lambda_n a(x) u.$$

Além disso, podemos assumir que a autofunção φ_1 associada a λ_1 é positiva e λ_k tem a seguinte caracterização variacional

$$\lambda_k = \inf_{\dim L = k} \sup_{u \in L} \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\int a(x) u^2 dx}, \quad k \geq 2 \text{ e } L \leq D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

(veja Kesavan [12, Teorema 3.6.2]).

1.6 O método de sub e super solução

Nesta seção vamos descrever o método de sub e super solução, o qual também é conhecido na literatura por método de interação monotônica. Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \quad\quad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.46}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua e de classe C^1 com respeito a segunda variável.

Uma solução para o problema (1.46) no sentido clássico é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisfaz o mesmo.

Definição 1.22 *Uma função $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é dita uma **subsolução** do problema* (1.46) *se*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} &\leq f(x,\underline{u}) \quad \textit{em} \quad \Omega \\ \quad \underline{u} &\leq 0 \quad\quad\quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.47}$$

*Enquanto que uma função $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é dita uma **supersolução** do problema* (1.46) *se*

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} &\geq f(x,\overline{u}) \quad \textit{em} \quad \Omega \\ \quad \overline{u} &\geq 0 \quad\quad\quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.48}$$

A demonstração do resultado que enunciaremos a seguir pode ser encontrada em [16, Teorema 1.2].

Teorema 1.23 *Sejam $\underline{u}$ e $\overline{u}$ uma subsolução e uma supersolução, respectivamente, para o problema* (1.46) *tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Então, existe uma solução u de* (1.46) *satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.*

Demonstração: Considere $g(x,u) := f(x,u) + au$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante. Podemos escolher $a \geq 0$ suficientemente grande de modo que a aplicação $\mathbb{R} \ni u \mapsto g(x,u)$ seja crescente em $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, para todo $x \in \Omega$. Para isto, basta tomar

$$a > \max\{|f_u(x,u)|; x \in \overline{\Omega}, u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]\}. \tag{1.49}$$

Para esta escolha de a, definimos a sequência de funções $(u_n) \subset C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ como segue: seja $u_0 = \overline{u}$ e, para todo $n \geq 1$, u_n é a solução única do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u_n + au_n &= g(x, u_{n-1}) \quad \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\quad u_n &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.50}$$

Vamos mostrar que de fato a sequência (u_n) está bem definida, isto é, o problema (1.50) admite uma única solução. Para isto, basta justificar que o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta v + av &= h(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\quad v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.51}$$

onde $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, admite uma única solução. Mas isto, segue do Teorema 1.5. Afirmamos que

$$\underline{u} \leq ... \leq u_{n+1} \leq u_n \leq ... \leq u_0 = \overline{u}. \tag{1.52}$$

De fato, para justificarmos esta afirmação vamos utilizar essencialmente o princípio do máximo. Primeiro vamos mostrar que $u_1 \leq \overline{u}$. Temos das definições de u_1 e $\overline{u}$ que

$$-\Delta u_1 + au_1 = f(x, \overline{u}) + a\overline{u} \leq -\Delta\overline{u} + a\overline{u}.$$

Assim,

$$\begin{cases} \Delta(u_1 - \overline{u}) - a(u_1 - \overline{u}) &\geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\quad u_1 - \overline{u} &\leq 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 1.1(princípio do máximo), temos

$$\sup_{\Omega}(u_1 - \overline{u}) \leq \sup_{\partial\Omega}(u_1 - \overline{u})^+ = 0.$$

Logo, $u_1 \leq \overline{u}$. Para provar que $\underline{u} \leq u_1$, novamente obtemos das definições de u_1 e $\underline{u}$ que $\underline{u} - u_1 \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ e

$$-\Delta u_1 + au_1 = g(x, \overline{u}) \geq g(x, \underline{u}) = f(x, \underline{u}) + a\underline{u} \geq -\Delta\underline{u} + a\underline{u},$$

pois g é crescente na segunda entrada. Desta forma,

$$\begin{cases} \Delta(\underline{u} - u_1) - a(\underline{u} - u_1) &\geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\quad \underline{u} - u_1 &\leq 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí, pelo princípio do máximo, $\underline{u} \leq u_1$. Para concluirmos nossa afirmação, resta provar que

$$\underline{u} \leq u_{n+1} \leq u_n. \tag{1.53}$$

Nossa hipótese de indução é que

$$\underline{u} \leq u_n \leq u_{n-1}.$$

Vamos mostrar primeiro que $u_{n+1} \leq u_n$. Temos que

$$-\Delta u_n + a u_n = g(x, u_{n-1}) \geq g(x, u_n)$$

e

$$-\Delta u_{n+1} + a u_{n+1} = g(x, u_n).$$

Assim,

$$\begin{cases} \Delta(u_{n+1} - u_n) - a(u_{n+1} - u_n) & \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_{n+1} - u_n & \leq 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí, pelo princípio do máximo,

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Por fim, temos das definições de u_{n+1} e $\underline{u}$ e da hipótese de indução que

$$-\Delta u_{n+1} + a u_{n+1} = g(x, u_n) \geq g(x, \underline{u}) \geq -\Delta \underline{u} + a\underline{u}.$$

Daí,

$$\begin{cases} \Delta(\underline{u} - u_{n+1}) - a(\underline{u} - u_{n+1}) & \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \underline{u} - u_{n+1} & \leq 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí, pelo princípio do máximo, temos que

$$\underline{u} \leq u_{n+1},$$

mostrando nossa afirmação. Desta forma, para cada $x \in \Omega$ a sequência $(u_n(x))$ é monótona decrescente e limitada. Logo, está bem definida a função

$$u(x) := \lim_{n \to +\infty} u_n(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.54}$$

Vamos justificar que podemos passar o limite em (1.50) para concluir que u definida em (1.54) é solução do problema (1.46). Para isto, precisamos mostrar que

$$\|u_n\|_{C^2(\overline{B_{r_x}}(x))} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.55}$$

para cada $x \in \Omega$, onde $B_{r_x}(x) \subset\subset \Omega$. Desde que Ω é aberto, dado $x \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset \Omega$. Assim, $u_n \in C^{2,\alpha}(B_r(x))$ e $g_n := g(\cdot, u_{n-1}) \in C^\alpha(\overline{B_r}(x))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sejam $d_0 = \text{dist}(x, \partial B_r(x)) = r$ e $d = r/2$. Então, escolhendo $r_1 > 0$ de modo que $B_{r_1}(x) \subset\subset B_r(x)$ com $\text{dist}(B_{r_1}(x), \partial B_r(x)) \geq d$, segue do Teorema 1.3, que existe $C > 0$ tal que

$$d\|Du_n\|_{C(B_{r_1}(x))} + d^2\|D^2 u_n\|_{C(B_{r_1}(x))} + d^{2+\alpha}\|D^2 u_n\|_{C^\alpha(B_{r_1}(x))} \leq A_n, \tag{1.56}$$

onde $A_n = C(\|u_n\|_{C(B_r(x))} + \|g_n\|_{C^\alpha(B_r(x))})$. Assim, para $r_x < r_1$, temos que

$$\|D^2 u_n\|_{C^\alpha(\overline{B_{r_x}})} \leq C(\|u_n\|_{C(B_r(x))} + \|g_n\|_{C^\alpha(B_r(x))})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para obtermos (1.55), resta justificar que

$$\|u_n\|_{C(B_r(x))} + \|g_n\|_{C^\alpha(B_r(x))} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.57}$$

Primeiro, note que

$$\|g_n\|_\infty \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.58}$$

De fato, desde que g é crescente na segunda variável, temos

$$g(x, \underline{u}) \leq g_n(x) \leq g(x, \overline{u}), \quad \forall x \in \Omega.$$

De onde segue (1.58). Desta forma, temos que a sequência (g_n) é limitada em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < +\infty$. Além disso,

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.59}$$

pois, $\underline{u} \leq u_n \leq \overline{u}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que $B_r(x) \subset\subset \Omega$, segue do Teorema 1.6 que

$$\|u_n\|_{W^{2,p}(B_r(x))} \leq C(\|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|g_n\|_{L^p(\Omega)}) \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.60}$$

Agora, usando o Teorema 1.7, vamos tomar $k = 2$ e p suficientemente grande de modo que $p > N$. Assim,

$$W^{2,p}(B_r(x)) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(B_r(x)),$$

com $\alpha = 1 - N/p$. Implicando que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B_r}(x))} \leq K. \tag{1.61}$$

Desta forma, para justificarmos (1.57), resta provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|g_n\|_{C^\alpha(B_r(x))} \leq C. \tag{1.62}$$

De fato, usando a desigualdade do valor médio, o fato de f e u_{n-1} serem funções Hölder contínuas e (1.49), obtemos

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_n(y)| &\leq |f(x, u_{n-1}(x)) - f(y, u_{n-1}(y))| + a|u_{n-1}(x) - u_{n-1}(y)| \\
&\leq |f(x, u_{n-1}(x)) - f(x, u_{n-1}(y)) + f(x, u_{n-1}(y)) - f(y, u_{n-1}(y))| \\
&+ aC|x - y|^\alpha \\
&\leq a|u_{n-1}(x) - u_{n-1}(y)| + K|x - y|^\alpha.
\end{aligned}$$

Daí, usando (1.61), obtemos

$$\frac{|g_n(x) - g_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq a\frac{|u_{n-1}(x) - u_{n-1}(y)|}{|x - y|^\alpha} + K \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostrando (1.62). Logo, (1.57) é satisfeito, implicando que

$$\|D^2 u_n\|_{C^\alpha(\overline{B_{r_x}})} \leq C, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{1.63}$$

Desta forma, temos que a família $\{D^2 u_n\}$ é equicontínua e uniformemente limitada em $\overline{B_{r_x}}$, para cada $x \in \Omega$. Daí, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, a menos de subsequência

$$u_n \to u \quad \text{em } C^2(\overline{B_{r_x}}), \text{ para cada } x \in \Omega. \tag{1.64}$$

Com isto, podemos passar o limite em (1.50) e concluir que u é solução do problema (1.46).

$\blacksquare$

A observação seguinte mostra que a hipótese de $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω é necessária para que o Teorema 1.23 seja verdadeiro.

Observação 1.24 *A hipótese $\underline{u} \leq \overline{u}$ não é automaticamente satisfeita para sub e supersoluções arbitrárias de* (1.46)*. Mais ainda, pode ocorrer de $\underline{u} \geq \overline{u}$ em todo o domínio Ω. Um exemplo elementar é o seguinte: considere o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.65}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Sabemos que as soluções deste problema são da forma $u(x) = Ce_1$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante e e_1 não muda de sinal em Ω, digamos $e_1(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$. Escolhendo $\underline{u} = e_1$ e $\overline{u} = -e_1$. Então, $\underline{u}$(resp., $\overline{u}$) é subsolução(resp., supersolução) para o problema (1.65)*, mas $\underline{u} > \overline{u}$.*

1.7 Decaimento do potencial Newtoniano

Nesta seção vamos estabelecer alguns resultados que serão úteis para obter o comportamento no infinito das soluções dos problemas que estudaremos nos Capítulos 2 e 3. Aqui supomos que $N \geq 3$.

O primeiro resultado que apresentaremos é devido a Li-Ni [13].

Lema 1.25 *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua com o seguinte decaimento no infinito*

$$|f(x)| \leq C|x|^l, \tag{1.66}$$

onde $C > 0$, $l < -2$ são constantes. Seja w o potencial Newtoniano de f, isto é,

$$w(x) = C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy, \tag{1.67}$$

onde $C_N = [N(N-2)w_N]^{-1}$, w_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Então, w está bem definida e, além disso,

$$|w(x)| \leq \begin{cases} C|x|^{2-N} & \text{se} \quad l < -N \\ C|x|^{2-N} \ln|x| & \text{se} \quad l = -N \\ C|x|^{2+l} & \text{se} \quad -N < l < -2. \end{cases} \tag{1.68}$$

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que w está bem definida. De fato, note que a hipótese (1.66), implica que

$$|f(y)| \leq \begin{cases} K|y|^l, & \text{se } |y| > R \\ K, & \text{se } |y| \leq R. \end{cases}$$

Assim, se $|y| > R$

$$(1+|y|^{-l})|f(y)| = |f(y)| + |y|^{-l}|f(y)| \leq K|y|^l + K \leq C_1.$$

Se $|y| \leq R$, então

$$(1+|y|^{-l})|f(y)| \leq K + R^{-l}K \leq C_2.$$

Considerando $C = \max\{C_1, C_2\}$, obtemos

$$(1+|y|^{-l})|f(y)| \leq C, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Daí,

$$|w(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-2}(1+|y|^{-l})} dy.$$

Decompondo a integral acima

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq \int_{|x-y|\leq\frac{|x|}{2}} A dy + \int_{\frac{|x|}{2}\leq|x-y|\leq 2|x|} A dy + \int_{|x-y|\geq 2|x|} A dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

onde $A = C/[|x-y|^{N-2}(1+|y|^{-l})]$. Agora, vamos estimar I_1, I_2 e I_3.

Estimativa para I_1: Seja $\Omega_1 := \{y \in \mathbb{R}^N; |y-x| \leq |x|/2\}$. Assim, para $y \in \Omega_1$

$$|x| - |y| \leq |x-y| \leq \frac{|x|}{2},$$

ou seja,

$$|y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{|x-y|\leq\frac{|x|}{2}} \frac{C}{|x-y|^{N-2}(1+|y|^{-l})} dy \\ &\leq \int_{|x-y|\leq\frac{|x|}{2}} \frac{C_1}{|x-y|^{N-2}|x|^{-l}} dy \\ &= \frac{C_2}{|x|^{-l}} \int_0^{\frac{|x|}{2}} \frac{r^{N-1}}{r^{N-2}} dr \\ &= C_3 \frac{|x^2|}{|x|^{-l}} \\ &= C_3 |x|^{2+l}. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Estimativa para I_3: Seja $\Omega_3 := \{y \in \mathbb{R}^N; 2|x| \leq |y-x|\}$. Assim, para $y \in \Omega_3$

$$|y-x| \leq |y| + |x| \leq |y| + \frac{|y-x|}{2},$$

ou seja,

$$\frac{|y-x|}{2} \leq |y|.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\Omega_3} \frac{C}{|x-y|^{N-2}(1+|y|^{-l})} dy \\ &\leq \int_{\Omega_3} \frac{C}{|x-y|^{N-2}\left[1+\left(\frac{|x-y|}{2}\right)^{-l}\right]} dy \\ &\leq \int_{\Omega_3} \frac{C_1}{|x-y|^{N-2}|x-y|^{-l}} dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$I_3 \leq \int_{2|x|}^{+\infty} \frac{C_2 r^{N-1}}{r^{N-2-l}} dr = \left[\frac{C_2 r^{2+l}}{2+l}\right]_{2|x|}^{\infty}.$$

Desde que $l < -2$, encontramos

$$I_3 \leq C_3 |x|^{2+l}. \tag{1.70}$$

Estimativa para I_2: Seja $\Omega_2 := \{u \in \mathbb{R}^N; \frac{|x|}{2} \leq |y-x| \leq 2|x|\}$. Daí,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_2} \frac{C}{|x-y|^{N-2}(1+|y|^{-l})} dy \\ &\leq \frac{C_1}{|x|^{N-2}} \int_{\Omega_2} \frac{1}{1+|y|^{-l}} dy \\ &\leq C_1 |x|^{2-N} \int_{|y|\leq 3|x|} \frac{1}{1-|y|^{-l}} dy \\ &\leq C_1 |x|^{2-N} \left(\int_{|y|\leq 1} \frac{1}{1-|y|^{-l}} dy + \int_{1\leq |y| \leq 3|x|} \frac{1}{|y|^{-l}} dy \right) \\ &\leq C_1 |x|^{2-N} \left(C_2 + C_3 \int_1^{3|y|} r^{N-1} r^l dr \right) \\ &\leq \begin{cases} C_4 |x|^{2-N}, & \text{se } N-1+l < -1 \\ C_5 |x|^{2-N} \log |x|, & \text{se } N-1+l = -1 \\ C_6 |x|^{2-N}(C_7 + C_8 |x|^{N+l}), & \text{se } N-1+l > -1. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.71}$$

Assim, para $|x|$ suficientemente grande, segue das estimativas (1.69), (1.70) e (1.71) que

$$|w(x)| \leq \begin{cases} C|x|^{2-N}, & \text{se } l < -N \\ C|x|^{2-N} \log |x|, & \text{se } l = -N \\ C|x|^{2+l}, & \text{se } -N < l < -2. \end{cases} \tag{1.72}$$

■

O segundo resultado que apresentaremos agora, que é devido a Allegretto-Odiobala [1], é de mesma natureza que o anterior considerando outras hipóteses sobre a função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Lema 1.26 *Suponha que a* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $|x|^{\frac{N}{q}}|f|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus B_{|x|}(0))} \leq C$, *com* $p > \frac{N}{2}$ *e* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Então,*

$$w(x) = C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy \leq \frac{C}{|x|^{N-2}}, \tag{1.73}$$

onde $C_N = [N(N-2)w_N]^{-1}$ *e* w_N *é o volume da bola unitária em* $\mathbb{R}^N$.

Demonstração: Note que

$$w(x) = \frac{1}{Nw_N} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{N-1}} |f|_{L^1(B_t(x))} dt.$$

De fato, temos de [8, Teorema 6, p.270], que

$$\begin{aligned} w(x) &= C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy \\ &= C_N \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B_t(x)} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dS_y \right) dt \\ &= C_N \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{N-2}} \left(\int_{\partial B_t(x)} f(y) dS_y \right) dt \\ &= C_N \lim_{R \to +\infty} \left[\int_0^R \frac{1}{t^{N-2}} \left(\int_{\partial B_t(x)} f(y) dS_y \right) dt \right] \\ &= C_N \lim_{R \to +\infty} \left[\int_0^R \frac{1}{t^{N-2}} \left(\frac{d}{dt} \int_{B_t(x)} f(y) dS_y \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Denotemos $h(t) = \int_{B_t(x)} f(y) dS_y$. Assim,

$$\begin{aligned} w(x) &= C_N \lim_{R \to +\infty} \left[\int_0^R \frac{1}{t^{N-2}} h'(t) dt \right] \\ &= C_N \lim_{R \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{t^{N-2}} h(t) \right)_0^R + (N-2) \int_0^R \frac{h(t)}{t^{N-1}} dx \right] \\ &= \frac{1}{Nw_N} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{N-1}} |f|_{L^1(B_t(x))} dt, \end{aligned}$$

mostrando a identidade desejada. Agora, vamos mostrar a estimativa. Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{N-1}} |f|_{L^1(B_t(x))} dt &= \int_{|x|/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{N-1}} |f|_{L^1(B_t(x))} dt + \int_0^{|x|/2} \frac{1}{t^{N-1}} |f|_{L^1(B_t(x))} dt \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Estimativa para J_1: Temos que

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{|x|/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{N-1}} |f|_{L^1(B_t(x))} dt \\
&\leq |f|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \int_{|x|/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{N-1}} dt \\
&= |f|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \left. \frac{t^{2-N}}{2-N} \right|_{|x|/2}^{+\infty} \\
&= C|x|^{2-N} |f|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Estimativa para J_2: Desde que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos Aplicando a desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^{|x|/2} \frac{1}{t^{N-1}} |f|_{L^1(B_t(x))} dt \\
&= \int_0^{|x|/2} \left[\int_{B_t(x)} \frac{1}{t^{N-1}} f(y) dy \right] dt \\
&\leq \int_0^{|x|/2} \left[t^{1-N} \left(\int_{B_t(x)} dy \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(B_t(x))} \right] dt \\
&= C \int_0^{|x|/2} t^{1-N+\frac{N}{q}} \|f\|_{L^p(B_t(x))} dt \\
&\leq C \|f\|_{L^p(B_{\frac{|x|}{2}}(x))} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{2-N+\frac{N}{q}}.
\end{aligned}
$$

Note que fazendo a mudança de variável $y = x - z$, temos

$$
\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(B_{\frac{|x|}{2}}(x))} &= \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(x)} |f(y)|^p dy \\
&= - \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |f(x-z)|^p dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |f(x-z)|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-z)|^p dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |f(x-z)|^p dz \\
&= \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{|x|}{2}}(0))}.
\end{aligned}
$$

Desta forma,

$$
J_2 \leq C \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{|x|}{2}}(0))} \left[\frac{|x|}{2} \right]^{\frac{N}{q}} |x|^{2-N}.
$$

Das estimativas feitas anteriormente, segue o resultado.

∎

Capítulo 2

Solução positiva para uma equação homogênea do tipo logística

2.1 Introdução e resultados principais

Neste capítulo, vamos estudar o seguinte problema

$$-\Delta u = \lambda(V(x)u - g(u)) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{P_λ}$$

onde $N \geq 3$, λ é um parâmetro real e o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua que muda de sinal, ou seja, $V = V^+ - V^-$ e $V^+ \neq 0$, onde $V^+(x) = \max\{V(x), 0\}$ e $V^-(x) = \max\{-V(x), 0\}$. Ainda sobre o potencial V consideramos as seguintes hipóteses:

$(V1)$ $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $V^+ = V_1 + V_2$, onde $V_1 \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x|^2 V_2(x) = 0$;

$(V2)$ Existem $A, \alpha > 0$ tais que

$$V^+(x) \leq A|x|^{-2-\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Vamos assumir que o termo de absorção não linear $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 que satisfaz as seguintes hipóteses:

(g_1) $g(0) = g'(0) = 0$ e $\liminf\limits_{t\to 0} \dfrac{g'(t)}{t} > 0$;

(g_2) A aplicação $t \mapsto g(t)/t$ é crescente em $(0, +\infty)$;

(g_3) g tem crescimento superlinear no infinito, isto é

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} > \|V\|_\infty.$$

Os resultados que estabeleceremos neste capítulo são devidos a Rădulescu e Repovš [15].

Diremos que uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução clássica do problema (P_λ) se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz (P_λ) pontualmente.

Neste capítulo destacamos dois resultados, o primeiro diz respeito a existência de solução positiva para o problema (P_λ). Mais precisamente temos:

Teorema 2.1 *Suponha que as funções V e g satisfazem as condições $(V1)$, (g_1), (g_2) e (g_3). Então o problema (P_λ) tem uma solução positiva, para qualquer $\lambda > \lambda^*$.*

No segundo resultado, provaremos que, ao assumirmos a hipótese $(V2)$, dependendo do valor do parâmetro real λ teremos existência ou não existência de solução positiva para o problema (P_λ). Além disso, no caso em que temos existência de solução positiva, mostraremos que a mesma tem decaimento do tipo polinomial no infinito. Neste sentido, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2 *Suponha que $N \geq 4$ e que V e g satisfazem as hipóteses $(V1)$, $(V2)$, (g_1), (g_2) e (g_3). Então,*

(i) *o problema (P_λ) tem uma única solução positiva para qualquer $\lambda > \lambda^*$. Além disso, existe $C > 0$ tal que*

$$u(x) \leq C|x|^{2-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N; \tag{2.1}$$

(ii) *o problema (P_λ) não tem solução para qualquer $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$.*

2.2 Resultados a priori

Nesta seção faremos alguns resultados a priori; sendo assim, assumiremos que o problema (P_λ) tem uma solução positiva. Com isso, provaremos que o decaimento da solução é do tipo polinomial e em seguida provaremos dois lemas que serão utilizados na demonstração do Teorema 2.2.Aqui assumiremos que V e g satisfazem as hipóteses $(V1)$, $(V2)$, (g_1), (g_2) e (g_3).

Lema 2.3 *Se u é uma solução positiva do problema (P_λ), tal que $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$u(x) \leq C|x|^{2-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Seja w_N o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$ e considere o potencial Newtoniano com densidade V^+u

$$w(x) = \frac{1}{N(N-2)w_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V^+(y)u(y)}{|x-y|^{N-2}} dy. \tag{2.2}$$

Desde que V^+u é uma função Hölder contínua, segue do Teorema 1.4 que w satisfaz

$$-\Delta w = V^+(x)u \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{2.3}$$

Desde que $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$, existe $R > 0$ tal que $|u(x)| < 1$, para $|x| \geq R$, e como $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $|u(x)| \leq C$ para $|x| \leq R$. Desta forma,

$$|u(x)| \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Daí, usando $(V2)$ e (2.4), obtemos

$$V^+(y)u(y) \leq C|y|^{-2-\alpha}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.5}$$

Aplicando o Lema 1.25 com $l = -2 - \alpha$ e $f(x) = V^+(x)u(x)$, temos

$$w(x) \leq C|x|^{-\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

Defina $v(x) = Cw(x) - u(x)$, com C suficientemente grande para que $v(0) > 0$. Portanto, de (2.6) e do fato de $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$, temos que $\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$. Afirmamos que $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De fato, caso contrário, existiria $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ponto de mínimo local de v e, neste caso, $v(x_0) < 0$, $\nabla v(x_0) = 0$ e $\Delta v(x_0) \geq 0$. Por outro lado, se $C > \lambda$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta v(x_0) &= C\Delta w(x_0) - \Delta u(x_0)\\
&= -CV^+(x_0)u(x_0) + \lambda(V(x_0)u(x_0) - g(u(x_0)))\\
&\leq (\lambda - C)V^+(x_0)u(x_0) - \lambda g(u(x_0))\\
&< 0.
\end{aligned}$$

O que é uma contradição. Logo,

$$v(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.7}$$

Consequentemente,

$$u(x) \leq Cw(x) \leq C|x|^{-\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Isto juntamente com $(V2)$ implica

$$V^+(x)u(x) \leq C|x|^{-2-2\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, com $l = -2 - 2\alpha$, segue do Lema 1.25 que se $2\alpha < N - 2$,

$$w(x) \leq C|x|^{-2\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Seja n_α o maior inteiro tal que $n_\alpha\alpha < N-2$. Então, repetindo o argumento anterior, segue que

$$w(x) \leq C|x|^{-n_\alpha\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e, consequentemente,

$$u(x) \leq C|x|^{-n_\alpha\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, utilizando $(V2)$, obtemos

$$V^+(x)u(x) \leq C|x|^{-2-(n_\alpha+1)\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $(n_\alpha + 1)\alpha > N - 2$, segue do Lema 1.25 que

$$w(x) \leq C|x|^{2-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De onde segue que

$$u(x) \leq C|x|^{2-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e isto completa a prova.

■

Lema 2.4 *Se u é uma solução positiva do problema (P_λ), tal que* $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$, *então* $V^+u, V^-u, g(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Para qualquer $R > 0$ consideremos a função da média

$$\overline{u}(R) = \frac{1}{Nw_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R} u(x)d\sigma = \frac{1}{Nw_N} \int_{\partial B_1} u(Rx)d\sigma, \tag{2.8}$$

onde w_N denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Então, usando a mudança de variável $y = Rx$ e o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{u}'(R) &= \frac{1}{Nw_N} \int_{\partial B_1} \nabla u(Rx).\eta(x)d\sigma \\ &= \frac{1}{Nw_N} \int_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial \eta}(Rx)d\sigma \\ &= \frac{1}{Nw_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)d\sigma \\ &= \frac{1}{Nw_N R^{N-1}} \int_{B_R} \Delta u(x)dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}Nw_N R^{N-1}\overline{u}'(R) &= \int_{B_R} \Delta u(x)dx \\ &= -\lambda \int_{B_R} (V(x)u(x) - g(u(x)))dx. \\ &= -\lambda \int_{B_R} (V^+(x)u(x)dx + \lambda \int_{B_R} (V^-(x)u(x) + g(u(x)))dx.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Pelo Lema 2.3, existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C|x|^{-N+2}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então, pela hipótese $(V2)$,

$$\begin{aligned}\int_{1\leq|x|\leq R} V^+(x)udx &\leq CA \int_{1\leq|x|\leq R} |x|^{-N-\alpha}dx \\ &= C_1 A \int_1^R r^{-N-\alpha} r^{N-1} dr \\ &= C_1 A \left[\frac{r^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_1^R \\ &= C_1 A \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{R^{-\alpha}}{\alpha}\right) \\ &\leq \frac{C_1 A}{\alpha}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Além disso, desde que u é contínua e $V^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{0\leq|x|\leq 1} V^+(x)udx \leq C. \tag{2.11}$$

Das estimativas (2.10) e (2.11), seque que $V^+u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Agora, vamos mostrar que $V^-u, g(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Para isto, por contradição, suponha que $V^-u+g(u) \notin L^1(\mathbb{R}^N)$. Então, por (2.9), temos que para R suficientemente grande $\overline{u}'(R) > 0$. De fato, desde que $V^+u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $V^-u+g(u) \notin L^1(\mathbb{R}^N)$, segue que para R suficientemente grande

$$\int_{B_R} V^+(x)udx \leq \int_{B_R} (V^-(x)u + g(u))dx.$$

De onde obtemos a afirmação. Desta forma, para R suficientemente grande $\overline{u}(R)$ é crescente e, assim, $\overline{u}(R) \nrightarrow 0$ quando $R \to \infty$, o que é uma contradição, pois aplicando a Proposição 2.3 em (2.8), obtemos

$$\overline{u}(R) = \frac{1}{Nw_N} \int_{\partial B_1} u(Rx)d\sigma \leq CR^{-N+2} \frac{1}{Nw_N} \int_{\partial B_1} |x|^{-N+2} d\sigma \leq C_1 R^{-N+2} \to 0,$$

quando $R \to +\infty$. Desta forma, $V^-(x)u + g(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $V^-u, g(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Para concluirmos a demonstração, resta mostrar que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pela hipótese (g_1), temos que existem $a, \delta > 0$ tais que

$$g'(t) > at \quad \text{para } 0 < t < \delta,$$

implicando

$$g(t) > \frac{at^2}{2} \quad \text{para } 0 < t < \delta. \tag{2.12}$$

Além disso, observe que o fato de $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ implica que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; u(x) \geq \delta\}$ é compacto. Daí, usando (2.12) e o fato de $g(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx &= \int_{[u\geq\delta]} u^2 dx + \int_{[u<\delta]} u^2 dx \\ &\leq \int_{[u\geq\delta]} u^2 dx + \frac{2}{a} \int_{[u<\delta]} g(u)dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

mostrando que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Resta provar que $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Multiplicando a equação

$$-\Delta u = \lambda(V(x)u - g(u))$$

por u, integrando e usando o teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)d\sigma = \lambda \int_{B_R} (V(x)u - g(u))udx, \tag{2.13}$$

para qualquer $R > 0$. Desde que $Vu - g(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que $(Vu - g(u))u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e, assim,

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)d\sigma \right) < \infty.$$

Agora vamos provar que $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. De fato, suponha que $|\nabla u| \notin L^2(\mathbb{R}^N)$, então existe $R_0 > 0$ tal que

$$\int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)d\sigma \geq \frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx, \tag{2.14}$$

para qualquer $R \geq R_0$, pois, caso contrário, teríamos de (2.13) que

$$\frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \leq \lambda \int_{B_R} (V(x)u - g(u))u dx$$

o que implicaria $(Vu - g(u))u \notin L^1(\mathbb{R}^N)$, o que é uma contradição. Defina as funções

$$\begin{aligned}
A(R) &:= \int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)d\sigma;\\
B(R) &:= \int_{\partial B_R} u^2(x)d\sigma;\\
C(R) &:= \int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a desigualdade (2.14) da forma

$$A(R) \geq \frac{1}{2}C(R), \quad \text{para qualquer } R \geq R_0. \tag{2.15}$$

Por outro lado, temos da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
A^2(R) = \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right\rangle^2_{L^2(\partial B_R)} &\leq \|u\|^2_{L^2(\partial B_R)} \left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L^2(\partial B_R)}\\
&= \left(\int_{\partial B_R} u^2 d\sigma\right)\left(\int_{\partial B_R} |\frac{\partial u}{\partial \eta}|^2 d\sigma\right)\\
&= B(R)\left(\int_{\partial B_R} |\nabla u.\eta|^2 d\sigma\right)\\
&\leq B(R)\left(\int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 d\sigma\right).
\end{aligned}$$

Isto junto com o [8, Teorema 6, p.270] implica que

$$A^2(R) \leq B(R)C'(R). \tag{2.16}$$

Agora, usando (2.15) e (2.16), obtemos

$$C'(R) \geq \frac{C^2(R)}{4B(R)}, \quad \text{para qualquer } R \geq R_0.$$

Assim,

$$\frac{1}{B(R)} - 4\frac{C'(R)}{C^2(R)} \leq 0, \quad \text{para qualquer } R \geq R_0,$$

equivalentemente,

$$\frac{d}{dr}\left[\int_0^r \frac{1}{B(t)}dt + \frac{4}{C(r)}\right]_{r=R} \leq 0, \quad \text{para qualquer } R \geq R_0. \tag{2.17}$$

Por outro lado, desde que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$B(R) \leq \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)dx = K, \quad \forall R > 0,$$

implicando,

$$\frac{1}{B(R)} \geq \frac{1}{K}, \quad \forall R > 0.$$

Desta forma,

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{B(t)} \geq \lim_{R\to\infty}\frac{R}{K} = +\infty,$$

de onde segue que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{B(t)} = +\infty.$$

Além disso, como estamos supondo $|\nabla u| \notin L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{C(R)} = 0.$$

O que implicaria que a função

$$\frac{4}{C(r)} + \int_0^r \frac{dt}{B(t)}$$

é crescente para $R \geq R_0$. O que é uma contradição com (2.17). Logo, $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, mostrando que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

■

Lema 2.5 *Sejam u e v duas soluções positivas do problema (P_λ), tais que $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = \lim_{|x|\to+\infty} v(x) = 0$, então*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma = 0. \tag{2.18}$$

Demonstração: Sendo u solução de (P_λ), temos

$$-\Delta u = \lambda(V(x)u - g(u)). \tag{2.19}$$

Multiplicando a equação (2.19) por v, integrando sobre B_R e usando o teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{B_R}\nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma = \lambda\int_{B_R}(V(x)uv - g(u)v)dx.$$

Desde que u e v são soluções do problema (P_λ), temos que $\nabla u.\nabla v, V(x)uv - g(u)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, $\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma$ existe. Resta mostra que este limite é zero. Segue do fato de que $|\eta| = 1$ e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma\right| &\leq \left(\int_{\partial B_R} |u(x)|^2 d\sigma\right)^{1/2}\left(\int_{\partial B_R} |\nabla v(x).\eta|^2 d\sigma\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{R}\int_{\partial B_R} |u(x)|^2 d\sigma\right)^{1/2}\left(R\int_{\partial B_R} |\nabla v(x)|^2 d\sigma\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Usando novamente a hipótese de que u e v são soluções do problema (P_λ), segue do Lema 2.4 que a integral

$$\int_0^\infty \left(\int_{\partial B_R} (u^2 + |\nabla v|^2) d\sigma\right) dR$$

é convergente. Então

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^{2R}\left(\int_{\partial B_r} (u^2 + |\nabla v|^2) dS\right) dr = 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, temos

$$\int_R^{2R}\left(\int_{\partial B_r} (u^2 + |\nabla v|^2) dS\right) dr = R\int_{\partial B_{R'}} (u^2 + |\nabla v|^2) dS,$$

para algum $R' \in [R, 2R]$. Desde que

$$0 \leq \frac{R'}{2}\int_{\partial B_{R'}} (u^2 + |\nabla v|^2) dS \leq R\int_{\partial B_{R'}} (u^2 + |\nabla v|^2) dS,$$

temos que

$$\lim_{R\to\infty} R'\int_{\partial B_{R'}} (u^2 + |\nabla v|^2) dS = 0.$$

Assim, podemos encontrar uma seqüência (R_n) com $R_n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} R_n\int_{\partial B_{R_n}} (u^2 + |\nabla v|^2) dS = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\lim_{n\to\infty} R_n\int_{\partial B_{R_n}} |\nabla v|^2 dS = 0 = \lim_{n\to\infty} R_n\int_{\partial B_{R_n}} u^2 dS. \tag{2.21}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$R_n\int_{\partial B_{R_n}} u^2 dS \leq \epsilon,$$

ou seja, para $n \geq n_0$, temos

$$\int_{\partial B_{R_n}} u^2 dS \leq \frac{\epsilon}{R_n} \leq K.$$

Usando isto e (2.21) em (2.20), obtemos

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} u\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma = 0.$$

■

2.3 Problema auxiliar

Nesta seção vamos obter um resultado que será usado nas provas dos Teoremas 2.1 e 2.2. Aqui, estudaremos o problema (P_λ) em domínio limitado, ou seja, fixado $R > 0$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda(V(x)u - g(u)) \quad \text{em} \quad B_R \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{2.22}$$

Usando o método de sub e super solução provaremos que o problema (2.22) tem uma solução positiva, para qualquer $\lambda > \lambda_1(B_R)$. Mais precisamente, temos:

Lema 2.6 *Seja $\lambda > \lambda_1(B_R)$, onde $\lambda_1(B_R)$ é definido por* (1.24). *Então, o problema* (2.22) *tem uma solução positiva.*

Demonstração: Para provar este resultado precisamos encontrar uma sub e uma supersolução para o problema (2.22). Note que $\overline{u}(x) = M$ é uma supersolução do problema (2.22) para M suficientemente grande. De fato, temos que

$$\overline{u}(x) = M \geq 0 \quad \text{sobre } \partial B_R.$$

Desde que $\Delta\overline{u} = 0$, resta mostrar que

$$g(x, \overline{u}(x)) := \lambda(V(x)\overline{u} - g(\overline{u})) \leq 0 \quad \text{em } B_R.$$

Por (g_3), para t suficientemente grande, temos

$$g(t) \geq t\|V\|_\infty.$$

Assim,

$$V(x)\overline{u} - g(\overline{u}) \leq \|V\|_\infty\overline{u} - g(\overline{u}) \leq 0.$$

Agora queremos encontrar uma subsolução positiva para o problema (2.22). Desde que $\lambda > \lambda_1(B_R)$, segue da Proposição 1.19 que o autovalor μ_1, definido em (1.41), do problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda V(x)u &= \mu u \quad \text{em} \quad B_R \\ \qquad\qquad u &> 0 \quad \text{em} \quad B_R \\ \qquad\qquad u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases} \tag{2.23}$$

é negativo. Seja e_1 uma autofunção do problema (2.23) associada a μ_1, então

$$\begin{cases} -\Delta e_1 - \lambda V(x)e_1 &= \mu e_1 \quad \text{em} \quad B_R \\ \qquad\qquad e_1 &> 0 \quad \text{em} \quad B_R \\ \qquad\qquad e_1 &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{2.24}$$

Afirmamos que

$$\underline{u}(x) = \epsilon e_1(x) \tag{2.25}$$

é uma subsolução do problema (2.22) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. De fato, já sabemos que $\underline{u}(x) = 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim, precisamos verificar que

$$-\Delta\underline{u}(x) \leq g(x, \underline{u}(x)) = \lambda(V(x)\underline{u}(x) - g(\underline{u}(x))), \quad \text{em } B_R,$$

ou seja,

$$-\Delta \underline{u}(x) - g(x, \underline{u}(x)) \leq 0, \quad \text{em } B_R. \tag{2.26}$$

De (2.24), temos

$$-\Delta \underline{u} = \epsilon(-\Delta e_1) = \epsilon(\lambda V(x) e_1 + \mu_1 e_1).$$

Desta forma, (2.26) é equivalente a

$$\epsilon \mu_1 e_1 + \lambda g(\epsilon e_1) \leq 0, \quad \text{em } B_R. \tag{2.27}$$

Desde que

$$g'(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{g(\epsilon e_1) - g(0)}{\epsilon e_1}.$$

Segue da hipótese (g_1) que $g(0) = g'(0) = 0$, daí

$$g(\epsilon e_1) = \epsilon e_1 o(1), \quad \text{quando } \epsilon \to 0. \tag{2.28}$$

Usando (2.28) em (2.27), concluímos que

$$\epsilon \mu_1 e_1 + \lambda g(\epsilon e_1) = \epsilon e_1(\mu_1 + \lambda o(1)) \leq 0,$$

para ϵ suficientemente pequeno, já que $\mu_1 < 0$. Com isto, mostramos que $\underline{u} = \epsilon e_1$ é uma subsolução para o problema (2.22).

Assim, para usarmos o método de sub e super solução, resta mostrarmos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em B_R, mas note que isto é facilmente satisfeito, pois $\underline{u}$ é limitada em $\overline{B_R}$ e estamos tomando ϵ pequeno. Desta forma, segue do Teorema 1.23 que o problema (2.22) tem uma solução positiva.

■

Observação 2.7 *Note que* $\overline{u}(x) = M$ *é uma supersolução do problema* (2.22) *independente do raio da bola em que o problema é considerado. Isto será fundamental quando estivermos interessados em obter uma candidata a solução do problema* (P_λ).

2.4 Demonstração do Teorema 2.1

Nesta seção vamos apresentar a prova do Teorema 2.1. A demonstração será feita em três etapas. Na primeira etapa, encontraremos um candidato a solução do problema. Em seguida, vamos estabelecer condições que nos permitam "passar o limite" quando $R \to \infty$ no problema (2.22). Assim, na segunda etapa iremos utilizar estimativas interiores de Schauder para justificar certas limitações que nos permitirão na terceira etapa, através de um argumento diagonal provarmos que o candidato obtido na primeira etapa é solução do problema (P_λ).

Etapa 1. Fixe $\lambda > \lambda^*$ e uma sequência $R_1 < R_2 < ... < R_n < ...$ de números positivos tal que $R_n \to \infty$ e $\lambda_1(R_1) < \lambda$. Implicando que $\lambda_1(R_n) < \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que a sequência $(\lambda_1(R_n))$ é decrescente. Pela observação anterior, temos que $u_n \leq M$ em B_{R_n}, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, observe que u_{n+1} é uma supersolução de (2.22) para $R = R_n$. De fato, desde que $\overline{B_{R_n}} \subset B_{R_{n+1}}$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} = \lambda(V(x)u_{n+1} - g(u_{n+1})) & \text{em} \quad B_{R_n} \\ \quad u_{n+1} > 0 & \text{sobre} \quad \partial B_{R_n}. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} \Delta(u_{n+1} - u_n) & = 0 \quad \text{em} \quad B_{R_n} \\ u_{n+1} - u_n & > 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_{R_n} \end{cases}$$

Logo, pelo princípio do máximo, $u_n \leq u_{n+1}$. Desta forma, a sequência $(u_n(x))$ é monótona crescente e limitada para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, a função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) \tag{2.29}$$

está bem definida e é positiva em $\mathbb{R}^N$.

Etapa 2. Em termos de simplicidade, vamos supor que a sequência $R_n = n$. Fixado $m \in \mathbb{N}$ vamos mostrar que

$$\|u_n\|_{C^2(\overline{B_m})} \leq C, \quad \text{para } n \geq 4m. \tag{2.30}$$

Como foi dito anteriormente, vamos utilizar uma consequência das estimativas interiores de Schauder. Pela primeira parte da demonstração, temos que $u_n \in C^{2,\alpha}(B_{4m})$ e satisfaz

$$-\Delta u_n = f(x, u_n) \quad \text{em } B_{4m}, \text{ para } n \geq 4m,$$

onde $f_n(x) = f(x, u_n) := \lambda(V(x)u_n - g(u_n))$. Sejam $d_0 = \text{dist}(0, \partial B_{4m}) = 4m$ e $d = \frac{4m}{2} = 2m$. Assim, considerando $\Omega' = B_{\frac{4m-1}{2}}$, temos que $\Omega' \subset\subset B_{4m}$ e $\text{dist}(\Omega', B_{4m}) = \frac{4m+1}{2} \geq 2m$. Daí, pelo Teorema 1.3, existe $C > 0$ tal que

$$d\|Du_n\|_{C(\Omega')} + d^2\|D^2u_n\|_{C(\Omega')} + d^{2+\alpha}\|D^2u_n\|_{C^\alpha(\Omega')} \leq C(\|u_n\|_{C(B_{4m})} + \|f_n\|_{C^\alpha(B_{4m})}), \tag{2.31}$$

para $n \geq 4m$. Note que de maneira análoga ao feito no Teorema 1.23 temos que

$$\|u_n\|_{C(B_{4m})} + \|f_n\|_{C^\alpha(B_{4m})} \leq K, \quad \text{para } n \geq 4m. \tag{2.32}$$

Assim, desde que $\overline{B_m} \subset \Omega'$, temos juntando (2.31) e (2.32) que

$$\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_m})} \leq \|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq K, \quad \text{para } n \geq 4m. \tag{2.33}$$

Daí segue que a familia $\{D^2u_n\}$ é equicontínua e uniformemente limitada em $\overline{B_m}$ e, assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$u_n \to v, \quad \text{em } C^{2,\alpha}(\overline{B_m}). \tag{2.34}$$

Etapa 3. Vamos utilizar um argumento diagonal para justificar que a menos de subsequência

$$u_n \to u \quad \text{em } C^2_{loc}(\mathbb{R}^N), \tag{2.35}$$

onde u é a função definida em (2.29). Pela segunda etapa, temos que existe uma subsequência $(u_n^1) \subseteq (u_n)$ satisfazendo

$$u_n^1 \to u_1 \quad \text{em } C^2(\overline{B_1}).$$

Desde que $u_n^1(x) \to u(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, segue que $u_1 \equiv u|_{\overline{B_1}}$. Agora, aplicando a segunda etapa para (u_n^1), temos que existe uma subsequência $(u_n^2) \subseteq (u_n^1)$ satisfazendo

$$u_n^2 \to u_2 \quad \text{em} \ \ C^2(\overline{B_2}).$$

Usando o argumento anterior, segue que $u_2 \equiv u|_{\overline{B_2}}$, ou seja,

$$u_n^2 \to u \quad \text{em} \ \ C^2(\overline{B_2}).$$

Seguindo assim, fixado $k \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência $(u_n^k) \subseteq (u_n^{k-1})$ que satisfaz

$$u_n^k \to u \quad \text{em} \ \ C^2(\overline{B_k}).$$

Afirmamos que a sequência diagonal (u_k^k) atende (2.35). De fato, seja B uma bola qualquer em $\mathbb{R}^N$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset B_{k_0}$. Daí, para $k \geq k_0$, $B \subset B_k$. Logo,

$$u_n^k \to u \quad \text{em} \ \ C^2(B), \text{ para cada}\, k \geq k_0.$$

Desta forma, devido a forma que tomamos as subsequências (u_n^k), obtemos

$$u_k^k \to u \quad \text{em} \ \ C^2(B).$$

Mostrando que a sequência (u_k^k) satisfaz (2.35). Assim, tomando o limite no problema (2.22) concluímos que a função u definida em (2.29) é uma solução positiva para o problema (P_λ).

2.5 Demonstração do Teorema 2.2

Nesta seção apresentaremos a prova do Teorema 2.2. A demonstração será feita em três lemas.

O primeiro lema é um resultado de existência. Nele mostraremos que para $\lambda > \lambda^*$ o problema (P_λ) tem uma solução positiva que tende a zero no infinito. Mais precisamente temos:

Lema 2.8 *Suponha que V e g satisfazem as hipóteses $(V1)$, $(V2)$, (g_1), (g_2) e (g_3). Então, para qualquer $\lambda > \lambda^*$, o problema (P_λ) tem uma solução positiva, com*

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0. \tag{2.36}$$

Demonstração: Para provarmos este resultado, basta repetir a demonstração feita no Teorema 2.1, com a seguinte mudança, no lugar de considerarmos uma constante como supersolução, a hipótese $(V2)$ nos garantirá que a função

$$\overline{u}(x) = n/(1 + |x|^2), \quad n \in \mathbb{N}$$

é uma supersolução do problema (2.22) para qualquer $R > 0$ e n suficientemente grande. De fato, temos que

$$\overline{u}_{x_i} = -\frac{2nx_i}{(1 + |x|^2)^2}$$

e

$$\overline{u}_{x_i x_i} = \frac{-2n(1+|x|^2)^2 + 8nx_i^2(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^4}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u} &= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{2n(1+|x|^2)^2 - 8nx_i^2(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^4}\right] \\ &= \frac{N+(N-4)|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\overline{u}. \end{aligned}$$

Desta forma, para provar que $\overline{u}$ é uma supersolução de (2.22), para todo $R > 0$, devemos mostrar que

$$\frac{N+(N-4)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} \geq \lambda V(x) - \lambda\frac{g(\overline{u})}{\overline{u}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.37}$$

Seja

$$h(x) = \frac{N+(N-4)|x|^2}{(1+|x|^2)^2},$$

e observe que para $|x|$ suficientemente grande, $h(x)$ se comporta como $1/|x|^2$. Desta forma, usando a hipótese $(V2)$, obtemos para $|x|$ suficientemente grande que

$$V(x) \leq V^+(x) \leq \frac{1}{|x|^{2+\alpha}} \leq \frac{1}{|x|^2}.$$

Desde que $\lambda g(\overline{u})/\overline{u} \geq 0$, temos que para $|x| > K$ para algum K suficientemente grande (2.37) ocorre. Já para $|x| \leq K$, podemos tomar n suficientemente grande de forma que

$$\frac{g(\overline{u})}{\overline{u}} > \|V\|_\infty.$$

Desde que $N \geq 4$, temos

$$\lambda V(x) \leq \lambda\|V\|_\infty \leq \lambda\frac{g(\overline{u})}{\overline{u}} + h(x).$$

Mostrando que (2.37) é satisfeito para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, assim, $\overline{u}$ é uma supersolução para o problema (2.22) para qualquer $R > 0$.

Note que $\underline{u} \leq \overline{u}$, pois podemos tomar para cada $R > 0$, ϵ suficientemente pequeno em (2.25) de modo que a desigualdade ocorra. Assim, temos que o problema (P_λ) tem uma solução $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) \leq \overline{u}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, tendo em vista que

$$\lim_{|x|\to+\infty} \overline{u}(x) = 0,$$

segue que

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0,$$

implicando que u é uma solução positiva do problema (P_λ) que tende a zero no infinito.

$\blacksquare$

O Lema seguinte nos fornece um resultado de unicidade de solução para o problema (P_λ). Mais precisamente temos

Lema 2.9 *Suponha que V e g satisfazem as hipóteses $(V1)$, $(V2)$, (g_1), (g_2) e (g_3). Então, para qualquer $\lambda > \lambda^*$, o problema (P_λ) tem uma única solução positiva satisfazendo* (2.36).

Demonstração: Sejam u e v duas soluções positivas do problema (P_λ) satisfazendo (2.36). Então, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u \leq v$. De fato, temos que $\overline{u} = \min\{u, v\}$ é, claramente, uma supersolução de (P_λ) e $\underline{u}$ definida em (2.25) é uma subsolução. Assim, encontraríamos uma solução w pelo método de sub e super solução tal que $w \leq \overline{u}$. Então, faríamos o raciocínio para v e w, justificando o sem perda de generalidade. Desde que u e v são soluções de (P_λ), temos

$$-\Delta u = \lambda(V(x)u - g(u)) \tag{2.38}$$

e

$$-\Delta v = \lambda(V(x)v - g(v)). \tag{2.39}$$

Multiplicando (2.38) por v, (2.39) por u e integrando sobre B_R, obtemos

$$\int_{B_R} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial B_R} u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma = \lambda \int_{B_R} V(x)uv - \lambda \int_{B_R} vg(u)dx \tag{2.40}$$

e

$$\int_{B_R} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial B_R} v(x)\frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = \lambda \int_{B_R} V(x)uv - \lambda \int_{B_R} ug(u)dx. \tag{2.41}$$

Subtraindo estas duas expressões obtemos:

$$\int_{\partial B_R} \left(u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta} - v(x)\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma = \lambda \int_{B_R} uv \left(\frac{g(v)}{v} - \frac{g(u)}{u} \right) dx.$$

Pelo Lema 2.5, o lado esquerdo converge para zero quando $R \to +\infty$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} uv \left(\frac{g(v)}{v} - \frac{g(u)}{u} \right) dx = 0. \tag{2.42}$$

Desde que $0 < u \leq v$, temos da hipótese que

$$\frac{g(v)}{v} - \frac{g(u)}{u} \geq 0.$$

Consequentemente, (2.42) implica que

$$\frac{g(v)}{v} = \frac{g(u)}{u}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $g(t)/t$ não é constante, obtemos $u \equiv v$.

$\blacksquare$

No próximo resultado, mostraremos a não existência de solução para o problema (P_λ). Mostraremos que para $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ o problema (P_λ) não tem solução. Mais precisamente temos

Lema 2.10 *Suponha que V e g satisfazem as hipóteses $(V1)$, $(V2)$, (g_1), (g_2) e (g_3). Então, para qualquer $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$, o problema (P_λ) não tem solução positiva satisfazendo* (2.36).

Demonstração: Vamos argumentar por contradição. Suponha que para $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ o problema (P_λ) tem uma solução positiva satisfazendo (2.36). Desta forma,

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = \lambda \int_{B_R} (V(x)u^2 - g(u)u) dx.$$

Dos Lemas 2.4 e 2.5, segue fazendo $R \to +\infty$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx.$$

Note que se $\lambda = 0$, teríamos $u = 0$, o que é um absurdo. Assim, desde que $\lambda > 0$ e $g \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx. \tag{2.43}$$

Por outro lado, segue da definição de λ^* e $\lambda_1(R)$ que

$$\lambda_1(R) \leq \frac{\int_{B_R} |\nabla \varphi|^2 dx}{\int_{B_R} V(x)\varphi^2 dx},$$

com $\int_{B_R} V(x)\varphi^2 dx > 0$, onde $\varphi \in H_0^1(B_R)$. Desde que $\lambda^* \leq \lambda_1(R)$, para todo $R > 0$, temos que

$$\lambda^* \int_{B_R} V(x)\varphi^2 dx \leq \int_{B_R} |\nabla \varphi|^2 dx \tag{2.44}$$

para qualquer $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ com $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\varphi^2 dx > 0$. Fixe $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } |x| \leq 1 \\ 0, \text{ se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Para $n \geq 1$ defina $\psi_n(x) := \varphi_n(x)u(x)$, onde $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{x}{n})$. Então,

$$\psi_n(x) \to u(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$|\psi_n(x)| \leq u(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ que $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$. Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\psi_n \to u \quad \text{em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Afirmamos que

$$|\nabla \psi_n| \to |\nabla u| \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N). \tag{2.45}$$

De fato, seja $\Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^N; n \leq |x| \leq 2n\}$. Daí,

$$\begin{aligned}\|\nabla\psi_n - \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \|u\nabla\varphi_n + \varphi_n\nabla u - \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|(\varphi_n - 1)\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\nabla\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|(\varphi_n - 1)\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\nabla\varphi_n\|_{L^2(\Omega_n)}.\end{aligned}$$

Desde que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi_n \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, temos que $u^2 \in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla\varphi_n| \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$. Daí, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|\nabla\psi_n - \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|(\varphi_n - 1)\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega_n)}.\|\nabla\varphi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.46}$$

Note que para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi_n(x) \to 1$. Assim,

$$(\varphi_n(x) - 1)\nabla u \to 0 \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$|(\varphi_n(x) - 1)\nabla u| \leq |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} \|(\varphi_n(x) - 1)\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0. \tag{2.47}$$

Observe também que

$$\|\nabla\varphi_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla\varphi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.48}$$

Por fim, note que usando o fato de $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\|u\|_{L^{2^*}(\Omega_n)})$$

obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \|u\|_{L^{2^*}(\Omega_n)} = 0. \tag{2.49}$$

Assim, utilizando de (2.46) à (2.49), temos que (2.45) ocorre, provando nossa afirmação. Agora, desde que

$$V^+u^2, V^-u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N),\ V^+\psi_n^2 \leq V^+u^2 \,\text{e}\, V^-\psi_n^2 \leq V^-u^2,$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)\psi_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)u^2 dx$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)\psi_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\psi_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx. \tag{2.50}$$

Então, por (2.43) e (2.50) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\psi_n^2 dx > 0,$$

para qualquer $n \geq n_0$. Assim,

$$\lambda^* \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\psi_n^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n|^2 dx, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Então, usando (2.45) e (2.50) obtemos

$$\lambda^* \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \tag{2.51}$$

O que é uma contradição com (2.43). Logo, o problema (P_λ) não tem solução se $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$.

∎

Demonstração do Teorema 2.2: A prova deste resultado segue dos Lemas 2.3, 2.8, 2.9 e 2.10.

∎

Capítulo 3

Solução positiva para uma equação não homogênea do tipo logística

3.1 Introdução e resultados principais

Neste capítulo vamos estudar o seguinte problema não homogêneo:

$$-\Delta u = a(x)(\lambda u - g(u)) - \mu h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{$P_{\mu,\lambda}$}$$

onde $N \geq 3$, λ e μ são parâmetros reais, $a, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções positivas e a não linearidade $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tem crescimento superlinear. Sobre o potencial a consideramos a seguinte hipótese:

(a_1) $0 < a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

A não linearidade g atende as hipóteses:

(g_1) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua com $g(0) = g'(0) = 0$;

(g_2) $0 < \alpha_1 := \liminf\limits_{s \to +\infty} \dfrac{g(s)}{s^p} \leq \alpha_2 := \limsup\limits_{s \to +\infty} \dfrac{g(s)}{s^p} < \infty$, $p > 1$;

(g_3) $s \mapsto \dfrac{g(s)}{s}$ é uma função não decrescente.

Por fim, sobre h assumimos que:

(h_1) $0 < h \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\sigma = 1 + |x|^2$;

(h_2) $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $|x|^{\frac{N}{r}} |h|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_{|x|}(0))} \leq C$, com $r > \frac{N}{2}$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$.

Os resultados que estabeleceremos neste capítulo são devidos a Costa-Drábek-Tehrani [5].

Uma solução do problema $(P_{\mu,\lambda})$ será entendida no sentido fraco. Mais precisamente, diremos que $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de $(P_{\mu,\lambda})$ se

$$\int \nabla u \nabla v dx - \lambda \int a(x) u v dx + \int a(x) g(u) v dx + \mu \int h(x) v dx = 0, \tag{3.1}$$

para toda $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}_a(\mathbb{R}^N)$.

O principal resultado deste capítulo nos dirá sob quais condições dos parâmetros reais λ e μ o problema $(P_{\mu,\lambda})$ tem solução positiva. Mais precisamente temos:

Teorema 3.1 *Sejam $p > 1$, $N \geq 3$, a, h e g funções satisfazendo as hipóteses (a_1), $(g_1) - (g_3)$, $(h_1) - (h_2)$. Então, para cada $\lambda > \lambda_1 = \lambda_1(a)$, existe $\hat{\mu} = \hat{\mu}(\lambda) > 0$ tal que, para $0 < \mu < \hat{\mu}$, o problema $(P_{\mu,\lambda})$ tem uma solução positiva u_μ satisfazendo*

$$u_\mu(x) \geq \frac{C}{|x|^{N-2}}, \quad \text{para } |x| \text{ grande}, \tag{3.2}$$

onde $\lambda_1(a)$ denota o autovalor principal do problema de autovalor (1.45).

Dividiremos a demonstração deste resultado em duas Seções. Na Seção 3.2, estudaremos um problema auxiliar e, por fim, na Seção 3.3, mostraremos que a solução que encontraremos na Seção 3.2 é de fato uma solução positiva para o problema $(P_{\mu,\lambda})$ e possui o decaimento dado por (3.2).

3.2 Um problema auxiliar

Nesta seção vamos considerar o seguinte problema auxiliar

$$-\Delta u = a(x)(\lambda u^+ - g(u)) - \mu h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{$P^+_{\mu,\lambda}$}$$

onde $N \geq 3$, λ e μ são parâmetros reais e as funções a, h e g satisfazem as hipóteses descritas na Seção 3.1.

Para mostrar que o problema $(P^+_{\mu,\lambda})$ tem solução, iremos usar argumento de minimização. Mais precisamente, iremos usar o Método Direto do Cálculo das Variações (ver [6, Teorema 1.2.]) para o funcional $I_\mu : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido por

$$I_\mu(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int |\nabla u|^2 dx - \dfrac{\lambda}{2}\int a(x)(u^+)^2 dx + J(u) + \mu \int h(x) u dx, & \text{se } J(u) < +\infty \\ +\infty, & \text{se } J(u) = +\infty, \end{cases}$$

onde $J : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dado por

$$J(u) = \int a(x) G(u) dx.$$

Note que todo ponto crítico u_μ de I_μ é uma solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$. Em particular, se u_μ é um ponto crítico não trivial e não negativo, então u_μ é uma solução do problema $(P_{\mu,\lambda})$.

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Proposição 3.2 *Suponha que a, g e h satisfazem as hipóteses (a_1), $(g_1) - (g_3)$ e (h_1). Então, existe $\mu_0 > 0$ e $u_\mu \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tais que, para $0 < \mu \leq \mu_0$, u_μ é uma solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$.*

Já que estamos interessados em mostrar que o problema $(P_{\mu,\lambda})$ tem solução, iniciamos apresentando um resultado a priori que nos fornecerá uma condição necessária para que o problema $(P_{\mu,\lambda})$ tenha solução.

Lema 3.3 *Suponhamos que as hipóteses* (a_1), $(g_1)-(g_3)$ *e* (h_1) *ocorrem. Se* $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *é uma solução positiva de* $(P_{\mu,\lambda})$, *então* $\lambda > \lambda_1$.

Demonstração: Seja φ_1 uma autofunção positiva do problema (1.45) associada ao autovalor λ_1, ou seja,

$$\int \nabla\varphi_1 \nabla u dx = \lambda_1 \int a(x)\varphi_1 u dx. \tag{3.3}$$

Escolhendo $v = \varphi_1$ como uma função teste em (3.1), obtemos

$$\int \nabla u \nabla \varphi_1 dx = \lambda \int a(x) u \varphi_1 dx - \int [a(x)g(u) + \mu h(x)u]\varphi_1 dx.$$

De (g_1) e (h_1) temos que

$$\int [a(x)g(u) + \mu h(x)u]\varphi_1 dx > 0.$$

Desta forma, usando (3.3), obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda)\int a(x)u\varphi_1 dx < 0.$$

Portanto, $\lambda > \lambda_1$.

∎

A seguir apresentaremos um resultado que será usado em todo este capítulo. Desde que estamos interessados em obter soluções positivas, redefinimos a função g da seguinte forma $g(s) = 0$ para $s \leq 0$.

Lema 3.4 *Suponhamos que as hipóteses* (g_1) *e* (g_2) *ocorrem. Então, para qualquer* $\epsilon > 0$ *existem constantes positivas* $C_1 = C_1(\epsilon)$ *e* $C_2 = C_2(\epsilon)$ *tais que, para* $s \geq 0$,

(a) $-\epsilon s + C_1 s^p \leq g(s) \leq \epsilon s + C_2 s^p$;

(b) $-\epsilon s^2 + C_1 s^{p+1} \leq G(s) \leq \epsilon s^2 + C_2 s^{p+1}$, *onde* $G(s) = \int_0^s g(t)dt$.

Demonstração: Segue da hipótese (g_2) que dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que para $s > A$

$$\alpha_1 \leq \frac{g(s)}{s^p} \leq \alpha_2. \tag{3.4}$$

Desta forma, temos que

$$\alpha_1 s^p \leq g(s) \leq \alpha_2 s^p, \text{ para } s > A. \tag{3.5}$$

Note que por (g_1)

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + r(s) = r(s),$$

onde $\lim_{s\to 0} r(s)/s = 0$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que para $|s| < \delta$

$$-\epsilon s \leq g(s) \leq \epsilon s. \tag{3.6}$$

Por outro lado, temos da continuidade da função g que existe $K > 0$ tal que

$$0 \leq \frac{g(s)}{s^p} \leq K, \quad \text{para } \delta \leq s \leq A. \tag{3.7}$$

Assim, de (3.5), (3.6) e (3.7), segue o item (a). O item (b) segue de (a) por integração.

■

No que segue mostraremos que I_μ é coercivo e fracamente s.c.i. Para isto, vamos considerar inicialmente o seguinte resultado.

Lema 3.5 *Sejam $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^N)$, com $\sigma = 1 + |x|^2$, então*

$$\left| \int h(x) u dx \right| \leq C \|h\|_{2,\sigma} \|u\|, \tag{3.8}$$

onde $\|h\|_{2,\sigma} = \left(\int \sigma |h|^2 dx\right)^{1/2}$.

Demonstração: De fato, desde que $h \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^N)$, com $\sigma = 1 + |x|^2$, segue das desigualdades de Hölder e de Hardy que

$$\begin{aligned} \left| \int h(x) u dx \right|^2 &= \left| \int \sqrt{1 + |x|^2} h(x) \frac{u}{\sqrt{1 + |x|^2}} dx \right|^2 \\ &\leq \|h\|^2_{2,\sigma} \left(\int \frac{u^2}{1 + |x|^2} dx \right) \\ &\leq C \|h\|^2_{2,\sigma} \|u\|^2. \end{aligned}$$

■

O resultado que apresentaremos a seguir mostrará que o funcional I_μ é coercivo.

Lema 3.6 *Seja $\lambda > \lambda_1$. Então,*

(a) *existem números reais positivos μ_0 e β_0 tais que*

$$\inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} I_\mu(u) \leq -\beta_0, \quad \text{para todo } 0 \leq \mu \leq \mu_0; \tag{3.9}$$

(b) *para $0 \leq \mu \leq \mu_0$, o funcional é uniformemente coercivo, isto é, dado $M > 0$ existe R_0 tal que, para $0 \leq \mu \leq \mu_0$*

$$I_\mu(u) \geq M, \quad \text{se } \|u\| \geq R_0. \tag{3.10}$$

Demonstração de (a): Seja φ_1 uma autofunção positiva do problema (1.45) associada ao autovalor λ_1, ou seja,

$$\|\varphi_1\| = 1 \text{ e } \int |\nabla \varphi_1|^2 dx = \lambda_1 \int a(x) \varphi_1^2 dx.$$

Então, usando o Lema 3.4(b), obtemos

$$\begin{aligned}
I_\mu(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{\lambda}{2}t^2\int a(x)\varphi_1^2dx + \int a(x)G(t\varphi_1)dx + \mu t\int h(x)\varphi_1 dx \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)t^2 + \int a(x)G(t\varphi_1)dx + \mu t\int h(x)\varphi_1 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)t^2 + \epsilon t^2\int a(x)\varphi_1^2dx + C_2t^{p+1}\int a(x)\varphi_1^{p+1}dx + \mu t\int h(x)\varphi_1 dx \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}+\frac{2\epsilon}{\lambda_1}\right)t^2 + C_2t^{p+1}\int a(x)\varphi_1^{p+1}dx + \mu t\int h(x)\varphi_1 dx.
\end{aligned}$$

Desde que $\lambda > \lambda_1$, podemos tomar ϵ suficientemente pequeno de modo que $\hat{\lambda} := \lambda - 2\epsilon > \lambda_1$. Desta forma,

$$I_\mu(t\varphi_1) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\hat{\lambda}}{\lambda_1}\right)t^2 + C_2t^{p+1}\int a(x)\varphi_1^{p+1}dx + \mu t\int h(x)\varphi_1 dx. \tag{3.11}$$

Note que para t suficientemente pequeno temos

$$t^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\hat{\lambda}}{\lambda_1}\right) + C_2t^{p-1}\int a(x)\varphi_1^{p+1}dx\right] < 0.$$

Daí, existem $t_0, \beta_0 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\hat{\lambda}}{\lambda_1}\right)t^2 + C_2t^{p+1}\int a(x)\varphi_1^{p+1}dx = -2\beta_0, \quad \text{para todo } \ t \leq t_0. \tag{3.12}$$

Em seguida tomemos $\mu_0 > 0$ tal que

$$\mu t_0\int h(x)\varphi_1 dx \leq \beta_0, \quad \text{para todo } \ \mu \leq \mu_0. \tag{3.13}$$

Assim, usando (3.12) e (3.13) em (3.11), segue que

$$I_\mu(t_0\varphi) \leq -\beta_0, \quad \text{para todo } \ 0 \leq \mu \leq \mu_0.$$

Mostrando que (3.9) ocorre.

■

Demonstração de (b): Apresentaremos uma prova no caso em que λ é um autovalor do problema (1.45). Suponha que $\lambda = \lambda_k < \lambda_{k+1}$ para algum $k \geq 2$. Seja k_0 o maior inteiro tal que $\lambda_{k_0} < \lambda_k$. A seguir, escreveremos o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ da seguinte forma

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$

onde

$$H_1 := Span\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{k_0}\}, \ H_2 := Span\{\varphi_{k_0+1}, ..., \varphi_k\}, \ H_3 := (H_1 \oplus H_2)^\perp.$$

Definamos
$$m_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k_0}} - 1\right), \; m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right). \tag{3.14}$$
Consideremos o funcional quadrático
$$Q(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2}\int a(x)u^2 dx. \tag{3.15}$$
Agora usando a caracterização variacional dos autovalores do problema (1.45), dado por
$$\lambda_k = \inf_{\dim L = k} \sup_{u\in L} \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\int a(x)u^2 dx}, \quad L \leq D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \tag{3.16}$$
temos

(i) Se $u \in H_1$,
$$\begin{aligned} Q(u) =& \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2}\int a(x)u^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda_{k_0}}\int |\nabla u|^2 dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k_0}} - 1\right)\|u\|^2 \\ &= -m_0\|u\|^2. \end{aligned}$$

(ii) Se $u \in H_2$,
$$Q(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2}\int a(x)u^2 dx \geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda_k}\int |\nabla u|^2 dx = 0.$$

(iii) Se $u \in H_3$,
$$\begin{aligned} Q(u) &= \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2}\int a(x)u^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\int |\nabla u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 \\ &= m_1\|u\|^2. \end{aligned}$$

Resumindo, temos que
$$\begin{array}{ll} Q(u) \geq -m_0\|u\|^2 & \text{para } u \in H_1, \\ Q(u) \geq 0 & \text{para } u \in H_2, \\ Q(u) \geq m_1\|u\|^2 & \text{para } u \in H_3. \end{array} \tag{3.17}$$

Agora, para $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos $u = v + w + z$, onde $v \in H_1$, $w \in H_2$ e $z \in H_3$. Então, segue de (3.17) que
$$\begin{aligned} I_\mu(u) &\geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2}\int a(x)|u|^2 dx + J(u) + \mu\int h(x)u dx \\ &\geq m_1\|z\|^2 - m_0\|v\|^2 + J(u) + \mu\int h(x)u dx. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Para provarmos o item (b) vamos argumentar por contradição, sendo assim, suponha que existem, uma constante $L_0 > 0$ e as sequências $(\mu_n) \subset [0, \mu_0]$ e $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, tais que

$$\mu_n \to \bar{\mu} \quad \text{e} \quad \|u_n\| \to +\infty$$

e

$$I_{\mu_n}(u_n) \leq L_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Afirmação: $\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 \to +\infty$.

De fato, suponha que isto não ocorre, ou seja, $\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\|z_n\| \to +\infty$, já que $\|u_n\|^2 = \|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 + \|z_n\|^2$. Assim, usando o Lema 3.5 e a estimativa (3.18), obtemos

$$I_{\mu_n}(u_n) \geq m_1\|z_n\|^2 - m_0\|v_n\|^2 - \mu_n\|h\|_{2,\sigma}(\sqrt{\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 + \|z_n\|^2}) \to +\infty.$$

O que é uma contradição com (3.19), mostrando a afirmação. Então, $t_n^2 = \|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 \to +\infty$. Note que de (3.19) temos que $J(u_n) < +\infty$. Daí, usando os Lemas 3.5 e 3.4(b), obtemos

$$\begin{aligned}
I_{\mu_n} &\geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2}\int a(x)|u|^2 dx + J(u) + \mu_n \int h(x) u dx \\
&\geq m_1\|z_n\|^2 - m_0(\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2) - \int a(x)[\epsilon(u_n^+)^2 + C_1|u_n^+|^{p+1}]dx - A_n \\
&\geq m_1\|z_n\|^2 - m_0(\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2) - \epsilon\|a\|_{N/2}\|u_n\|_{2^*}^2 + C_1\int a(x)|u_n^+|^{p+1}dx - A_n \\
&\geq m_1\|z_n\|^2 - m_0(\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2) - C\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}\|u_n\|^2 + C_1\int a(x)|u_n^+|^{p+1}dx - A_n,
\end{aligned}$$

onde $A_n = \mu_n\|h\|_{2,\sigma}(\sqrt{\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 + \|z_n\|^2})$. A seguir, tomando $\epsilon = \frac{m_1}{2C\|a\|_{N/2}}$ e observando que

$$\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 + \|z_n\|^2 = t_n^2 + \|z_n\|^2 \leq (t_n + \|z_n\|)^2 \quad \text{e} \quad m_1 \geq -m_0,$$

temos

$$\begin{aligned}
I_{\mu_n}(u_n) &\geq \frac{m_1}{2}\|z_n\|^2 - 2m_0(\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2) + C_1\int a(x)|u_n^+|^{p+1}dx - A_n \\
&\geq t_n^2\left\{\frac{m_1}{2}\left\|\frac{z_n}{t_n}\right\|^2 - 2m_0 + B_n - \frac{\mu_n}{t_n^2}\|h\|_{2,\sigma}(t_n + \|z_n\|)\right\} \\
&\geq t_n^2\left\{\frac{m_1}{2}\left\|\frac{z_n}{t_n}\right\|^2 - 2m_0 + B_n - \frac{C_3}{t_n} - \frac{C_3}{t_n}\left(\frac{\|z_n\|}{t_n}\right)\right\},
\end{aligned}$$

onde $B_n = C_1 t_n^{p-1}\int a(x)\left|\left(\frac{u_n}{t_n}\right)^+\right|^{p+1} dx$. Agora, note que se $\left\|\frac{z_n}{t_n}\right\| > 1$, temos

$$\frac{C_3}{t_n}\left\|\frac{z_n}{t_n}\right\| \leq \frac{m_1}{4}\left\|\frac{z_n}{t_n}\right\|^2.$$

Daí,

$$I_{\mu_n}(u_n) \geq t_n^2 \left\{ \frac{m_1}{4} \left\| \frac{z_n}{t_n} \right\|^2 - 2m_0 + B_n - \frac{C_3}{t_n} \right\}.$$

Se $\left\| \frac{z_n}{t_n} \right\| < 1$, temos que

$$I_{\mu_n}(u_n) \geq t_n^2 \left\{ \frac{m_1}{4} \left\| \frac{z_n}{t_n} \right\|^2 - -2m_0 + B_n - \frac{2C_3}{t_n} \right\}.$$

Em ambos os casos, obtemos

$$I_{\mu_n}(u_n) \geq t_n^2 \left\{ \frac{m_1}{4} \left\| \frac{z_n}{t_n} \right\|^2 - 2m_0 + B_n - \frac{C}{t_n} \right\}. \tag{3.20}$$

A seguir consideramos dois casos
Caso 1: $\left\| \frac{z_n}{t_n} \right\| \to +\infty$.
Neste caso, temos

$$I_{\mu}(u_n) \geq t_n^2 \left\{ \frac{m_1}{4} \left\| \frac{z_n}{t_n} \right\|^2 - 2m_0 - \frac{C}{t_n} \right\} \to +\infty.$$

Contradizendo (3.19).
Caso 2: $\left\| \frac{z_n}{t_n} \right\| \leq K_1$, para algum $K_1 > 0$.
Neste caso, sendo $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ reflexivo, existe $z \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que a menos de subsequência

$$\frac{z_n}{t_n} \rightharpoonup z \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \tag{3.21}$$

implicando

$$\frac{z_n}{t_n}(x) \to z(x) \quad \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.22}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\|v_n\|^2}{t_n^2} + \frac{\|w_n\|^2}{t_n^2} = 1,$$

de onde segue que as sequências $\left(\frac{v_n}{t_n}\right)$ e $\left(\frac{w_n}{t_n}\right)$ são limitadas em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Desde que H_1 e H_2 tem dimensão finita, temos que as noções de convergência fraca e forte coincidem; assim, a menos de subsequência

$$\frac{v_n}{t_n} \to v \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \tag{3.23}$$

e

$$\frac{w_n}{t_n} \to w \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{3.24}$$

Usando a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, segue que as convergências (3.23) e (3.24) também ocorrem em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$\frac{v_n}{t_n} \to v \quad \text{em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \tag{3.25}$$

e
$$\frac{w_n}{t_n} \to w \quad \text{em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N). \tag{3.26}$$
Usando [4, Teorema IV.9.], também a menos de subsequência
$$\frac{v_n}{t_n} \to v \quad \text{em q.t.p } x \in \mathbb{R}^N \tag{3.27}$$
e
$$\frac{w_n}{t_n} \to w \quad \text{em q.t.p } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.28}$$
Portanto,
$$\frac{u_n}{t_n} \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \tag{3.29}$$
onde $\bar{u} = v + w + z$. Usando (3.19) em (3.20), obtemos
$$\frac{L_0}{t_n^{p+1}} - \frac{1}{t_n^{p-1}} \frac{m_1}{4} \left\| \frac{z_n}{t_n} \right\|^2 + \frac{2m_0}{t_n^{p-1}} + \frac{C}{t_n^p} \geq \int a(x) \left| \left(\frac{u_n}{t_n} \right)^+ \right|^{p+1} dx.$$
Daí, desde que $t_n \to +\infty$, concluímos que
$$\lim_{n \to +\infty} \int a(x) \left| \left(\frac{u_n}{t_n} \right)^+ \right|^{p+1} dx = 0. \tag{3.30}$$
Note que de (3.22), (3.27) e (3.28), temos
$$\frac{u_n}{t_n}(x) \to \bar{u}(x) \qquad \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.31}$$
Assim, usando o Lema de Fatou e (3.30), obtemos
$$\int a(x)|\bar{u}^+(x)|^{p+1} dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int a(x) \left| \left(\frac{u_n}{t_n} \right)^+ \right|^{p+1} dx = 0. \tag{3.32}$$
Implicando que
$$\bar{u}(x) = v(x) + w(x) + z(x) \leq 0, \qquad \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}^N.$$
Desde que (3.29) ocorre, segue da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ que
$$\left\| \left(\frac{u_n}{t_n} \right)^2 \right\|_{\frac{2^*}{2}} \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$
Daí, devido (3.31) e (3.33), podemos utilizar o [11, Lema 4.8], para concluir que
$$\left(\frac{u_n}{t_n} \right)^2 \rightharpoonup \bar{u}^2 \quad \text{em } L^{\frac{2^*}{2}}(\mathbb{R}^N). \tag{3.34}$$

Assim, desde que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, obtemos de (3.34)

$$\int a(x)\left(\frac{u_n}{t_n}\right)^2 dx \to \int a(x)\bar{u}^2 dx. \tag{3.35}$$

Além disso, observe que

$$a(x)\left|\left(\frac{u_n}{t_n}\right)^+\right|^2 \leq a(x)\left|\left(\frac{u_n}{t_n}\right)\right|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int a(x)\left|\left(\frac{u_n}{t_n}\right)^+\right|^2 dx \to \int a(x)(\bar{u}^+)^2 dx = 0. \tag{3.36}$$

Agora note que temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I_{\mu_n}(u_n) &= \frac{\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 + \|z_n\|^2}{2} - \int \left\{a(x)\left[\frac{\lambda}{2}|(u_n)^+|^2 + G(u_n)\right] + \mu_n h(x) u_n\right\} dx \\ &\geq t_n^2 \left\{\frac{1}{2}\left\|\frac{z_n}{t_n}\right\|^2 + \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2}\int a(x)\left|\left(\frac{u_n}{t_n}\right)^+\right|^2 + o(1)\right\}. \end{aligned}$$

Então, usando (3.36), segue que

$$I_{\mu_n}(u_n) \geq t_n^2 \left\{\frac{1}{4}\left\|\frac{z_n}{t_n}\right\|^2 + \frac{1}{4} + o(1)\right\} \to +\infty,$$

novamente contradizendo (3.19). Desta forma, concluímos a prova no caso em que $\lambda = \lambda_k$ é um autovalor do problema (1.45) para $k \geq 2$.

A prova no caso em que $\lambda > \lambda_1$ não é um autovalor do problema (1.45) segue o mesmo raciocínio. A diferença é na hora de escrever o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ como soma direta. Primeiro consideramos k_0 o maior inteiro tal que $\lambda_{k_0} < \lambda$. A seguir, escrevemos o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ da seguinte forma

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = H_1 \oplus H_2,$$

onde

$$H_1 := Span\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{k_0}\} \text{ e } H_2 := (H_1)^\perp.$$

■

No próximo resultado mostraremos que I_μ é fracamente s.c.i.

Lema 3.7 *Para qualquer λ e μ fixados, o funcional I_μ é fracamente s.c.i.*

Demonstração: Suponha que $u_n \rightharpoonup u$. Então, analogamente ao feito na demonstração do item (b) do Lema 3.6, obtemos

$$\int a(x)|u_n^+|^2 dx \to \int a(x)|u^+|^2 dx. \tag{3.37}$$

Note que
$$\int h(x)u_n(x)dx \to \int h(x)u(x)dx. \tag{3.38}$$
De fato, desde que h satisfaz a hipótese (h_1), segue da desigualdade de Hölder que
$$\begin{aligned}\left|\int h(x)(u_n-u)dx\right| &\leq \left|\int_{B_R} h(x)(u_n-u)dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} h(x)(u_n-u)dx\right| \\ &\leq \|h\|_{L^2(B_R)}\|u_n-u\|_{L^2(B_R)} + C\|h\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}\|u_n-u\| \\ &\leq \|h\|_{L^2(B_R)}\|u_n-u\|_{L^2(B_R)} + C\epsilon.\end{aligned}$$
Agora, tendo em vista que $u_n \rightharpoonup u$, e que a imersão de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(B_R)$ é compacta, temos que
$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^2(B_R).$$
Assim, segue da nossa estimativa que
$$\left|\int h(x)(u_n-u)dx\right| \leq C\epsilon, \quad \text{para} \;\; n \geq n_0,$$
mostrando a convergência em (3.38). Usando o Lema de Fatou, obtemos
$$\int a(x)G(u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int a(x)G(u_n)dx. \tag{3.39}$$
Portanto, utilizando (3.37), (3.38), (3.39) e o fato da norma ser fracamente s.c.i, obtemos
$$\liminf_{n\to+\infty} I_\mu(u_n) \geq I_\mu(u).$$
■

Agora estamos aptos a mostrar que o funcional I_μ atinge um mínimo em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Mais precisamente temos

Proposição 3.8 *Sejam $\lambda > \lambda_1$ e μ_0 e β_0 como no Lema 3.6. Então, para $0 < \mu \leq \mu_0$, o funcional I_μ atinge o mínimo em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, isto é, existe $u_\mu \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que*
$$\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} I_\mu(u) = I_\mu(u_\mu) \leq -\beta_0 < 0. \tag{3.40}$$
Além disso, existem constantes positivas b_0 e B_0, que não dependem de μ, tais que
$$b_0 \leq \|u_\mu\| \leq B_0, \quad \textit{para todo } 0 < \mu \leq \mu_0. \tag{3.41}$$

Demonstração: Dos Lemas 3.6(b) e 3.7 temos que o funcional é coercivo e fracamente s.c.i. Então, aplicando o Método Direto do Cálculo das Variações, temos que I_μ é limitado inferiormente e existe uma função $u_\mu \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que
$$\inf_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} I_\mu(u) = I_\mu(u_\mu).$$
Além disso, segue do Lema 3.6(a) que
$$I_\mu(u_\mu) \leq -\beta < 0.$$

Temos também, da desigualdade de Hölder, da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e do Lema 3.5 que, para qualquer $\mu \in [0, \mu_0]$

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int a(x)|u^+|^2 dx + \int a(x)G(u)dx + \mu \int h(x)udx \\ &\geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{C\lambda \|a\|_{\frac{L}{2}}}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \mu \left| \int h(x)udx \right| \\ &\geq -\hat{C}_1\|u\|^2 - \mu C\|h\|_{2,\sigma}\|u\| \\ &= -\hat{C}_1\|u\|^2 - \hat{C}_2\|u\|. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Desta forma, temos que

$$\liminf_{\|u\| \to 0} I_\mu(u) \geq 0.$$

Implicando que existe $\delta > 0$ tal que

$$I_\mu(u) \geq 0, \quad \text{para } \|u\| < \delta. \tag{3.43}$$

Desde que $I_\mu(u_\mu) < 0$, segue (3.43) que existe $b_0 > 0$ tal que

$$b_0 \leq \|u_\mu\|, \quad \text{para todo } 0 < \mu \leq \mu_0. \tag{3.44}$$

Sendo I_μ coercivo, existe $B_0 > 0$ tal que

$$\|u_\mu\| \leq B_0, \quad \text{para todo } 0 < \mu \leq \mu_0. \tag{3.45}$$

Sendo assim, de (3.44) e (3.45) segue (3.41).

■

Para concluirmos que u_μ é solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$ resta mostrarmos que I_μ é diferenciável em u_μ. Sendo assim, nosso próximo resultado nos fornecerá informações quanto a diferenciabilidade de I_μ em seus pontos de mínimo.

Proposição 3.9 *Suponha que $\hat{u}$ é um ponto de mínimo de I_μ e que a sequência $(t_n) \in \mathbb{R}^+$ é tal que $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$. Então, se $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}_a(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{I_\mu(\hat{u} + t_n v) - I_\mu(\hat{u})}{t_n} \\ &= \int \nabla\hat{u}\nabla v dx - \lambda \int a(x)\hat{u}^+ v dx + \int a(x)g(\hat{u})v dx + \mu \int h(x)v dx. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Demonstração: Note que para mostrarmos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_\mu(\hat{u} + t_n v) - I_\mu(\hat{u})}{t_n} = \int \nabla\hat{u}\nabla v dx - \lambda \int a(x)\hat{u}^+ v dx + M, \tag{3.47}$$

onde $M = \int a(x)g(\hat{u})vdx + \mu \int h(x)vdx$; basta provar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{J(\hat{u} + t_n v) - J(\hat{u})}{t_n} = \int a(x)g(\hat{u})v dx. \tag{3.48}$$

A conclusão de (3.46), segue do fato de $\hat{u}$ ser um ponto de mínimo. De fato, temos que

$$I_\mu(\hat{u} + t_n v) \geq I_\mu(\hat{u}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\int \nabla \hat{u} \nabla v dx - \lambda \int a(x)\hat{u}^+ v dx + \int a(x) g(\hat{u}) v dx + \mu \int h(x) v dx \geq 0, \tag{3.49}$$

para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L_a^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Trocando v por $-v$ em (3.49) segue a desigualdade contrária e, portanto, (3.46) ocorre. Observe que do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \frac{J(\hat{u} + t_n v) - J(\hat{u})}{t_n} &= \frac{1}{t_n} \int a(x) \left[G(\hat{u} + t_n v) - G(\hat{u})\right] dx \\ &= \int a(x) \left[\frac{1}{t_n} \int_{\hat{u}}^{\hat{u}+t_n v} g(s) dx\right] dx. \end{aligned}$$

Desta forma, para obtermos (3.48) precisamos mostrar que

$$\int a(x) \left[\frac{1}{t_n} \int_{\hat{u}}^{\hat{u}+t_n v} g(s) ds\right] dx \to \int a(x) g(\hat{u}) v dx. \tag{3.50}$$

Considere $F_n(x) = \dfrac{1}{t_n} \displaystyle\int_{\hat{u}}^{\hat{u}+t_n v} g(s) ds$. Desde que g é contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F_n(x) = \frac{G(\hat{u} + t_n v) - G(\hat{u})}{t_n}.$$

Daí, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = G'(\hat{u}(x)) v(x) = g(\hat{u}(x)) v(x).$$

Além disso, temos do Teorema do Valor Médio para integrais

$$|F_n(x)| = \left|\frac{1}{t_n} \int_{\hat{u}}^{\hat{u}+t_n v} g(s) ds\right| = |g(\theta_n(x)) v(x)|,$$

onde $\hat{u}(x) \leq \theta_n(x) \leq \hat{u}(x) + t_n v(x)$. Daí, segue do Lema 3.4(a) que

$$\begin{aligned} |F_n(x)| &\leq (\epsilon \theta_n^+(x) + C_2(\theta_n^+(x))^p)|v| \\ &\leq \left[\epsilon(\hat{u}^+(x) + t_n v^+(x)) + C_2(\hat{u}^+(x) + t_n v^+(x))^p\right] |v| \\ &\leq \epsilon(\hat{u}^+|v| + (v^+)^2) + C_2 2^{p-1}(|\hat{u}^+|^p + |v^+|^p)|v|. \end{aligned}$$

Desta forma, para qualquer domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega a(x) F_n(x) dx\right| &\leq \int_\Omega \epsilon a(x) \left(\hat{u}^+|v| + (v^+)^2\right) dx + D \\ &\leq \epsilon \|a\|_{\frac{N}{2}} \|\hat{u}\|_{L^{2^*}(\Omega)} \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)} + \epsilon \|a\|_{\frac{N}{2}} \|v\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + D \\ &\leq \bar{C}_1 \epsilon \|a\|_{\frac{N}{2}} \|\hat{u}\| \|v\| + \bar{C}_2 \epsilon \|a\|_{\frac{N}{2}} \|v\|^2 + D, \end{aligned}$$

onde

$$
\begin{aligned}
D &= C_2 \int_\Omega a(x)\left(|\hat{u}^+|^p|v| + |v^+|^{p+1}\right)dx \\
&= C_2 \int_\Omega a^{\frac{p}{p+1}}|\hat{u}^+|^p a^{\frac{1}{p+1}}|v|dx + C_2\int_\Omega a(x)|v|^{p+1}dx \\
&\leq C_2\left[\left(\int_\Omega a(x)|\hat{u}^+|^{p+1}dx\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_\Omega a(x)|v|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \int_\Omega a(x)|v|^{p+1}dx\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\left|\int_\Omega a(x)F_n(x)dx\right| \leq \bar{C}_1\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}\|\hat{u}\|\|v\| + \bar{C}_2\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}\|v\|^2 + E, \tag{3.51}
$$

onde

$$
E = C_2\left[\left(\int_\Omega a(x)|\hat{u}^+|^{p+1}dx\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_\Omega a(x)|v|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \int_\Omega a(x)|v|^{p+1}dx\right].
$$

Desde que $\displaystyle\int a(x)G(\hat{u})dx < +\infty$, segue do Lema 3.4(a)

$$
\int a(x)|\hat{u}^+|^{p+1}dx \leq \int a(x)G(\hat{u})dx + \epsilon\int a(x)|\hat{u}^+|^2dx < \infty.
$$

Desta forma, já que o lado direito da desigualdade em (3.51) não depende de n, segue da propriedade de continuidade da medida que a sequência (aF_n) é equi-integrável, isto é, existe um conjunto mensurável A, de medida finita e $\delta > 0$ tais que

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{A^c} |a(x)F_n(x)|dx < \epsilon, \ \forall n \geq 1; \\
\displaystyle\int_M |a(x)F_n(x)|dx < \epsilon, \ \forall M \subset \mathbb{R}^N \text{ mensurável, com } |M| < \delta.
\end{cases} \tag{3.52}
$$

Daí, segue do Teorema de Convergência de Vitali (ver [11, Teorema 4.13]) que (3.50) ocorre.

■

A seguir apresentamos a prova da Proposição 3.2.

Demonstração da Proposição 3.2: Das Proposições 3.8 e 3.9 temos que u_μ é solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$.

■

Agora vamos fazer um estudo quanto a regularidade da função u_μ. Neste sentido, começamos mostrando que $u_\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Lema 3.10 *Seja $u_\mu \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$. Então, $u_\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\lim_{|x|\to+\infty} u_\mu(x) = 0$.*

Demonstração: Note que o fato de u_μ ser uma solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$ implica que a mesma é uma solução fraca da desigualdade variacional

$$
\Delta u + b(x)u \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.53}
$$

onde $b = \lambda a \chi_{\{x:u_\mu(x)>0\}} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De fato, desde que u_μ é solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$, temos

$$\int \nabla u_\mu \nabla v dx - \lambda \int a(x) u_\mu^+ v dx = - \int a(x) g(u_\mu) v dx - \mu \int h(x) v dx$$
$$\leq 0,$$

para todo $v \geq 0$, mostrando a afirmação. Assim, u_μ é uma subsolução do problema

$$\Delta u + b(x) u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, desde que $u_\mu \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, uma aplicação do Teorema 1.10, para $p = 2^*$, implica que existe $C = C(\lambda, \|a\|_\infty) > 0$ tal que

$$\sup_{x \in B_R} u_\mu(x) \leq C \left(R^{-\frac{N}{2^*}} \|u_\mu^+\|_{L^{2^*}(B_{2R})} \right), \quad \forall R > 0.$$

Note que $\sup\limits_{x \in B_R} u_\mu(x) = \sup\limits_{x \in B_R} u_\mu^+(x)$. Assim,

$$\sup_{x \in B_R} u_\mu^+(x) \leq C \left(R^{-\frac{N}{2^*}} \|u_\mu^+\|_{L^{2^*}(B_{2R})} \right), \quad \forall R > 0.$$

Daí, usando a imersão de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(B_{2R})$, obtemos a seguinte estimativa

$$\sup_{x \in B_R} u_\mu^+(x) \leq C R^{-\frac{N}{2^*}} \|u_\mu\|, \quad \forall R > 0.$$

Desde que $\lim_{R \to +\infty} R^{-\frac{N}{2^*}} = 0$, segue que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_\mu^+(x) \leq \tilde{C},$$

ou seja,

$$\|u_\mu^+\|_\infty \leq \tilde{C}. \tag{3.54}$$

Além disso,

$$\lim_{|x| \to +\infty} u_\mu^+(x) = 0. \tag{3.55}$$

Agora, observe que o fato de u_μ ser solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$ é equivalente a dizer que u_μ é solução do seguinte problema

$$\Delta u + c(x) u = \mu h(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde

$$c(x) = a(x) \left(\lambda - \frac{g(u_\mu(x))}{u_\mu(x)} \right) \chi_{\{x:u_\mu(x)>0\}}.$$

Note que, do Lema 3.4, temos que

$$0 \leq \frac{g(s)}{s} \leq 1 + C_2 (s)^{p-1}, \quad s \geq 0.$$

Assim, usando (3.54) na desigualdade anterior, obtemos para todo $x \in \mathbb{R}^N$ que

$$|c(x)| \leq \left| a(x)\left(\lambda - \frac{g(u_\mu)}{u_\mu^+}\right)\right| \leq \lambda a(x) + \frac{g(u_\mu)}{u_\mu^+} \leq \lambda a(x) + 1 + C_2(u_\mu^+)^{p-1} \leq C.$$

Daí, aplicando o Teorema 1.10, para $p = 2^*$ e $s = 2N$, obtemos

$$\sup_{B_R(y)} (-u_\mu) \leq C\left(R^{-\frac{N}{2^*}}\|u_\mu^-\|_{L^{2^*}(B_{2R}(y))} + \mu R\|h\|_{L^N(B_{4R}(y))}\right),$$

onde $C = C(\lambda, R, \|a\|_\infty)$ e $y \in \mathbb{R}^N$ é arbitrário. Note que $\sup(-u_\mu) = \sup u_\mu^-$. Assim, temos que

$$\sup_{B_R(y)} u_\mu^- \leq C\left(R^{-\frac{N}{2^*}}\|u_\mu^-\|_{L^{2^*}(B_{2R}(y))} + \mu R\|h\|_{L^N(B_{4R}(y))}\right). \tag{3.56}$$

Consideremos $R = 1$ na estimativa anterior e analisemos o que ocorre com os termos $\|u_\mu^-\|_{L^{2^*}(B_2(y))}$ e $\|h\|_{L^N(B_4(y))}$ para $|y|$ grande. Desde que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\mu^-|^{2^*} dx = \int_{B_n} |u_\mu^-|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_n} |u_\mu^-|^{2^*} dx < \infty,$$

onde B_n é a bola aberta de raio n centrada na origem, $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_n} |u_\mu^-|^{2^*} dx = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_n} |u_\mu^-|^{2^*} dx < \epsilon^{2^*} \quad \forall n \geq n_0.$$

Então para $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y| > n_0 + 2$, temos que $B_2(y) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_{n_0}$ e

$$\int_{B_2(y)} |u_\mu^-|^{2^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{n_0}} |u_\mu^-|^{2^*} dx < \epsilon^{2^*},$$

ou seja,

$$\|u_\mu^-\|_{L^{2^*}(B_2(y))} < \epsilon, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^N \ \text{ com } \ |y| > n_0 + 2.$$

Analogamente, usando o fato de $h \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\|h\|_{L^N(B_4(y))} < \epsilon, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^N \ \text{ com } \ |y| > n_1.$$

Usando isto em (3.56), obtemos

$$\sup_{B_1(y)} u_\mu^- \leq C\epsilon.$$

Desde que $y \in \mathbb{R}^N$ é qualquer, segue que

$$\|u_\mu^-\|_\infty \leq C. \tag{3.57}$$

Além disso,

$$\lim_{|x|\to+\infty} u_\mu^-(x) = 0. \tag{3.58}$$

Portanto, de (3.54) e (3.57) temos que $u_\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e de (3.55) e (3.58) temos que $\lim_{|x|\to+\infty} u_\mu(x) = 0$.

■

De posse do lema anterior temos o seguinte resultado de regularidade.

Proposição 3.11 *Seja $u_\mu \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma solução do problema $(P^+_{\mu,\lambda})$. Então, $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Para analisar a regularidade da função u_μ vamos reescrever o problema $(P^+_{\mu,\lambda})$ da seguinte forma:

$$-\Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.59}$$

onde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = a(x)\left(\lambda u^+(x) - g(u(x))\right) - \mu h(x). \tag{3.60}$$

Note que utilizando as hipóteses (a_1) e (h_1) e os Lemas 3.4 e 3.10 temos que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, segue que $f \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \le p \le \infty$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado qualquer. Desde que $u_\mu \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca de (3.59) e $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ continuamente, temos que $u_\mu \in H^1(\Omega)$. Daí, usando o Teorema 1.8, segue que $u_\mu \in H^2(\Omega)$. Além disso, o fato de $f \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \le p \le \infty$ implica que

$$u_\mu \in W^{2,p}(\Omega), \quad \text{para todo } 1 \le p \le \infty.$$

Desta forma, tomando p de modo que $p > N$, segue do Teorema 1.7 que $u_\mu \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Desde que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado qualquer, concluímos que $u_\mu \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.

■

3.3 Demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção vamos fornecer a prova do Teorema 3.1. Iremos mostrar que a solução u_μ do problema auxiliar $(P^+_{\mu,\lambda})$, que encontramos via minimização, é de fato uma solução positiva do problema $(P_{\mu,\lambda})$. Além disso, mostraremos que o decaimento da solução u_μ não é do tipo exponencial, isto é, satisfaz (3.2).

Iniciamos mostrando alguns resultados que serão necessários para a prova do Teorema 3.1.

Lema 3.12 *Seja $f_\mu(x) := a(x)(\lambda u_\mu^+ - g(u_\mu))$. Então, $f_\mu(x) \ge 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Demonstração: Seja $S := \max\left\{s; \frac{g(s)}{s} = \lambda\right\}$. Segue da hipótese (g_3) que

$$f_\mu(x) = a(x)(\lambda u_\mu^+(x) - g(u_\mu(x))) = a(x)u_\mu^+(x)\left(\lambda - \frac{g(u_\mu(x))}{u_\mu^+(x)}\right) \le 0, \tag{3.61}$$

apenas nos pontos em que $u_\mu(x) \geq S$. Agora considere $v = (u_\mu - S)^+$. Desde que $0 \leq v \leq u_\mu^+ + (-S)^+ \leq |u_\mu|$ e $u_\mu \in L_a^{p+1} \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue que v é uma função teste e, desta forma, usando (3.61), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_\mu|^2 dx = \int \left[a(x)(\lambda u_\mu^+ - g(u_\mu))(u_\mu - S)^+ - \mu h(x)(u_\mu - S)^+\right] dx \leq 0,$$

onde $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N; u_\mu(x) > S\}$. Daí,

$$\|u_\mu\|_{D^{1,2}(\Omega)} = 0,$$

implicando $u \equiv 0$ em Ω. Mas $u_\mu > 0$ em Ω. Logo, $\Omega = \emptyset$, ou seja,

$$u_\mu(x) \leq S, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, temos que o resultado segue.

■

Proposição 3.13 *Considere $\mu > 0$ e $\epsilon > 0$. Defina*

$$V_{\epsilon,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^N; u_\mu > \epsilon a(x)^{\frac{N-2}{4}}, f_\mu(x) > \epsilon a(x) u_\mu(x)\}. \tag{3.62}$$

Então, existem constantes positivas $\mu_1 \leq \mu_0$, ϵ_0, L_0 e $R_1 \geq 1$ tais que, para todo $0 < \mu \leq \mu_1$ e $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, temos

$$\|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V_{\epsilon,\mu} \cap B_{R_1})} \geq L_0. \tag{3.63}$$

Demonstração: Fixemos $0 < \mu \leq \mu_0$ (μ_0 definido no Lema 3.6) e $\epsilon > 0$. Para simplificar a notação vamos suprimir os índices de $V_{\epsilon,\mu}$ e u_μ. Temos que

$$\left\langle I_\mu'(u), u \right\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\|u\|^2 = \lambda \int a(x) u^2 - \int [a(x)g(u)u + \mu h(x)u] dx.$$

Assim, utilizando (3.8) e (3.41), obtemos

$$\begin{aligned} b_0^2 &\leq \lambda \int_V a(x) \left(u^+\right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus V} f_\mu(x) u dx + \mu \|h\|_{2,\sigma} B_0 \\ &\leq \lambda \|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V)} \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N \setminus V} f_\mu(x) u dx + \mu \|h\|_{2,\sigma} B_0. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Agora considere a seguinte decomposição $\mathbb{R}^N \setminus V = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, onde

$$A_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^N \setminus V; u^+(x) \leq \epsilon a(x)^{\frac{N-2}{4}}\right\}$$

e

$$A_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^N \setminus V; f_\mu(x) \leq \epsilon a(x) u(x),\ u(x) > \epsilon a(x)^{\frac{N-2}{4}}\right\}.$$

Desde que $g(s)s \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\int_{A_1} f_\mu(x)udx \leq \lambda \int_{A_1} a(x)(u^+)^2dx \leq \lambda\epsilon \int_{A_1} a(x)^{\frac{N}{2}} \leq \lambda\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}. \tag{3.65}$$

Além disso, desde que $u(x) > 0$ em A_2,

$$\int_{A_2} f_\mu(x)udx \leq \lambda \int_{A_2} a(x)u^2dx \leq C\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}\|u\|^2 \leq C\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}B_0^2. \tag{3.66}$$

Desta forma, combinando as estimativas (3.65) e (3.66) com (3.64), obtemos

$$b_0^2 \leq \lambda\|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V)}B_0^2 + \lambda\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} + C\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}B_0^2 + \mu\|h\|_{2,\sigma}B_0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V)} &\geq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{b_0}{B_0}\right)^2 - \frac{\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{B_0^2} - \frac{C\epsilon\|a\|_{\frac{N}{2}}}{\lambda} - \frac{\mu\|h\|_{2,\sigma}}{\lambda B_0} \\
&\geq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{b_0}{B_0}\right)^2 - \epsilon\left(\frac{\|a\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{B_0^2} - \frac{C\|a\|_{\frac{N}{2}}}{\lambda}\right) - \frac{\mu\|h\|_{2,\sigma}}{\lambda B_0}.
\end{aligned}$$

Escolha ϵ_0 de modo que

$$\epsilon_0\left(\frac{\|a\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{B_0^2} - \frac{C\|a\|_{\frac{N}{2}}}{\lambda}\right) = \frac{1}{4\lambda}\left(\frac{b_0}{B_0}\right)^2$$

e $\mu_1 < \mu_0$ de modo que

$$\frac{\mu_1\|h\|_{2,\sigma}}{\lambda B_0} < \frac{1}{4\lambda}\left(\frac{b_0}{B_0}\right)^2.$$

Daí,

$$\|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V)} \geq \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{b_0}{B_0}\right)^2 := L. \tag{3.67}$$

Agora, defina $L_0 := L/2$. Desde que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, existe $R_1 \geq 1$ tal que

$$\|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1})} < L_0. \tag{3.68}$$

Desta forma, observando o fato de $V_{\epsilon_0,\mu} \subset V_{\epsilon,\mu}$ para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V_{\epsilon,\mu}\cap B_{R_1})} &= \|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V_{\epsilon,\mu})} - \|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V_{\epsilon,\mu}\setminus B_{R_1})} \\
&\geq \|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(V_{\epsilon,\mu})} - \|a\|_{L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1})} \\
&\geq L - \frac{L}{2} = L_0.
\end{aligned}$$

■

Agora temos condições de demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Demonstração do Teorema 3.1**:** Usando a notação da Proposição 3.13, supomos que $\mu \leq \mu_1$. Consideremos $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ o potencial Newtoniano da função h, isto é,

$$w(x) = C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(y)}{|x-y|^{N-2}} dy,$$

onde $C_N = [N(N-2)w_N]^{-1}$ e w_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Então, w é solução do problema

$$-\Delta w = h(x), \quad w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{3.69}$$

De fato, considerando $S(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}}$ temos que, no sentido das distribuições,

$$\Delta S = \delta,$$

onde δ é a delta de Dirac. Daí, usando propriedades de distribuições temos que

$$\Delta(S * (-h)) = -h * \Delta S = -h * \delta = -h.$$ [1]

Além disso, repetindo o argumento da Proposição 1.16 temos que $w(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, analogamente, a prova da Proposição 3.11 temos que $w \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.

Note que $u_\mu + \mu w$ é solução do problema

$$-\Delta(u_\mu + \mu w) = a(x)(\lambda u_\mu - g(u_\mu)), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.70}$$

Portanto, definindo $V_\mu := V_{\epsilon_0,\mu}$, segue da Proposição 3.13 que para $x \in V_\mu \cap B_{R_1}$

$$-\Delta(u_\mu + \mu w) = a(x)(\lambda u_\mu - g(u_\mu)) = f_\mu(x) \geq \epsilon_0 a(x) u_\mu(x) \geq \epsilon_0^2 a(x)^{\frac{N+2}{4}}. \tag{3.71}$$

Agora, para $R \geq 4R_1$, consideramos $z_{\mu,R}$ a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta z &= \epsilon_0^2 a(x)^{\frac{N+2}{4}} \chi_{V_\mu \cap B_{R_1}} & \text{em} & B_R \\ z &= 0 & \text{sobre} & \partial B_R. \end{cases} \tag{3.72}$$

Daí, segue de (3.71) e do fato de $u_\mu + \mu w \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$ que

$$\begin{cases} \Delta(u_\mu + \mu w - z_{\mu,R}) \leq 0 & \text{em} & B_R \\ u_\mu + \mu w - z_{\mu,R} \geq 0 & \text{sobre} & \partial B_R. \end{cases} \tag{3.73}$$

Daí, pelo princípio do máximo,

$$(u_\mu + \mu w)(x) \geq z_{\mu,R}(x) \quad \text{em } B_R. \tag{3.74}$$

Pela fórmula de Poisson (ver [8, p.33]), temos:

$$z_{\mu,R}(x) = \epsilon_0^2 \int_{B_R} G_R(x,y) a(y)^{\frac{N+2}{4}} \chi_{V_\mu \cap B_{R_1}} dy, \tag{3.75}$$

onde G_R representa a função de Green da bola B_R. Note que

$$\begin{aligned} G_{R'}\left(\tfrac{R'}{R}x, \tfrac{R'}{R}y\right) &= \Gamma\left(\sqrt{\left(\tfrac{R'}{R}\right)^2 |x|^2 + \left(\tfrac{R'}{R}\right)^2 |y|^2 - 2\left(\tfrac{R'}{R}\right)^2 x \cdot y}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\left(\tfrac{R'}{R}\right)^2 \left[\left(\tfrac{|x||y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2x \cdot y\right]}\right) \\ &= \Gamma\left(\tfrac{R'}{R}\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y}\right) - \Gamma\left(\tfrac{R'}{R}\sqrt{\left(\tfrac{|x||y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2x \cdot y}\right) \\ &= \left(\tfrac{R'}{R}\right)^{-(N-2)} G_R(x,y), \end{aligned}$$

[1]Aqui $*$ denota convolução

onde Γ é a solução fundamental do Laplaciano. Então,

$$G_{R'}(x,y) = \left(\frac{R}{R'}\right)^{N-2} G_R\left(\frac{R}{R'}x, \frac{R}{R'}y\right). \tag{3.76}$$

A seguir defina $l := \inf_{|x|,|y|\leq r} G_1(x,y)$ e note que $l > 0$ para $r < \frac{1}{3}$. De fato, temos que a função de Green na bola unitária é dada por

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - \Gamma\left(|x|\left(y - \frac{x}{|x|^2}\right)\right),$$

onde

$$\Gamma(x) = \frac{C_N}{|x|^{N-2}}, \quad N \geq 3.$$

Desta forma, para mostrar que $l > 0$, precisamos provar que existe $\alpha > 0$ tal que

$$A = \frac{1}{|y-x|} - \frac{|x|}{||x|^2 y - x|} > \alpha > 0, \quad \text{para } |x|, |y| \leq r,$$

para algum $0 < r < 1$. Desde que $|x|, |y| \leq r$, temos

$$|y - x| \leq |y| + |x| \leq 2r$$

e

$$\frac{||x|^2 y - x|}{|x|} \geq \frac{|x| - |x|^2|y|}{|x|} = 1 - |x||y| \geq 1 - r^2 \geq 1 - r.$$

Daí,

$$A \geq \frac{1}{2r} - \frac{1}{1-r} = \frac{1-3r}{2r(1-r)} > 0, \quad \text{para } 0 < r < \frac{1}{3},$$

mostrando nossa afirmação. Sendo assim, consideremos $r = \frac{1}{4}$. Observe que da identidade (3.76) com $R' = 1$ temos

$$l\left(\frac{1}{R}\right)^{N-2} = \inf_{|x|,|y|\leq \frac{R}{4}} G_R(x,y), \quad \text{para } R \geq 4R_1.$$

Portanto, usando isto em (3.75), obtemos

$$z_{\mu,R}(x) \geq \epsilon_0^2 l\left(\frac{1}{R}\right)^{N-2} \|a\|^{\frac{N+2}{4}}_{L^{\frac{N+2}{4}}(V_\mu \cap B_{R_1})}, \quad \text{para } |x| \leq \frac{1}{4}R. \tag{3.77}$$

Mas desde que

$$\int_{V_\mu \cap B_{R_1}} |a|^{\frac{N}{2}} dx = \int_{V_\mu \cap B_{R_1}} |a|^{\frac{N-2}{4}} |a|^{\frac{N+2}{4}} dx \leq \|a\|_\infty^{\frac{N-2}{4}} \int_{V_\mu \cap B_{R_1}} |a|^{\frac{N+2}{4}} dx,$$

segue da Proposição 3.13 e de (3.77) que para $|x| \leq \frac{1}{4}R$

$$z_{\mu,R}(x) \geq \epsilon_0^2 l\left(\frac{1}{R}\right)^{N-2} \frac{L_0^{\frac{N}{2}}}{\|a\|_\infty^{\frac{N-2}{4}}} = C\epsilon_0^2 l\left(\frac{1}{R}\right)^{N-2} L_0^{\frac{N}{2}}. \tag{3.78}$$

Daí, para $4|x| = R$, temos de (3.74) e (3.78) que existe $K > 0$ tal que

$$(u_\mu + \mu w)(x) \geq \frac{K}{|x|^{N-2}}, \quad \text{para } |x| \geq R_1.$$

Desta forma, usando o Lema 1.26, temos

$$u_\mu(x) \geq \frac{K}{|x|^{N-2}} - \mu w(x) \geq \frac{K}{|x|^{N-2}} - \frac{\mu d}{|x|^{N-2}}.$$

Tomando $\mu_2 \leq \mu_1$ de modo que $k - \mu_2 d > 0$, obtemos para $\mu \leq \mu_2$

$$u_\mu(x) \geq \frac{C}{|x|^{N-2}}, \quad \text{para } |x| \geq R_1. \tag{3.79}$$

para algum $C > 0$. Por outro lado, tomando $|x| = \frac{R}{4}$ em (3.78), segue de (3.74) que

$$(u_\mu + \mu w)(x) \geq C, \quad \text{para } |x| \leq R_1. \tag{3.80}$$

Desde que w é limitada em B_{R_1}, existe $\mu_3 > 0$ suficiente pequeno de modo que, para $\mu \leq \mu_3$

$$u_\mu(x) \geq C - \mu w(x) > 0, \quad \text{para } |x| \leq R_1. \tag{3.81}$$

Logo, $u_\mu(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e satisfaz (3.2). Portanto, tomando $\hat{\mu}(\lambda) = \min\{\mu_2, \mu_3\}$, concluímos a prova.

■

Referências Bibliográficas

[1] Allegretto, W.; Odiobala, P. O. *Nonpositone elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 533–541.

[2] Ben-Naoum, A. K.; Troestler, C.; Willem, M. *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains.* Nonlinear Anal. **26** (1996), 823–833.

[3] Brown, K. J.; Stavrakakis, N. *Global Bifurcation Results for a Semilinear Elliptic Equation on all* $\mathbb{R}^N$, Duke Math. J, **85** (1996), 77-94.

[4] Brezis, H. *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.

[5] Costa, D.; Drábek, P.; Tehrani, H. *Positive solutions to semilinear elliptic equations with logistic type nonlinearities and constant yield harvesting in* $\mathbb{R}^N$. Comm. Partial Differential Equations 33 (2008), 1597–1610.

[6] Costa, D. *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations.* Birkhäuser, 2007.

[7] Cuesta, M. *Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights.* Electron. J. Differential Equations 2001, 9 pp. 35P30

[8] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[9] García Azorero, J.; Peral, I. *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems.* J. Differential Equations 144 (1998), 441–476.

[10] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, 2001.

[11] Kavian, O. *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[12] Kesavan, S. *Topics in Functional Analysis and applications*, New Age International (P) Limited, Publishers; Reprint 2003.

[13] Li, Y.; Ni, W. *On conformal scalar curvature equations in* $\mathbb{R}^N$. *Duke Math.* J. 57 (1988), 895–924.

[14] Rabinowitz, Paul H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, American Mathematical Society. Conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics, $n°$ 65, Rhode Island, 1988.

[15] Rădulescu, V.; Repovš, D. *Perturbation effects in nonlinear eigenvalue problems,* Nonlinear Anal. 70 (2009), 3030–3038.

[16] Rădulescu, V. *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods*, Hindawi Publishing Corporation, Contemporary Mathematics and Its Applications, Volume 6, 2008.

[17] Shi, J. *A radially symmetric anti-maximum principle and applications to fishery management models.* Electron. J. Differential Equations 2004, 13 pp. (electronic).

[18] Struwe, M. *Variational Methods*, Springer, Second Edition, 1996.