Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Soluções para Algumas Classes de Problemas Envolvendo o Operador p-laplaciano

por

Gilberto Fernandes Vieira

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2006
João Pessoa - PB

Existência de Soluções para Algumas Classes de Problemas Envolvendo o Operador p-laplaciano

por

Gilberto Fernandes Vieira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva - UnB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

03/Março/2006

Agradecimentos

- A Deus Soberano, essência do meu ser e causa primeira do êxito logrado em mais uma etapa de minha existência.

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó, por ter sido, não apenas, um excelente Orientador, mas também, um verdadeiro amigo e um mestre nos conselhos, compreendendo muito bem a relação professor-aluno. Agradeço, também, pela confiança desprendida, acreditando sempre no meu trabalho; pela paciência e exigência necessárias; pela enorme contribuição, sem a qual este trabalho não teria sido realizado. Em fim, sou grato a João Marcos pelo excelente trabalho de orientação.

- A minha família, pelo apoio e incentivo, estimulando-me a estudar sempre.

- A minha namorada, Edna Maria de Melo, pela oração e compreensão constante.

- Aos professores de graduação e pós-graduação, que acreditando em meu trabalho, incentivaram-me e participaram do meu desenvolvimento, auxiliando-me sempre. Especialmente, aos professores Francisco José de Andrade, Uberlandio Batista Severo, Everaldo Souto de Medeiros e Flávia Jerônimo Barbosa, que nunca faltaram com aquele ombro amigo.

- Aos colegas de curso e amigos, pela troca de experiências e risos, numa convivência prazerosa. Sucesso a todos!

- A CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamente de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e à UFPB; particularmente, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, que propiciou-me todo um apendizado sistemático, culminando para este trabalho.

Dedicatória

A minha família e aos professores Uberlandio Batista Severo, Francisco José de Andrade e Amarildo Formiga Dantas.

Resumo

Neste trabalho usamos métodos variacionais e topológicos para provarmos resultados de existência de soluções para problemas quasilineares com condições de fronteira homogênea de Dirichlet ou Neumann. Mais especificamente, usamos o método direto do cálculo das variações, o Teorema do Passo da Montanha e a teoria do grau de Leray-Schauder.

Apresentamos, também, resultados de existência para problemas quasilineares não variacionais. Assim, utilizamos técnicas não variacionais - método de estimativas a priori; mais precisamente, empregamos a teoria das bifurcações e o argumento de blow-up.

Abstract

In this work we use variational and topological methods to prove existence results of solutions for quasilinear problems with homogeneous Dirichlet or Neumann boundary conditions. More specifically, we use the direct method of the calculation of the variations, the Mountain Pass Theorem and degree theory of Leray-Schauder.

We present also existence results for nonvariational quasilinear problems. Thus we use nonvariational techniques - a priori estimates method; in fact, we use bifurcation theory and blow-up argument.

Sumário

Notações **ix**

Introdução **xii**

Resultados Básicos **1**

0.1 Resultados de Análise Funcional 1
0.2 Regularidade 3
0.3 Espaços de Sobolev 4
0.4 Grau de Leray-Schauder 4
0.5 Bifurcação 6

1 O p-laplaciano como Aplicação Dualidade **7**

1.1 Resultados Fundamentais Concernentes à Aplicação Dualidade 7
1.2 A Estrutura Funcional 17

2 O Problema de Dirichlet **28**

2.1 Operador de Nemytskii 28
2.2 Existência de Solução Usando um Teorema de Ponto Fixo 33
2.3 Existência de Solução via Minimização 35
2.4 Existência de Solução Usando o Teorema do Passo da Montanha 38
2.5 Multiplicidade de Soluções 47

3 O Problema de Neumann **52**

3.1 Alguns Resultados de Análise Não Linear 53
3.2 O Operador p-laplaciano e a Aplicação Dualidade 58
3.3 Existência de Resultados para o Problema (3.1), (3.2) 61
3.4 Existência de Solução Usando um Teorema de Ponto Fixo 63
3.5 Existência de Solução via Minimização 64
3.6 Existência de Solução Usando o Teorema do Passo da Montanha 65

4 Problemas Elípticos Não Variacionais **68**

4.1 Propriedades do Operador L 68
4.2 Existência de um Contínuo de Soluções Positivas 82
4.3 Blow-up 86
4.4 Existência de Solução no Caso Radial 91

A Resultados Complementares **95**

Referências Bibliográficas **103**

Notações

Notações Gerais

$B(x,\delta)$	bola aberta de centro x e raio δ, 83
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\|A\|$	medida de Lebesgue de um conjunto A, 37
q.t.p	quase toda parte
λ_1	primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, 35
$u\|_A$	restrição da função u ao conjunto A, 8
$sig\, u$	sinal da função u, 22
I	operador identidade, 4
X	espaço de Banach real, 7
X^*	dual topológico de X, 7
deg	grau de Leray-Schauder, 4
f'	denota a derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet da função f
supp$f$	suporte da função f, 3
$\|\cdot\|$	norma euclidiana
$\\|x\\|_p = \left(\sum_{i=1}^N x_i^p\right)^{1/p}$	norma p, 54
$\\|\cdot\\|$	denota a norma de X e de X^*, 7

$div\, u$	divergente de u, xii
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u, 18
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u, xii
$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$	derivada normal interior, 79
$\langle\ ,\rangle$	denota produto interno e aplicação dualidade
$C, C_0, C_1, C_2, C_3, \dots,$	denotam constantes positivas
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	aberto
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto Ω
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$\mathcal{C}$	contínuo de soluções, xiv
$\vec{b}$	função vetorial, xiii
$p' = p/(p-1)$	conjugado hölderiano de p
$\limsup_{n\to\infty} f$	limite superior da função f quando $n \to \infty$, 15
$\liminf_{n\to\infty} f$	limite inferior da função f quando $n \to \infty$, 2
$\blacksquare$	indica final de demonstração

Espaços de Funções

$L^p(\Omega) = \left\{u \text{ mensurável sobre } \Omega \text{ e } \int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}$, $1 \leq p < \infty$, 2

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mens. sobre } \Omega \text{ e existe } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p sobre } \Omega\}$, 4

$C_c(\Omega)$	funções contínuas com suporte compacto em Ω, 3
$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$	semi-eixo real não negativo, xiii
$C^k(\Omega)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$, 3

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C(\overline{\Omega})$ funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\ g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \ \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = -\int_\Omega g_i \varphi\ dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$, xiii

$W_0^{1,p}(\Omega)$ o completamento de $C_c^1(\Omega)$, na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, xiii

$W^{-1,p'}(\Omega)$ dual topológico do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, xiii

$\|u\|_\infty = \sup_{x \in C(\overline{\Omega})} |u(x)|$ norma do espaço $C(\overline{\Omega})$, 86

$\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty$ norma do espaço $C_0^1(\overline{\Omega})$, 78

$\|u\|_{C^{1,\alpha}} = \|u\|_{C^1} + \sup\limits_{x \neq y \in \Omega} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$ norma do espaço $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, 78

$\|u\|_{0,p} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, 17

$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{0,p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,p}^p \right)^{1/p}$ norma do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, 17

$\|u\|_{1,p} = \||\nabla u|\|_{0,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p}$ norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, 18

$\|\!|u|\!\|_{1,p} = \left(\||\nabla u|\|_{0,p}^p + \|u\|_{0,p}^p\right)^{1/p}$ norma do espaço $W^{1,p}(\Omega)$, equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, 53

p^* expoente crítico de Sobolev definido por

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{se } \ 1 \leq p < N \\ \infty & \text{se } \quad p \geq N \end{cases}$$

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$, 31.

Introdução

Neste trabalho estudamos alguns problemas quasilineares envolvendo o operador p-laplaciano. Este operador, denotado por Δ_p, é definido por

$$\begin{array}{rcl} \Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ u & \longmapsto & \Delta_p u \end{array}$$

onde

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v, \quad \forall\, u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e $1 < p < \infty$. Uma outra caracterização para este operador é: $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Logo, para o caso onde $p = 2$, ele torna-se o laplaciano usual $\Delta u = \sum_{i=1}^N \partial^2 u/\partial x_i^2$.

Pelo menos dois argumentos explicam a importância desse tema. O p-laplaciano é um operador típico aparecendo em alguns problemas físicos e mecânicos, tais como: em glaceologia; em mecânica dos fluidos; no estudo dos fluidos não newtonianos; em elasticidade não linear; em algumas reações de difusão, e na extração de petróleo. Por exemplo, um problema que aparece em glaceologia (o derretimento lento das geleiras, sem transferência de calor) conduz ao seguinte problema de Neumann:

$$(\mathcal{P}_g) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u = 1 & \text{em} & \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre} & \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_r, \end{array} \right.$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$,

$$g = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{sobre} \;\; \Gamma_0 \\ f & \text{sobre} \;\; \Gamma_r, \end{array} \right.$$

e f é uma função dada. Para a descrição detalhada do modelo mecânico que conduz a $\mathcal{P}_g$ ver, por exemplo, Pelissier-[26].

O segundo argumento é de natureza puramente matemática: o operador p-laplaciano é um notável exemplo de uma aplicação dualidade. Este fato foi tratado, em 1969, por J. L. Lions-[22].

Organizamos o trabalho da seguinte forma:

Resultados Básicos: Com objetivo de tornarmos a leitura do texto mais agradável apresentamos, nesta seção particular, alguns fatos imprescindíveis a este trabalho.

Capítulo 1: Nesta parte do trabalho estudamos, mais especificamente, a aplicação dualidade J_φ definida a partir de um espaço de Banach real X para as partes do seu dual topológico $\mathcal{P}(X^*)$. Particularmente, estudamos alguns fatos tais como a sua sobrejetividade e algumas propriedades do seu inverso. Em seguida, tomando $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, mostramos que o operador p-laplaciano é, na verdade, uma aplicação dualidade. Essa relação entre uma aplicação dualidade e o operador Δ_p servir-nos-á de alicerce para os capítulos subseqüentes. Tanto neste capítulo como no próximo, a referência principal foi o artigo elaborado por Dinca, Jebelean e Mawhin-[13].

Capítulo 2: Aqui, dedicamos a resolver o seguinte problema com condição de fronteira de Dirichlet homogênea

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \qquad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Mais precisamente, apresentamos resultados de existência e multiplicidade. Para este propósito, empregamos a teoria dos pontos fixos e a teoria dos pontos críticos. Para ser mais preciso, utilizamos métodos topológicos - teoria do grau de Leray-Schauder sob a forma de estimativa a priori - e métodos variacionais. Neste último caso, abordamos o problema por um método variacional direto (utilizamos para isso, a caracterização variacional do primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, como tratado em Anane-[2]) e, também, usamos o Teorema do Passo da Montanha sob duas formas, que nos fornecem a não trivialidade da solução para o problema em consideração e, também, a sua multiplicidade, sob uma hipótese adicional sobre a função f.

No **Capítulo 3** aplicamos o operador p-laplaciano a um problema com condição de fronteira de Neumann homogênea

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega,$$

onde Ω, p e f são definidos como no capítulo anterior e $\partial u/\partial n = \langle \nabla u, n\rangle$. Atacamos este problema com as mesmas ferramentas usadas no problema de Dirichlet, a fim de obtermos resultados de existência. Devemos notar que o espaço das funções u trabalhado nesse capítulo é o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ munido da norma $|||u|||_{1,p} = (\|u\|_{0,p}^p + \||\nabla u|\|_{0,p}^p)^{1/p}$, enquanto que nos capítulos que o antecedem, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, cuja norma é dada por $\|u\|_{1,p} = \||\nabla u|\|_{0,p}$. Em vista disso, as aplicações dualidades são diferentes. Por isso, estabelecemos alguns resultados que são análogos aos do primeiro capítulo. Aqui, desenvolvemos um estudo feito por Cringanu-[11].

No **Capítulo 4** analisamos um problema do tipo

$$(\mathcal{P}_b) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + \vec{b}\cdot\nabla u = f(u) \\ u \in C_0^1(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é limitado e de classe $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$, $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$ com $div(\vec{b}) \leq 0$ e $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ é uma função contínua satisfazendo a condição de crescimento

$$\exists\, C_0, C_1 > 0 \quad \text{tais que} \quad C_0|u|^q \leq f(u) \leq C_1|u|^q, \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}^+$$

para algum $q > \max\{p-1, 1/(p-1)\}$ se $\vec{b} \neq 0$ e $q > p-1$ se $\vec{b} = 0$. Como não é claro que este problema pode ser tratado por algum método variacional se $\vec{b} \neq 0$, mostramos ser possível estudá-lo por métodos não variacionais, e mais precisamente, obtemos algumas estimativas a priori e resultados de existência para o mesmo. Antes de mais nada, estudamos algumas propriedades do operador $-\Delta_p(\cdot) + \vec{b}\nabla(\cdot)$; em seguida, damos alguns princípios de comparação fraco e forte, e estudamos a solubilidade do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \vec{b}\cdot\nabla u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f \in L^\infty(\Omega)$ é dada. Então, generalizamos o princípio de máximo forte de Vasquez para o operador p-laplaciano.

Com o fim de usarmos um método de continuação, introduzimos um parâmetro real $t \geq 0$ na equação e consideramos o problema

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + \vec{b}\cdot\nabla u = f(u+t), \\ u \in C_0^1(\overline{\Omega}), \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Provamos a existência de um contínuo $\mathcal{C}$ de soluções positivas de (1) partindo de $(0,0)$, tal que se $\mathcal{C} \cap (\{0\} \times C_0^1(\overline{\Omega}) = \{(0,0)\}$, então $\mathcal{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R}^+ \times C_0^1(\overline{\Omega})$. Portanto, a existência de uma solução não trivial para $(\mathcal{P}_b)$ será garantida se este contínuo for, a priori, limitado. Para obtermos esta estimativa a priori estudamos algum resultado de blow-up, que é aplicável se pudermos localizar, em algum sentido, o máximo global de soluções. Infelizmente, no caso $\vec{b} \neq 0$ esta localização não é mais possível pelo método de hiperplanos móveis, já que a equação não é mais invariante por reflexões com respeito a um hiperplano. Este ponto ainda permanece uma questão aberta para o problema geral $(\mathcal{P}_b)$, e a existência e estimativas a priori seriam provadas ao resolvê-lo. Mas, resolvemos este último ponto para soluções radiais no caso em que Ω é uma bola e $\vec{b}$ é tal que o problema pode ter soluções radialmente simétricas, isto é, com $\vec{b}$ radialmente simétrico. Como conseqüência, obtemos estimativas a priori e a existência de solução, no caso radial. Para o estudo deste capítulo, baseamo-nos no artigo de Celine-[4].

Finalmente, no **Apêndice**, apresentamos alguns resultados clássicos, bem como suas demonstrações. Resultados estes que completam os argumentos usados na parte principal do trabalho.

Resultados Básicos

Fazemos aqui um apanhado de resultados importantes da análise que, embora já bem conhecidos, se fazem necessários para termos uma leitura mais prazerosa e compreensiva; isto porque, enunciados numa parte em especial, evitam interrupções nas demonstrações dos teoremas (ou algo parecido) situados nos capítulos específicos. Logo, sempre que for preciso, remeter-nos-emos a eles por meio de referências cruzadas.

0.1 Resultados de Análise Funcional

Em várias partes deste trabalho recorreremos aos seguintes resultados:

Teorema 0.1 ([9], Teorema I.3., Observação I.5.) *Seja X um espaço de Banach, reflexivo e suponhamos que $\phi : X \to \mathbb{R}$ satisfaça:*

i) *ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente;*

ii) *ϕ é coercivo, isto é, $\phi(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$.*

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que $\phi(u_0) = \inf \phi(u)$ para todo $u \in X$. Além disso, se ϕ é diferenciável, então todo ponto de mínimo $u_0 \in X$ é ponto crítico, isto é, $\phi'(u_0) = 0$.

Lema 0.1 ([9], Exemplo B, p.6) *Se $\phi : X \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo e semi-contínuo inferiormente no espaço de Banach e reflexivo X, então ϕ é fracamente semi-contínuo inferiormente.*

Teorema 0.2 ([20],Convergência Fraca) *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Suponhamos que (x_n) em X seja fracamente convergente, digamos, $x_n \rightharpoonup x$. Então (Tx_n) é fortemente convergente em Y e tem o limite $y = Tx$.*

Enunciaremos agora o importante teorema da convergência dominada devido a Lebesgue. Este teorema nos diz, sob algumas hipóteses, que a operação de integração é contínua.

Teorema 0.3 ([5], Teorema 5.6) *Seja (f_n) uma seqüência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*
(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω,
(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$, temos

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \ em \ \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

O próximo teorema nos dá condições para aplicar este resultado. Temos o seguinte

Teorema 0.4 ([7], Teorema IV.9) *Sejam* (f_n) *uma seqüência de* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então podemos extrair uma subseqüência (f_{n_k}) *tal que*
(i) $f_{n_k} \to f(x)$ *q.t.p em* Ω *e*
(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$ *e q.t.p em* Ω, *com* $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema 0.5 ([7], Proposição III.5) *Sejam* X *um espaço de Banach e* (x_n) *uma seqüência em* X. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *na topologia fraca de* X, *então* $\|x_n\|$ *é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

O teorema seguinte mostra ser relevante porque transforma uma propriedade de natureza geométrica (convexidade uniforme) em outra, de natureza topológica (reflexividade), tão importante quando se deseja compacidade para a topologia fraca.

Teorema 0.6 ([7], Teorema III.29) *Se* x *é uniformemente convexo, então* X *é reflexivo.*

Lema 0.2 ([23], Corolário.2, p.126) *Sejam* M, N *espaços métricos. Para que* $f : M \to N$ *seja contínua no ponto* a, *é suficiente que* $x_n \to a$ *implique que* $(f(x_n))$ *possui uma subseqüência convergindo para* $f(a)$.

Teorema 0.7 ([7], Teorema III.27) *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e* (x_n) *uma seqüência limitada em* X. *Então existe uma subseqüência* (x_{n_k}) *que converge na topologia fraca de* X.

Teorema 0.8 ([18], Teorema 3.7 (Browder)) *Se* X *é um espaço de Banach, real, reflexivo, e* $T : X \to X^*$ *é um operador monótono, hemicontínuo e coercivo, então* $T(X) = X^*$.

Lema 0.3 ([1], Lema 2.26) *Se* $1 < p \leq 2$ *e* $0 \leq t \leq 1$, *e* $p' = p/(p-1)$, *então*

$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{1-t}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^p\right)^{1/(p-1)}.$$

Lema 0.4 ([1], Teorema 2.7) *Seja* $0 < p < 1$. *Se* $u, v \in L^p(\Omega)$, *então*

$$\||u| + |v|\|_{0,p} \geq \|u\|_{0,p} + \|v\|_{0,p}.$$

Teorema 0.9 *Sejam* $T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$ *e* $u \in H^1_0(\Omega)$. *Suponhamos que exista uma função* $f \in L^1_{loc}$ *tal que* $T(u) \geq f$ *q.t.p. sobre* Ω. *Então* $T(u) \in L^1(\Omega)$ *e temos*

$$\langle T, u\rangle = \int_\Omega (T(u))(x)dx.$$

0.2 Regularidade

Principalmente no quarto capítulo deste trabalho, utilizamos os resultados que se seguem.

Teorema 0.10 ([7], Proposição IV.18) *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$supp(f * g) \subset \overline{supp\, f + supp\, g}.$$

Teorema 0.11 ([14], Teorema 1 (Aproximação local por funções suaves)) *Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, e ponhamos $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ em $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Então*

- $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0$, *e*
- $u^\varepsilon \to u$ *em* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, *quando* $\varepsilon \to 0$.

Teorema 0.12 ([7], Proposição IV.20) *Sejam $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ (k inteiro) e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Então $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$. Em particular, se $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 0.13 ([7], Teorema IV.22) *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$. Então, $\rho_n * f \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 0.14 ([1], Teorema 1.31) *Sejam m um inteiro não negativo, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $0 < \lambda \leq 1$. Então, a imersão $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^m(\overline{\Omega})$ é compacta.*

O lema seguinte foi provado por Liebermann-[21] e Tolksdorf-[31].

Lema 0.5 (Estimativa $C^{1,\alpha}$, Liebermann e Tolksdorf) *Seja Ω um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,\beta}$, para algum $\beta \in (0,1)$, e seja $u \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$. Então, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K_1$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e $K_1 > 0$, onde α e K_1 são constantes dependendo apenas de N, p e de um limite sobre $\|u\|_\infty$e $\|\Delta_p u\|_\infty$.*

Em [2], Anane provou:

Lema 0.6 (Estimativa L^∞, Anane) *Seja $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ satisfazendo $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Suponhamos que existam $a > 0$, $\sigma \in [1, p^*)$, $q \in [1, p^*/p)$ e uma função $b \in L^{q'}(\Omega)$ ($b \geq 0$) tais que*

$$-u\Delta_p u \leq a|u|^\sigma + b(x)|u| \qquad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Então, $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_\infty \leq C$, onde C é uma constante dependendo apenas de a, σ, q, N, p, $\|b\|_{q'}$ e $\|u\|_{p_0}$, onde

$$p_0 = \begin{cases} p^*, & se\ p^* < \infty, \\ 2\max\{pq, \sigma\}, & se\ p^* = \infty. \end{cases}$$

0.3 Espaços de Sobolev

Teorema 0.15 ([7], Corolário IX.14) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1, com fronteira limitada, e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\begin{cases} \textit{se} \;\; 1 \leq p < N, \;\; \textit{então} \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega), \\ \textit{se} \;\; p = N, \;\; \textit{então} \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, \infty), \\ \textit{se} \;\; p > N, \;\; \textit{então} \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

com injeções contínuas.

Teorema 0.16 ([7], Teorema IX.16 (Rellich-Kondrachov)) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1. Temos:*

$$\begin{cases} \textit{se} \;\; 1 \leq p < N, \;\; \textit{então} \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*), \\ \textit{se} \;\; p = N, \;\; \textit{então} \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, \infty), \\ \textit{se} \;\; p > N, \;\; \textit{então} \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

com injeções compactas.

Lema 0.7 ([27], Teorema A.0.6) *Seja Ω um domínio limitado. Então*

1. *$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é uniformente contínuo em conjuntos limitados;*
2. *O operador composição $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacto se $1 \leq q < pN/(N-p)$.*

Em seguida, particularizamos para o operador laplaciano um resultado de princípio do máximo para equações diferenciais parciais elípticas

Teorema 0.17 ([16], Teorema 8.1) *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfaz $\Delta u - \vec{b} \cdot \nabla u \geq 0$, então $\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$.*

0.4 Grau de Leray-Schauder

Apresentamos, aqui, a função grau, que nos informa sobre a existência, unicidade ou multiplicidade de solução para equações da forma $\varphi(x) = b$, onde X é um espaço de Banach real, $\varphi \in C(\Omega, X)$, $\Omega \subset X$ é um aberto e limitado, e b é um ponto dado de X. Denotamos esta função por deg. Ela associa a cada tripla (φ, Ω, b), um número inteiro, $deg(\varphi, \Omega, b)$, que é o grau de φ com respeito a Ω e a b. Definimos o grau em duas situações. A primeira contemplando as perturbações de dimensão finita da identidade, e a segunda, abrangendo as perturbações compactas da identidade, que é, de fato, a definição do grau de Leray-Schauder.

Definição 0.1 *Seja $T : \Omega \to X$.*

(i) *Dizemos que T é um operador de posto finito se $T(\Omega)$ está contido num subespaço de dimensão finita de X;*

(ii) *chamamos $\phi = I - T : \Omega \to X$ perturbação de dimensão finita da identidade quando T é um operador de posto finito.*

Definição 0.2 *Sejam $b \in X \backslash \phi(\partial\Omega)$ e F um subespaço de dimensão finita de X contendo $T(\overline{\Omega}) \cup \{b\}$. Definimos,*

$$deg(\phi, \Omega, b) := deg(\phi_{|\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Definição 0.3 *Seja $T : \overline{\Omega} \to X$.*

(i) *Dizemos que T é um operador compacto se é contínuo sobre $\overline{\Omega}$ e se $T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto, ou seja, $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é compacto;*

(ii) *chamamos $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to X$ uma perturbação compacta da identidade quando T é um operador compacto.*

Lema 0.8 *Sejam $T : \overline{\Omega} \to X$ um operador compacto, $\phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade e $b \in X \backslash \phi(\partial\Omega)$. Então,*

(i) *ϕ é uma aplicação fechada, isto é, a imagem por ϕ de um fechado é um fechado;*

(ii) *ϕ é uma aplicação própria, isto é, a imagem inversa por ϕ de um compacto é um compacto;*

(iii) *Seja $r = dist(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$. Existe $T_r : \overline{\Omega} \to X$ uma aplicação de posto finito tal que $\|T - T_r\| \leq r/2$.*

Definição 0.4 *Seja $r = deg(b, \phi(\partial\Omega) > 0$, tomemos $\phi_r = I - T_r$, onde $T_r : \overline{\Omega} \to X$ é uma aplicação de posto finito tal que $\|\phi_r - \phi\| = \|T_r - T\| \leq r/2$. Notemos que $dist(b, \phi_r(\partial\Omega)) \geq r/2 > 0$. Definimos então,*

$$deg(\phi, \Omega, b) := deg(\phi_r, \Omega, b).$$

Propriedades Fundamentais do Grau

Exibimos, agora, algumas propriedades gerais do grau, que são muito utilizadas. Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset X$ aberto e limitado, $T : \Omega \to X$ uma aplicação compacta, $\phi = I - T$ uma pertubação compacta da identidade e $b \in X \backslash \phi(\partial\Omega)$. Consideremos o espaço dos operadores compactos $T : \overline{\Omega} \to X$, denotado por $K(\overline{\Omega}, X)$, munido com a norma do supremo, $\|T\|_\infty := \sup\{|T(x)| : x \in \overline{\Omega}\}$.

(d_1) **Continuidade do Grau por Variação do Operador** T. Existe uma vizinhança U de T no espaço dos operadores compactos $K(\Omega, X)$ tal que para todo $S \in U$ temos que,

$$b \notin (I - S)(\partial\Omega) \text{ e } \quad deg(I - S, \Omega, b) = deg(\phi, \Omega, b).$$

(d_2) **Invariância do Grau por Homotopias Compactas.** Seja $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], X)$ dada por,

$$H(x,t) = x - S(x,t),$$

onde $S : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ é compacta. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$ então $deg(H(.,t), \Omega, b)$ é constante para todo $t \in [0,1]$.

(d_3) **O grau é constante nas componentes conexas de** $X\backslash\phi(\partial\Omega)$. Se b e $\bar{b}$ estão na mesma componente conexa de $X\backslash\phi(\partial\Omega)$, então

$$deg(\varphi,\Omega,b) = deg(\varphi,\Omega,\bar{b}).$$

(d_4) **Aditividade**. Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1, Ω_2 são subconjuntos de Ω abertos, limitados, disjuntos e $b \notin \phi(\partial\Omega_i)$, $(i = 1, 2)$. Então,

$$deg(\phi,\Omega,b) = deg(\phi,\Omega_1,b) + deg(\phi,\Omega_2,b).$$

Como conseqüência do grau de Leray-Schauder, temos um teorema de ponto fixo, devido a Schaefer.

Teorema 0.18 ([14], Teorema do Ponto Fixo de Schaefer) *Suponhamos $A : X \to X$ uma aplicação contínua e compacta. Suponhamos, também, que o conjunto*

$$\{u \in X : u = \lambda A(u) \quad \textit{para algum} \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

seja limitado. Então A tem um ponto fixo.

0.5 Bifurcação

Introduzimos, nesta seção, algumas noções e resultados da teoria de bifurcação.

Definição 0.5 *Sejam X e Y espaços de Banach, $J = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ e $\Omega \subset X$ uma vizinhança de $x = 0$, $F : J \times \Omega \to Y$ tal que $F(\lambda, 0) = 0$ sobre J. Então, $(\lambda_0, 0)$ é dito um ponto de bifurcação para $F(\lambda, x) = 0$ se, e somente se, $(\lambda, x) \in \overline{\mathcal{C}}$, onde*

$$\mathcal{C} = \{(\lambda_0, 0) \in J \times \Omega : F(\lambda, x) = 0 \ \textit{ e } \ x \neq 0\}.$$

Assim, $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação se, e somente se, $(\lambda_0, 0) = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n, x_n)$ com $F(\lambda_n, x_n) = 0$ e $x_n \neq 0$ para todo n. Neste caso é, também, conveniente dizermos que zeros não triviais bifurcam em λ_0 da reta, $\{(\lambda, 0) : \lambda \in J\}$, de zeros triviais.

Lema 0.9 ([29], Lema 1.1) *Seja K um espaço métrico compacto e A e B subconjuntos de K, fechados e disjuntos. Então, ou existe um subcontínuo de K encontrando-se com ambos, A e B, ou $K = K_A \cup K_B$, onde K_A, K_B são subconjuntos de K compactos e disjuntos contendo A e B, respectivamente.*

Lema 0.10 ([3], Lema A.1) *Seja $\mathcal{O} \subset [\lambda_1, \lambda_2] \times X$ um conjunto aberto e limitado com a topologia induzida de $[\lambda_1, \lambda_2] \times X$ e $G : \overline{\mathcal{O}} \to X$ compacto. Se $0 \notin (I - G(\lambda, \cdot))(\partial\mathcal{O})_\lambda$, então*

$$deg(I - G(\lambda, \cdot), \mathcal{O}_\lambda, 0) = C$$

para todo $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ e C alguma constante, com

$$\mathcal{O}_\lambda := \{u \in X : (\lambda, u) \in \mathcal{O}\}, \qquad (\partial\mathcal{O})_\lambda := \{u \in X : (\lambda, u) \in \partial\mathcal{O}\}.$$

Capítulo 1

O p-laplaciano como Aplicação Dualidade

Este capítulo é voltado ao estudo do operador $-\Delta_p,\ 1 < p < \infty$ como uma aplicação dualidade $J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega),\ 1/p + 1/p' = 1$ correspondendo à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$. Esta apresentação tem a vantagem de permitir aplicar os resultados gerais conhecidos para a aplicação dualidade ao caso particular do $p - laplaciano$. Por exemplo, a sobrejetividade da aplicação dualidade determina a existência de solução, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para a equação $-\Delta_p u = f$, com $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Notemos que se $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ é dada, então um elemento $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dito solução do problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u & = & f \qquad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

se a igualdade $-\Delta_p u = f$ é satisfeita no sentido de $W^{-1,p'}(\Omega)$.

1.1 Resultados Fundamentais Concernentes à Aplicação Dualidade

Abaixo, X sempre é um espaço de Banach real, X^* representa o seu dual topológico e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a aplicação dualidade entre X^* e X. A norma em X e em X^* é denotada por $\| \cdot \|$.

Dado um operador $A : X \to \mathcal{P}(X^*)$, cujos valores são conjuntos, a imagem de A é definida pelo conjunto $R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} A(x)$, onde $D(A) = \{x \in X : A(x) \neq \emptyset\}$ é o domínio de A.

O operador A é dito monótono se $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$ sempre que $x_1, x_2 \in D(A)$ e $x_1^* \in A(x_1),\ x_2^* \in A(x_2)$.

Uma função $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é chamada uma função de normalização se:

- φ é contínua e estritamente crescente;
- $\varphi(0) = 0$;
- $\varphi(r) \to +\infty$ quando $r \to +\infty$.

O exemplo mais importante de função de normalização para o nosso trabalho é $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\varphi(t) = t^{p-1}.$$

Dada uma função de normalização φ, associamos, a ela, uma aplicação dualidade $J_\varphi : X \to \mathcal{P}(X^*)$ definida por

$$J_\varphi(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|,\ \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}$$

para cada $x \in X$.

Afirmação 1.1 *O domínio $D(J_\varphi)$ de J_φ é igual a X. Isto é, para cada $x \in X$, $J_\varphi(x)$ é não vazio.*

Demonstração: Se $x = 0$, então $J_\varphi(0) = \{0^*\}$, pois para todo $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = \varphi(\|x\|) = \varphi(0) = 0$; donde $x^* = 0$ é o único elemento de $J_\varphi(x)$. Agora, tomemos $x \in X\backslash\{0\}$ e consideremos o seguinte subespaço de X, gerado por x, isto é:

$$\mathbb{R}x = \{y \in X : y = \xi x,\ \xi \in \mathbb{R}\}$$

e $f_x : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(\xi x) = \xi\varphi(\|x\|)\|x\|$. Mostremos que f_x é linear, contínua e $\|f_x\| = \varphi(\|x\|)$.

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f_x(\alpha(\xi x) + \beta(\xi x)) &= f_x((\alpha\xi + \beta\xi)x) = (\alpha\xi + \beta\xi)\varphi(\|x\|)\|x\| \\ &= \alpha\xi\varphi(\|x\|)\|x\| + \beta\xi\varphi(\|x\|)\|x\| = \alpha f_x(\xi x) + \beta f_x(\xi x). \end{aligned}$$

Assim, f_x é linear. Daí, $|f_x(\xi x)| = |\xi\varphi(\|x\|)\|x\|| = \varphi(\|x\|)\|\xi x\|$, donde f_x é contínua. Além disso, se $\xi = 1$, $f_x(x) = \varphi(\|x\|)\|x\|$. Logo $f_x(x/\|x\|) = \varphi(\|x\|)$ e, portanto, $\|f_x\| = \varphi(\|x\|)$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach (cf. Brezis-[7], Corolário I.2), existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*|_{\mathbb{R}x} = f_x$ e $\|x^*\| = \|f_x\|$. Por conseguinte,

$$\langle x^*, x\rangle = f_x(1x) = \varphi(\|x\|)\|x\|, \quad \|x^*\| = \|f_x\| = \varphi(\|x\|),$$

daí, $x^* \in J_\varphi(x)$. E, portanto, $J_\varphi(x)$ é não vazio. ■

Algumas das principais propriedades da aplicação dualidade estão descritas no seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Se φ é uma função de normalização, então:*

(i) *para cada $x \in X, J_\varphi(x)$ é um subconjunto de X^*, limitado, fechado e convexo;*

(ii) *J_φ é monótono:*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq (\varphi(\|x_1\|) - \varphi(\|x_2\|))(\|x_1\| - \|x_2\|) \geq 0$$

para cada $x_1, x_2 \in X$ e $x_1^* \in J_\varphi(x_1)$, $x_2^* \in J_\varphi(x_2)$;

(iii) *para cada $x \in X, J_\varphi(x) = \partial\psi(x)$, onde $\psi(x) = \int_0^{\|x\|}\varphi(t)dt$ e $\partial\psi : X \to \mathcal{P}(X^*)$ é a subdiferencial de ψ no sentido da análise convexa, isto é,*

$$\partial\psi(x) = \{x^* : \psi(y) - \psi(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \quad \forall y \in X\}.$$

Prova. (i) Já vimos que para todo $x \in X$, $J_\varphi(x)$ é um subconjunto não vazio de X^*. Vejamos agora que $J_\varphi(x)$ é convexo. Sejam $x_1^*, x_2^* \in J_\varphi(x)$ e $\alpha \in [0,1]$, logo

$$\begin{aligned} \langle \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*, x\rangle &= \alpha\langle x_1^*, x\rangle + (1-\alpha)\langle x_2^*, x\rangle \\ &= \alpha\varphi(\|x\|)\|x\| + (1-\alpha)\varphi(\|x\|)\|x\| \\ &= \varphi(\|x\|)\|x\|. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \varphi(\|x\|) &= \left\langle \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \\ &\leq \sup_{\|y\|\leq 1} |\langle \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*, y\rangle| \\ &= \|\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*\|. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*\| \leq \alpha\|x_1^*\| + (1-\alpha)\|x_2^*\| &= \alpha\varphi(\|x\|) + (1-\alpha)\varphi(\|x\|) \\ &= \varphi(\|x\|). \end{aligned}$$

Então,

$$\|\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*\| = \varphi(\|x\|). \tag{1.2}$$

Logo, de (1.1) e (1.2) temos que $\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \in J_\varphi(x)$ e, portanto, $J_\varphi(x)$ é convexo.

Mostremos que $J_\varphi(x)$ é fechado. Seja $(x_n^*) \subset J_\varphi(x)$ tal que $x_n^* \to x_0^*$ em X^*. Como $\|x_n^*\| = \varphi(\|x\|)$, usando a continuidade da norma, temos que $\|x_0^*\| = \varphi(\|x\|)$. Desde que $\langle x_n^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|$ e $x_n^* \to x_0^*$ segue que $\langle x_0^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|$. Portanto, $x_0^* \in J_\varphi(x)$.

Finalmente, notemos que $J_\varphi(x)$ é limitado, pois se $x^* \in J_\varphi(x)$, temos $\|x^*\| = \varphi(\|x\|)$.

(ii) Para provarmos a monotonicidade de J_φ, tomemos $x_1, x_2 \in X$ e $x_1^* \in J_\varphi(x_1)$, $x_2^* \in J_\varphi(x_2)$.

$$\begin{aligned} \langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle &= \langle x_1^*, x_1\rangle + \langle x_2^*, x_2\rangle - \langle x_1^*, x_2\rangle - \langle x_2^*, x_1\rangle \\ &\geq \langle x_1^*, x_1\rangle + \langle x_2^*, x_2\rangle - |\langle x_1^*, x_2\rangle| - |\langle x_2^*, x_1\rangle| \\ &\geq \varphi(\|x_1\|)\|x_1\| + \varphi(\|x_2\|)\|x_2\| - \varphi(\|x_1\|)\|x_2\| - \varphi(\|x_2\|)\|x_1\| \\ &= (\varphi(\|x_1\|) - \varphi(\|x_2\|))(\|x_1\| - \|x_2\|). \end{aligned}$$

Daí, se $\|x_1\| = \|x_2\|$, então $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq 0$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que $\|x_1\| > \|x_2\|$. Usando o fato que φ é crescente, também temos $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq 0$.

(iii) Primeiramente, vejamos que $J_\varphi(x) \subset \partial\psi(x)$. Seja $F : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por $F(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$. Daí,

$$\psi(x) = \int_0^{\|x\|} \varphi(t)dt = F(\|x\|), \quad \forall\, x \in X.$$

Seja $x^* \in J_\varphi(x)$; desde que φ é crescente, pelo teorema do valor médio

$$F(\|y\|) - F(\|x\|) = F'(\theta)(\|y\| - \|x\|) \geq \varphi(\|x\|)(\|y\| - \|x\|).$$

onde θ é um número real entre $\|x\|$ e $\|y\|$. Agora, usando a definição de $J_\varphi(x)$, temos

$$\varphi(\|x\|)(\|y\| - \|x\|) = \|x^*\|\|y\| - \langle x^*, x\rangle \geq \langle x^*, y\rangle - \langle x^*, x\rangle = \langle x^*, y - x\rangle,$$

donde

$$\psi(y) - \psi(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle.$$

Portanto, $x^* \in \partial\psi(x)$.

Mostremos, agora, que $\partial\psi(x) \subset J_\varphi(x)$. Seja $x^* \in \partial\psi(x)$. Primeiramente, provamos que

$$\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|. \tag{1.3}$$

Como $\langle x^*, x\rangle \leq \|x^*\|\|x\|$, basta mostrarmos a desigualdade contrária. Para todo $y \in X$, com $\|y\| = \|x\|$, temos

$$0 = F(\|y\|) - F(\|x\|) = \psi(y) - \psi(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle = \langle x^*, y\rangle - \langle x^*, x\rangle;$$

daí,

$$\langle x^*, y\rangle \leq \langle x^*, x\rangle.$$

Resulta, então, que $|\langle x^*, y\rangle| \leq \langle x^*, x\rangle$, para todo $y \in X$ com $\|y\| = \|x\|$. Assim, temos:

$$\|x\|\|x^*\| = \|x\| \sup_{\|z\|=1} |\langle x^*, z\rangle| = \sup_{\|z\|=1} |\langle x^*, \|x\|z\rangle| \leq \langle x^*, x\rangle.$$

Vejamos, agora, que $\|x^*\| = \varphi(\|x\|)$.
Se $x = 0$, seja $t > 0$ e $y \in X$ com $\|y\| = 1$. Ora,

$$\langle x^*, ty\rangle = \langle x^*, ty - 0\rangle \leq \psi(ty) - \psi(0) = F(t) - F(0) = F(t);$$

donde $\langle x^*, ty\rangle \leq F(t)$. Por outro lado,

$$-\langle x^*, ty\rangle = \langle x^*, t(-y)\rangle \leq \psi(t(-y)) - \psi(0) = F(t) - F(0) = F(t);$$

ou seja,

$$-\langle x^*, ty\rangle \leq F(t).$$

Portanto,

$$|\langle x^*, y\rangle| \leq \frac{F(t)}{t}, \text{ para todo } y \in X \text{ com } \|y\| = 1 \text{ e } t > 0.$$

E assim,

$$\|x^*\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x^*, y\rangle| \leq \frac{F(t)}{t} \quad \text{quando} \quad t > 0.$$

Tomando o limite com $t \searrow 0$ obtemos

$$0 \leq \|x^*\| \leq \lim_{t\searrow 0} \frac{F(t)}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(0) = \varphi(0) = 0.$$

Donde, $0 = \|x^*\| = \varphi(0) = \varphi(\|0\|)$.
Dado $x \in X\backslash\{0\}$, escrevendo $x = \|x\|x/\|x\|$ e $y = tx/\|x\|$ para $t > 0$, vem

$$\begin{aligned} F(t) - F(\|x\|) &= \psi(y) - \psi(x) \geq \left\langle x^*, (t - \|x\|)\frac{x}{\|x\|}\right\rangle \\ &= (t - \|x\|)\left\langle x^*, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle. \end{aligned}$$

Agora, usando (1.3), temos

$$(t - \|x\|) \left\langle x^*, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = (t - \|x\|)\|x^*\| \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = (t - \|x\|)\|x^*\|.$$

Portanto,

$$F(t) - F(\|x\|) \geq (t - \|x\|)\|x^*\|.$$

Para $t > \|x\|$, resulta

$$\frac{F(t) - F(\|x\|)}{t - \|x\|} \geq \|x^*\|$$

e tomando o limite com $t \searrow \|x\|$, vem

$$\varphi(\|x\|) = F'(\|x\|) \geq \|x^*\|.$$

Analogamente, quando $t < \|x\|$, temos

$$\frac{F(t) - F(\|x\|)}{t - \|x\|} \leq \|x^*\|$$

e daí, resulta que $\varphi(\|x\|) \leq \|x^*\|$. Portanto, $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$. ■

Lembremos que um funcional $f : X \to \mathbb{R}$ é dito Gâteaux diferenciável em $x \in X$ se existe $f'(x) \in X^*$ tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = \langle f'(x), y \rangle, \quad \forall\, y \in X.$$

Observação 1.1 *Se uma função convexa $f : X \to \mathbb{R}$ é Gâteaux diferenciável em $x \in X$, então $\partial f(x)$ consiste de um único elemento, a saber $x^* = f'(x)$. Com efeito, pela definição da derivada de Gâteaux,*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = \langle f'(x), y \rangle, \qquad \textit{quando} \quad y \in X.$$

Da convexidade de f resulta, para todo $\lambda \in (0, 1]$, que

$$f(x + \lambda(y - x)) = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + f(x) - \lambda f(x),$$

logo

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$

Fazendo $\lambda \searrow 0$, obtemos

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle, \quad \forall\, y \in X,$$

donde $f'(x) \in \partial f(x)$.

Por outro lado, seja $x^* \in \partial f(x)$. Então, para todo $y \in X$ e $\lambda > 0$,

$$f(x + \lambda y) - f(x) \geq \langle x^*, x + \lambda y - x \rangle,$$

donde
$$\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} \geq \langle x^*, y\rangle.$$
Agora, fazendo $\lambda \searrow 0$*, resulta que* $\langle f'(x)-x^*, y\rangle \geq 0$*. Então*
$$\langle f'(x)-x^*, y\rangle = 0, \quad \forall\, y \in X,$$
e daí,
$$f'(x) = x^*.$$

Esta simples observação mostrar-se-á relevante, posteriormente.

A geometria do espaço X (ou X^*) fornece-nos mais propriedades da aplicação dualidade. Assim, lembremos as seguintes definições básicas:

Definição 1.1 *O espaço X é dito:*

(a) *uniformemente convexo se para cada $\varepsilon \in (0,2]$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ então $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$;*

(b) *localmente uniformemente convexo se para cada $x \in X$ com $\|x\| = 1$ e cada $\varepsilon \in (0,2]$, existe $\delta(x,\varepsilon) > 0$ tal que se $\|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$, então $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(x,\varepsilon))$;*

(c) *estritamente convexo se para cada $x, y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ tem-se $\|x+y\| < 2$.*

Temos a seguinte cadeia de implicações:

Teorema 1.2 *As seguintes implicações são válidas:*

(i) *Se X é uniformemente convexo, então X é localmente uniformemente convexo;*

(ii) *Se X é localmente uniformemente convexo, então X é estritamente convexo.*

Prova. (i) Evidente.

(ii) Sejam $x, y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $x \neq y$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \|x-y\|$, existe $\delta(x,\varepsilon) > 0$ tal que $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(x,\varepsilon)) < 2$. ■

Usamos, indistintamente, as equivalências dadas pela proposição seguinte.

Proposição 1.1 **(i)** *O espaço X é uniformemente convexo se, e somente se, todas seqüências $(x_n), (y_n) \subset X$ tais que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ e $\|x_n + y_n\| \to 2$ implicam que $\|x_n - y_n\| \to 0$.*

(ii) *O espaço X é localmente uniformemente convexo se, e somente se, $\|x_n\| = \|x\| = 1$ e $\|x_n + x\| \to 2$ implicam que $\|x_n - x\| \to 0$.*

Prova. (i) Seja X uniformemente convexo. Suponhamos, por absurdo, que existam seqüências $(x_n), (y_n) \subset X$ com $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ e $\|x_n + y_n\| \to 2$, mas $\|x_n - y_n\|$ não convirja para zero. Então, existe $\varepsilon \in (0,2]$ e subseqüências $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ tais que $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Da convexidade uniforme de X, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$, então $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$. Por conseguinte, temos
$$\|x_{n_k} + y_{n_k}\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon)), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k \to \infty$, chegamos na contradição $2 \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$.

Inversamente, suponhamos que X não seja uniformemente convexo. Então, pela Definição 1.1(a), dado $\varepsilon \in (0,2]$ tal que para cada $\delta = 1/n$, existem $x_n, y_n \in X$ com $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ e $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$, temos $\|x_n + y_n\| \geq 2\,(1 - 1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\|x_n + y_n\| \to 2$, e $\|x_n - y_n\|$ não converge para zero, o que prova a negação da hipótese.

(ii) Esta etapa é análoga ao item (i), e deixamos ao cargo do leitor. ∎

Em espaços de Banach uniformemente convexo, convergência em norma e convergência fraca implicam em convergência forte. Na verdade, vale mais:

Proposição 1.2 *Seja X um espaço localmente uniformemente convexo. Se uma seqüência $(x_n) \subset X$ satisfaz $\|x_n\| \to \|x\|$ e $x_n \rightharpoonup x$, então $x_n \to x$.*

Prova. De fato, seja $x_n \subset X$ satisfazendo $\|x_n\| \to \|x\|$ e $x_n \rightharpoonup x$. Mostremos que $x_n \to x$. Se $x = 0$ não há o que fazermos. Podemos, então, supor $x \neq 0$. Denotemos $y_n = x_n/\|x_n\|$ e $y = x/\|x\|$. Então $\|y_n\| = \|y\| = 1$ e $y_n \rightharpoonup y$. Mostremos que $y_n \to y$.
Suponhamos que (y_n) não convirja para y, ou seja, $\|y_n - y\|$ não convirja para zero. Assim, pela Proposição 1.1(ii) $\|y_n + y\|$ não converge para 2. Logo, existe $\varepsilon \in (0,2)$ e uma subseqüência $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ tais que $\|y_{n_k} + y\| < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, uma vez que, pela Definição 1.1(b), $\|y_{n_k} + y\| < 2$. Como conseqüência do Teorema de Hahn-Banach (cf. Brezis-[7], Corolário I.3), existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$, e $\langle x^*, y\rangle = 1$. Então

$$\langle x^*, y_{n_k}\rangle + 1 = \langle x^*, y_{n_k} + y\rangle \leq \|x^*\|\|y_{n_k} + y\| < \varepsilon,$$

de onde se obtém a contradição

$$2 = \lim_{k\to\infty} \langle x^*, y_{n_k}\rangle + 1 \leq \varepsilon < 2,$$

que completa a demonstração. ∎

No que se segue, φ será uma função de normalização. A proposição seguinte ser-nos-á útil, em particular, na obtenção da inversa da aplicação dualidade.

Proposição 1.3 **(i)** *Se X é estritamente convexo, então J_φ é estritamente monótono; isto é:*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle > 0$$

para cada $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$ e $x_1^* \in J_\varphi(x_1),\ x_2^* \in J_\varphi(x_2)$. Em particular,

$$J_\varphi(x_1) \cap J_\varphi(x_2) = \emptyset \quad se \quad x_1 \neq x_2.$$

(ii) *Se X^* é estritamente convexo, então (J_φ) é um conjunto unitário para todo $x \in X$.*

Prova. Notemos que se X é estritamente convexo, então para cada $x^* \in X^* \backslash \{0\}$ existe no máximo um elemento $x \in X$ com $\|x\| = 1$, tal que $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|$. De fato, suponhamos, por absurdo, que existam $x_1, x_2 \in X$ com $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, tais que

$$\|x^*\| = \langle x^*, x_1\rangle = \langle x^*, x_2\rangle.$$

Obtemos a contradição

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \frac{1}{2}(\langle x^*, x_1\rangle + \langle x^*, x_2\rangle) = \frac{1}{2}\langle x^*, x_1 + x_2\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\|x^*\|\|x_1 + x_2\| < \|x^*\|, \end{aligned}$$

devido à Definição 1.1(c).

Agora, provemos (i). Já sabemos, pelo Teorema 1.1(ii), que $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq 0$. Suponhamos, por contradição, que existam $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$ e $x_1^* \in J_\varphi(x_1)$, $x_2^* \in J_\varphi(x_2)$, satisfazendo $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle = 0$. Logo,

$$0 = \langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq (\varphi(\|x_1\|) - \varphi(\|x_2\|))(\|x_1\| - \|x_2\|) \geq 0,$$

e assim obtemos $\|x_1\| = \|x_2\|$, já que φ é estritamente crescente.

Observamos que $x_1 \neq x_2$ e $\|x_1\| = \|x_2\|$ implicam que $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$. Daí obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle x_1^* - x_2^*, \frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle \\ &= \left[\varphi(\|x_1\|) - \left\langle x_1^*, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle\right] + \left[\varphi(\|x_2\|) - \left\langle x_2^*, \frac{x_1}{\|x_1\|}\right\rangle\right]. \end{aligned}$$

De

$$\left\langle x_1^*, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle \leq \|x_1^*\| \left\|\frac{x_2}{\|x_2\|}\right\| = \|x_1^*\| \quad \text{e} \quad \varphi(\|x_1\|) = \|x_1^*\|$$

resulta que o primeiro couchete é não-negativo. Analogamente, o segundo também o é. Logo, cada um deles deve ser nulo. Daí,

$$\|x_1^*\| = \varphi(\|x_1\|) = \left\langle x_1^*, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle,$$

que juntamente com $\|x_1^*\| = \langle x_1^*, x_1/\|x_1\|\rangle$, produzem

$$\left\langle x_1^*, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle = \|x_1^*\| = \left\langle x_1^*, \frac{x_1}{\|x_1\|}\right\rangle.$$

Assim, pelo parágrafo inicial, temos $x_1/\|x_1\| = x_2/\|x_2\|$, isto é, $x_1 = x_2$, o que é uma contradição.

(ii) Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in X$ tal que $J_\varphi(x)$ possua dois elementos, digamos $x_1^*, x_2^* \in J_\varphi(x)$, com $x_1^* \neq x_2^*$. Temos $\|x_1^*\| = \varphi(\|x\|) = \|x_2^*\|$ e denotemos $y_1^* = x_1^*/\|x_1^*\|$, $y_2^* = x_2^*/\|x_2^*\|$. É claro que $\|y_1^*\| = \|y_2^*\| = 1$ e $y_1^* \neq y_2^*$. Como $J_\varphi(x)$ é convexo (Teorema 1.1(i)) e

$$\varphi(\|x\|)y_1^*,\ \varphi(\|x\|)y_2^* \in J_\varphi(x),$$

concluímos que $(1/2)\varphi(\|x\|)(y_1^* + y_2^*) \in J_\varphi(x)$, logo,

$$\left\|\frac{1}{2}\varphi(\|x\|)(y_1^* + y_2^*)\right\| = \varphi(\|x\|),$$

que implica $\|y_1^* + y_2^*\| = 2$, contradizendo o fato de X^* ser estritamente convexo. ∎

Uma propriedade interessante que será transferida ao operador p-laplaciano (ver Teorema 1.10) aparece na

Proposição 1.4 *Se X é localmente uniformemente convexo e $J_\varphi(x)$ é monovalente ($J_\varphi : X \to X^*$), então J_φ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_+)$, isto é: se*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ e } \limsup_{n\to\infty}\langle J_\varphi(x_n), x_n - x\rangle \le 0, \text{ então } x_n \to x.$$

Prova. É imediato que de $x_n \rightharpoonup x$ e $\limsup_{n\to\infty}\langle J_\varphi(x_n), x_n - x\rangle \le 0$ resulta que $\limsup_{n\to\infty}\langle J_\varphi(x_n) - J_\varphi(x), x_n - x\rangle \le 0$, pois $x_n \rightharpoonup x$ implica $\langle J_\varphi(x), x_n\rangle \to \langle J_\varphi(x), x\rangle$, e daí, $\langle J_\varphi(x), x_n - x\rangle \to 0$. De

$$0 \le \left(\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|x\|)\right)\left(\|x_n\| - \|x\|\right) \le \langle J_\varphi(x_n) - J_\varphi(x), x_n - x\rangle$$

segue

$$\left(\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|x\|)\right)\left(\|x_n\| - \|x\|\right) \to 0$$

e, portanto, $\|x_n\| \to \|x\|$, já que φ é contínua e monótona.

A conclusão segue da Proposição 1.2. ∎

É bom lembrarmos, aqui, mais uma definição.

Definição 1.2 **(i)** *O operador $T : X \to X^*$ é dito hemicontínuo se*

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle T(x+\lambda y), z\rangle = \langle Tx, z\rangle, \quad \forall\, x, y, z \in X;$$

(ii) *O operador $T : X \to X^*$ é dito demicontínuo se ele aplica seqüências fortemente convergentes de X em seqüências fracamente convergentes de X^*; ou seja, se para a seqüência $(x_n) \subset X$ temos $x_n \to x \in X$, então $Tx_n \rightharpoonup Tx$.*

Agora, vejamos que a aplicação dualidade J_φ é demicontínua.

Proposição 1.5 *Se X é reflexivo e $J_\varphi : X \to X^*$ então J_φ é demicontínua, isto é, se $x_n \to x$ em X então $J_\varphi(x_n) \rightharpoonup J_\varphi(x)$ em X^*.*

Prova. Seja $(x_n) \subset X$ e $x \in X$ com $x_n \to x$, quando $n \to \infty$. Como (x_n) é limitada e $\|J_\varphi(x_n)\| = \varphi(\|x_n\|)$, resulta que $J_\varphi(x_n)$ é limitada. Como X^* é, também, reflexivo, existe uma subseqüência (x_{n_k}) de (x_n) e $x^* \in X^*$, tais que $J_\varphi(x_{n_k}) \rightharpoonup x^*$, quando $k \to \infty$ (Teorema 0.7). Assim, para provarmos que $J_\varphi(x_n) \rightharpoonup J_\varphi(x)$ é suficiente mostrarmos que todas as subseqüências de $J_\varphi(x_n)$ que são fracamente convergente têm o mesmo limite, a saber $J_\varphi(x)$.

Seja $x^* \in X^*$ o limite fraco de uma subseqüência $J_\varphi(x_{n_k})$ de $J_\varphi(x_n)$. Pela semicontinuidade inferior fraca da norma, temos:

$$\|x^*\| \le \liminf_{k\to\infty}\|J_\varphi(x_{n_k})\| = \liminf_{k\to\infty}\varphi(\|x_{n_k}\|) = \lim_{k\to\infty}\varphi(\|x_{n_k}\|) = \varphi(\|x\|). \tag{1.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|\langle J_\varphi(x_{n_k}), x_{n_k}\rangle - \langle x^*, x\rangle| &\le |\langle J_\varphi(x_{n_k}), x_{n_k} - x\rangle| + |\langle J_\varphi(x_{n_k}) - x^*, x\rangle| \\
&\le \|J_\varphi(x_{n_k})\|\|x_{n_k} - x\| + |\langle J_\varphi(x_{n_k}) - x^*, x\rangle|,
\end{aligned}$$

que, em conjunto com

$$x_n \to x \quad \text{e} \quad J_\varphi(x_{n_k}) \rightharpoonup x^*,$$

implicam

$$\langle J_\varphi(x_{n_k}), x_{n_k}\rangle \to \langle x^*, x\rangle, \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Mas, $\langle J_\varphi(x_{n_k}), x_{n_k}\rangle = \varphi(\|x_{n_k}\|)\|x_{n_k}\| \to \varphi(\|x\|)\|x\|$. Daí, $\langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|$, e assim, $\varphi(\|x\|)\|x\| = \langle x^*, x\rangle \leq \|x^*\|\|x\|$, que implica

$$\varphi(\|x\|) \leq \|x^*\|. \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5), resulta $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$. Finalmente, de

$$\langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\| \quad \text{e} \quad \|x^*\| = \varphi(\|x\|),$$

obtemos $x^* = J_\varphi(x)$. ∎

A seguir, provamos que J_φ é sobrejetora.

Teorema 1.3 *Seja X reflexivo e $J_\varphi : X \to X^*$. Então $R(J_\varphi) = X^*$.*

Prova. Basta verificarmos que J_φ satisfaz as condições do operador T, do Teorema 0.8.

Já sabemos que J_φ é monótono pelo Teorema 1.1(ii).

O fato que J_φ é hemicontínuo significa:

$$\lim_{t\to 0}\langle J_\varphi(u+tv), w\rangle = \langle J_\varphi(u), w\rangle \quad \text{para} \quad u, v, z \in X,$$

e resulta da demicontinuidade de J_φ (Proposição 1.5), pois $(u+tv) \to u$ quando $t \to 0$, donde $J_\varphi(u+tv) \rightharpoonup J_\varphi(u)$.

Finalmente, para verificarmos a coercividade de J_φ, basta notarmos que

$$\frac{\langle J_\varphi(u), u\rangle}{\|u\|} = \varphi(\|u\|) \to \infty \quad \text{quando} \quad \|u\| \to \infty.$$

Assim, o Teorema 0.8 conclui a demonstração. ∎

Agora podemos enunciar e provar as principais propriedades da aplicação dualidade.

Teorema 1.4 *Seja X reflexivo, localmente uniformemente convexo e $J_\varphi : X \to X^*$. Então J_φ é bijetiva com seu inverso J_φ^{-1} limitado, contínuo e monótono. Além disso, vale $J_\varphi^{-1} = \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}}$, onde $\chi : X \to X^{**}$ é o isomorfismo canônico entre X e X^{**}, e $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ é a aplicação dualidade em X^* correspondente à função de normalização φ^{-1}.*

Prova. Pelo Teorema 1.3, J_φ é sobrejetivo. O espaço X sendo localmente uniformemente convexo, é estritamente convexo (Teorema 1.2), e pela Proposição 1.3(i), J_φ é estritamente monótono, e daí, injetivo. Logo, J_φ é bijetivo.

Seja agora χ o isomorfismo (isométrico) canônico entre X e X^{**} ($\langle\chi(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$) e seja $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ a aplicação dualidade correspondente à função de normalização φ^{-1}. Como X é reflexivo e localmente uniformemente convexo, X^{**} também o é; em particular, X^{**} é estritamente convexo (Teorema 1.2) e, conseqüentemente, $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ tem um único valor (Proposição 1.3(ii)).

É fácil ver que

$$J_\varphi^{-1} = \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}}. \tag{1.6}$$

Realmente, seja $x^* \in X^*$ e $x = J_\varphi^{-1}(x^*)$. Então $J_\varphi(x) = x^*$, que implica $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|$ e $\|x^*\| = \varphi(\|x\|)$, ou, equivalentemente, $\langle \chi(x), x^*\rangle = \|x^*\|\|\chi(x)\|$ e $\|x^*\| = \varphi(\|\chi(x)\|)$. Donde $\langle \chi(x), x^*\rangle = \|\chi(x)\|\|x^*\|$ e $\|\chi(x)\| = \varphi^{-1}(\|x^*\|)$ quer dizer $\chi(x) = J^*_{\varphi^{-1}}(x^*)$, ou melhor, $x = \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}}(x^*)$. Assim, $x = J_\varphi^{-1}(x^*)$ se, e somente se, $x = \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}}(x^*)$.

Como $J^*_{\varphi^{-1}}$ é um operador limitado (Teorema 1.1(i)) e χ^{-1} é um isomorfismo isométrico, de (1.6) resulta que $J_\varphi^{-1}(= \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}})$ é limitado.

Vejamos que J_φ^{-1} é contínua. Seja $x_n^* \to x \in X^*$. De (1.6) e pela Proposição 1.5, aplicada a $J^*_{\varphi^{-1}}$, temos

$$J_\varphi^{-1}(x_n^*) = \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}}(x_n^*) \rightharpoonup \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}}(x^*) = J_\varphi^{-1}(x^*). \tag{1.7}$$

Tomemos $x_n = J_\varphi^{-1}(x_n^*),\ x = J_\varphi^{-1}(x^*)$. Daí, $x_n^* = J_\varphi(x_n)$ e $x^* = J_\varphi(x)$, e pela definição de J_φ, obtemos $\|x_n\| = \varphi^{-1}(\|x_n^*\|) \to \varphi^{-1}(\|x^*\|) = \|x\|$, e daí

$$\|J_\varphi^{-1}(x_n^*)\| \to \|J_\varphi^{-1}(x^*)\|. \tag{1.8}$$

Como X é localmente uniformemente convexo, de (1.7), (1.8) e da Proposição 1.2, temos $J_\varphi^{-1}(x_n^*) \to J_\varphi^{-1}(x^*)$. Logo, J_φ^{-1} é contínua.

Provemos agora a monotonicidade de J_φ^{-1}. O espaço X é identificado com X^{**} pelo isomorfismo canônico χ. Então, para $x_1^*, x_2^* \in X^*$, temos:

$$\langle \chi(J_\varphi^{-1}x_1^*) - \chi(J_\varphi^{-1}x_2^*), x_1^* - x_2^*\rangle = \langle J^*_{\varphi^{-1}}x_1^* - J^*_{\varphi^{-1}}x_2^*, x_1^* - x_2^*\rangle,$$

e aplicando o Teorema 1.1(ii) com φ^{-1} ao invés de φ e X^* ao invés de X, concluímos a demonstração. ∎

1.2 A Estrutura Funcional

No que se segue, Ω será um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ com fronteira lipschitziana e $p \in (1, \infty)$. Começamos introduzindo o espaço de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ \ i = 1, \ldots, N\}$$

das funções $u \in L^p(\Omega)$, cujas derivadas fracas, $\partial u/\partial x_i$, também pertencem a $L^p(\Omega)$. Este espaço será munido da norma:

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{0,p} + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{0,p}$$

onde $\|\ \|_{0,p}$ é a norma usual de $L^p(\Omega)$.

É bom lembrarmos que $(W^{1,p}(\Omega), \|\ \|_{W^{1,p}(\Omega)})$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo.

Consideremos o seguinte subespaço de $W^{1,p}(\Omega)$:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{ o fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ no espaço } W^{1,p}(\Omega).$$

Uma outra caracterização deste subespaço é dada por

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

onde o valor de u em $\partial\Omega$ sendo entendido no sentido do traço. Lembramos que para Ω limitado e com fronteira de classe C^1, existe um operador linear limitado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e

(ii) $\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com a constante C dependendo apenas de p e Ω.

O espaço dual $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ será denotado por $W^{-1,p'}(\Omega)$, onde $1/p + 1/p' = 1$.

Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, colocamos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right), \qquad |\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$$

e notamos que

$$|\nabla u| \in L^p(\Omega), \qquad |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p'}(\Omega), \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, N.$$

Vamos provar a última. Com efeito, de $||\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial x_i| \leq |\nabla u|^{p-2}|\nabla u| = |\nabla u|^{p-1}$ vem $||\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial x_i|^{p'} = ||\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial x_i|^{p/p-1} \leq (|\nabla u|^{p-1})^{p/p-1} = |\nabla u|^p$. Assim, pela forma dos elementos de $W^{-1,p'}(\Omega)$ (cf. Brezis-[7], Proposição IX.20), o operador $-\Delta_p$ pode ser visto agindo de $W_0^{1,p}(\Omega)$ para $W^{-1,p'}(\Omega)$ por

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \quad \text{para} \quad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Consideremos, ainda, a função $\|\cdot\|_{1,p} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $\|u\|_{1,p} = \||\nabla u|\|_{0,p}$. Sabemos que $\|\cdot\|_{1,p}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e em virtude da desigualdade de Poincaré:

$$\|u\|_{0,p} \leq C(\Omega, N)\||\nabla u|\|_{0,p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

esta norma é equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Mudando-se a norma de um espaço de Banach para uma outra norma equivalente, as propriedades geométricas podem ser alteradas. Por isso, provamos, em seguida, que $(W_0^{1,p}, \|\cdot\|_{1,p})$ é uniformemente convexo. Antes, porém, provamos uma desigualdade elementar conhecida como desigualdade de Clarkson, a qual será fundamental na prova da convexidade uniforme de $(W_0^{1,p}, \|\cdot\|_{1,p})$.

Proposição 1.6 **(i)** *Se $p \in [2, +\infty)$, então, para cada $z, w \in \mathbb{R}^N$, vale:*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|z|^p + |w|^p\right). \tag{1.9}$$

(ii) *Se $p \in (1, 2)$, então para cada $z, w \in \mathbb{R}^N$, vale:*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'} \leq \left[\frac{1}{2}\left(|z|^p + |w|^p\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.10}$$

Prova. (i) Primeiro caso: $p \in [2, +\infty)$.

Afirmação 1.2 *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a \geq 0$, $b \geq 0$, *então* $(a+b)^p \geq a^p + b^p$.

Demonstração: Para $p = 1$ é imediato. No caso $p > 1$, consideremos a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x+b)^t - x^t - b^t$ com $t \in (1, \infty)$ *e* $b \in [0, \infty)$. Ela satisfaz $f(0) = 0$ e $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \infty)$, pois, supondo $f'(x) < 0$ obtemos $b < 0$, que é uma a contradição. ■

Usando esta afirmação e a identidade do paralelogramo, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p &= \left(\left|\frac{z+w}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\left|\frac{z-w}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq \left(\left|\frac{z+w}{2}\right|^2 + \left|\frac{z-w}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1}{2}|w|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\left(|z|^2 + |w|^2\right)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema A.3,

$$\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\left(|z|^2 + |w|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{2^{\frac{p}{2}-1}}{2^{\frac{p}{2}}}[(|z|^2)^{\frac{p}{2}} + (|w|^2)^{\frac{p}{2}}] = \frac{1}{2}(|z|^p + |w|^p).$$

Portanto,

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|z|^p + |w|^p),$$

que é (1.9).

(ii) Segundo caso: $p \in (1, 2)$. Claramente, (1.10) vale se $z = 0$ ou $w = 0$. Pela simetria de (1.10) em z e w, podemos supor que $|z| \geq |w| > 0$; agora, se z e w são colineares ($w = tz,\ \ t \leq 1$), (1.10) torna-se

$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{1-t}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^p\right)^{1/(p-1)}$$

que é o Lema 0.3. Se z e w não são colineares, então eles determinam um plano, e podemos vê-los como estando em $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos). Desse modo, (1.10) pode ser reescrito na forma

$$\left|\frac{1+te^{i\theta}}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{1-te^{i\theta}}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^p\right)^{1/(p-1)}. \tag{1.11}$$

onde $\dfrac{w}{z} = te^{i\theta},\ \ 0 < t \leq 1,\ \ 0 \leq \theta < 2\pi$. Se $\theta = 0$, z e w são colineares. Vejamos agora o caso geral. Para isto, fixado $0 < t \leq 1$, basta mostrarmos que a função

$$f(\theta) = |1 + te^{i\theta}|^{p'} + |1 - te^{i\theta}|^{p'}$$

tem um valor máximo para $0 \leq \theta < 2\pi$ em $\theta = 0$. Como

$$f(\theta) = (1 + t^2 + 2t\cos\theta)^{\frac{p'}{2}} + (1 + t^2 - 2t\cos\theta)^{\frac{p'}{2}},$$

segue que $f(2\pi - \theta) = f(\pi - \theta) = f(\theta)$; daí, é suficiente considerarmos f apenas no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Desde que $p' \geq 2$, temos

$$f'(\theta) = -p't \sin\theta[(1 + t^2 + 2t\cos\theta)^{\frac{p'}{2}-1} - (1 + t^2 - 2t\cos\theta)^{\frac{p'}{2}-1}] \leq 0$$

sobre o intervalo $[0, \pi/2]$. Assim, o máximo valor de f ocorre em $\theta = 0$ e (1.11) está provado. Portanto, provamos (1.10). ■

Teorema 1.5 *O espaço* $(W_0^{1,p}, \|\cdot\|_{1,p})$ *é uniformemente convexo.*

Prova. Primeiramente, provamos o caso $p \in [2, +\infty)$. Seja $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo $\|u\|_{1,p} = \|v\|_{1,p} = 1$ e $\|u - v\|_{1,p} \geq \varepsilon,\ \varepsilon \in (0, 2]$. Usando (1.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{1,p}^p &= \int_\Omega \left(\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|^p\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) = \frac{1}{2}\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right) = 1,
\end{aligned}$$

que implica

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Daí,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p} \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1 - \underbrace{\left[1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]}_{\delta(\varepsilon)}$$

que produz

$$\|u + v\|_{1,p} \leq 2(1 - \delta(\varepsilon)).$$

Vejamos, agora, o caso $p \in (1, 2)$. Inicialmente, observamos que um cálculo direto mostra que se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$|\nabla v|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad \||\nabla v|^{p'}\|_{0,p-1} = \|v\|_{1,p}^{p'}. \tag{1.12}$$

De fato, as igualdades $|\nabla v|^p = \left(|\nabla v|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} = \left||\nabla v|^{p'}\right|^{p-1}$ implicam em $|\nabla u|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$ e,

$$\begin{aligned}
\|v\|_{1,p}^{p'} &= \||\nabla v|\|_{0,p}^{p'} = \||\nabla v|\|_{0,p}^{\frac{p}{p-1}} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int_\Omega \left||\nabla v|^{\frac{p}{p-1}}\right|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\int_\Omega \left||\nabla v|^{p'}\right|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \||\nabla v|^{p'}\|_{0,p-1}.
\end{aligned}$$

Sejam $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então $|\nabla v_1|^{p'}, |\nabla v_1|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$, com $0 < p-1 < 1$ e, segundo o Lema 0.4,

$$\||\nabla v_1|^{p'} + |\nabla v_2|^{p'}\|_{0,p-1} \geq \||\nabla v_1|^{p'}\|_{0,p-1} + \||\nabla v_2|^{p'}\|_{0,p-1}. \tag{1.13}$$

De (1.12) e (1.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'} + \left\|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'} &= \left\|\left|\nabla\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1} + \left\|\left|\nabla\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1} \\
&\le \left\|\left|\nabla\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'} + \left|\nabla\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1} \\
&= \left[\int_\Omega \left(\left|\frac{\nabla v_1+\nabla v_2}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla v_1-\nabla v_2}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Daí, usando (1.10), temos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'} + \left\|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'} &\le \left[\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v_1|^p + |\nabla v_2|^p)\right]^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\|v_1\|_{1,p}^p + \frac{1}{2}\|v_2\|_{1,p}^p\right]^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Para $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\|_{1,p} = \|v\|_{1,p} = 1$ e $\|u-v\|_{1,p} \ge \varepsilon \in (0,2]$, obtemos

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^{p'} \le 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'},$$

que implica $\|u+v\|_{1,p} \le 2(1-\delta(\varepsilon))$.

Portanto, o espaço $(W_0^{1,p}, \|\cdot\|_{1,p})$ é uniformemente convexo. ■

No que se segue, o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ será sempre considerado munido da norma $\|\cdot\|_{1,p}$.

O próximo teorema conduzir-nos-á para um dos pilares deste capítulo, que é o teorema que o segue.

Teorema 1.6 *O funcional* $\psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dado por* $\psi(u) = (1/p)\|u\|_{1,p}^p$ *é Gâteaux diferenciável e* $\psi'(u)v = \langle -\Delta_p u, v\rangle$.

Prova. Consideremos, primeiramente, o caso $u = 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\psi(u+hv)-\psi(u)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\psi(0+hv)-\psi(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{p}h^p\int_\Omega |\nabla v|^p}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{p}h^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^p = 0.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\langle \psi'(0), v\rangle = 0, \quad \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Portanto, ψ é diferenciável na origem.

Agora, tomemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$. Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{rcl} Q : L^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \frac{1}{p}\|v\|_{0,p}^p \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} P : W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega) \\ v & \longmapsto & |\nabla v|. \end{array}$$

Notemos que $\psi = P \circ Q$. Vejamos que P e Q são aplicações Gâteaux diferenciáveis, de onde segue que ψ também o é.

O funcional Q é Gâteaux diferenciável e

$$\langle Q'(v), h\rangle = \langle |v|^{p-1} sgn\, v, h\rangle, \quad \forall\, v, h \in L^p(\Omega). \tag{1.14}$$

De fato, sejam $v, h \in L^p(\Omega)$ e $t \in [0,1]$. Pelo teorema do valor médio existe $\xi > 0$ com $t\xi \in [0,1]$ tal que, tomando $g(t) = |v(x) + th(x)|^p$, temos

$$\begin{aligned} g(t) - g(0) &= |v(x) + th(x)|^p - |v(x)|^p \\ &= p|v(x) + t\xi h(x)|^{p-1} sgn(v(x) + t\xi h(x))h(x)(t-0) \\ &= pt|v(x) + t\xi h(x)|^{p-1} sgn(v(x) + t\xi h(x))h(x) \end{aligned} \tag{1.15}$$

de onde temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{pt}|g(t) - g(0)| &= ||v(x) + t\xi h(x)|^{p-1} sgn(v(x) + t\xi h(x))h(x)| \\ &= |v(x) + t\xi h(x)|^{p-1}|h(x)| \\ &\leq ||v(x)| + |h(x)||^{p-1}|h(x)|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e do fato que $v, h \in L^p(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||v(x)| + |h(x)||^{p-1}|h(x)|dx &\leq \left(\int_\Omega ||v(x)| + |h(x)||^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{p-1}\left(\int_\Omega (|v(x)|^p + |h(x)|^p)dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Agora, por (1.15) e pelo teorema da convergência dominada

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{Q(v+th) - Q(v)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{pt}\int_\Omega (|v(x) + th(x)|^p - |v(x)|^p)dx \\ &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega |v(x) + t\xi h(x)|^{p-1} sgn(v(x) + t\xi h(x))h(x)dx \\ &= \int_\Omega |v(x)|^{p-1} sgn\, v(x)h(x)dx, \end{aligned}$$

e daí

$$\langle Q'(v), h\rangle = \langle |v|^{p-1} sign\, v, h\rangle, \quad \forall\, v, h \in L^p(\Omega).$$

O operador P também é Gâteaux diferenciável em u e

$$\langle P'(u), v\rangle = \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}, \quad \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1.16}$$

De fato,

$$P^2(u) = |\nabla u|^2 = \nabla u \nabla u$$

implica

$$[P^2(u)]'v = (\nabla u \nabla u)'v,$$

que produz

$$2P(u)P'(u)v = 2\nabla u \nabla v.$$

Daí, temos a expressão (1.16).

Combinando (1.14) e (1.16), obtemos que ψ é diferenciável em u e

$$\begin{aligned}
\langle \psi'(u), v\rangle &= \langle Q'(P(u)), P'(u)v\rangle = \langle |\nabla u|^{p-1}, \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}\rangle \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \langle -\Delta_p u, v\rangle, \qquad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).
\end{aligned}$$

∎

O próximo resultado ser-nos-á essencial no próximo capítulo.

Teorema 1.7 *O funcional ψ é continuamente Fréchet diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Prova. Consideremos o espaço produto $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^N L^{p'}(\Omega)$ munido da norma

$$[h]_{0,p'} = \left(\sum_{i=1}^N \|h_i\|_{0,p'}^{p'}\right)^{1/p'} \qquad \text{para} \quad h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathcal{X}.$$

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned}
g : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{X} \\
u &\longmapsto |\nabla u|^{p-2}\nabla u.
\end{aligned}$$

Notemos que $g(u) = (g_1(u), \dots, g_N(u))$ e $g_i(u) = |\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial x_i,\ i = 1, 2, \dots, N$. Esta função está bem definida e é limitada, isto é, aplica conjuntos limitados de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em conjuntos limitados de $\mathcal{X}$. De fato, para $i = 1, \dots, N$, temos:

$$\|g_i(u)\|_{0,p'}^{p'} = \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p'} \leq \int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'} = \int_\Omega |\nabla u|^p = \|u\|_{1,p}^p.$$

Provemos que g é contínua. Pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$[h]_{0,p'}^{p'} \leq C_1 \int_\Omega |h|^{p'}, \qquad \forall\, h \in \mathcal{X}.$$

Vejamos, primeiramente, o caso $p \in (2, \infty)$. Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo Lema A.1(i), temos:

$$\begin{aligned}
[g(u) - g(v)]_{0,p'}^{p'} &\leq C_1 \int_\Omega |g(u) - g(v)|^{p'} = C_1 \int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right|^{p'} \\
&\leq C_1 \beta^{p'} \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p'} \left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{p'(p-2)}.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla u - \nabla v|^{p'} \in L^{p/p'}(\Omega)$ e $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2)} \in L^{p/p'(p-2)}(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder, temos:

$$
\begin{aligned}
[g(u) - g(v)]_{0,p'}^{p'} &\leq C_2 \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p' \frac{p}{p'}} \right)^{\frac{p'}{p}} \left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2) \frac{p}{p'(p-2)}} \right)^{\frac{p'(p-2)}{p}} \\
&= C_2 \|\nabla u - \nabla v\|_{0,p}^{p'} \, \||\nabla u| + |\nabla v|\|_{0,p}^{p'(p-2)} \\
&= C_2 \|u - v\|_{1,p}^{p'} \, \||\nabla u| + |\nabla v|\|_{0,p}^{p'(p-2)} .
\end{aligned}
$$

e, com a desigualdade de Minkowski, vem

$$
[g(u) - g(v)]_{0,p'}^{p'} \leq C_2 \|u - v\|_{1,p}^{p'} \left(\||\nabla u|\|_{0,p} + \||\nabla v|\|_{0,p} \right)^{p'(p-2)}
$$

implicando

$$
\begin{aligned}
[g(u) - g(v)]_{0,p'}^{p'} &\leq C_2^{1/p'} \|u - v\|_{1,p} \left(\|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p} \right)^{p-2} \\
&= C \|u - v\|_{1,p} \left(\|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p} \right)^{p-2} , \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

com $C = C_2^{1/p'} > 0$ constante independente de u e v.

Agora, provamos o caso em que $p \in (1, 2]$. Se $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então pelo Lema A.1(ii), segue-se

$$
\begin{aligned}
[g(u) - g(v)]_{0,p'}^{p'} &\leq C_1 \int_\Omega |g(u) - g(v)|^{p'} = C_1 \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right|^{p'} \\
&\leq C_1 \bar{\beta}^{p'} \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p'(p-1)} = C_2' \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \\
&= C_2' \|u - v\|_{1,p}^p .
\end{aligned}
$$

Donde

$$
[g(u) - g(v)]_{0,p'} \leq C_2'^{\frac{1}{p'}} \|u - v\|_{1,p}^{\frac{p}{p'}} = C' \|u - v\|_{1,p}^{p-1} , \qquad (1.18)
$$

com $C' = C_2'^{\frac{1}{p'}} > 0$ constante independente de u e v.

De (1.17) e (1.18) segue a continuidade de g.

Por outro lado, vale

$$
\|\psi'(u) - \psi'(v)\| \leq K [g(u) - g(v)]_{0,p'} \qquad (1.19)
$$

com $K > 0$ constante independente de $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, pela desigualdade de Hölder, para $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
|\langle \psi'(u) - \psi'(v), w \rangle| &= |\langle -\Delta u, w \rangle - \langle -\Delta v, w \rangle| \\
&= \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w \right| \\
&\leq \int_\Omega \left| \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) \right| |\nabla w| = \int_\Omega |g(u) - g(v)| \, |\nabla w| \\
&\leq \left(\int_\Omega |g(u) - g(v)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla w|^p \right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}
$$

Agora, usando a equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, temos

$$
\begin{aligned}
|\langle \psi'(u) - \psi'(v), w\rangle| &\leq K \left(\sum_{i=1}^{N} \|g_i(u) - g_i(v)\|_{0,p'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \||\nabla w|\|_{0,p} \\
&= K \, [g(u) - g(v)]_{0,p'} \, \|w\|_{1,p}
\end{aligned}
$$

provando, assim, (1.19). Ou seja, $\psi' : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é contínua.

Provemos agora que ψ é Fréchet diferenciável em $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e além disso,

$$
\langle \psi'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v. \tag{1.20}
$$

Utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\psi(u+v) - \psi(u) - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \left(|\nabla u + \nabla v|^p - |\nabla u|^p - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right) dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}|\nabla u + t\nabla v|^p \, dt - \int_0^1 p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dt \right) dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}|\nabla u + t\nabla v|^p \, dt - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right) dt\, dx \\
&= \frac{1}{p}\int_0^1 \int_\Omega \left(p|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\nabla v - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right) dx\, dt \\
&= \int_0^1 \int_\Omega (g(u+tv) - g(u))\nabla v \, dx\, dt.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\left| \psi(u+v) - \psi(u) - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right| &\leq \int_0^1 \int_\Omega |g(u+tv) - g(u)| \, |\nabla v| \, dx\, dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |g(u+tv) - g(u)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|_{1,p} \, dt \\
&= \left(\int_0^1 \||g(u+tv) - g(u)|\|_{0,p'} \, dt \right) \|v\|_{1,p}.
\end{aligned}
$$

Agora, pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, vem

$$
\left| \psi(u+v) - \psi(u) - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right| \leq K \left(\int_0^1 [g(u+tv) - g(u)]_{0,p'} \, dt \right) \|v\|_{1,p},
$$

com $K > 0$ constante independente de u e v. Logo,

$$
\frac{\left| \psi(u+v) - \psi(u) - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right|}{\|v\|_{1,p}} \leq K \int_0^1 [g(u+tv) - g(u)]_{0,p'} dt.
$$

Agora, fazendo $v \to 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ na última desigualdade, e aplicando o Teorema da Convergência de Lebesgue (pois g é contínua e limitada) provamos a igualdade (1.20), e assim, o teorema está demonstrado. ■

Antes de enunciarmos o próximo resultado, a definição seguinte é imprescindível.

Definição 1.3 *Uma aplicação $A : X \to X^*$ é dita um operador potencial com um potencial $a : X \to \mathbb{R}$, se a é Gateaux diferenciável e*

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(a(u+tv) - a(u)) = \langle A(u), v\rangle, \quad \forall\, u, v \in X.$$

Sempre assumimos $a(0) = 0$.

O teorema logo abaixo, além de assegurar que $-\Delta_p$ é um operador potencial, afirma, também, que a derivada de Gâteaux de seu potencial é a aplicação dualidade. Com isso, obtemos que o operador $-\Delta_p$ é uma aplicação dualidade.

Teorema 1.8 *O operador $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é um potencial. Mais precisamente, seu potencial é o funcional $\psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $\psi(u) = (1/p)\|u\|_{1,p}^p$ e $\psi' = -\Delta_p = J_\varphi$ onde $J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é a aplicação dualidade correspondente à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$.*

Prova. Pelo Teorema 1.6, ψ é Gâteaux diferenciável.

Tendo em vista a Observação 1.1, mostremos que ψ é convexa. Consideremos

$$F : [0,\infty) \to [0,\infty) \quad \text{definida por} \quad F(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

É claro que $\psi(u) = F(\|u\|_{1,p})$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$; logo, para provarmos a convexidade de ψ é suficiente mostrarmos que F é convexa. Para isto, seja $z = \alpha s + (1-\alpha)t$, onde $0 \le s < t$ e $\alpha \in [0,1]$. Como φ é crescente, temos, pelo teorema do valor médio, que

$$F(t) - F(z) \ge (t-z)\varphi(z),$$

$$F(z) - F(s) \le (z-s)\varphi(z).$$

Multiplicando a primeira desigualdade por $(1-\alpha)$, a segunda por $(-\alpha)$ e somando, obtemos

$$\alpha F(s) + (1-\alpha)F(t) - F(z) \ge 0.$$

Ou seja,

$$F(z) \le \alpha F(s) + (1-\alpha)F(t).$$

Assim, F é convexa. Logo, com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, pela Observação 1.1, $\partial\psi(u) = \psi'(u)$, e pelo Teorema 1.1(iii), $J_\varphi(u) = \psi'(u)$. Pelo Teorema 1.7, $-\Delta_p u = \psi'(u)$. Portanto,

$$\psi' = -\Delta_p = J_\varphi$$

e ψ é o potencial de $-\Delta_p$. ■

Observação 1.2 *Seja $\|\ \|_*$ a norma dual de $\|\ \|_{1,p}$. Então temos $\|-\Delta_p u\|_* = \|J_\varphi(u)\|_* = \varphi(\|u\|_{1,p}) = \|u\|_{1,p}^{p-1}$.*

O teorema abaixo é um dos principais resultados desta seção, pois nele se estabelece as principais propriedades para o operador p-laplaciano.

Teorema 1.9 *O operador $-\Delta_p$ define uma correspondência bijetiva entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{-1,p'}(\Omega)$, com inverso $(-\Delta_p)^{-1}$ monótono, limitado e contínuo.*

Prova. Do Teorema 1.8, temos $-\Delta_p = J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$. Pelo Teorema 1.5, $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ é uniformemente convexo; assim é reflexivo, pelo Teorema 0.6, e localmente uniformemente convexo devido ao Teorema 1.2. Daí, pelo Teorema 1.4, temos as afirmações sobre $(-\Delta_p)^{-1}$. ■

Observação 1.3 *Do* Teorema 1.9 *podemos concluir os seguintes fatos:*

(i) *para cada* $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *a equação* $-\Delta_p u = f$ *tem uma única solução em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) *As propriedades de* $(-\Delta_p)^{-1}$ *mostram como a solução* $u = (-\Delta_p)^{-1} f$ *depende da* f *dada. Estas propriedades serão usadas em seguida.*

(iii) *Como os elementos de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *se anulam na fronteira,* $\partial\Omega$, *no sentido do traço, é natural que a única solução em* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *da equação* $-\Delta_p u = f$ *seja chamada uma solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Concluímos esta seção com um resultado que nos será útil adiante, para mostrarmos que um certo funcional $(\mathcal{F})$ satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale.

Teorema 1.10 *O operador* $-\Delta_p$ *satisfaz a condição* (S_+) : *se* $u_n \rightharpoonup u$ *e* $\lim_{n\to\infty} sup\langle -\Delta_p u_n, u_n - u\rangle \leq 0$, *então* $u_n \to u$.

Prova. Pelo Teorema 1.8, $-\Delta_p = J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$. Agora, pelo Teorema 1.5, $(W_0^{1,p}, \|\cdot\|_{1,p})$ é uniformemente convexo. Daí, pelo Teorema 1.2, $(W_0^{1,p}, \|\cdot\|_{1,p})$ é localmente uniformemente convexo. Portanto, pela Proposição 1.4, o teorema fica demonstrado. ■

Capítulo 2

O Problema de Dirichlet

Neste capítulo estamos interessados em condições suficientes sobre o segundo membro f para assegurar a existência de alguma $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para que a equação $-\Delta_p u = f(x,u)$ valha no sentido de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Uma tal u é dita uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Antes de tudo, condições apropriadas sobre f para assegurar que $N_f(u) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ devem ser formuladas, N_f sendo o bem conhecido operador de Nemytskii definido por f, isto é, $(N_f(u))(x) = f(x, u(x))$ para $x \in \Omega$. Portanto, somos levados a considerar alguns resultados básicos sobre o operador de Nemytskii.

2.1 Operador de Nemytskii

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ com fronteira lipschitziana e seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, isto é:

(i) para cada $s \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto f(x,s)$ é Lebesgue mensurável em Ω;

(ii) para quase todo $x \in \Omega$, a função $s \mapsto f(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Fazemos a convenção que no caso de uma função de Carathéodory, a afirmação "$x \in \Omega$" será entendida no sentido "quase todo $x \in \Omega$".

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Proposição 2.1 *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de Carathéodory, então, para cada $u \in \mathcal{M}$, a função $N_f(u) : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $(N_f(u))(x) = f(x, u(x))$ para $x \in \Omega$ é mensurável em Ω.*

Prova. Devemos mostrar que se $u \in \mathcal{M}$, então $N_f(u) \in \mathcal{M}$. Notemos que se z é uma função simples, então $f(\cdot, z(\cdot))$ é mensurável. De fato, podemos escrever z da forma: $z = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}$ com $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e χ_{A_k} sendo a função característica de A_k (a família $\{A_k\,;\, k = 1, \ldots, m\}$ formando uma partição mensurável de Ω); daí,

$$f(x, z(x)) = f(x, \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}(x)) = \sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(x) f(x, \alpha_k).$$

Já que f é de Carathéodory, $f(x,\alpha_k)$ é mensurável e daí, $f(\cdot,z(\cdot))\in\mathcal{M}$.

Consideremos agora uma seqüência (u_n) de funções simples em Ω, com $u_n\to u$ q.t.p. em Ω. Ficou claro que $f(\cdot,u_n(\cdot))\in\mathcal{M}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como $N_f(u_n)=f(\cdot,u_n(\cdot))\overset{q.t.p.}{\to} f(\cdot,u(\cdot))=N_f(u)$, temos que $N_f(u)\in\mathcal{M}$, pois é limite q.t.p. de funções mensuráveis. ■

Em vista dessa proposição, uma função de Carathéodory $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ define um operador $N_f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, que é chamado **operador de Nemytskii**.

A proposição abaixo estabelece condições suficientes para que um operador de Nemytskii aplique um espaço L^{p_1} em um outro L^{p_2}.

Proposição 2.2 *Suponhamos $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de Carathéodory e que a seguinte condição de crescimento seja satisfeita:*

$$|f(x,s)|\le C|s|^r+b(x)\quad \textit{para}\quad x\in\Omega,\ \ s\in\mathbb{R},$$

onde $C\ge 0$ é constante, $r>0$ e $b\in L^{q_1}(\Omega),\ 1\le q_1<\infty$.
Então $N_f(L^{q_1r}(\Omega))\subset L^{q_1}(\Omega)$. Além disso, N_f é contínua de $L^{q_1r}(\Omega)$ em $L^{q_1}(\Omega)$ e aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Prova. Mostremos que $N_f(L^{q_1r}(\Omega))\subset L^{q_1}(\Omega)$ e que N_f é limitada, ou seja, aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados. Basta usarmos a desigualdade de Minkowski, para obtermos

$$\begin{aligned}\|N_f(u)\|_{0,q_1} &= \left(\int_\Omega |f(x,u(x))|^{q_1}\right)^{1/q_1}\le\left(\int_\Omega (C|u(x)|^r+b(x))^{q_1}\right)^{1/q_1}\\ &\le C\||u|^r\|_{0,q_1}+\|b\|_{0,q_1}=C\left(\int_\Omega ||u|^r|^{q_1}\right)^{1/q_1}+\|b\|_{0,q_1}\\ &= C\left[\left(\int_\Omega |u|^{rq_1}\right)^{1/rq_1}\right]^r+\|b\|_{0,q_1}=C\|u\|^r_{0,rq_1}+\|b\|_{0,q_1}.\end{aligned}$$

Vejamos agora que N_f é contínua. Para isto é suficiente mostrarmos que toda seqüência $(u_n)\subset L^{rq_1}(\Omega)$, com $u_n\to u$ em $L^{rq_1}(\Omega)$ tem uma subseqüência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $N_f(u_{n_k})\to N_f(u)$ em $L^{q_1}(\Omega)$, quando $k\to\infty$ (cf. Elon-[23] Corolário 2, p. 126). Pelo Teorema 0.4, dada uma seqüência $(u_n)\subset L^{rq_1}(\Omega)$, com $u_n\to u$ em $L^{rq_1}(\Omega)$, existe uma subseqüência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subset(u_n)$, e existe $h\in L^{rq_1}(\Omega)$ tais que:

(i) $u_{n_k}\to u$ q.t.p. quando $k\to\infty$, e

(ii) $|u_{n_k}|\le h$ q.t.p. em Ω, $\forall\, k\in\mathbb{N}$.

Além disso, $N_f(u_{n_k})\to N_f(u)$ q.t.p. quando $k\to\infty$. E daí,

$$|N_f(u_{n_k}(x))-N_f(u(x))|^{q_1}\to 0\ \ q.t.p.\ \text{ em }\ \Omega.$$

Por outro lado,

$$|N_f(u_{n_k}(x))|=|f(x,u_{n_k}(x))|\le C|h(x)|^r+b(x)\quad \text{q.t.p. em }\ \Omega\ \text{ e todo }\ k\in\mathbb{N}.\tag{2.2}$$

Ponhamos $g(x) := (C|h(x)|^r + b(x))^{q_1}$. É imediato que $g \in L^1(\Omega)$, pois $|h|^r, b \in L^{q_1}(\Omega)$. Tomando o limite quando $k \to \infty$ em (2.2), obtemos

$$|N_f(u(x))|^{q_1} \leq g(x) \qquad \text{q.t.p. em} \quad \Omega. \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3) resulta

$$|N_f(u_{n_k}(x)) - N_f(u(x))|^{q_1} \leq (|N_f(u_{n_k}(x))| + |N_f(u(x))|)^{q_1} \leq 2^{q_1} g(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos:

$$\|N_f(u_{n_k}) - N_f(u)\|_{0,q_1}^{q_1} = \int_\Omega |N_f(u_{n_k}(x)) - N_f(u(x))|^{q_1} \to 0 \qquad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Portanto, $N_f : L^{q_1 r}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$ é contínua. ■

No que diz respeito ao fato de um operador de Nemytskii ser um operador potencial, temos:

Proposição 2.3 *Suponhamos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja de Carathéodory e satisfaça a condição de crescimento:*

$$|f(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x) \quad \textit{para} \quad x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R},$$

onde $C \geq 0$ é constante, $q > 1$, $b \in L^{q'}(\Omega)$, $1/q + 1/q' = 1$.
Seja $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$. Então:

(i) *a função F é de Carathéodory e existe $C_1 \geq 0$ constante e $c \in L^1(\Omega)$ tais que*

$$|F(x,s)| \leq C_1|s|^q + c(x) \quad \textit{para} \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R};$$

(ii) *o funcional $\Phi : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi(u) := \int_\Omega N_F(u) = \int_\Omega F(x,u)$ é continuamente Fréchet diferenciável e $\Phi'(u) = N_f(u), \quad \forall\, u \in L^q(\Omega)$.*

Prova. (i) Que F é de Carathéodory segue de que f o é. Mostremos agora a outra parte.

$$\begin{aligned} |F(x,s)| &= \left| \int_0^s f(x,\tau)d\tau \right| \leq \int_0^{|s|} (C\tau^{q-1} + b(x))d\tau \\ &= \int_0^{|s|} C\tau^{q-1}d\tau + \int_0^{|s|} b(x)d\tau = C\frac{|s|^q}{q} + |s|b(x) + a(x), \end{aligned}$$

onde a é uma função arbitrária em um espaço conveniente para que o operador de Nemytskii esteja definido em espaços L^p adequados. Usando a desigualdade de Young para $|s|b(x)$, temos:

$$|F(x,s)| \leq \frac{C}{q}|s|^q + \frac{1}{q}|s|^q + \frac{q-1}{q}b(x)^{\frac{q}{q-1}} + a(x).$$

Como $b \in L^{q'}(\Omega)$, então $b^{q/(q-1)} \in L^1(\Omega)$. Assim, escolhendo $a \in L^1(\Omega)$, façamos $((q-1)/q)b^{q/(q-1)} + a = c \in L^1(\Omega)$. Daí,

$$|F(x,s)| \leq C_1|s|^q + c(x) \quad \text{para} \quad x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R},$$

onde $C_1 = (C+1)/q > 0$ e $c \in L^1(\Omega)$.

(ii) Tudo que temos a fazer é provar que

$$w(v) \equiv \int_\Omega F(x, u+v) - \int_\Omega F(x,u) - \int_\Omega f(x,u)v = o(v) \quad \text{quando} \quad \|v\|_{0,q} \to 0.$$

De fato, seja

$$\alpha(v) = F(x, u+v) - F(x,u) - f(x,u)v.$$

Visto que

$$F(x, u+v) - F(x,u) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, u+tv)\, dt = \int_0^1 [f(x, u+tv)v]\, dt,$$

temos

$$\alpha(v) = \int_0^1 [f(x,u+tv)v - f(x,u)v]\, dt = \int_0^1 [f(x,u+tv) - f(x,u)]v\, dt;$$

donde

$$w(v) = \int_\Omega \int_0^1 [f(x,u+tv) - f(x,u)]v\, dt\, dx.$$

Usando o teorema de Fubini e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |w(v)| &\leq \int_0^1 \int_\Omega |[f(x,u+tv) - f(x,u)]v|\, dx\, dt \\ &\leq \int_0^1 \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{0,q'}\, dt\, \|v\|_{0,q}. \end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue e pela Proposição 2.2 (onde N_f foi provado ser limitado e contínuo), a integral acima vai a zero, quando $\|v\|_{0,q} \to 0$. Assim $\|v\|_{0,q}^{-1} w(v) \to 0$ quando $\|v\|_{0,q} \to 0$. ■

Observação 2.1 *Deve ser notado que, sob as condições da* Proposição 2.3 *acima,*

$$N_f(L^q(\Omega)) \subset L^{q'}(\Omega), \qquad N_F(L^q(\Omega)) \subset L^1(\Omega),$$

onde cada um dos operadores N_f e N_F é contínuo e limitado (isto é uma simples conseqüência da Proposição 2.2*). De fato, tomando $r = q-1$, temos pela* Proposição 2.2 *que $N_f(L^{q_1(q-1)}(\Omega)) \subset L^{q_1}(\Omega)$. Fazendo $q = q_1(q-1)$ obtemos $q_1 = q'$; daí, $N_f(L^q(\Omega)) \subset L^{q'}(\Omega)$. Tomando agora $r = q$, vem $N_F(L^{q_1 q}(\Omega)) \subset L^{q_1}(\Omega)$. Fazendo $q = q_1 q$ temos $q_1 = 1$, isto é, $N_F(L^q(\Omega)) \subset L^1(\Omega)$.*

Deve, também, ser notado que para cada $u \in L^q(\Omega)$, vale $N_f(u) = \Phi'(u) \in L^{q'}(\Omega)$. Isto é óbvio já que $N_f(L^q(\Omega)) \subset L^{q'}(\Omega)$.

Agora, voltemos ao Problema (2.1).

A função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, abaixo, será assumida sempre de Carathéodory e satisfazendo a condição de crescimento

$$|f(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x) \quad \text{para} \quad x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

onde $C \geq 0$ é constante, $q \in (1, p^*)$, $\ b \in L^{q'}(\Omega)$, $\ 1/q + 1/q' = 1$.

A restrição $q \in (1, p^*)$ assegura que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ seja compacta (cf. Brezis-[7], Teorema IX.16). Portanto, o diagrama

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{I_d}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \overset{N_f}{\to} L^{q'}(\Omega) \overset{I_d^*}{\hookrightarrow} W^{-1,p'}(\Omega)$$

mostra que N_f é um operador compacto (contínuo, e transforma conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos) de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Um elemento $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dito solução do Problema (2.1) se

$$-\Delta_p u = N_f(u) \tag{2.5}$$

no sentido de $W^{-1,p'}(\Omega)$, ou seja,

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \langle N_f(u), v\rangle, \qquad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Isto é

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \qquad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.6}$$

Neste estágio, numa abordagem do Problema (2.1), duas estratégias parecem naturais.

A primeira, reduz o Problema (2.1) a um problema de ponto fixo com operador compacto. Realmente, pelo Teorema 1.9, o operador $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitado e contínuo. Conseqüentemente, (2.5) pode ser equivalentemente escrito como

$$u = (-\Delta_p)^{-1} N_f(u), \tag{2.7}$$

com $(-\Delta_p)^{-1}N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ sendo um operador compacto.

A segunda, é uma estratégia variacional: as soluções do Problema (2.1) aparecem como pontos críticos de um funcional de classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para ver isto, primeiramente temos que $-\Delta_p = \psi'$, onde o funcional $\psi(u) = (1/p)\|u\|_{1,p}^p$ é continuamente Fréchet diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por outro lado, sob a condição (2.4) e levando em consideração que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é contínua (na verdade, compacta), o funcional $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u)$ com $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$, é continuamente Fréchet diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\Phi'(u) = N_f(u)$. Conseqüentemente, o funcional $\mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}(u) = \psi(u) - \Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u)$$

é de classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e

$$\mathcal{F}'(u) = (-\Delta_p)u - N_f(u).$$

A busca de soluções para o Problema (2.1) está, agora, reduzida à busca de pontos críticos para $\mathcal{F}$, isto é, daquelas funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que $\mathcal{F}'(u) = 0$.

2.2 Existência de Solução Usando um Teorema de Ponto Fixo

Nesta seção, o "método de estimativa à priori" será usado no intuito de estabelecer a existência de pontos fixos para o operador compacto $T = (-\Delta_p)^{-1}N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$. Este é o objeto do seguinte resultado.

Teorema 2.1 *Se a função de Carathéodory* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaz* (2.4) *com* $q \in (1, p)$, *então o operador* $(-\Delta_p)^{-1}N_f$ *tem pontos fixos em* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *ou, equivalentemente, o* Problema (2.1) *tem solução. Além disso, o conjunto de todas as soluções do* Problema (2.1) *é limitado no espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prova. Tendo em vista o Teorema 0.18, é suficiente provarmos que o conjunto

$$\mathcal{S} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : u = \alpha T(u) \quad \text{para algum} \quad \alpha \in [0,1]\}$$

é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De (2.4), para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
\|T(u)\|_{1,p}^p &= \int_\Omega |\nabla(T(u))|^p = \int_\Omega |\nabla(T(u))|^{p-2}|\nabla(T(u))|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla(T(u))|^{p-2}\nabla(T(u))\nabla(T(u)) = \langle(-\Delta_p)T(u), T(u)\rangle \\
&= \langle N_f(u), T(u)\rangle = \int_\Omega f(x,u)T(u) \le \int_\Omega |f(x,u)||T(u)| \\
&\le \int_\Omega (C|u|^{q-1} + b(x))|T(u)|.
\end{aligned}$$

Além disso, para $u \in \mathcal{S}$, isto é, $u = \alpha T(u)$, com $\alpha \in [0,1]$, e aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|T(u)\|_{1,p}^p &\le \int_\Omega C\alpha^{q-1}|T(u)|^q + \int_\Omega b(x)|T(u)| \\
&\le \int_\Omega C\alpha^{q-1}|T(u)|^q + \left(\int_\Omega |b(x)|^{q'}\right)^{1/q'} \left(\int_\Omega |T(u)|^q\right)^{1/q} \\
&= C\alpha^{q-1}\|T(u)\|_{0,q}^q + \|b\|_{0,q'}\|T(u)\|_{0,q}.
\end{aligned}$$

Agora, pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, existe uma constante positiva C_1 tal que $\|T(u)\|_{0,q} \le C_1\|T(u)\|_{1,p}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|T(u)\|_{1,p}^p &\le C\alpha^{q-1}C_1^q\|T(u)\|_{1,p}^q + \|b\|_{0,q'}C_1\|T(u)\|_{1,p} \\
&\le CC_1^q\|T(u)\|_{1,p}^q + \|b\|_{0,q'}C_1\|T(u)\|_{1,p}.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, para cada $u \in \mathcal{S}$, vale

$$\|T(u)\|_{1,p}^p - K_1\|T(u)\|_{1,p}^q - K_2\|T(u)\|_{1,p} \le 0, \tag{2.8}$$

com K_1, K_2 constantes não negativas. Desde que $q \in (1,p)$, a limitação de $\mathcal{S}$ é assegurada. Com efeito, basta notarmos que $q - 1 > 0$ e $p - q > 0$. Agora, vem

$$\|T(u)\|_{1,p}(\|T(u)\|_{1,p}^{p-1} - K_1\|T(u)\|_{1,p}^{q-1} - K_2) \le 0,$$

que implica
$$\|T(u)\|_{1,p}^{p-1} - K_1\|T(u)\|_{1,p}^{q-1} - K_2 \leq 0;$$
daí,
$$\|T(u)\|_{1,p}^{q-1}(\|T(u)\|_{1,p}^{p-q} - K_1) \leq K_2.$$
De onde segue a limitação de $\|T(u)\|_{1,p}$. Isto é, existe uma constante $a \geq 0$ tal que $\|T(u)\|_{1,p} \leq a$. Conseqüentemente, se $u \in \mathcal{S}$, temos $\|u\|_{1,p} = \alpha\|T(u)\|_{1,p} \leq a$; donde, $\mathcal{S}$ é limitado. ∎

Observação 2.2 *Veremos que se* (2.4) *vale com* $b \in L^\infty(\Omega)$, *então a abordagem variacional permite-nos concluir a tese do* Teorema 2.1 *sob hipóteses extras, e o* Problema (2.1) *ainda tem solução, mas a limitação do conjunto de todas as soluções não será assegurada (cf.* Teorema 2.9*).*

Observação 2.3 *A condição* $q \in (1,p)$ *aparece como uma condição técnica, necessária para obtermos a limitação de* $\mathcal{S}$.

É natural indagarmos se o conjunto $\mathcal{S}$ *ainda permanece limitado no caso em que* $q = p$, *e é uma questão simples ver que se* $q = p$ *e* $1 - K_1 > 0$, *então o raciocínio acima funciona. De fato,*
$$\|T(u)\|_{1,p}^{p} - K_1\|T(u)\|_{1,p}^{q} - K_2\|T(u)\|_{1,p} \leq 0$$
implica
$$(1 - K_1)\|T(u)\|_{1,p}^{p} - K_2\|T(u)\|_{1,p} \leq 0,$$
que por sua vez, resulta em
$$\|T(u)\|_{1,p}((1 - K_1)\|T(u)\|_{1,p}^{p-1} - K_2) \leq 0.$$
Donde
$$(1 - K_1)\|T(u)\|_{1,p}^{p-1} \leq K_2,$$
daí, $\|T(u)\|_{1,p}$ *ser limitado. Isto significa que estamos interessados em trabalhar com as melhores constantes* C *e* C_1 *tais que* $1 - CC_1^p$ $(= 1 - K_1)$ *seja estritamente positivo. Existem situações em que* $1 - CC_1^p \leq 0$; *neste caso, nada podemos declarar sobre a limitação de* $\mathcal{S}$. *O exemplo abaixo mostra que, sob esta condição,* $\mathcal{S}$ *pode ser ilimitado. Seja* λ *um autovalor de* $-\Delta_p$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *e seja* u *um autovetor correspondente; ou melhor:*
$$-\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u.$$
Das igualdades
$$\begin{aligned}\|u\|_{1,p}^{p} &= \langle -\Delta_p u, u\rangle = \langle \lambda|u|^{p-2}u, u\rangle = \int_\Omega \lambda|u|^{p-2}u^2 \\ &= \lambda\int_\Omega |u|^p = \lambda\|u\|_{0,p}^{p},\end{aligned}$$
resulta
$$\lambda = \frac{\|u\|_{1,p}^{p}}{\|u\|_{0,p}^{p}}. \tag{2.9}$$

Como $\|v\|_{0,p} \leq C_1\|v\|_{1,p}$ *para todo* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *de* (2.9) *resulta que* $1 - \lambda C_1^p \leq 0$. *Realmente,* $\|u\|_{1,p}^p = \lambda\|u\|_{0,p}^p \leq \lambda C_1^p\|u\|_{1,p}^p$ *implica* $1 - \lambda C_1^p \leq 0$. *Consideremos a função de Carathéodory*

$$f(x, s) = \lambda|s|^{p-2}s.$$

Claramente, a condição de crescimento (2.4) *é satisfeita com* $q = p$ *e* $b = 0$, *e* $C = \lambda$. *Conseqüentemente,* (2.8) *torna-se*

$$(1 - \lambda C_1^p)\|T(u)\|_{1,p}^p \leq 0$$

para todo $u \in \mathcal{S}$, *e nenhuma conclusão sobre a limitação de* $\mathcal{S}$ *pode ser feita. Na verdade,* $\mathcal{S}$ *é ilimitado. De fato, temos* $-\Delta_p(tu) = \lambda|tu|^{p-2}tu = N_f(tu)$, *isto é,* $tu = (-\Delta_p)^{-1}N_f(tu)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *que significa* $\{tu : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{S}$ *(tomando* $\alpha = 1$*), e assim,* $\mathcal{S}$ *é ilimitado.*

Observação 2.4 *No caso* $f(x, s) = g(s) + h(x)$ *com* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua e* $h \in L^\infty(\Omega)$, *a invariância homotópica do grau de Leray-Schauder é usada por* Hachimi e Gossez-[17] *no intuito de provar o seguinte resultado:*
Se

$$\text{(i)}\ \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \leq \lambda_1 \qquad e \qquad \text{(ii)}\ \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{pG(s)}{|s|^p} < \lambda_1$$

onde $G(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau$ *e* λ_1 *é o primeiro autovalor de* $-\Delta_p$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *(ver* Anane-[2]*), então o problema*

$$-\Delta_p u = g(u) + h(x) \quad em \quad \Omega, \quad u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega$$

tem uma solução em $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

2.3 Existência de Solução via Minimização

Como já enfatizamos na Seção 2.1, numa abordagem variacional sob a condição de crescimento (2.4) sobre f, as soluções do Problema (2.1) são precisamente os pontos críticos do funcional $\mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 definido por

$$\mathcal{F}(u) = \psi(u) - \Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x, u)$$

onde $F(x, u) = \int_0^s f(x, \tau)d\tau$.

Notemos que $\mathcal{F}$ é fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, já sabemos que $\mathcal{F}(x, \cdot) = N_F(L^q(\Omega)) \subset L^1(\Omega)$, com N_F contínuo e limitado. Se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pela imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, temos que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$. Pela continuidade, $F(\cdot, u_n) \to F(\cdot, u)$ em $L^1(\Omega)$. Isto é, $\int_\Omega F(x, u_n) \to \int_\Omega F(x, u)$ sempre que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\eta(t) = (1/p)t^p$ é contínua, e $\zeta : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $\zeta(u) = \|u\|_{1,p}$ é fracamente semicontínua inferiormente, a composta, $\psi = \eta \circ \zeta$, é, pois, fracamente semicontínua inferiormente. Conseqüentemente, $\mathcal{F}$ o é.

Assim, por um resultado já conhecido (Teorema 0.1), no intuito de obtermos condições suficientes para (2.1) ter solução, um primeiro modo é assegurarmos a coercividade de $\mathcal{F}$. O resultado abaixo nos oferece condições para isto.

Teorema 2.2 *Seja* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory satisfazendo a condição de crescimento* (2.4). *Suponhamos que exista* $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\alpha(x) < \lambda_1$ *sobre um conjunto de medida positiva tal que*

$$\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{pF(x,s)}{|s|^p} \leq \alpha(x) \leq \lambda_1 \quad \textit{uniformemente em} \quad \Omega. \tag{2.10}$$

Então $\mathcal{F}$ *é coercivo. Conseqüentemente o* Problema (2.1) *tem solução.*

Prova. Provamos, primeiramente, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{N}(v) \geq \varepsilon_0, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|v\|_{1,p} = 1, \tag{2.11}$$

onde o funcional $\mathcal{N} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\mathcal{N}(v) = \|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p.$$

Para isto, lembremos que

$$\lambda_1 = inf \left\{ \frac{\|v\|_{1,p}^p}{\|v\|_{0,p}^p} \, ; \, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\} \right\}, \tag{2.12}$$

o ínfimo sendo atingido quando v é múltiplo de alguma função $u_1 > 0$ (cf. Anane-[2]). De (2.10) e (2.12) segue que $\mathcal{N}(v) \geq 0, \ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, o caso em que $v = 0$, a prova é imediata. Agora, se $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\}$, temos

$$\int_\Omega \alpha(x)|v|^p \leq \int_\Omega \lambda_1 |v|^p \leq \int_\Omega \frac{\|v\|_{1,p}^p}{\|v\|_{0,p}^p} |v|^p = \frac{\|v\|_{1,p}^p}{\|v\|_{0,p}^p} \int_\Omega |v|^p = \|v\|_{1,p}^p.$$

Daí, $\mathcal{N}(v) = \|v\|_{1,p}^p - \displaystyle\int_\Omega \alpha(x)|v|^p \geq 0$. Supondo, por contradição, que exista uma seqüência (v_n) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|v_n\|_{1,p} = 1$ e $\mathcal{N}(v_n) \to 0$, podemos encontrar uma subseqüência de (v_n), ainda denotada por (v_n), e algum $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ (Teorema 0.7) e $v_n \to v_0$ em $L^p(\Omega)$ (Teorema 0.2). O funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(v) = \int_\Omega \alpha(x)|v|^p$$

é contínuo em $L^p(\Omega)$ e fracamente contínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, seja a seqüência (v_n) tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$. Daí, $|v_n - v| \to 0$. Mas, $|v_n| - |v| \leq |v_n - v|$, donde $|v_n| \to |v|$, ou seja, $|v_n|^p \to |v|^p$. Logo, se $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$I(v_n) - I(v) = \int_\Omega \alpha(x)(|v_n|^p - |v|^p) \to 0$$

e as afirmações sobre I são verdadeiras. Pela semicontinuidade inferior fraca de $\mathcal{N}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, inferimos

$$0 \leq \|v_0\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p \leq \liminf_{n \to \infty} \mathcal{N}(v_n) = 0$$

e assim, $\|v_0\|_{1,p}^p = \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p$. Mas, $\mathcal{N}(v_n) \to 1 - \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p$; logo

$$\|v_0\|_{1,p}^p = \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p = 1,$$

que implica $v_0 \neq 0$. Então, por (2.12) e (2.10) temos

$$\lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p \leq \|v_0\|_{1,p}^p = \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p \leq \lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p. \tag{2.13}$$

Daí, como $\|v_0\|_{1,p}^p = 1$, temos $\lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p \leq 1 \leq \lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p$, o que implica $\lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p = 1 = \|v_0\|_{1,p}^p$, donde $\lambda_1 = \|v_0\|_{1,p}^p/\|v_0\|_{0,p}^p$. Daí resulta que v_0 é um múltiplo não-nulo de u_1. Conseqüentemente, $|v_0(x)| > 0$ q.t.p. em Ω. Denotemos $\Omega_1 := \{x \in \Omega : \alpha(x) < \lambda_1\}$. Desde que $|\Omega_1| > 0$ (por hipótese), obtemos

$$\int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p = \int_{\Omega_1} \alpha(x)|v_0|^p + \int_{\Omega\setminus\Omega_1} \alpha(x)|v_0|^p < \lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p,$$

que contradiz (2.13). Assim, (2.11) está provado.

Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qualquer. Naturalmente, a norma de $v_1 := v/\|v\|_{1,p}$ é unitária. E assim, usando (2.11), temos $\|v_1\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v_1|^p \geq \varepsilon_0$. Daí, $\|v/\|v\|_{1,p}\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)\,|v/\|v\|_{1,p}|^p \geq \varepsilon_0$, que implica $1 - (1/\|v\|_{1,p}^p)\int_\Omega \alpha(x)|v|^p \geq \varepsilon_0$, resultando em $\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p \geq \varepsilon_0\|v\|_{1,p}^p$. Como o $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que

$$\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p \geq \varepsilon_0\|v\|_{1,p}^p, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.14}$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \lambda_1\varepsilon_0$. Por (2.10) existe $R_\varepsilon > 0$ tal que se $|s| > R_\varepsilon$ temos $pF(x,s)/|s|^p \leq \alpha(x)+\varepsilon$, que implica $F(x,s) \leq ((\alpha(x)+\varepsilon)/p)|s|^p$. E se $|s| \leq R_\varepsilon$, então, pela Proposição 2.3(i), existe uma constante $K = K_\varepsilon$ tal que $F(x,s) \leq C_1R_\varepsilon^q + c(x) = K + c(x)$. Portanto,

$$F(x,s) \leq \frac{\alpha(x)+\varepsilon}{p}|s|^p + K + c(x) \qquad \text{para} \quad x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Por (2.15), vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) &= \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,v) \geq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \frac{\alpha(x)+\varepsilon}{p}|v|^p - \int_\Omega (K + c(x)) \\
&= \frac{1}{p}\left(\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p\right) - \frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega |v|^p - \left(K|\Omega| + \int_\Omega c(x)\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p - \varepsilon\int_\Omega |v|^p\right) - K_1.
\end{aligned}$$

Por (2.14), temos

$$\mathcal{F}(v) \geq \frac{1}{p}\left(\varepsilon_0\|v\|_{1,p}^p - \varepsilon\|v\|_{0,p}^p\right) - K_1.$$

Agora, por (2.12) estimamos $\mathcal{F}$ como segue

$$\mathcal{F}(v) \geq \frac{1}{p}\left(\varepsilon_0\|v\|_{1,p}^p - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|v\|_{1,p}^p\right) - K_1 = \frac{\lambda_1\varepsilon_0 - \varepsilon}{p\lambda_1}\|v\|_{1,p}^p - K_1 \to +\infty$$

quando $\|v\|_{1,p} \to +\infty$. ■

Observação 2.5 **(i)** *Se em* (2.4) *a função b está em $L^\infty(\Omega)$, podemos verificar que se $q \in (1,p)$, então* (2.10) *vale com $\alpha \equiv 0$; e assim, o* Problema (2.1) *tem solução. Mas, como já temos observado* (*veja* Observação 2.2), *se $b \in L^\infty(\Omega)$ e apenas* (2.10) *é exigido, então a limitação do conjunto de soluções* (*como no* Teorema 2.5) *não é estabelecida.*

(ii) *A idéia da prova do* Teorema 2.7 *é adequada para provar a existência para variantes multivalentes do* Problema (2.1).

2.4 Existência de Solução Usando o Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, ainda supomos que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de crescimento (2.4).

Aqui, formulamos condições suplementares sobre f que asseguram a existência de pontos críticos não triviais para o funcional de classe C^1 definido por $\mathcal{F} : W_0^{1,p} \to \mathbb{R}$.

Notemos que a existência de pontos críticos não triviais de $\mathcal{F}$ significa que o problema de Dirichlet (2.1) tem soluções fracas não triviais.

A principal ferramenta nesta direção é o bem conhecido Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz-[28], o qual apresentamos aqui para tornar o trabalho mais completo.

Teorema 2.3 ([28], Teorema 2.2) *Seja X um espaço de Banach real e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Suponhamos $I(0) = 0$ e*

I_1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\|x\|=\rho} \geq \alpha$;

I_2) existe um elemento $e \in X$, $\|e\| > \rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} I(u) \tag{2.16}$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Notemos que cada ponto crítico u no nível c definido em (2.16) ($I'(u) = 0,\ \ I(u) = c$) é não trivial. Conseqüentemente, se as hipóteses do Teorema 2.3 são satisfeitas com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ e $I = \mathcal{F}$, então a existência de soluções não triviais para o Problema (2.1) é assegurada.

Primeiramente, lidamos com a condição de compacidade (PS) para $\mathcal{F}$. Lembremos que $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (PS) se qualquer seqüência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ para a qual $\mathcal{F}(u_n)$ é limitada e $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, possui uma subseqüência convergente.

Lema 2.1 *Se $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada e $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, então (u_n) tem uma subseqüência convergente.*

Prova. Pelo Teorema 0.7 podemos extrair uma subseqüência (u_{n_k}) de (u_n), fracamente convergente para algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $\mathcal{F}'(u_{n_k}) \to 0$, inferimos

$$\langle \mathcal{F}'(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle = \langle -\Delta_p u_{n_k} - N_f(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle \to 0. \tag{2.17}$$

Desde que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pela imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, obtemos $u_{n_k} \to u$ em $L^q(\Omega)$. Então, como $(N_f(u_{n_k}))$ é limitado em $L^{q'}(\Omega)$, temos que $\langle N_f(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle \to 0$, pois $|\langle N_f(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle| \leq \|N_f(u_{n_k})\|_{0,q'}\|u_{n_k} - u\|_{0,q}$. De (2.17) obtemos $\langle -\Delta_p u_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle \to 0$ que, juntamente com o Teorema 1.10 mostra que $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Agora, estabelecemos a condição (PS).

Teorema 2.4 *Se existem $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$\theta F(x,s) \leq sf(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \ |s| \geq s_0, \tag{2.18}$$

então $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (PS).

Prova. Pelo Lema 2.1, é suficiente mostrarmos que toda seqüência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ para a qual $(\mathcal{F}(u_n))$ é limitada e $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$, é limitada.

Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}(u_n) \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos

$$\Omega_n = \{x \in \Omega\,;\, |u_n(x)| \geq s_0\}, \qquad \Omega_n' = \Omega \backslash \Omega_n.$$

Temos, então

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \left(\int_{\Omega_n} F(x,u_n) + \int_{\Omega_n'} F(x,u_n)\right) \leq d. \tag{2.19}$$

Prosseguimos obtendo estimativas para a integral em (2.19), independentes de n. Seja $n \in \mathbb{N}$ escolhido arbitrariamente. Se $x \in \Omega_n'$, então $|u_n(x)| < s_0$ e pela Proposição 2.3(i), segue-se

$$F(x,u_n) \leq C_1|u_n(x)|^q + c(x) \leq C_1 s_0^q + c(x).$$

Daí,

$$\int_{\Omega_n'} F(x,u_n) \leq \int_{\Omega_n'} C_1 s_0^q + \int_{\Omega_n'} c(x) \leq C_1 s_0^q|\Omega| + \int_\Omega c(x).$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_n'} F(x,u_n) \leq C_1 s_0^q|\Omega| + \int_\Omega c(x) = K_1. \tag{2.20}$$

Se $x \in \Omega_n$, então $|u_n(x)| \geq s_0$ e por (2.18) vale

$$F(x,u_n) \leq \frac{1}{\theta} f(x,u_n(x))u_n(x),$$

que nos dá

$$\int_{\Omega_n} F(x,u_n) \leq \int_{\Omega_n} \frac{1}{\theta} f(x,u_n)u_n = \frac{1}{\theta}\left(\int_\Omega f(x,u_n)u_n - \int_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n\right). \tag{2.21}$$

Pela condição de crescimento (2.4), deduzimos

$$\left|\int_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n\right| \leq \int_{\Omega_n'} (C|u_n|^q + b(x)|u_n|) \leq C s_0^q|\Omega| + s_0\int_\Omega b(x) = K_2$$

que implica
$$-\frac{1}{\theta}\int_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n \leq \frac{K_2}{\theta}. \tag{2.22}$$

Finalmente, de (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), e somando e subtraindo $\displaystyle\int_{\Omega_n'} F(x,u_n)$ depois da primeira desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\int_{\Omega} f(x,u_n)u_n &\leq \frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \int_{\Omega_n} F(x,u_n) - \frac{1}{\theta}\int_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n \\ &\leq d + K_1 + \frac{K_2}{\theta} = K;\end{aligned}$$

isto é,
$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\langle N_f(u_n), u_n\rangle \leq K. \tag{2.23}$$

Por outro lado, como $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle \mathcal{F}'(u_n), u_n\rangle| \leq \|u_n\|_{1,p}$ para $n \geq n_0$. Conseqüentemente, para todo $n \geq n_0$, temos

$$|\langle -\Delta_p u_n, u_n\rangle - \langle N_f(u_n), u_n\rangle| \leq \|u_n\|_{1,p} \qquad \text{ou} \qquad |\|u_n\|_{1,p}^p - \langle N_f(u_n), u_n\rangle| \leq \|u_n\|_{1,p}$$

que implica $\|u_n\|_{1,p}^p - \langle N_f(u_n), u_n\rangle \geq -\|u_n\|_{1,p}$. Daí,
$$-\frac{1}{\theta}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_{1,p} \leq -\frac{1}{\theta}\langle N_f(u_n), u_n\rangle. \tag{2.24}$$

Agora, de (2.23) e (2.24) resulta

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_{1,p} \leq \frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\langle N_f(u_n), u_n\rangle \leq K$$

e levando em conta que $\theta > p$, concluímos que (u_n) é limitada. ∎

Observação 2.6 *Vale a pena notarmos que* (2.18) *estende a bem conhecida condição: existem $\theta > 2$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \;\; |s| \geq s_0,$$

que foi primeiramente formulada por Ambrosetti e Rabinowitz como uma condição suficiente para garantir que $\mathcal{F}$ satisfaça (PS) no caso particular $p = 2$.

Agora, vendo (I_2) no Teorema 2.3, o próximo passo é obtermos condições suficientes para $\mathcal{F}$ ser ilimitada por baixo em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 2.2 *O funcional $\mathcal{F}$ tem as propriedades:*

(i) $\mathcal{F}(0) = 0$

(ii) *$\mathcal{F}$ aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.*

Prova. (i) Pela definição da $\mathcal{F}$.

(ii) Como $\mathcal{F}'(u) = -\Delta_p u - N_f(u)$ é claro que

$$\|\mathcal{F}'(u)\|_* \leq \| - \Delta_p u\|_* + \|N_f(u)\|_*$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Agora, pela última imersão do diagrama

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{I_d}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \overset{N_f}{\rightarrow} L^{q'}(\Omega) \overset{I_d^*}{\hookrightarrow} W^{-1,p'}(\Omega),$$

temos

$$\| - \Delta_p u\|_* + \|N_f(u)\|_* \leq \|u\|_{1,p}^{p-1} + K\|N_f(u)\|_{0,q'}$$

Além disso, pela imersão (compacta) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e em virtude do fato que N_f aplica conjuntos limitados de $L^q(\Omega)$ em conjuntos limitados de $L^{q'}(\Omega)$, concluímos que $\mathcal{F}'$ aplica conjuntos limitados de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em conjuntos limitados de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ escolhido arbitrariamente. Aplicando o teorema do valor médio, temos

$$|\mathcal{F}(v)| = |\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(0)| = |\langle \mathcal{F}'(\xi v), v\rangle| \leq \|\mathcal{F}'(\xi v)\|_* \|v\|_{1,p}$$

com $\xi \in (0,1)$. Então (ii) segue da conclusão acima sobre $\mathcal{F}'$. ∎

Observação 2.7 *Na realidade,* (ii) *no* Lema 2.2 *é uma conseqüência da condição de crescimento* (2.4) *e do fato que* $\| - \Delta_p u\|_* = \|u\|_{1,p}^{p-1}$.

Observação 2.8 *Suponhamos* $\mathcal{F}$ *ilimitado por baixo. Então, para todo* $\rho > 0$ *existe um elemento* $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *com* $\|e\|_{1,p} \geq \rho$, *tal que* $\mathcal{F}(e) \leq 0$. *Realmente, suponhamos, por contradição, que exista algum* $\rho > 0$ *tal que para* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *com* $\|u\|_{1,p} \geq \rho$, *valha* $\mathcal{F} > 0$. *Então pelo* Lema 2.2(ii), *o conjunto* $\{\mathcal{F}(u) : \|u\|_{1,p} < \rho\}$ *é limitado. Resulta que* $\mathcal{F}$ *é limitado por baixo, que é uma contradição.*

Para que o funcional $\mathcal{F}$ seja ilimitado por baixo, são suficientes as condições dadas no

Teorema 2.5 *Suponhamos que ocorra uma das alternativas:*

(i) *existem números* $\theta > p$ *e* $s_1 > 0$ *tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \;\; s \geq s_1, \tag{2.25}$$

ou

(ii) *existem números* $\theta > \rho$ *e* $s_1 < 0$ *tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \;\; s \leq s_1, \tag{2.26}$$

então $\mathcal{F}$ *é ilimitado por baixo.*

Prova. Vamos provar a suficiência da condição (i) (um argumento similar mostra que (ii) vale). Mais precisamente, mostraremos que se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u > 0$ é tal que $|M_1(u)| > 0$, com $M_1(u) = \{x \in \Omega : u(x) \geq s_1\}$, então $\mathcal{F}(\lambda u) \to -\infty$ quando $\lambda \to \infty$.

Primeiramente, para $\lambda \geq 1$, denotemos $M_\lambda(u) = \{x \in \Omega : \lambda u(x) \geq s_1\}$ e observemos que $M_1(u) \subset M_\lambda(u)$, e daí $|M_\lambda(u)| > 0$. Por outro lado, existe uma função $\gamma \in L^1(\Omega)$, $\gamma > 0$ tal que

$$F(x,s) \geq \gamma(x)s^\theta \qquad \text{para} \quad x \in \Omega, \;\; s \geq s_1. \tag{2.27}$$

Realmente, para $x \in \Omega$ e $\tau \geq s_1$, por (2.25) temos

$$0 < \theta F(x,\tau) \leq \tau f(x,\tau);$$

isto é,

$$\frac{\theta}{\tau} \leq \frac{f(x,\tau)}{F(x,\tau)} = \frac{F'_\tau(x,\tau)}{F(x,\tau)}.$$

Integrando de s_1 a s obtemos

$$\theta \ln\left(\frac{s}{s_1}\right)^\theta \leq \ln F(x,s) - \ln F(x,s_1),$$

que implica

$$\left(\frac{s}{s_1}\right)^\theta \leq \frac{F(x,s)}{F(x,s_1)}.$$

Ou seja,

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,s_1)}{s_1^\theta} s^\theta;$$

daí,

$$F(x,s) \geq \gamma(x)s^\theta, \quad \text{com} \quad \gamma(x) = \frac{F(x,s_1)}{s_1^\theta} > 0.$$

Agora, seja $\lambda \geq 1$. Claramente,

$$\mathcal{F}(\lambda u) = \frac{\lambda^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \left(\int_{M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) + \int_{\Omega\backslash M_\lambda(u)} F(x,\lambda u)\right). \tag{2.28}$$

Se $x \in M_\lambda(u)$ então $\lambda u(x) \geq s_1$, e por (2.27) temos $F(x,\lambda u(x)) \geq \gamma(x)\lambda^\theta u^\theta$. Portanto,

$$\int_{M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) \geq \lambda^\theta \int_{M_\lambda(u)} \gamma(x)u^\theta \geq \lambda^\theta \int_{M_1(u)} \gamma(x)u^\theta \lambda^\theta K_1(u), \tag{2.29}$$

com $K_1(u) > 0$. Se $x \in \Omega\backslash M_\lambda(u)$ então $\lambda u(x) < s_1$, e em virtude da Proposição 2.3(i), obtemos $|F(x,\lambda u(x))| \leq C_1\lambda^q u^q \leq C_1 s_1^q + c(x)$. Portanto,

$$\left|\int_{\Omega\backslash M_\lambda(u)} F(x,\lambda u)\right| \leq C_1 s_1^q|\Omega| + \int_\Omega c(x) = K_2. \tag{2.30}$$

De (2.28), (2.29) e (2.30), respectivamente, resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lambda u) &= \frac{\lambda^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_{M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) - \int_{\Omega\backslash M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) \\
&\leq \frac{\lambda^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \lambda^\theta K_1(u) - \int_{\Omega\backslash M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) \\
&\leq \frac{\lambda^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \lambda^\theta K_1(u) + K_2 \to -\infty \quad \text{quando} \quad \lambda \to \infty
\end{aligned}$$

já que $\theta > p$, e a prova está completa. ■

Com respeito a condição (I_1) no Teorema 2.3, temos o seguinte

Teorema 2.6 *Suponhamos que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça:*

(i) *existe $q \in (1, p^*)$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1} + 1) \qquad para \quad x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R},$$

onde C é uma constante não negativa;

(ii)

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1 \qquad uniformemente\ com\ x \in \Omega$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Então existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\mathcal{F}|_{\|u\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$.

Prova. Consideremos a função $h : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \limsup_{s \to 0} f(x,s)/(|s|^{p-2}s).$$

Por (ii) podemos encontrar $\mu \in (0, \lambda_1)$ tal que $h(x) < \mu$ uniformemente com $x \in \Omega$. Portanto, existe algum $\delta_\mu > 0$ tal que

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \mu \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; 0 < |s| < \delta_\mu,$$

ou

$$f(x,s) \leq \mu s^{p-1} \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; s \in (0, \delta_\mu), \tag{2.31}$$

$$-\mu|s|^{p-1} \leq f(x,s) \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; s \in (-\delta_\mu, 0) \tag{2.32}$$

Observemos que a função de Carathéodory f satisfaz $f(x,0) = 0$ para $x \in \Omega$. De fato, de f ser contínua no segundo argumento, vem $\lim_{s\to 0} f(x,s) = f(x,0)$. Por outro lado, $\lim_{s\to 0} f(x,s) = \lim_{s\to 0} f(x,s)/(|s|^{p-2}s) \lim_{s\to 0} |s|^{p-2}s = 0$. Donde $f(x,0) = 0$.

De (2.31), (2.32) e pela definição da F, vem

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau \leq \int_0^s \mu\tau^{p-1}d\tau = \frac{\mu}{p}|s|^p, \quad s \in (0, \delta_\mu),$$

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau = -\int_s^0 f(x,\tau)d\tau \leq \int_s^0 \mu|\tau|^{p-1}d\tau = \frac{\mu}{p}|s|^p, \quad s \in (-\delta_\mu, 0).$$

Portanto,

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{p}|s|^p, \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; |s| < \delta_\mu. \tag{2.33}$$

Levando em conta (i), é fácil ver que F satisfaz

$$|F(x,s)| \leq C_1\,(|s|^q + 1) \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R}, \tag{2.34}$$

com C_1 constante não negativa. De fato,

$$|F(x,s)| \;=\; \left|\int_0^s f(x,\tau)d\tau\right| \leq \int_0^{|s|} C\left(s^{q-1}+1\right)\frac{C}{q}|s|^q + C|s| + K_1.$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$\frac{C}{q}|s|^q + C|s| + K_1 \leq \frac{C}{q}|s|^q + \frac{1}{q}|s|^q + \frac{q-1}{q}C^{\frac{q}{q-1}} + K_1 = \frac{C+1}{q}|s|^q + K_2.$$

Portanto, $|F(x,s)| \leq C_1\left(|s|^q+1\right)$, onde $C_1 \geq \max\{(C+1)/q, K_2\}$. Escolhamos $q_1 \in (\max\{p,q\}, p^*)$. Por (2.34) existe uma constante $C_2 \geq 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq C_2|s|^{q_1} \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; |s| \geq \delta_\mu. \tag{2.35}$$

Com efeito, se $\delta_\mu \geq 1$, ou seja, $|s| \geq 1$, temos

$$|F(x,s)| \leq C_1(|s|^q+1) \leq C_1(|s|^{q_1}+1) \leq C_2|s|^{q_1}.$$

Se $0 < \delta_\mu \leq |s| < 1$, resulta

$$|F(x,s)| \leq C_1|s|^q + C_1 < 2C_1 \leq C_2|s|^{q_1}.$$

De (2.33) e (2.35), temos

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{p}|s|^p + C_2|s|^{q_1} \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{2.36}$$

Pela estimativa (2.36), resulta

$$\mathcal{F}(u) \;=\; \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\mu}{p}\int_\Omega |u|^p - C_2\int_\Omega |u|^{q_1}.$$

Da imersão $W_0^{1,p} \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$, vem

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) \;&\geq\; \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\mu}{p}\|u\|_{0,p}^p - C_3\|u\|_{1,p}^{q_1}\\ &=\; \|u\|_{1,p}^p\left[\frac{1}{p}\left(1-\mu\frac{\|u\|_{0,p}^p}{\|u\|_{1,p}^p}\right) - C_3\|u\|_{1,p}^{q_1-p}\right].\end{aligned}$$

Agora, pela caracterização variacional do primeiro autovalor λ_1 (ver (2.12)), temos

$$\mathcal{F}(u) \;\geq\; \|u\|_{1,p}^p\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{\lambda_1}\right) - C_3\|u\|_{1,p}^{q_1-p}\right] \geq \alpha > 0,$$

quando $\|u\|_{1,p} = \rho$ é suficientemente pequeno. ■

O lema seguinte será necessário para obtermos alguma característica da solução não trivial do Problema 2.1.

Lema 2.3 **(i)** *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *é uma solução do* Problema (2.1) *com* $f(x,s) \geq 0$ *para* $x \in \Omega$ *e* $s \leq 0$, *então* $u \geq 0$.

(ii) *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *é uma solução do* Problema (2.1) *com* $f(x,s) \leq 0$ *para* $x \in \Omega$ *e* $s \geq 0$, *então* $u \leq 0$.

Prova. Vamos provar (i) (um argumento análogo prova (ii)). Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução do Problema (2.1) e denotemos $\Omega_- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$. Definamos $u_- = \max\{-u, 0\}$. Pela Proposição A.1, $u_- \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e

$$\nabla u_- = \begin{cases} -\nabla u & \text{em } \Omega_-, \\ 0 & \text{em } \Omega \backslash \Omega_-. \end{cases}$$

De

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_- = \int_\Omega f(x,u) u_-$$

obtemos

$$-\int_{\Omega_-} |\nabla u|^p = -\int_{\Omega_-} f(x,u) u \geq 0.$$

Assim, $\nabla u = 0$ q.t.p. em Ω_-; conseqüentemente $\nabla u_- = 0$ q.t.p. em Ω. Portanto, $\|u_-\|_{1,p} = 0$, donde $u_- = 0$ q.t.p. em Ω. Concluímos que $|\Omega_-| = 0$, isto é, $u \geq 0$ q.t.p. em Ω. ■

A esta altura, estamos em posição de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.7 *Suponhamos que a função de Carathéodory* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaça:*

(i) *existe* $q \in (1, p^*)$ *tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1} + 1) \quad \textit{para} \ \ x \in \Omega, \ \ s \in \mathbb{R},$$

onde C *é uma constante não negativa;*

(ii)

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1 \quad \textit{uniformente com} \ \ x \in \Omega$$

onde λ_1 *é o primeiro autovalor de* $-\Delta_p$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$*;*

(iii) *existem constantes* $\theta > p$ *e* $s_0 > 0$ *tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \quad \textit{para} \ \ x \in \Omega, \ \ |s| \geq s_0.$$

Então o Problema (2.1) *tem soluções não triviais* $u_- \leq 0 \leq u_+$.

Prova. Provaremos que o Problema (2.1) tem uma solução não trivial $u_+ \geq 0$ (com argumentos semelhantes prova-se a existência de u_-). Definamos $f_+ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_+(x,s) = f\left(x, (s + |s|)/2\right)$, isto é,

$$f_+(x,s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \ \ s \leq 0, \\ f(x,s), & \text{se} \ \ s > 0, \end{cases}$$

e seja $F_+ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,\tau) d\tau$. Vejamos, inicialmente, que:

1. a função f_+ é de Carathéodory e satisfaz

$$|f_+(x,s)| \leq C(|s|^{q-1}+1) \quad \text{para} \;\; x \in \Omega, \;\; s \in \mathbb{R};$$

2. $\displaystyle\limsup_{s\to 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1$ uniformemente com $x \in \Omega$;

3. $\theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s)$ para $x \in \Omega$, $|s| \geq s_0$;

4. $0 < \theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s)$ para $x \in \Omega$, $s \geq s_0$.

Prova de **1**. Como $f_+(x,s) = f\left(x, (s+|s|)/2\right)$, temos f_+ de Carathéodory, já que f o é. Além disso,

$$|f_+(x,s)| = \begin{cases} 0 & \leq & C\left(|s|^{q-1}+1\right) & \text{se} & s \leq 0, \\ |f(x,s)| & \leq & C\left(|s|^{q-1}+1\right) & \text{se} & s > 0, \quad \text{por (i).} \end{cases}$$

Prova de **2**. Temos

$$\begin{aligned} \limsup_{s\to 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s} &= \max\left\{\limsup_{s\nearrow 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s}, \limsup_{s\searrow 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s}\right\} \\ &= \max\left\{0, \limsup_{s\searrow 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s}\right\} < \lambda_1 \quad \text{uniformemente com} \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Prova de **3**. Ora,

$$F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & \text{se} \;\; s \leq 0, \\ \int_0^s f(x,\tau)d\tau = F(x,s), & \text{se} \;\; s > 0 \end{cases}.$$

Daí,

$$\theta F_+(x,s) = \begin{cases} 0 \leq s f_+(x,s) = 0, & \text{se} \;\; s \leq 0, \\ \theta F(x,s) \leq s f(x,s) = s f_+(x,s), & \text{se} \;\; s > 0. \end{cases}$$

Prova de **4**. De (3) temos $\theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s)$ se $s > 0$; em particular, se $|s| \geq s_0 > 0$. Como $F_+(x,s) = F(x,s)$ se $s > 0$, temos que (iii) prova (4).

De **1** - **4**, inferimos que o funcional $\mathcal{F}_+ : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 dado por $\mathcal{F}_+(u) = (1/p)\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F_+(x,u)$ tem um ponto crítico não trivial $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para ver isto, aplicamos o Teorema 2.3 com $I = \mathcal{F}_+$. Para este fim, antes de tudo, deve ser observado que, tendo em vista **1**, os resultados concernentes a $\mathcal{F}$ permanecem válidos para $\mathcal{F}_+$, com f_+ no lugar de f.

Claramente $\mathcal{F}_+(0) = 0$.

Por **1**, **2** e pelo Teorema 2.6, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $\mathcal{F}_+|_{\|u\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$.

Além disso, por **4**, pelo Teorema 2.5(i) e pelo Lema 2.2(ii) (veja também a Observação 2.8), existe um elemento $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|e\|_{1,p} \geq \rho$ tal que $\mathcal{F}_+(e) \leq 0$.

Finalmente, por **3** e pelo Teorema 2.4, $\mathcal{F}_+$ satisfaz a condição (PS). O ponto crítico não trivial $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$, cuja existência é assegurada pelo Teorema 2.3, satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^{p-2}\nabla u_+ \nabla v = \int_\Omega f_+(x,u_+)v, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.37}$$

Como $f_+(x,s) = 0$ para $x \in \Omega,\ s \leq 0$, o Lema 2.3(i) mostra que $u_+ \geq 0$. Agora, pela definição de f_+, (2.37) torna-se

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^{p-2}\nabla u_+ \nabla v = \int_\Omega f(x,u_+)v, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

que completa a prova. ■

Observação 2.9 *O* Teorema 2.7 *foi originalmente estabelecido por Ambrosetti e Rabinowitz, no caso p = 2. Depois, seus resultados tornaram-se freqüentemente citados como um resultado típico de existência para problemas de Dirichlet não triviais com o membro do lado direito tendo um crescimento superlinear* (*ver, por exemplo, o* Corolário 2.23 *em* Rabinowitz-[28], *o* Teorema 6.9 *em* Djairo-[15], *o* Teorema 6.2 *em* Struwe-[30]).

Neste contexto, o Teorema 2.7 *pode ser visto como um modelo de resultado de existência para problemas de Dirichlet com o p-laplaciano tendo o segundo membro uma função com crescimento mais rápido do que a potência "$p-1$", a condição* (iii) *implicando*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = +\infty. \tag{2.38}$$

Além disso, (2.38) *mostra que a generalidade do* Teorema 2.7 *não é perdida se em* (i) *q está em (p,p^*) ao invés de $(1,p^*)$.*

Por outro lado, um raciocínio semelhante aquele da prova do Teorema 2.5 *mostra que as condições* (iii) *e* (i) *no* Teorema 2.7 *implicam a existência de algum $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma > 0$, tal que $F(x,s) \geq \gamma(x)|s|^\theta$ para $x \in \Omega$, e $|s| \geq s_0$ (ver também a prova da* Proposição 2.4 *abaixo). Isto mostra que o potencial F cresce mais rápido que $|s|^p$ com $|s| \to \infty$. Um resultado de existência permitindo F crescer mais rápido que $|s|^p$ ou mais lento que $|s|^p$ pode ser encontrado em* Costa-Magalhaes-[10]

2.5 Multiplicidade de Soluções

Levando em conta os métodos minimax em teoria dos pontos críticos, invocando o Teorema do Passo da Montanha para provar a existência de soluções não triviais para o Problema (2.1), é natural indagarmos sobre a multiplicidade de soluções.

Mais precisamente, seguindo o caso particular $p = 2$, deveria ser esperado que sob as hipóteses do Teorema 2.7, o fato de f ser ímpar fosse suficiente para garantir a existência de uma seqüência ilimitada de soluções para o Problema (2.1).

Tal resultado concluirá esta seção. Antes, porém, precisamos de dois resultados:

Proposição 2.4 *Suponhamos que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça:*

(i) *existe $q \in (1,p^*)$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1} + 1) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

com $C \geq 0$ constante;

(ii) *existem números $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq sf(x,s) \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0.$$

Então, se X_1 é um subespaço de dimensão finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$, o conjunto $S = \{v \in X_1 : \mathcal{F}(v) \geq 0\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prova. Por (i), F satisfaz

$$|F(x,s)| \leq C_1\,(|s|^q + 1) \quad \text{para } \ x \in \Omega, \ \ s \in \mathbb{R}, \tag{2.39}$$

com $C_1 \geq 0$ constante.

Podemos concluir, de (ii), que existe $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\ \gamma > 0\ $ em $\ \Omega$, tal que

$$F(x,s) \geq \gamma(x)|s|^\theta \quad \text{para } \ x \in \Omega, \ \ |s| \geq s_0. \tag{2.40}$$

De fato, como na prova do Teorema 2.5, temos

$$F(x,s) \geq \gamma_1(x)s^\theta \quad \text{para } \ x \in \Omega, \ \ s \geq s_0, \tag{2.41}$$

onde $\gamma_1(x) = F(x,s_0)/s_0^\theta$. Em virtude de (2.39), é óbvio que $\gamma_1 \in L^\infty(\Omega)$ e (ii) implica $\gamma_1 > 0$ em Ω.

Um raciocínio semelhante mostra que

$$F(x,s) \geq \gamma_2(x)|s|^\theta \quad \text{para } \ x \in \Omega, \ \ s \leq -s_0, \tag{2.42}$$

onde $\gamma_2(x) = F(x,-s_0)/s_0^\theta$. Ainda, $\gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$ e $\gamma_2 > 0$ em Ω. Com efeito, para $x \in \Omega$ e $\tau \leq -s_0$, por (ii) temos $0 < \theta F(x,\tau) \leq \tau f(x,\tau)$. Além disso,

$$F(x,\tau) > 0, \ \text{ e } \ \frac{s}{-s_0} \geq 1 \ \text{ se } \ s \leq -s_0.$$

Assim,

$$\frac{\theta}{\tau} \geq \frac{f(s,\tau)}{F(x,\tau)},$$

ou seja,

$$\int_s^{-s_0} \frac{\theta}{\tau} d\tau \geq \int_s^{-s_0} \frac{F'_\tau(x,\tau)}{F(x,\tau)} d\tau,$$

que implica

$$\int_{-s_0}^{s} \frac{\theta}{\tau} d\tau \leq \int_{-s_0}^{s} \frac{F'_\tau(x,\tau)}{F(x,\tau)} d\tau.$$

Conforme a prova de (2.27)

$$\theta \ln\left(\frac{s}{-s_0}\right) \leq \ln \frac{F(x,s)}{F(x,-s_0)}.$$

Daí,

$$\frac{s^\theta}{(-s_0)^\theta} \leq \frac{F(x,s)}{F(x,-s_0)},$$

e, por fim,

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,-s_0)s^\theta}{(-s_0)^\theta} = \frac{F(x,-s_0)}{s_0^\theta}|s|^\theta = \gamma_2(x)|s|^\theta.$$

De (2.39), $\gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$ e (ii) implica que $\gamma_2 > 0$ em Ω. Portanto, (2.40) vale com $\gamma(x) = \min\{\gamma_1(x), \gamma_2(x)\}$ para $x \in \Omega$, como afirmamos.

Provemos, agora, que $\mathcal{F}$ satisfaz

$$\mathcal{F}(v) \leq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta - K, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.43}$$

com $K \geq 0$ constante. Seja v, arbitrário, em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e denotemos $\Omega_0 = \{x \in \Omega : |v(x)| < s_0\}$.
Por (2.39) temos

$$\int_{\Omega_0} F(x,v) \geq -C_1 \int_{\Omega_0} (|v|^q + 1) \geq -C_1 \int_\Omega (s_0^q + 1) = -C_1\,(s_0^q+1)\,|\Omega| = K_1,$$

e por (2.40) vale $\int_{\Omega\backslash\Omega_0} F(x,v) \geq \int_{\Omega\backslash\Omega_0} \gamma(x)|v|^\theta$, pois $|v| \geq s_0$ em $\Omega\backslash\Omega_0$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) &= \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \left(\int_{\Omega_0} F(x,v) + \int_{\Omega\backslash\Omega_0} F(x,v)\right) \\
&\leq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_{\Omega\backslash\Omega_0} \gamma(x)|v|^\theta - K_1 \\
&= \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta + \int_{\Omega_0} \gamma(x)|v|^\theta - K_1 \\
&\leq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta + K,
\end{aligned}$$

onde $K = \|\gamma\|_{0,\infty} s_0^q |\Omega| - K_1$, e (2.43) está provado.

A função $\|\ \|_\gamma : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $\|v\|_\gamma = \left(\int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta\right)^{1/\theta}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_\gamma^\theta &= \int_\Omega \gamma(x)|u+v|^\theta \leq \int_\Omega \gamma(x)|u||u+v|^{\theta-1} + \int_\Omega \gamma(x)|v||u+v|^{\theta-1} \\
&= \int_\Omega \gamma^{\frac{\theta-1}{\theta}}(x)|u+v|^{\theta-1}\gamma^{\frac{1}{\theta}}(x)|u| + \int_\Omega \gamma^{\frac{\theta-1}{\theta}}(x)|u+v|^{\theta-1}\gamma^{\frac{1}{\theta}}(x)|v|
\end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_\gamma^\theta &\leq \left(\int_\Omega \left|\gamma^{\frac{\theta-1}{\theta}}(x)|u+v|^{\theta-1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_\Omega \left|\gamma^{\frac{1}{\theta}}(x)|u|\right|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\quad + \left(\int_\Omega \left|\gamma^{\frac{\theta-1}{\theta}}(x)|u+v|^{\theta-1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_\Omega \left|\gamma^{\frac{1}{\theta}}(x)|v|\right|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= \left(\int_\Omega \gamma(x)|u+v|^\theta\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_\Omega \gamma(x)|u|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\quad + \left(\int_\Omega \gamma(x)|u+v|^\theta\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a definição $\|\ \|_\gamma$, obtemos

$$\|u+v\|_\gamma^\theta \leq \|u+v\|_\gamma^{\theta-1}\|u\|_\gamma + \|u+v\|_\gamma^{\theta-1}\|v\|_\gamma.$$

Donde

$$\|u+v\|_\gamma \le \|u\|_\gamma + \|v\|_\gamma.$$

Os demais axiomas da norma são imediatos.

No subespaço X_1 de dimensão finita, as normas $\|\ \|_{1,p}$ e $\|\ \|_\gamma$ sendo equivalentes, existe uma constante $\widetilde{K} = \widetilde{K}(X_1) > 0$ tal que $\|v\|_{1,p} \le \widetilde{K}\left(\int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta\right)^{1/\theta}$ para todo $v \in X_1$. Conseqüentemente, por (2.43), em X_1 vale:

$$\mathcal{F}(v) \le \frac{1}{p}\widetilde{K}^p\left(\int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta\right)^{\frac{p}{\theta}} - \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta - K = \frac{1}{p}\widetilde{K}^p\|v\|_\gamma^p - \|v\|_\gamma^\theta - K.$$

Portanto $(1/p)\widetilde{K}^p\|v\|_\gamma^p - \|v\|_\gamma^\theta - K \ge 0$ para $v \in S$; e levando em consideração que $\theta > p$, concluímos que S é limitado. ■

O segundo resultado de que necessitamos é a versão simétrica $\mathbb{Z}_2$ do Teorema do Passo da Montanha.

Teorema 2.8 ([28], Teorema 9.12) *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e seja $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ par, satisfazendo (PS), e $I(0) = 0$. Se:*
I_1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\|x\|=\rho} \ge \alpha$;
I_2') para cada subespaço de dimensão finita X_1 de X o conjunto $\{x \in X_1 : I(x) \ge 0\}$ é limitado,
então I possui uma seqüência ilimitada de valores críticos.

Agora podemos estabelecer o

Teorema 2.9 *Suponhamos que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja ímpar no segundo argumento: $f(x,s) = -f(x,-s)$. Se as condições* (i), (ii), (iii) *do* Teorema 2.7 *são satisfeitas, isto é,*

(i) *existe $q \in (1, p^*)$ tal que*

$$|f(x,s)| \le C(|s|^{q-1} + 1) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

com $C \ge 0$ constante;

(ii)

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1 \qquad \textit{uniformente com} \quad x \in \Omega$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(iii) *existem constantes $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \le s f(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, |s| \ge s_0,$$

então o Problema (2.1) *tem uma seqüência ilimitada de soluções.*

Prova. A função f sendo ímpar, o funcional $\mathcal{F}$ é par. É óbvio que $\mathcal{F}(0) = 0$.

De (iii), pelo Teorema 2.4, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (PS).

Por (i), (ii) e pelo Teorema 2.6, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $\mathcal{F}|_{\|u\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$.

A Proposição 2.4, (i) e (iii) mostram que o conjunto $\{v \in X_1 : \mathcal{F}(u) \geq 0\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, sempre que X_1 for um subespaço de dimensão finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Aplicando o Teorema 2.8 com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ e $I = \mathcal{F}$ vemos que $\mathcal{F}$ possui uma seqüência ilimitada de valores críticos. Pelo Lema 2.2(ii), $\mathcal{F}$ possui uma seqüência ilimitada de pontos críticos. Ou seja, o Problema (2.1) tem uma seqüência ilimitada de soluções. ∎

Observação 2.10 *Na* Proposição 2.4*, pela condição* (ii)*, o expoente q na condição de crescimento* (i) *deve estar no intervalo* (p, p^*) *(veja a* Observação 2.9*). Portanto, como no caso do* Teorema 2.7*, a generalidade do* Teorema 2.9 *não é perdida se q em* (i) *for requerido está no intervalo* (p, p^*) *ao invés de* $(1, p^*)$.

Observação 2.11 *No caso particular $p = 2$ a hipótese de simetria de f permite remover a condição* (ii) *no* Teorema 2.9 *(veja, por exemplo, o* Teorema 9.38 *em* Rabinowitz-[28], *o* Teorema 6.6 *em* Struwe-[30]).

Capítulo 3

O Problema de Neumann

Nosso objetivo neste capítulo é obtermos a existência de resultados para o problema de Neumann

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.1}$$

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Aqui Ω é um domínio limitado, com fronteira suave, em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $1 < p < \infty$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz algumas condições especiais de crescimento e $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot n$.

Justifiquemos, primeiro, o uso da condição de froteira (3.2), principalmente no caso em que $p \neq 2$. Notemos que para $p = 2$, esta condição torna-se

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Por um lado, a usamos porque ela aparece em vários fenômenos físicos (por exemplo, $(\mathcal{P}_g)$, - ver Introdução). Por outro lado, podemos introduzir o operador $-\Delta_p$ sobre $W^{1,p}(\Omega)$ com uma definição naturalmente ligada ao Problema (3.1), (3.2). Consideremos $D \subset W^{1,p}(\Omega)$ definido por

$$D = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \in L^{p'}\}, \qquad \text{onde} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então, para cada $u \in D$ podemos falar (ver, por exemplo, Pelissier-[26], Lema 1.2, Capítulo I) em $|\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial n\big|_{\partial\Omega}$; e $|\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial n\big|_{\partial\Omega} \in W^{-1/p',p'}(\partial\Omega) = \left(W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)\right)^*$ é definido por

$$\left\langle |\nabla u|^{p-2}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega}\right\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_\Omega div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)v, \tag{3.3}$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Se, além disso, a condição (3.2) é satisfeita, então

$$\int_\Omega -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \qquad \text{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.4}$$

Portanto, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $|\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial n\big|_{\partial\Omega} = 0$ e $div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \in L^{p'}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \qquad \text{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Definimos sobre $W^{1,p}(\Omega)$ uma norma equivalente à norma usual deste espaço, pondo

$$\|\!|u|\!\|_{1,p}^p = \||\nabla u|\|_{0,p}^p + \|u\|_{0,p}^p = \int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |u|^p \quad \text{para} \quad u \in W^{1,p}(\Omega)$$

e provamos que o espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p})$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo. Inspirado em (3.4), definimos o operador

$$-\Delta_p : \left(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p}\right) \to \left(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p}\right)^*$$

por

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \qquad \text{para} \quad u, v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.5}$$

Provamos que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$-\Delta_p u \in \left(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p}\right)^*.$$

Mostramos, também, que a aplicação dualidade, correspondente à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$, no espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p})$ é monovalente e

$$J_\varphi(u) = -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \quad \text{para} \quad u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.6}$$

Assim, o lado esquerdo da equação (3.1) é a aplicação dualidade sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p})$, correspondendo a $\varphi(t) = t^{p-1}$. Isto é importante, pois nos possibilita usá-la (a aplicação dualidade) para o problema de Neumann.

3.1 Alguns Resultados de Análise Não Linear

Para provarmos a existência de solução para este problema, utilizamos os mesmos métodos empregados no problema com condição de Dirichlet. Para tanto, necessitamos, inicialmente, de alguns resultados de Análise Não-Linear.

Teorema 3.1 *Seja Ω um domínio arbitrário em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Então o funcional $u \mapsto \|\!|u|\!\|_{1,p}$ é uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$, equivalente à norma usual $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$.*

Prova. Vamos provar, inicialmente, que a função $u \mapsto \|\!|u|\!\|_{1,p}$ é uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos $\|\!|u|\!\|_{1,p} \geq 0$ e

$$\|\!|u|\!\|_{1,p} = 0 \text{ se, e somente se, } \|u\|_{0,p}^p + \||\nabla u|\|_{0,p}^p = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0.$$

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\|\!|\lambda u|\!\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla(\lambda u)|^p + \int_\Omega |\lambda u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|\!|u|\!\|_{1,p}.$$

Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Pela desigualdade de Minkowski, temos:

$$\begin{aligned} \|\!|u+v|\!\|_{1,p}^p &= \|u+v\|_{0,p}^p + \||\nabla u + \nabla v|\|_{0,p}^p \\ &\leq (\|u\|_{0,p} + \|v\|_{0,p})^p + (\||\nabla u|\|_{0,p} + \||\nabla v|\|_{0,p})^p. \end{aligned}$$

Consideremos $a = (\|u\|_{0,p}, |||\nabla u|||_{0,p}), b = (\|v\|_{0,p}, |||\nabla v|||_{0,p}), a, b \in \mathbb{R}^2$ munido da norma p, isto é, se $\varrho = (x, y)$, então $\|\varrho\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$. Aplicando a desigualdade de Minkowski, temos $\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
|||u + v|||_{1,p}^p &\leq \left[\left(\|u\|_{0,p}^p + |||\nabla u|||_{0,p}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|v\|_{0,p} + |||\nabla v|||_{0,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\
&= (|||u|||_{1,p} + |||v|||_{1,p})^p
\end{aligned}$$

que implica $|||u + v|||_{1,p} \leq |||u|||_{1,p} + |||v|||_{1,p}$, e assim, $\|\cdot\|$ é uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$.

Mostremos, agora, a equivalência das normas. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \leq N^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_1\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}\right)^{\frac{2}{p}},$$

onde $K_1 = N^{1/p'}$; ou, equivalentemente,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq K_2\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p},$$

onde $K_2 = K_1^{p/2}$. Integrando esta desigualdade sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq K_2\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}.$$

Isto é

$$|||\nabla u|||_{0,p}^p \leq K_2\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{0,p}^{p},$$

que produz

$$\begin{aligned}
|||u|||_{1,p}^p &= \|u\|_{0,p}^p + |||\nabla u|||_{0,p}^p \leq \|u\|_{0,p}^p + K_2\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{0,p}^{p} \\
&\leq K_3\left(\|u\|_{0,p}^p + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{0,p}^{p}\right) = K_3\|u\|_{W^{1,p}}^p,
\end{aligned}$$

onde $K_3 = \max\{1, K_2\}$. Conseqüentemente,

$$|||u|||_{1,p} \leq K_4\|u\|_{W^{1,p}}, \tag{3.7}$$

onde $K_4 = K_3^{\frac{1}{p}} > 0$ é uma constante independente de u.

Pela desigualdade de Cauchy, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}\right)^2 \leq N\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2p} \leq N\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{p},$$

que implica

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p \leq K_5\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

com $K_5 = N^{1/2}$. Integrando esta desigualdade sobre Ω, temos

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p \leq K_5\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{0,p}^p \leq K_5\||\nabla u|\|_{0,p}^p\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,p}}^p &= \|u\|_{0,p}^p + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{0,p}^p \leq \|u\|_{0,p}^p + K_5\||\nabla u|\|_{0,p}^p \\ &\leq K_6 \|\!| u |\!\|_{1,p}^p,\end{aligned}$$

com $K_6 = \max\{1, K_5\}$. Conseqüentemente,

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq K_7 \|\!| u |\!\|_{1,p}\ , \tag{3.8}$$

onde $K_7 = K_6^{1/p}$ é uma constante independente de u.

De (3.7) e (3.8) resulta a equivalência das normas. ■

Observação 3.1 *A equivalência destas normas também resulta da* Observação 16 *do* Brezis-[7](p.170), *no caso particular onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira suave, usando os teoremas de imersão de Sobolev.*

Observação 3.2 *Como estas normas são equivalentes, segue que $(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p})$ é um espaço de Banach separável, e no caso particular onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com fronteira suave, a inclusão $C^1(\overline{\Omega}) \subset (W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p})$ é densa.*

Também, a imersão $(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p}) \subset (L^q(\Omega), \|\cdot\|_{0,q})$, $1 < q < p^*$ é compacta, onde p^* é o expoente conjugado de Sobolev.

Observação 3.3 *Em todas as demonstrações dos resultados seguintes, os detalhes omitidos encontram-se nos resultados análogos para o problema de Dirichlet, já provados.*

Como as propriedades geométricas do espaço não são imutáveis, quando mudamos a norma para uma outra equivalente, damos uma prova direta do seguinte

Teorema 3.2 *Seja Ω um domínio arbitrário no $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Então o espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\!|\cdot|\!\|_{1,p})$ é uniformemente convexo.*

Prova. Primeiro, provamos o caso em que $p \in [2,\infty)$. Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\|_{1,p} = \|v\|_{1,p} = 1$ e $\|u - v\|_{1,p} \geq \varepsilon \in (0,2]$.

Usando (1.9) temos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{1,p}^p &= \int_\Omega \left|\frac{u+v}{2}\right|^p + \left|\nabla\frac{u+v}{2}\right|^p + \int_\Omega \left|\frac{u-v}{2}\right|^p + \left|\nabla\frac{u-v}{2}\right|^p \\
&= \int_\Omega \left|\frac{u+v}{2}\right|^p + \left|\frac{u-v}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right|^p \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|u|^p + |v|^p\right) + \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right) = 1,
\end{aligned}$$

que implica

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{3.9}$$

Agora, vejamos o caso onde $p \in (1,2)$. Um cálculo direto mostra que se $v \in W^{1,p}(\Omega)$, então $|v|^{p'},\ |\nabla v|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$. De fato, se $v \in W^{1,p}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |v|^p = \int_\Omega |v|^{p'(p-1)} = \int_\Omega \left||v|^{p'}\right|^{p-1} < \infty,$$

donde $|v|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$. A prova de que $|\nabla v|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$ encontra-se no Teorema 1.5. Sejam $v_1, v_2 \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $\dfrac{v_1+v_2}{2}, \dfrac{v_1-v_2}{2} \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\left|\dfrac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}, \left|\dfrac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}$, $\left|\nabla\dfrac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}, \left|\nabla\dfrac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$, com $0 < p-1 < 1$; e pelo Lema 0.4, temos

$$\left\|\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1} \geq \left\|\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1} + \left\|\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}, \tag{3.10}$$

$$\left\|\left|\nabla\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'} + \left|\nabla\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1} \geq \left\|\left|\nabla\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1} + \left\|\left|\nabla\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}. \tag{3.11}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'} + \left\|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'} = \\
&= \left(\int_\Omega \left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p + \left|\nabla\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{p'}{p}} + \left(\int_\Omega \left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p + \left|\nabla\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{p'}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla v_1+\nabla v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\int_\Omega \left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla v_1-\nabla v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|\right|_{1,p}^{p'}+\left\|\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|\right|_{1,p}^{p'}=\\
&\leq\left\{\left[\left(\int_\Omega\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\int_\Omega\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}+\right.\\
&\left.+\left[\left(\int_\Omega\left|\frac{\nabla v_1+\nabla v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\int_\Omega\left|\frac{\nabla v_1-\nabla v_2}{2}\right|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\right\}^{\frac{1}{p-1}}\\
&=\left[\left(\left\|\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}+\left\|\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}\right)^{p-1}+\right.\\
&\left.+\left(\left\|\left|\frac{\nabla v_1+\nabla v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}+\left\|\left|\frac{\nabla v_1-\nabla v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Notemos que a desigualdade acima é justificada no Teorema 3.1 (Demonstração). De (3.10) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|\right|_{1,p}^{p'}+\left\|\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|\right|_{1,p}^{p'} &\leq \left[\left(\left\|\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}\right)^{p-1}+\right.\\
&\left.\left(\left\|\left|\frac{\nabla v_1+\nabla v_2}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\nabla v_1-\nabla v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}\\
&= \left[\int_\Omega\left(\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}+\right.\\
&\left.+\int_\Omega\left(\left|\frac{\nabla v_1+\nabla v_2}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\nabla v_1-\nabla v_2}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Agora, por (1.10), temos

$$\begin{aligned}
\left\|\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|\right|_{1,p}^{p'}+\left\|\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|\right|_{1,p}^{p'} &\leq \left[\int_\Omega\frac{1}{2}\left(|v_1|^p+|v_2|^p\right)+\int_\Omega\frac{1}{2}\left(|\nabla v_1|^p+|\nabla v_2|^p\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\\
&= \left(\frac{1}{2}\|\|v_1\|\|_{1,p}^p+\frac{1}{2}\|\|v_2\|\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Para $u,v\in W^{1,p}(\Omega)$ com $\|\|v\|\|_{1,p}=\|\|v\|\|_{1,p}=1$ e $\|\|u-v\|\|_{1,p}\geq\varepsilon$, com $\varepsilon\in(0,2]$ obtemos

$$\left\|\left|\frac{u+v}{2}\right\|\right|_{1,p}^{p'}\leq 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}. \tag{3.12}$$

De (3.9) e (3.12), concluímos que $(W^{1,p}(\Omega),\|\|\cdot\|\|_{1,p})$ é uniformemente convexo. ■

Observação 3.4 *Como* $(W^{1,p}(\Omega),\|\|\cdot\|\|_{1,p})$ *é uiformemente convexo, do* Teorema 0.6 *resulta que ele é reflexivo.*

3.2 O Operador p-laplaciano e a Aplicação Dualidade

Agora, introduzimos o operador p-laplaciano no espaço $W^{1,p}(\Omega)$ enfatizando sua conexão com uma aplicação dualidade. No que diz respeito à aplicação dualidade e as propriedades necessárias para resolvermos o problema em apreço, podemos consultar o Capítulo 1. Como foi mostrado no início deste capítulo, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\ div\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$ e $|\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial n\big|_{\partial\Omega} = 0$, então

$$\int_\Omega -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v, \qquad \text{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Como a integral $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v$ existe para cada $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, podemos definir o operador $-\Delta_p : (W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p}) \to (W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p})^*$ por

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v, \qquad \text{para} \quad u, v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Observamos que se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $-\Delta_p u \in (W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p})^*$. De fato, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} S : W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \langle -\Delta_p u, v\rangle \end{array}$$

é linear e, como para cada $v \in W^{1,p}(\Omega)$, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{array}{rcl} |\langle -\Delta_p u, v\rangle| & = & \left|\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right| \leq \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| \leq \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \|\!|u\|\!|_{1,p}^{p-1}\|\!|v\|\!|_{1,p}\,. \end{array}$$

Logo, $-\Delta_p u \in (W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p})^*$. Seja, agora,

$$J_\varphi : \left(W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p}\right) \to \mathcal{P}\left(W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p}\right)^*$$

a aplicação dualidade correspondente à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$. Pelo Teorema 1.1(iii) temos $J_\varphi(u) = \partial\eta(u)$, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $\eta : (W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p}) \to \mathbb{R}$, é dado por

$$\eta(u) = \int_0^{\|\!|u\|\!|_{1,p}} \varphi(t)dt = \frac{1}{p}\|\!|u\|\!|_{1,p}^p = \frac{1}{p}\|u\|_{0,p}^p + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_{0,p}^p\,.$$

Objetivando a monovalência de J_φ, tendo em vista a Observação 1.1, enunciamos e provamos o

Teorema 3.3 *O funcional η é Gâteaux diferenciável em $(W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p})$ e $\eta'(u) = -\Delta_p u + |u|^{p-2}u$, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Prova. A prova deste resultado segue as mesmas linhas do Teorema 1.6. Mesmo assim, fazemo-la devido às diferenças decorrentes da nova norma. Entretanto, alguns detalhes foram omitidos, pois eles aparecem naquele teorema.

Consideremos os funcionais

$$\widetilde{\eta}_1 : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{\eta}_1(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{0,p}^p = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p,$$

$$\eta_2 : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \eta_2(u)\frac{1}{p}\|\nabla u\|_{0,p}^p = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p, \quad \text{e}$$

$$\eta_1 : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \eta_1 = \widetilde{\eta}_1|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

O funcional $\widetilde{\eta}_1$ é Gâteaux diferenciável em $L^p(\Omega)$ e

$$\langle \widetilde{\eta}_1(u), v\rangle = \langle |u|^{p-1} sgn\, u, v\rangle, \quad \text{para } \; u, v \in L^p(\Omega).$$

Usando a imersão $(W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p}) \to (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{0,p})$ resulta que η_1 é Gâteaux diferenciável em $(W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p})$.

Seja $P : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ o operador definido por $P(u) = |\nabla u|$. Se $u = 0 \in W^{1,p}(\Omega)$, então $\langle \eta_2'(0), v\rangle = 0, \;\; \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega)$.
Se $u \neq 0$, temos

$$\langle P'(u), v\rangle = \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}, \quad \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Por outro lado, o funcional

$$\begin{array}{rcl} P'(u) : W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \langle P'(u), v\rangle \end{array}$$

é linear e

$$|\langle P'(u), v\rangle| = \left|\int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}\right| \leq \int_\Omega |\nabla v| \leq |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K\|\!| v\|\!|_{1,p},$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $K = |\Omega|^{1/p'}$, donde P é Gâteaux diferenciável em u. Como $\eta_2 = \widetilde{\eta}_1 \circ P$, o funcional η_2 é Gâteaux diferenciável em u e

$$\begin{aligned} \langle \eta_2'(u), v\rangle &= \langle \widetilde{\eta}_1'(P(u)), P'(u)v\rangle = \left\langle |\nabla u|^{p-1}, \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}\right\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \langle -\Delta_p u, v\rangle, \qquad \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\eta = \eta_1 + \eta_2$ é Gâteaux diferenciável em $(W^{1,p}(\Omega), \|\!| \cdot \|\!|_{1,p})$ e

$$\langle \eta'(u), v\rangle = \langle -\Delta_p u + |u|^{p-2}u, v\rangle, \quad \forall\, u, v \in W^{1,p}(\Omega),$$

e assim

$$\eta'(u) = -\Delta_p u + |u|^{p-2}u, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

■

Observação 3.5 *Usando a convexidade de η, pelo* Teorema 1.1(iii) *e pela* Observação 1.1, *resulta que J_φ é monovalente e*

$$J_\varphi(u) = \eta'(u) = -\Delta_p u + |u|^{p-2}u, \quad \textit{para} \quad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Realmente, a função η é convexa, pois $\eta_1,\ \eta_2 : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ são funções convexas.

Observação 3.6 *Seja* $\|\cdot\|_*$ *a norma dual de* $\|\cdot\|_{1,p}$. *Então, temos*

$$\|J_\varphi(u)\|_* = \varphi(\|u\|_{1,p}) = \|u\|_{1,p}^{p-1}.$$

Observação 3.7 *Como* $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ *é uniformemente convexo, então é localmente uniformemente convexo, e pela* Proposição 1.4, *a aplicação* J_φ *satisfaz a condição* (S_+).

Já vimos que o funcional η é Gâteaux diferenciável em $W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, temos:

Teorema 3.4 *O funcional* η, *sobre* $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$, *é continuamente Fréchet diferenciável.*

Prova. Definindo uma aplicação g idêntica a do Teorema 1.7 e utilizando a norma $\|\cdot\|_{1,p}$, vemos, de maneira análoga, que g é contínua.

Como o funcional ψ do Teorem 1.7 é de classe C^1, e a lei que define η_2 é a mesma, vemos que $\eta_2 \in C^1\left((W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}), \mathbb{R}\right)$.

Agora, vamos provar que $\eta_1 \in C^1\left((W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}), \mathbb{R}\right)$.
Sejam $u, v, w \in W^{1,p}(\Omega)$ e $p \in (2, \infty)$. Pelo Lema A.1(i) e pela desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}
|\langle \eta_1'(u) - \eta_1'(v), w\rangle| &= \left|\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right) w\right| \leq \int_\Omega \left||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right| |w| \\
&\leq \left(\int_\Omega \left||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |w|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\left(\int_\Omega |u-v|^{p'}(|u|+|v|)^{p'(p-2)}\right)^{\frac{1}{p'}} \|w\|_{1,p}
\end{aligned}$$

Ainda aplicando Hölder, temos

$$\begin{aligned}
|\langle \eta_1'(u) - \eta_1'(v), w\rangle| &\leq C\left(\int_\Omega |u-v|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'(p-1)}} \left(\int_\Omega (|u|+|v|)^{p'(p-2)\frac{p-1}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p'(p-1)}} \|w\|_{1,p} \\
&= C\left(\int_\Omega |u-v|^{p)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (|u|+|v|)^p\right)^{\frac{p-2}{p}} \|w\|_{1,p} \\
&\leq C\|u-v\|_{1,p} \||u|+|v|\|_{0,p}^{p-2} \|w\|_{1,p}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Agora, se $p \in (1, 2]$, usando o Lema A.1(ii), temos

$$\begin{aligned}
|\langle \eta_1'(u) - \eta_1'(v), w\rangle| &\leq \int_\Omega \left||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right| |w| \\
&\leq C_1\left(\int_\Omega |u-v|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'}} \|w\|_{1,p} = C_1\|u-v\|_{0,p}^{p-1}\|w\|_{1,p} \\
&\leq C_1\|u-v\|_{1,p}^{p-1}\|w\|_{1,p}, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

com $C, C_1 > 0$ constantes independentes de u, v e w. De (3.13) e (3.14) segue que $\eta_1 \in C^1\left((W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}), \mathbb{R}\right)$.

Conseqüentemente, $\eta = \eta_1 + \eta_2 \in C^1\left((W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}), \mathbb{R}\right)$ e assim, η é continuamente Fréchet diferenciável em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. ■

3.3 Existência de Resultados para o Problema (3.1), (3.2)

A partir de agora, consideramos o Problema (3.1), (3.2) onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz a condição de crescimento (2.4).

No que segue, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ será considerado munido da norma $\|\cdot\|_{1,p}$.

Definição 3.1 **(i)** *Um elemento $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é dito uma solução clássica para o* Problema (3.1), (3.2) *se*

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x,u) \quad em \quad \Omega$$

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega.$$

(ii) *Um elemento $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é dito uma solução fraca para o* Problema (3.1), (3.2) *se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_\Omega |u|^{p-2}uv = \int_\Omega f(x,u)v \qquad para \quad v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.15}$$

Notamos que para $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, a condição de crescimento (2.4) e a imersão $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, implicam que a integral $\int_\Omega f(x,u)v$ existe. Observamos, também, que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica, então é uma solução fraca e se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ então u é uma solução clássica.

Provemos o seguinte resultado de regularidade:

Proposição 3.1 *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca e, além disso, $\Delta_p u \in L^{p'}(\Omega)$, então u satisfaz*

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x,u) \qquad para \quad x \in \Omega;$$

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad em \quad W^{-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega).$$

Prova. Provemos a primeira destas igualdades. Como u é uma solução fraca, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_\Omega |u|^{p-2}uv = \int_\Omega f(x,u)v \quad \text{para } v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Usando a relação (3.3), obemos

$$\left\langle |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} \right\rangle = -\int_\Omega |u|^{p-2}uv + \int_\Omega f(x,u)v + \int_\Omega (\Delta_p u)v$$

para $v \in W^{1,p}(\Omega)$, e daí,

$$\int_\Omega \left(-\Delta_p u + |u|^{p-2}u - f(x,u)\right)v = -\left\langle |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} \right\rangle. \tag{3.16}$$

Para $v \in C_0^1(\Omega)$, por (3.16) obtemos

$$\int_\Omega \left(-\Delta_p u + |u|^{p-2}u - f(x,u)\right)v = 0 \qquad \text{para} \quad v \in C_0^1(\Omega),$$

que implica

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x,u) \qquad \text{para} \quad x \in \Omega. \tag{3.17}$$

Vamos provar, agora, a outra igualdade. Usando a relação (3.17) em (3.16), resulta

$$\left\langle |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} \right\rangle = 0 \qquad \text{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Como a aplicação traço

$$\begin{array}{rcl} T : W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \\ v & \longmapsto & v|_{\partial\Omega} \end{array}$$

é sobrejetiva, segue-se

$$\left\langle |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}, \varphi \right\rangle = 0, \qquad \forall\, \varphi \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

ou seja

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \text{em} \quad \left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)\right)^* = W^{-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega).$$

■

Daqui em diante, uma solução do Problema (3.1), (3.2) é uma solução fraca. Usando operadores, o Problema (3.1), (3.2) tem a forma

$$J_\varphi(u) = N_f(u), \tag{3.18}$$

onde J_φ é a aplicação dualidade sobre $W^{1,p}(\Omega)$ correspondente à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$, dada por $J_\varphi(u) = -\Delta_p u + |u|^{p-2}u$, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e N_f é o operador de Nemytskii de f, ou seja, $(N_f(u))(x) = f(x, u(x))$, para $x \in \Omega$. A igualdade (3.18) deve ser vista no sentido de $(W^{1,p}(\Omega))^*$, isto é,

$$\langle J_\varphi(u), v\rangle = \langle N_f(u), v\rangle \qquad \text{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega),$$

que é

$$\langle -\Delta_p u + |u|^{p-2}u, v\rangle = \langle N_f(u), v\rangle \qquad \text{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega)$$

ou, equivalentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_\Omega |u|^{p-2}uv = \int_\Omega f(x,u)v \qquad \text{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Os métodos e as hipóteses que serão usados, em seguida, são inspirados no problema de Dirichlet com o p-laplaciano, tendo em vista a analogia apresentada na introdução a este capítulo.

3.4 Existência de Solução Usando um Teorema de Ponto Fixo

A restrição $1 < q < p^*$ assegura que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ seja compacta. Portanto, o diagrama

$$W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{i} L^q(\Omega) \xrightarrow{N_f} L^{q'}(\Omega) \xrightarrow{i^*} \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^*$$

mostra que N_f (significando $i^* \circ N_f \circ i$) é compacto.

Pelo Teorema 1.4, o operador $J_\varphi : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$ é bijetivo, com seu inverso J_φ^{-1} limitado, contínuo e monótono. Conseqüentemente, (3.18) pode ser, equivalentemente, escrito

$$u = \left(J_\varphi^{-1}\right) N_f(u)$$

com $J_\varphi^{-1} N_f : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ um operador compacto.

De maneira perfeitamente análoga ao Teorema 2.1, temos

Teorema 3.5 *Se a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz* (2.4) *com $q \in (1, p)$, então o operador $\left(J_\varphi^{-1}\right) N_f$ tem uma ponto fixo em $W^{1,p}(\Omega)$ ou, equivalentemente, o problema* (3.1), (3.2) *tem solução. Além disso, o conjunto das soluções é limitado em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Prova. Definimos o operador $T = J_\varphi^{-1} N_f$ e provamos que ele tem, pelo menos, um ponto fixo, usando um método de estimativa a priori. Para isto é suficiente mostrarmos que o conjunto

$$S = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u = \alpha T(u) \quad \text{para algum} \quad \alpha \in [0, 1]\}$$

é limitado em $W^{1,p}(\Omega)$. De (2.4), para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_{1,p}^p &= \langle J_\varphi(T(u)), T(u)\rangle = \langle N_f(u), T(u)\rangle = \int_\Omega f(x, u)T(u) \\ &\leq \int_\Omega \left(C|u|^{q-1} + |b|\right) |T(u)|. \end{aligned}$$

Se $u \in S$, isto é, $u = \alpha T(u)$ com $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_{1,p}^p &\leq \int_\Omega \left(C|u|^{q-1} + |b|\right) |T(u)| = \int_\Omega \left(C\alpha^{q-1}|T(u)|^{q-1} + |b|\right) |T(u)| \\ &\leq C\alpha^{q-1}\|T(u)\|_{0,q}^q + \|b\|_{0,q'}\|T(u)\|_{0,q} \leq C\|T(u)\|_{0,q}^q + \|b\|_{0,q'}\|T(u)\|_{0,q} \\ &\leq CC_1^q\|T(u)\|_{1,p}^q + C_1\|b\|_{0,q'}\|T(u)\|_{1,p}\,, \end{aligned}$$

sendo que a constante C_1 veio da imersão contínua $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Conseqüentemente, para cada $u \in S$ vale

$$\|T(u)\|_{1,p}^p - C_2\|T(u)\|_{1,p}^q - C_3\|T(u)\|_{1,p} \leq 0,$$

com C_2, C_3 constantes positivas. Observamos que se $q \in (1, p)$ então, pela desigualdade acima, existe uma constante $a > 0$ tal que $\|T(u)\|_{1,p} \leq a$ para $u \in S$ e então $\|u\|_{1,p} = \alpha\|T(u)\|_{1,p} \leq \alpha a \leq a$ para $u \in S$, isto é, S é limitado. ■

3.5 Existência de Solução via Minimização

Na presente seção, como também, na próxima, usamos métodos variacionais para encontrarmos resultados de existência para o Problema (3.1), (3.2). Aqui, provamos um resultado semelhante ao Teorema 0.1.

Teorema 3.6 *Suponhamos que a função de Carathéodory* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaça a condição de crescimento* (2.4) *com* $1 < q < p$. *Então o* Problema (3.1), (3.2) *tem pelo menos uma solução* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prova. Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, usando a Proposição 2.3, temos

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - C_1\|u\|_{0,q}^q - \int_\Omega c(x).$$

Pela imersão $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, resulta

$$\mathcal{F}(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - C_2\|u\|_{1,p}^q - C_3,$$

onde C_2, C_3 são constantes positivas. Como $p > q > 1$, então $\mathcal{F}$ é coercivo e limitado por baixo em $W^{1,p}(\Omega)$. Seja $l = \inf_{W^{1,p}(\Omega)} \mathcal{F}$ e $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ tal que $\mathcal{F}(u_n) \to l$. Como $\mathcal{F}$ é coercivo, temos que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, e pela reflexividade de $W^{1,p}(\Omega)$, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Já que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é compacta, segue que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$. Novamente,

$$\mathcal{F}(u) = \eta(u) - \phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u).$$

Como η é C_1 em $W^{1,p}(\Omega)$ e é convexo, então é fracamente semicontínuo inferiormente (Lema 0.1). Então, $\liminf_{n\to\infty} \eta(u_n) \geq \eta(u)$. Pela continuidade de ϕ em $L^q(\Omega)$, temos $\phi(u_n) \to \phi(u)$ e então

$$l = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \eta(u_n) - \phi(u) \geq \eta(u) - \phi(u) = \mathcal{F}(u) \geq l$$

que implica $\mathcal{F}(u) = l$.

Conseqüentemente, u é um ponto mínimo de $\mathcal{F}$ e como $\mathcal{F}$ é diferenciável, segue que u é um ponto crítico. Logo, u é uma solução do Problema (3.1), (3.2). ∎

Observação 3.8 *Uma outra prova do* Teorema 3.6 *pode ser dada usando o resultado do tipo-Fredholm lembrado no* Teorema A.1.

De fato, escolhamos $X = W^{1,p}(\Omega)$, $Y = (W^{1,p}(\Omega))^*$, $T = J_\varphi(\Omega)$, $S = N_f$ *(ou seja,* $i^* \circ N_f \circ i : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$*). Como a imersão* $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *é compacta, então* N_f *é compacta. Pelo* Teorema 1.4, T *é bijetivo e* T^{-1} *é contínuo. Para* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *temos*

$$\begin{aligned} \|\lambda J_\varphi(u) - N_f(u)\|_* &\geq \|\lambda J_\varphi\|_* - \|N_f(u)\|_* \geq |\lambda|\|u\|_{1,p}^{p-1} - C\|u\|_{0,q}^{q-1} - C_1 \\ &\geq |\lambda|\|u\|_{1,p}^{p-1} - C_2\|u\|_{1,p}^{q-1} - C_1 \to \infty, \end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,p} \to \infty$, *pois* $p > q > 1$.

Para verificarmos a hipótese (iv) *usamos a* Observação A.1, *com* $\lambda = 1$, *seguida dos cálculos usados na* Seção 3.4.

3.6 Existência de Solução Usando o Teorema do Passo da Montanha

Na presente seção, ainda supomos que a função de Carathéodory f satisfaz a condição de crescimento (2.4).

Seja $\phi : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por $\phi(u) = \int_\Omega F(x,u)$, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$. Analogamente ao que foi feito para o problema de Dirichlet (ver Observação 3.3), o funcional $\mathcal{F} : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}(u) = \eta(u) - \phi(u) = \frac{1}{p}|||u|||_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,s)$$

é de classe C^1 em $W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\mathcal{F}'(u) = \eta'(u) - \phi'(u) = -\Delta_p u + |u|^{p-2}u - N_f(u).$$

A busca de solução para o Problema (3.1), (3.2) está, agora, reduzida à busca de pontos críticos de $\mathcal{F}$, isto é, daquelas funções $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que $\mathcal{F}'(u) = 0$. Para isto, usamos o Teorema do Passo da Montanha. Primeiro estabelecemos alguns resultados preliminares, cujas demonstrações - as análogas - vimos no tratamento do problema com condição de fronteira de Dirichlet homogênea.

Proposição 3.2 *Se $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitada e $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, então (u_n) possui uma subseqüência convergente.*

Teorema 3.7 *Suponhamos que existam $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$\theta F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \ \ |s| \geq s_0 \tag{3.19}$$

então $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (PS).

Teorema 3.8 *Suponhamos que ocorra uma das alternativas:*

(i) *existem números $\theta > p$ e $s_1 > 0$ tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \ \ s \geq s_1, \tag{3.20}$$

ou

(ii) *existem números $\theta > \rho$ e $s_1 < 0$ tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \ \ s \leq s_1. \tag{3.21}$$

Então $\mathcal{F}$ é ilimitado por baixo.

Observação 3.9 *Pelo* Teorema 3.8, *como $\mathcal{F}$ é ilimitada por baixo, para cada $\rho > 0$ existe $e \in W^{1,p}(\Omega)$ com $|||e|||_{1,p} > \rho$ tal que $\mathcal{F}(e) \leq 0$ (ver* Observação 2.8*).*

Teorema 3.9 *Suponhamos que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça:*

(i) *existe* $q \in (1, p^*)$ *tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1}+1) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \ \ s \in \mathbb{R},$$

onde C *é uma constante não negativa;*

(ii)

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \bar{\lambda}_1 \qquad \textit{uniformemente com } x \in \Omega$$

onde $\bar{\lambda}_1 = \inf\left\{ \|\!|v|\!\|_{1,p}^p / \|v\|_{0,p}^p : v \in W^{1,p}(\Omega), v \neq 0 \right\}$.

Então existem constantes $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\mathcal{F}|_{\|\!|u|\!\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$.

Agora, estamos em posição de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.10 *Suponhamos* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de Carathéodory e que satisfaça:*

(i) *existe* $q \in (1, p^*)$ *tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1}+1) \qquad \textit{para} \quad x \in \Omega, \ \ s \in \mathbb{R},$$

onde C *é uma constante não negativa;*

(ii)

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \bar{\lambda}_1 \qquad \textit{uniformente com } x \in \Omega$$

onde $\bar{\lambda}_1 = \inf\left\{ \|\!|v|\!\|_{1,p}^p / \|v\|_{0,p}^p : v \in W^{1,p}(\Omega), v \neq 0 \right\}$;

(iii) *existem constantes* $\theta > p$ *e* $s_0 > 0$ *tais que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \textit{para } x \in \Omega, \ \ |s| \geq s_0.$$

Então o Problema (3.1), (3.2) *tem pelo menos uma solução não trivial* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prova. É suficiente mostrarmos que $\mathcal{F}$ tem pelo menos um ponto crítico não trivial $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Para isto usamos o Teorema 2.3.

Claramente, $\mathcal{F}(0) = 0$.

De (i), (iii) e do Teorema 3.7, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (PS). Além disso, por (i), (ii) e pelo Teorema 3.9, existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\mathcal{F}|_{\|\!|u|\!\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$.

Finalmente, de (i), (iii) e do Teorema 3.8 (ver também a Observação 3.9), existe um elemento $e \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|\!|e|\!\|_{1,p} > \rho$ tal que $\mathcal{F}(e) \leq 0$ e a prova está completa. ■

Observação 3.10 *A vantagem de usarmos o teorema do Passo da Montanha para provarmos a existência de solução para o* Problema (3.1), (3.2) *é dada pelo fato de que mostramos sua não trivialidade.*

Observamos, ainda, que no caso particular de ser $f(x,0) \neq 0$, *resulta que* $u = 0$ *não é uma solução; portanto, a existência de solução não nula para o* Problema (3.1), (3.2) *é provada pelos* Teoremas 3.5 *e* 3.6.

Observação 3.11 *Se em adição às hipóteses do* Teorema 3.10*, f é ímpar no segundo argumento: $f(x,-s) = -f(x,s)$ para $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, então o* Problema (3.1), (3.2) *tem uma infinidade de soluções em $W^{1,p}(\Omega)$. Este fato segue as mesmas linhas da prova do* Teorema 2.9*, sendo que a* Proposição 2.4*, lá usada, deve ser adaptada para o novo funcional $(\mathcal{F})$.*

Observação 3.12 *Se a função f não é mais uma função de Carathéodory, mas é mensurável sobre $\Omega \times \mathbb{R}$, então o problema de Neumann com o p-laplaciano tem a seguinte forma:*

$$(\mathcal{P}_m) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \in [\underline{f}(x,u), \overline{f}(x,u)] & \textit{em} \quad \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega; \end{cases}$$

e chamamo-lo de problema Neumann multivalente.

Devemos notar que

$$\underline{f}(x,u) = \lim_{\varepsilon \to 0+} ess\, inf\{f(x,t) : |t-1| < \varepsilon\},$$

$$\overline{f}(x,u) = \lim_{\varepsilon \to 0+} ess\, sup\{f(x,t) : |t-1| < \varepsilon\}.$$

Supomos que as funções $\underline{f}$, $\overline{f}$ são N-mensuráveis, significando que as aplicações $x \mapsto \underline{f}(x,u(x))$, $x \mapsto \overline{f}(x,u(x))$ são mensuráveis, para todo $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável.

Um elemento $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução do problema $(\mathcal{P}_m)$ se existe $w \in L^{q'}(\Omega)$ tal que

$$w(x) \in [\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))] \quad \textit{para} \quad x \in \Omega \quad \textit{e}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_\Omega |u|^{p-2}uv = \int_\Omega wv \quad \textit{para} \quad v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Usando uma variante não suave do Teorema do Passo da Montanha (ver Chang-[8]) *foi mostrado em* Cringanu-[11] *que o* problema $(\mathcal{P}_m)$ *tem pelo menos uma solução não trivial $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Capítulo 4

Problemas Elípticos Não Variacionais

Neste capítulo, consideramos um problema do tipo:

$$(\mathcal{P}_b) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + \vec{b} \cdot \nabla u = f(u), \\ u \in C_0^1(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado de classe $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$, Δ_p é o operador p-laplaciano com $1 < p < +\infty$, $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$ com $div(\vec{b}) \leq 0$ e $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é uma função contínua satisfazendo a condição de crescimento

$$\exists\, C_0, C_1 > 0 \text{ tais que } C_0|u|^q \leq f(u) \leq C_1|u|^q, \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \tag{4.1}$$

para algum $q > \max\{p-1, 1/(p-1)\}$ se $\vec{b} \neq 0$ (e $q > p-1$ se $\vec{b} = 0$).

Devido as características do operador $Lu = -\Delta_p u + \vec{b} \cdot \nabla u$, utilizamos técnicas não variacionais; começamos, então, introduzindo um parâmetro real $t \geq 0$ para podermos falar em um contínuo de soluções, e consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \vec{b} \cdot \nabla u = f(u+t), \\ u \in C_0^1(\overline{\Omega}), \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Daí, usamos o método de estimativa a priori para provarmos a existência de soluções positivas para o problema $(\mathcal{P}_b)$

4.1 Propriedades do Operador L

Na presente seção, estudamos algumas propriedades do operador $Lu = -\Delta_p u + \vec{b} \cdot \nabla u$; em particular, sua inversibilidade e algumas propriedades do seu inverso. Isto está contido no Teorema 4.1. Antes de enunciá-lo, porém, necessitamos de alguns resultados. São as duas proposições seguintes.

Destaquemos, antes de tudo, a seguinte

Definição 4.1 *Entendemos como soluções de* (4.2) *as funções u satisfazendo*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega \vec{b} \cdot \nabla u \varphi = \int_\Omega f(u+t)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \\ u \in C_0^1(\overline{\Omega}), \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Proposição 4.1 (*Estimativa L^∞*). *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e u satisfazendo*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u\varphi = \int_\Omega f(u)\varphi, \quad \forall\,\varphi\in C_c^\infty(\Omega), \\ u\in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $\vec{b}\in C^1(\overline{\Omega})$ com $div(\vec{b})\leq 0$, e f é uma função contínua para a qual existem duas constantes a e b tais que

$$|f(u)|\leq a|u|^q+b, \qquad \forall\, u\in\mathbb{R} \tag{4.5}$$

com $0<q<Np/(N-p)-1$ se $p<N$, $q<\infty$ se $p\geq N$. Então $u\in L^\infty(\Omega)$ e existe uma constante $C>0$ dependendo de p,N,Ω,a,b,q e de $\|u\|_{1,p}$ (mas não depende de $\vec{b}$), tal que $\|u\|_\infty\leq C$.

Para provarmos esta proposição, necessitamos, inicialmente, de dois lemas.

Lema 4.1 *Sob as hipóteses da* Proposição 4.1*, $u_n\in L^{p_n}(\Omega)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, onde p_n é definido por*

$$p_0=\begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & se \quad p<N, \\ 2\max\{p,q+1\}, & se \quad p\geq N, \end{cases} \tag{4.6}$$

e por recorrência,

$$p_{n+1}=p_0+\frac{p_0}{p}(p_n-q-1). \tag{4.7}$$

Prova. Vamos provar este resultado por indução sobre n. Pelo Teorema 0.15, $u\in L^{p_0}(\Omega)$. Suponhamos que $u\in L^{p_n}(\Omega)$ para $n\in\mathbb{N}$ fixado e mostremos que $u\in L^{p_{n+1}}(\Omega)$. Consideremos a seqüência (v_n) definida por

$$v_k(x)=\begin{cases} k, & \text{se} \quad u(x)\geq k, \\ u(x), & \text{se} \quad -k\leq u(x)\leq k, \\ -k, & \text{se} \quad u(x)\leq -k. \end{cases}$$

Definamos $\alpha:=p(p_{n+1}-p_0)/p_0$. Como $v_k\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, a Proposição A.1 assegura que $|v_k|\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Daí, multiplicando $|v_k|$ várias vezes, obtemos que $|v_k|^\lambda\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, onde $\lambda>\alpha$ (cf. Brezis-[7], Proposição IX.4). Desde que $\lambda>\alpha$ e Ω é limitado, temos $|v_k|^\alpha\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Logo, $|v_k|^\alpha v_k\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Pela definição de $W_0^{1,p}(\Omega)$, existe uma seqüência $(\varphi_n)\subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n\to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Tomando as funções lipschitzianas $g_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por

$$g_k(x)=\begin{cases} k, & \text{se} \quad x\geq k, \\ x, & \text{se} \quad -k\leq x\leq k, \\ -k, & \text{se} \quad x\leq -k, \end{cases}$$

temos, para todo k fixado e $n\to\infty$, que $\psi_{n,k}:=|g_k(\varphi_n)|^\alpha g_k(\varphi_n)\to|v_k|^\alpha v_k$ em $L^s(\Omega)$, para todo $s\in(1,\infty)$, pois g_k é limitada, e Ω sendo limitado implica que $L^\infty\subset L^s(\Omega)$ para todo $s\in(1,\infty)$. Além disso, a convergência ocorre, também, em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, de g_k ser lipschitziana e $\varphi_n\to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |g_k(\varphi_n(x))-g_k(u(x))|^p\leq\int_\Omega C^p|\varphi_n(x)-u(x)|^p\to 0;$$

ou seja,

$$g_k(\varphi_n) \to g_k(u) = v_k \text{ em } L^p(\Omega).$$

Assim, $|g_k(\varphi_n)|^\alpha g_k(\varphi_n) \to |v_k|^\alpha v_k$ em $L^p(\Omega)$. Mostremos que $\|\nabla\psi_{n,k} - \nabla(|v_k|^\alpha v_k)\|_{0,p} \to 0$. Do cálculo, segue-se

$$\nabla(|v_k|^\alpha v_k) = \alpha|v_k|^{\alpha-1}\frac{v_k}{|v_k|}\nabla v_k v_k + |v_k|^\alpha \nabla v_k = (\alpha+1)|v_k|^\alpha \nabla v_k,$$

e da mesma forma:

$$\nabla\psi_{n,k} = (\alpha+1)|g_k(\varphi_n)|^\alpha \nabla g_k(\varphi_n).$$

Notemos que se $v_k \neq u$, então $\nabla v_k = 0$. E,

$$\nabla(g_k(\varphi_n)) = g_k'(\varphi_n)\nabla\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{se } |\varphi_n(x)| \geq k, \\ \nabla\varphi_n, & \text{se } |\varphi_n(x)| \leq k. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\nabla(|g_k(\varphi_n)|^\alpha g_k(\varphi_n)) - |v_k|^\alpha v_k\|_{0,p}^p &= (\alpha+1)^p \int_\Omega ||g_k(\varphi_n)|^\alpha \nabla g_k(\varphi_n) - |v_k|^\alpha \nabla v_k|^p \\ &= (\alpha+1)^p \int_{|\varphi_n(x)|\leq k} ||\varphi_n|^\alpha \nabla\varphi_n - |v_k|^\alpha \nabla v_k|^p \\ &\quad + (\alpha+1)^p \int_{|\varphi_n(x)|\geq k} |0 - |v_k|^\alpha \nabla v_k|^p. \end{aligned}$$

Como $\varphi_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi_n(x) \to u(x)$ *q.t.p.* em Ω. Logo, se $|\varphi_n(x)| \geq k$, então $|u(x)| \geq k$. Daí, $v_k = k$, que nos dá $\nabla v_k = 0$. Analogamente, $|\varphi_n(x)| \leq k$ implica $|u(x)| \leq k$; donde $u = v_k$. Assim, temos

$$\|\nabla(|g_k(\varphi_n)|^\alpha g_k(\varphi_n)) - |v_k|^\alpha v_k\|_{0,p}^p = (\alpha+1)^p \int_{|\varphi_n(x)|\leq k} ||\varphi_n|^\alpha \nabla\varphi_n - |u|^\alpha \nabla u|^p.$$

De $\varphi_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ resulta, também, que $\nabla\varphi_n(x) \to \nabla u(x)$ *q.t.p.* em Ω. Daí, $|\varphi_n(x)|^\alpha \nabla\varphi_n(x) \to |u(x)|^\alpha \nabla u(x)$ *q.t.p.* em Ω. Além disso, de $\varphi_n, \nabla\varphi_n \in C_c^\infty$ segue que $\varphi_n, \nabla\varphi_n \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; daí, $|\varphi_n|^\alpha \nabla\varphi_n \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Como k majora φ_n para todo n, existe um $M > 0$ tal que

$$||\varphi_n(x)|^\alpha \nabla\varphi_n(x)| \leq M. \tag{4.8}$$

Tomando o limite em (4.8), obtemos $|u(x)|^\alpha \nabla u(x) \leq M$; e como Ω é limitado, $h = M^p \in L^1(\Omega)$. Logo,

$$||\varphi_n(x)|^\alpha \nabla\varphi_n(x) - |u(x)|^\alpha \nabla u(x)|^p \leq (||\varphi_n(x)|^\alpha \nabla\varphi_n(x)| + ||u(x)|^\alpha \nabla u(x)|)^p \leq 2^p h(x).$$

Assim, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\|\nabla\psi_{n,k} - \nabla(|v_k|^\alpha v_k)\|_{0,p}^p = (\alpha+1)^p \int_{|\varphi_n(x)|\leq k} ||\varphi_n(x)|^\alpha \nabla\varphi_n(x) - |u(x)|^\alpha \nabla u(x)|^p \to 0$$

conclui a convergência em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como as funções $\psi_{n,k}$ têm suporte compacto e pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$, então pelos Teoremas 0.10 e 0.12, suas regularizações estão em $C_c^\infty(\Omega)$ e convergem a elas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ (Teorema 0.11) e, pelo Teorema 0.13, convergem em $L^s(\Omega)$ para todo $s \in (1,\infty)$. Passando ao limite em (4.4) com φ igual a estas regularizações, para n e k fixos, obtemos (4.4) com $\varphi = \psi_{n,k}$. Mantendo k fixo e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(|v_k|^\alpha v_k) + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u |v_k|^\alpha v_k = \int_\Omega f(u)|v_k|^\alpha v_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Afirmação 4.1 *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *e* $\varphi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *é tal que* $\nabla\varphi_0 \equiv 0$ *sobre* $\{x \in \Omega : |u(x) > k\}$, *então*

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u\varphi_0 = -\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla\varphi_0 u - \int_\Omega div(\vec{b})\varphi_0 u.$$

Demonstração: Tomemos $S \in W^{-1,p'}(\Omega)$ definido por

$$S : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} : \psi \to \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla\psi\varphi_0, \qquad \forall\, \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Então, para todo $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos $\langle S,\psi\rangle = -\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla\varphi_0\psi - \int_\Omega div(\vec{b})\varphi_0\psi$. De fato, tomemos uma seqüência $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ convergindo em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para φ_0 (por densidade). Integrando por partes, vem

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla\psi\varphi_n &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega (b^i\varphi_n)\psi_{x_i} = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega (b^i\varphi_n)_{x_i}\psi \\
&= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i(\varphi_n)_{x_i}\psi - \sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i_{x_i}\varphi_n\psi \\
&= -\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla\varphi_n\psi - \int_\Omega div(\vec{b})\varphi_n\psi.
\end{aligned}$$

Assim, S como um elemento do espaço das distribuições $\mathcal{D}'$ é representado pela função $-\vec{b}\cdot\nabla\varphi_0 - div(\vec{b})\varphi_0 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Desde que $\vec{b}\cdot\nabla\varphi_0 u + div(\vec{b})\varphi_0 u \in L^1(\Omega)$, o Teorema 0.9 implica

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u\varphi_0 = \langle S,u\rangle = -\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla\varphi_0 u - \int_\Omega div(\vec{b})\varphi_0 u,$$

como afirmamos. ■

Em particular, obtemos:

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u|v_k|^\alpha v_k = -\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(|v_k|^\alpha v_k)u - \int_\Omega div(\vec{b})|v_k|^\alpha v_k u \tag{4.10}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(|v_k|^\alpha v_k)v_k &= \int_\Omega \vec{b}\left(\alpha|v_k|^{\alpha-1}\frac{v_k}{|v_k|}\nabla v_k v_k + |v_k|^\alpha\nabla v_k\right)v_k \\
&= \int_\Omega \vec{b}\left(\alpha|v_k|^\alpha\nabla v_k + |v_k|^\alpha\nabla v_k\right)v_k = \int_\Omega (\alpha+1)\vec{b}v_k|v_k|^\alpha\nabla v_k \\
&= \int_\Omega \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\vec{b}(\alpha+2)\frac{v_k}{|v_k|}|v_k|^{\alpha+1}\nabla v_k = \int_\Omega \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\vec{b}\cdot\nabla(|v_k|^{\alpha+2}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, onde v_k é constante, temos $\nabla v_k = 0$; daí,

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(|v_k|^\alpha v_k)u = \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(|v_k|^\alpha v_k)v_k$$

e, assim, por (4.10), obtemos

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u|v_k|^\alpha v_k = -\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(|v_k|^{\alpha+2}) - \int_\Omega div(\vec{b})|v_k|^\alpha v_k u. \tag{4.11}$$

Tomando uma seqüência $(\varphi_{n,k}) \subset C_c^\infty(\Omega)$ convergindo para $|v_k|^{\alpha+2}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ quando $n \to \infty$ [desde que $|v_k|^\alpha v_k,\ v_k \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, a Proposição IX.4 do Brezis-[7] implica que $|v_k|^{\alpha+2} = |v_k|^\alpha v_k \cdot v_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$], obtemos

$$-\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(|\varphi_{n,k}|^{\alpha+2}) = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i|\varphi_{n,k}|^{\alpha+2}_{x_i} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i_{x_i}|\varphi_{n,k}|^{\alpha+2} = \int_\Omega div(\vec{b})|\varphi_{n,k}|^{\alpha+2}.$$

E daí,

$$-\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(|v_k|^{\alpha+2}) = \int_\Omega div(\vec{b})|v_k|^{\alpha+2}.$$

Portanto, usando (4.11), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u|v_k|^\alpha v_k &= \int_\Omega div(\vec{b})\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}|v_k|^{\alpha+2} - |v_k|^\alpha v_k u\right)\\
&= \int_\Omega div(\vec{b})\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}|v_k|^{\alpha+2} - |v_k|^\alpha |v_k u|\right)\\
&= \int_\Omega div(\vec{b})|v_k|^{\alpha+1}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}|v_k| - |u|\right)\\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

já que $v_k u \geq 0,\ div(\vec{b}) \leq 0$ e $|v_k| \leq |u|$ $q.t.p.$ em Ω. Com um cálculo direto, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{\alpha+p}\right)^p \int_\Omega |\nabla(|v_k|^{\frac{\alpha}{p}} v_k)|^p &= \left(\frac{p}{\alpha+p}\right)^p \int_\Omega \left|\frac{\alpha}{p}|v_k|^{\frac{\alpha}{p}-1}\frac{v_k}{|v_k|}\nabla v_k v_k + |v_k|^{\frac{\alpha}{p}}\nabla v_k\right|^p\\
&= \int_\Omega \left|\left(\frac{p}{\alpha+p}\right)\frac{\alpha}{p}|v_k|^{\frac{\alpha}{p}}\nabla v_k + \frac{p}{\alpha+p}|v_k|^{\frac{\alpha}{p}}\nabla v_k\right|^p\\
&= \int_\Omega |\nabla v_k|^p|v_k|^\alpha.
\end{aligned}$$

Igualmente simples, temos

$$\begin{aligned}
(\alpha+1)\int_\Omega |\nabla v_k|^p|v_k|^\alpha &= \int_\Omega |\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k(\alpha+1)\nabla v_k|v_k|^\alpha\\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(|v_k|^\alpha v_k).
\end{aligned}$$

Assim, devido a (4.12), usando (4.9) e (4.5), obtemos

$$
\begin{aligned}
(\alpha+1)\int_\Omega |\nabla v_k|^p |v_k|^\alpha &\leq \int_\Omega f(u)|v_k|^\alpha v_k \leq \int_\Omega (a|u|^q+b)|v_k|^\alpha v_k \\
&\leq \int_\Omega (a|u|^q+b)|u|^\alpha |u| = \int_\Omega a|u|^{q+\alpha+1}+b|u|^{\alpha+1} \qquad (4.13)\\
&= \int_\Omega a|u|^{p_n} + b\left(\int_\Omega |u|^{(\alpha+1)\frac{p_n}{\alpha+1}}\right)^{\frac{\alpha+1}{p_n}}\left(\int_\Omega 1^{\frac{p_n}{p_n-\alpha-1}}\right)^{\frac{p_n-\alpha-1}{p_n}} \\
&\leq a\|u\|_{0,p_n}^{p_n} + b\|u\|_{0,p_n}^{\alpha+1}|\Omega|^{\frac{q}{p_n}}.
\end{aligned}
$$

Se $\|u\|_{0,p_n} \geq 1$, temos

$$
a\|u\|_{0,p_n}^{p_n} + b\|u\|_{0,p_n}^{\alpha+1}|\Omega|^{\frac{q}{p_n}} \leq a\|u\|_{0,p_n}^{p_n} + b|\Omega|^{\frac{q}{p_n}}\|u\|_{0,p_n}^{p_n} \leq A(\|u\|_{0,p_n}^{p_n}+1).
$$

Se $\|u\|_{0,p_n} < 1$, temos

$$
a\|u\|_{0,p_n}^{p_n} + b\|u\|_{0,p_n}^{\alpha+1}|\Omega|^{\frac{q}{p_n}} \leq a\|u\|_{0,p_n}^{p_n} + b|\Omega|^{\frac{q}{p_n}} \leq A(\|u\|_{0,p_n}^{p_n}+1),
$$

onde $A = \max\{a, |\Omega|^{q/p_n}\}$. Assim,

$$
(\alpha+1)\int_\Omega |\nabla v_k|^p|v_k|^\alpha \leq A(\|u\|_{0,p_n}^{p_n}+1).
$$

Por outro lado, $\|v\|_{0,p_0} \leq K\|v\|_{1,p}$ implica $\int_\Omega |\nabla u|^p \geq K^{-p}\left(\int_\Omega |v|^{p_0}\right)^{p/p_0}$. Daí, tomando $v := |v_k|^{\alpha/p}v_k$, obtemos

$$
\left(\frac{p}{\alpha+p}\right)^p(\alpha+1)\int_\Omega |\nabla(|v_k|^{\alpha/p}v_k)|^p \geq K^{-p}\left(\frac{p}{\alpha+p}\right)^p\|v_k\|_{0,p_0(\alpha+p)/p}^{\alpha+p}.
$$

Logo, temos

$$
\|v_k\|_{0,p_0(\alpha+p)/p}^{\alpha+p} \leq K^p\left(\frac{\alpha+p}{p}\right)^p A(\|u\|_{0,p_n}^{p_n}+1) = A'p_{n+1}^p(\|u\|_{0,p_n}^{p_n}+1),
$$

com $A' = A(K/p_0)^p$. Ou seja,

$$
\|v_k\|_{0,p_{n+1}}^{pp_{n+1}/p_0} \leq A'p_{n+1}^p(\|u\|_{0,p_n}^{p_n}+1).
$$

Então, como (v_k) converge para u q.t.p. em Ω, pelo lema de Fatou, temos

$$
\|u\|_{0,p_{n+1}}^{pp_{n+1}/p_0} \leq \liminf_{k\to\infty}(\|v_k\|_{0,p_{n+1}}^{pp_{n+1}/p_0}) \leq A'p_{p_{n+1}}^p(\|u\|_{0,p_n}^{p_n}+1). \qquad (4.14)
$$

Assim, $u \in L^{p_{n+1}}(\Omega)$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema 4.2 *Com as hipóteses da* Proposição 4.1*,* $u \in L^{q_n}(\Omega)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, onde* q_n *é definido por*

$$
q_0 = p_0 \qquad e \qquad q_{n+1} = (q_n+p-1)\frac{p_0}{p}.
$$

Além disso, existe uma constante positiva, B*, dependendo apenas dos parâmetros citados na* Proposição 4.1 *tal que*

$$
\|u\|_{0,q_{n+1}}^{\frac{pq_{n+1}}{p_0}} \leq Bq_{n+1}^p\|u\|_{0,q_n}^{q_n}. \qquad (4.15)
$$

Prova. Para todo $n \geq 1$, vale

$$p_n = p_0 + r_0 \sum_{i=1}^{n} \delta^i = p_0 + r_0 \frac{\delta(\delta^n - 1)}{\delta - 1},$$

onde $\delta := p_0/p$ e $r_0 := p_0 - q - 1$. De fato, de $p_{n+1} = p_0 + (p_n - q - 1)p_0/p$, temos por recorrência

$$p_1 = p_0 + \frac{p_0}{p}(p_0 - q - 1) = p_0 + r_0\delta,$$

$$p_2 = p_0 + \frac{p_0}{p}(p_0 + r_0\delta - q - 1) = p_0 + \delta(r_0 + r_0\delta) = p_0 + r_0\delta + r_0\delta^2,$$

$$p_3 = p_0 + \frac{p_0}{p}(p_0 + r_0\delta + r_0\delta^2 - q - 1) = p_0 + \delta(r_0 + r_0\delta + r_0\delta^2) = p_0 + r_0\delta + r_0\delta^2 + r_0\delta^3,$$

logo

$$p_n = p_0 + r_0(\delta + \delta^2 + \ldots, + \delta^n) = p_0 + r_0 \sum_{i=1}^{n} \delta^i.$$

Como $r_0 > 0$ e $\delta > 1$, temos $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$. Desde que $u \in L^{p_n}(\Omega)$, temos que $u \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, \infty)$ (pelas imersões, já que Ω é limitado). Resulta, em particular, que $u \in L^q(\Omega)$; donde $|u|^{q-1} \in L^{q'}(\Omega)$. Daí, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe um p_{n+1} tal que $p_{n+1} > q'$; logo, por (4.14), temos $\| |u|^{q-1} \|_{0,q'} \leq C_0$, onde C_0 é uma constante positiva dependendo apenas dos parâmetros citados na Proposição 4.1. Então, substituindo α por $q_n - 1$, em (4.13) e procedendo de modo análogo ao que foi feito no Lema 4.1, obtemos a desigualdade (4.15). ∎

Prova da Proposição 4.1. Vamos obter o resultado a partir de uma estimativa uniforme de $\|u\|_{0,q_n}$. Vamos, então reescrever (4.15): $\|u\|_{0,q_{n+1}}^{\frac{pq_{n+1}}{p_0}} \leq Bq_{n+1}^p \|u\|_{0,q_n}^{q_n}$. Aplicando o logaritmo natural, ln, temos

$$\frac{p}{p_0} q_{n+1} \ln(\|u\|_{0,q_{n+1}}) \leq \ln(Bq_{n+1}^p) + q_n \ln(\|u\|_{0,q_n}),$$

que implica

$$q_{n+1} \ln(\|u\|_{0,q_{n+1}}) \leq \frac{p_0}{p}(q_n \ln(\|u\|_{0,q_n}) + \ln(Bq_{n+1}^p)).$$

Consideremos $E_n := q_n \ln(\|u\|_{0,q_n})$ e $r_n := \ln(Bq_{n+1}^p)$. Então, (4.15) fica escrito como

$$E_{n+1} \leq \delta(E_n + r_n).$$

Logo, por recorrência, temos

$$E_1 \leq \delta(E_0 + r_0) = \delta E_0 + \delta r_0,$$

$$E_2 \leq \delta(\delta E_0 + \delta r_0 + r_1) = \delta^2 E_0 + \delta^2 r_0 + \delta r_1,$$

$$E_3 \leq \delta(\delta^2 E_0 + \delta^2 r_0 + \delta r_1 + r_2) = \delta^3 E_0 + \delta^3 r_0 + \delta^2 r_1 + \delta r_2,$$

e, assim, temos

$$E_n \leq \delta^n E_0 + \sum_{i=1}^{n} \delta^i r_{n-i}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Usando a definição de q_n, também temos, por recorrência,

$$q_1 = (p_0 + p - 1)\delta = \delta p_0 + (p-1)\delta,$$

$$q_2 = (\delta p_0 + (p-1)\delta + p - 1)\delta = \delta^2 p_0 + (p-1)(\delta^2 + \delta),$$

$$q_3 = (\delta^2 p_0 + (p-1)(\delta^2+\delta) + p - 1)\delta = \delta^3 p_0 + (p-1)(\delta^3 + \delta^2 + \delta).$$

Repetindo esse processo, obtemos

$$q_n = \delta^n p_0 + (p-1)\sum_{i=1}^{n} \delta^i = \delta^n p_0 + (p-1)\frac{\delta(\delta^n - 1)}{\delta - 1}.$$

Assim, $\delta^n p_0 \leq q_n \leq \delta^n p_0 + \delta(p-1)\delta^n/(\delta-1) = \delta^n C_1$, ou seja, $\delta^n p_0 \leq q_n \leq \delta^n C_1$, com $C_1 = p_0 + \delta(p-1)/(\delta-1)$. Então, desde que $r_n = \ln(B q_{n+1}^p)$, temos

$$r_n \leq \ln(B(\delta^{n+1}C_1)^p) = \ln(BC_1^p) + (n+1)p\ln\delta = d_1 + (n+1)d_2,$$

onde $d_1 = \ln(BC_1^p)$ e $d_2 = p\ln\delta$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \delta^i r_{n-i} &\leq \sum_{i=1}^{n} \delta^i [d_1 + (n-i+1)d_2] \\
&= d_1\delta\frac{\delta^n - 1}{\delta - 1} + \frac{d_2}{\delta - 1}(\delta^2 + \delta^3 + \ldots + \delta^n + \delta^{n+1} - n\delta) \\
&\leq d_1\delta\frac{\delta^n}{\delta - 1} + \frac{d_2}{\delta - 1}(\delta^2 + \ldots + \delta^{n+1}) \\
&= d_1\delta\frac{\delta^n}{\delta - 1} + d_2\delta^2\frac{\delta^n - 1}{(\delta - 1)^2} \\
&\leq \delta^n\frac{\delta}{\delta - 1}\left(d_1 + d_2\frac{\delta}{\delta - 1}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^i r_{n-i} \leq D\delta^n,$$

com $D = (d_1 + d_2\delta/(\delta-1))\delta/(\delta-1)$. Daí, $E_n \leq \delta^n E_0 + D\delta^n = \delta^n(E_0 + D)$. Logo, $E_n/\delta^n \leq E_0 + D$. Além disso, como $E_n = q_n \ln(\|u\|_{0,q_n})$ e $\delta^n p_0 \leq q_n$, temos

$$\|u\|_{0,q_n} = e^{E_n/q_n} \leq e^{E_n/\delta^n p_0} = e^{(E_0+D)/p_0}.$$

Finalmente,

$$\|u\|_\infty \leq \limsup_{n\to\infty} \|u\|_{0,q_n} \leq e^{(E_0+D)/p_0} < \infty.$$

■

Proposição 4.2 (*Princípio de Comparação Fraco*). *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. Se $u, v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ são tais que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u\varphi \leq \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla v\varphi \tag{4.16}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, onde $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$ com $div(\vec{b}) \leq 0$, se $p \neq 2$. Se, além disso, $u \leq v$ sobre $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω.

Prova. Se $p = 2$, (4.16) torna-se

$$\int_\Omega \nabla(u-v)\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)\varphi \leq 0.$$

Isto é,

$$\Delta(u-v) - \vec{b}\cdot\nabla(u-v) \geq 0.$$

Assim, pelo Teorema 0.17, $\sup_\Omega(u-v) \leq \sup_{\partial\Omega}(u-v)^+ = 0$, que significa $u \leq v$ em Ω.

Vejamos o caso $p \neq 2$. Tomemos $\varphi = (u-v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Notemos que $(u-v)^+ \geq 0$ e, além disso, $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pois, como $u, v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $u \leq v$ sobre $\partial\Omega$, ou seja, $(u-v)^+ = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então $\varphi = (u-v)^+$ pertence a $W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando esta φ em (4.16), obtemos

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u-v)^+ + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)(u-v)^+ \leq 0.$$

Mas, se $u < v$, então $(u-v)^+ = 0$. Daí, pela Proposição A.1, temos $\nabla(u-v)^+ = 0$. Além disso, como $u \geq v$, resulta $u-v = (u-v)^+$; por outro lado, a relação $\nabla(u-v)^+ \neq \nabla(u-v)$ significa que $(u-v)^+ = 0$; logo, temos

$$\int_{\Omega\cap[u\geq v]} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u-v) + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)^+(u-v)^+ \leq 0.$$

Desde que $(u-v)^+ \in L^\infty(\Omega)$, temos $\nabla((u-v)^+)^2 = 2(u-v)^+\nabla(u-v)^+ \in L^\infty(\Omega)$ e, portanto, $((u-v)^+)^2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como, além disso, $div(\vec{b}) \leq 0$, segue

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)^+(u-v)^+ \geq 0.$$

De fato, reordenando os termos na integral, temos

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)^+(u-v)^+ = \sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i(u-v)^+_{x_i}(u-v)^+ = \sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i(u-v)^+(u-v)^+_{x_i}.$$

Integrando por partes, segue que

$$\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)^+(u-v)^+ = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega (b^i(u-v)^+)_{x_i}(u-v)^+.$$

Agora, usando a regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)^+(u-v)^+ &= -\sum_{i=1}^N\int_\Omega b^i_{x_i}(u-v)^+(u-v)^+ - \sum_{i=1}^N\int_\Omega b^i(u-v)^+_{x_i}(u-v)^+ \\ &= -\int_\Omega div(\vec{b})|(u-v)^+|^2 - \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)^+(u-v)^+.\end{aligned}$$

Isto é,

$$2\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla(u-v)^+(u-v)^+ = -\int_\Omega div(\vec{b})|(u-v)^+|^2 \geq 0.$$

Assim,

$$\int_{\Omega\cap[u\geq v]} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u-v) \leq 0.$$

Agora, usando o Lema A.2, obtemos $\nabla(u-v) = 0$ em $\Omega\cap[u\geq v]$. Isto é, $u-v$ é constante em $\Omega\cap[u\geq v]$. Como na fronteira de $\Omega\cap[u\geq v]$, temos $u-v=0$, segue que $u-v\equiv 0$ em $\Omega\cap[u\geq v]$. Donde $u\leq v$ em Ω. ■

Teorema 4.1 *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{1,1}$, $f\in L^\infty(\Omega)$ e $\vec{b}\in C^1(\overline{\Omega})$ com $div(\vec{b})\leq 0$ se $p\neq 2$. Então o problema*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall\,\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u\in C_0^1(\overline{\Omega}) \end{cases} \tag{4.17}$$

tem uma única solução. Além disso, o operador $K : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definido por $K(f)=u$, onde u é a única solução de (4.17)*, é contínuo, compacto e preserva ordem.*

Prova. Suponhamos que existam duas soluções $u_1, u_2\in C_0^1(\overline{\Omega})$ de (4.17). Ora, $u_1|_{\partial\Omega}$, $u_2|_{\partial\Omega}=0$. Daí, $(u_1-u_2)|_{\partial\Omega}=0$; logo $0\leq(u_1-u_2)|_{\partial\Omega}\leq 0$. Assim, a Proposição 4.2, nos dá $0\leq u_1-u_2\leq 0$ em Ω. Donde $u_1=u_2$. Portanto, temos a unicidade para (4.17).

Além disso, se f_1 e f_2 são funções associadas a u_1 e u_2, respectivamente, tais que $f_1\leq f_2$, então

$$\int_\Omega f_1(t+u)\varphi \leq \int_\Omega f_2(t+u)\varphi \quad \forall\,\varphi\geq 0,\ \varphi\in C_c^\infty(\Omega).$$

Novamente, a Proposição 4.2 implica que $u_1\leq u_2$ em Ω. Daí, K preserva a ordem.

Vamos provar, agora, a existência de solução para (4.17). Consideremos o operador

$$H : [0,1]\times C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega}) : (s,u)\mapsto (-\Delta_p)^{-1}(-s\vec{b}\cdot\nabla u + f).$$

O operador $(-\Delta_p)^{-1}$ está bem definido de $W^{-1,p'}(\Omega)$ para $W_0^{1,p}(\Omega)$, conforme o primeiro capítulo deste trabalho. Como Ω é limitado, $L^\infty\subset L^{p'}(\Omega)$ para $1\leq p\leq\infty$. Por outro lado, $W_0^{1,p}(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ implica $L^{p'}(\Omega)\subset W^{-1,p'}(\Omega)$. Assim, $L^\infty(\Omega)\subset W^{-1,p'}(\Omega)$, e, além disso, $C_0^1(\overline{\Omega})\subset L^\infty(\overline{\Omega})$. Logo, pelas estimativas L^∞ de Anane e as estimativas $C^{1,\alpha}$ de Liebermann e Tolksdorf, H está bem definido; e ainda, pelo Lema 0.7, $(-\Delta_p)^{-1}$ é contínuo e compacto de $L^\infty(\Omega)$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Portanto, H é contínuo e compacto. Consideremos, agora, a equação

$$u = H(s,u)$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta_p u + s\vec{b}\cdot\nabla u = f \\ u\in C_0^1(\overline{\Omega}). \end{cases} \tag{4.18}$$

Seja $u_s\in C_0^1(\overline{\Omega})$ uma solução de (4.18), multiplicando (4.18) por u_s, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_s|^{p-2}\nabla u_s\nabla u_s + \int_\Omega s\vec{b}\cdot\nabla u_s u_s = \int_\Omega f u_s.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega s\vec{b}\cdot\nabla u_s u_s &= \sum_{i=1}^N s\int_\Omega b^i u_s (u_s)_{x_i} = -\sum_{i=1}^N s\int_\Omega (b^i u_s)_{x_i} u_s \\
&= -\sum_{i=1}^N s\int_\Omega b^i_{x_i} u_s u_s - \sum_{i=1}^N s\int_\Omega b^i (u_s)_{x_i} u_s \\
&= -\int_\Omega s\, div(\vec{b})|u_s|^2 - \int_\Omega s\vec{b}\cdot\nabla u_s u_s.
\end{aligned}$$

E assim,

$$2\int_\Omega s\vec{b}\cdot\nabla u_s u_s = -\int_\Omega s div(\vec{b})|u_s|^2 \geq 0,$$

pois $div(\vec{b}) \leq 0$ e $s \in [0,1]$. Daí,

$$\|u_s\|_{1,p}^p = \int_\Omega |\nabla u_s|^p \leq \int_\Omega f u_s \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |u_s|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\|u_s\|_{1,p}^p \quad \leq \quad \|f\|_\infty \left(\int_\Omega |u_s|^p\right)^{1/p} \left(\int_\Omega 1^{p'}\right)^{1/p'} = \|f\|_\infty \|u_s\|_{0,p} |\Omega|^{(p-1)/p}.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, resulta

$$\|u_s\|_{1,p}^p \leq C\|f\|_\infty \|u_s\|_{1,p} |\Omega|^{(p-1)/p} = C_1 \|f\|_\infty \|u_s\|_{1,p},$$

com $C_1 > 0$ dependendo de $\Omega,\ p,\ N$. Logo, existe uma constante positiva $C_2 = C_2(\|f\|_\infty, \Omega, p, N)$ tal que $\|u_s\|_{1,p} \leq C_2$. Pela Proposição 4.1, existe uma constante $C_3 = C_3(\|f\|_\infty, \Omega, p, N)$ tal que $\|u_s\|_\infty \leq C_3$ para todo $s \in [0,1]$. Usando as estimativas $C^{1,\alpha}$ de Liebermann, existe uma constante positiva $C_4 = C_4(\|f\|_\infty, \Omega, p, N, \vec{b})$ tal que $\|u_s\|_{C^1} < C_4$ para todo $s \in [0,1]$. Para $s = 0$, sabemos, do capítulo um, que (4.18) teria uma única solução se $(-\Delta_p)^{-1}$ fosse definido de $W^{-1,p'}(\Omega)$ para $W_0^{1,p}(\Omega)$. Mas, pelas estimativas em consideração, (4.18) tem, de fato, solução única. Assim, se $B(0, C_4)$ denota uma bola em $C_0^1(\overline{\Omega})$ centrada na origem e de raio C_4, então o grau de Leray-Schauder $deg(I - H(s,\cdot), B(0,C_4), 0)$ está bem definido e é igual a $deg(I - H(0,\cdot), B(0,C_4), 0) = 1$. Isto prova a existência de solução para (4.17).

Provemos, agora, a continuidade e compacidade de K. Seja $(h_n) \subset L^\infty(\Omega)$ uma seqüência convergindo a h em $L^\infty(\Omega)$. Então, como antes, a Proposição 4.1 e as estimativas $C^{1,\alpha}$ de Liebermann implicam a existência de algum $\alpha \in (0,1)$ e alguma constante $C > 0$ tais que $K(h_n) \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|K(h_n)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$. Pela imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$[*cf.* Teorema 0.14], existe uma subseqüência (h_{n_k}) e $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $K(h_{n_k}) \to u$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Passando ao limite nas equações

$$\int_\Omega |\nabla(K(h_{n_k}))|^{p-2}\nabla(K(h_{n_k}))\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\nabla(K(h_{n_k}))\varphi = \int_\Omega h_{n_k}\varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p},$$

temos

$$\int_\Omega |\nabla(K(h))|^{p-2}\nabla(K(h))\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\nabla(K(h))\varphi = \int_\Omega h\varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p},$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u\varphi = \int_\Omega u\varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p},$$

e pela unicidade de (4.17), obtemos $u = K(h)$. Finalmente, o Lema 0.2 assegura a continuidade de K. Seja $(h_n) \subset L^\infty(\Omega)$ uma seqüência limitada em $L^\infty(\Omega)$. Analogamente ao que foi feito para provar a continuidade de K, $K(h_n) \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|K(h_n)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C$. A imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ garante a compacidade de K. ∎

Entre outras aplicações, o próximo resultado será útil na Proposição 4.3, abaixo.

Lema 4.3 (*Princípio do Máximo Forte e Lema de Hopf*). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $1 < p < \infty$ e $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$ com $div(\vec{b}) \le 0$. Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $u \ge 0$ q.t.p. em Ω, $-\Delta_p u + \vec{b}\cdot\nabla u \ge 0$ q.t.p. em Ω. Então, se $u \not\equiv 0$ sobre Ω, $u > 0$ em Ω. Além disso, para algum $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz uma condição de esfera interior e $u(x_0) = 0$, se B denota tal esfera e ν a correspondente normal interior em x_0, então $\partial u/\partial\nu(x_0) > 0$.*

Prova. Provaremos o caso em que $\vec{b} \not\equiv 0$ (o caso onde $\vec{b} \equiv 0$ se procede de maneira análoga, e pode ser encontrado em Vázquez-[32]).

Suponhamos, por contradição, que u se anula em algum lugar de Ω, mas não é identicamente nula. Seja $U = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$. Temos que $U \neq \emptyset$, U é fechado e $U \subset \Omega$, com inclusão própria. Então, podemos escolher um $x_0 \in \partial U \subset \Omega$, um $x^1 \in \Omega\backslash U$ e $R > 0$ tais que o fecho da bola $B := B(x^1, R) \subset \Omega\backslash U$ esteja contido em Ω, $|x^1 - x_0| = R$, $u(x_0) = 0$ e $0 < u < a$ em B, para algum $a > 0$, já que $u \in C^1(\overline{B})$.

Consideremos o anel $G := \{x \in \mathbb{R}^N : R/2 < |x - x^1| < R\} \subset \Omega$. Sabemos que $u > 0$ em G. Vamos construir uma solução adequada $\widehat{u}$ para $-\Delta_p\widehat{u} + \vec{b}\cdot\nabla\widehat{u} \le 0$ sobre G. Para alguns números $k_1, , r_1, v_1 > 0$, seja $v(r; k_1, , r_1, v_1)$ uma solução de classe C^2 em $[0, r_1]$ de

$$\begin{cases} v'' = k_1 v', & 0 < r < r_1, \\ v(0) = 0, & v(r_1) = v_1 \end{cases}$$

e $v, v', v'' \ge 0$. Esta equação linear homogênea pode ser facilmente resolvida. Tomemos $y = e^{mt}$, onde m é um parâmetro a ser determinado. Segue-se que $y' = me^{mt}$ e $y'' = m^2e^{mt}$. Substituindo estes valores em $v'' = k_1v'$, obtemos $m = 0$ ou $m = k1$. A solução geral da equação $v'' = k_1v'$ é dada por $y = ae^{k_1t} + b$. Observando as condições iniciais, obtemos $a = v_1/(e^{k_1r_1} - 1) = -b$. Logo, é suficiente tomarmos $v(r) = e^{k_1r}v_1/(e^{k_1r_1} - 1) - v_1/(e^{k_1r_1} - 1)$. Definamos $\widehat{u}(x) := v(R - |x - x^1|; k_1, R/2, v_1)$ no anel G; ou seja, $\widehat{u}(x) = e^{k_1(R-|x-x^1|)}v_1/(e^{k_1R/2} - 1) - v_1/(e^{k_1R/2} - 1)$.

Afirmação 4.2 *Vale a igualdade:*

$$-\Delta_p\widehat{u} + \vec{b}\cdot\nabla\widehat{u} = \left(\frac{N-1}{|x-x^1|} - (p-1)k_1\right)|v'|^{p-2}v' + b(x)v', \tag{4.19}$$

onde $b(x) := -\vec{b}(x)(x - x^1)/|x - x^1| \in L^\infty(G)$.

Demonstração: Sejam $x = (x^1, x_2, \ldots, x_n)$, $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) \in \mathbb{R}^N$, e

$$\alpha(x) := k_1(R - |x - x^1|) = k_1R - k_1\left(\sum_{i=1}^N (x_i - x_i^1)^2\right)^{1/2}.$$

Então,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = -k_1 \frac{x_i - x_i^1}{|x - x^1|}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_i} = \frac{-k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}(x_i - x_i^1)}{(e^{k_1\frac{R}{2}} - 1)|x - x^1|}.$$

Daí,

$$\nabla \widehat{u} = \frac{-k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}}{\left(e^{k_1\frac{R}{2}} - 1\right)|x - x^1|}(x_1 - x_1^1, \ldots, x_N - x_N^1) = \frac{-k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}(x - x^1)}{\left(e^{k_1\frac{R}{2}} - 1\right)|x - x^1|}.$$

Logo, temos

$$|\nabla \widehat{u}|^{p-2} = \left|\frac{k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1}\right|^{p-2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_p \widehat{u} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla \widehat{u}|^{p-2}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1}\right|^{p-2} \frac{(-k_1) v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}(x_i - x_i^1)}{(e^{k_1\frac{R}{2}} - 1)|x - x^1|}\right) \\
&= \left|\frac{k_1 v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1}\right|^{p-2} \frac{(-k_1) v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)} \frac{x_i - x_i^1}{|x - x^1|}\right).
\end{aligned}$$

Denotando $M = \left|k_1 v_1/(e^{k_1 R/2} - 1)\right|^{p-2} (-k_1) v_1/(e^{k_1 R/2} - 1)$ e usando a regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_p \widehat{u} &= M \sum_{i=1}^{N} \Big[e^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)}(-k_1)(p-1)\frac{x_i - x_i^1}{|x - x^1|}\frac{x_i - x_i^1}{|x - x^1|} \\
&\quad + \frac{e^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)}}{|x - x^1|^2}\left(|x - x_1| - \frac{(x_i - x_i^1)(x_i - x_i^1)}{|x - x^1|}\right)\Big] \\
&= \frac{M(-k_1)(p-1)e^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)}}{|x - x^1|^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_i^1)(x_i - x_i^1) \\
&\quad + \frac{MN e^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)}}{|x - x^1|} - \frac{M e^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)}}{|x - x^1|} \\
&= M e^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)}\left(\frac{N-1}{|x - x^1|} - (p-1)k_1\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$v' = \frac{k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1}, \quad v' > 0.$$

Em particular, $v'(0) = v_1 k_1/(e^{k_1 R/2} - 1) > 0$ e

$$|v'|^{p-2} = \left(\frac{k_1 v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}\right)^{p-2} e^{k_1(p-2)(R-|x-x^1|)}.$$

Daí, $|v'|^{p-2}v' = -Me^{k_1(R-|x-x^1|)(p-1)}$. Logo,

$$-\Delta_p \widehat{u} = \left(\frac{N-1}{|x-x^1|} - (p-1)k_1\right)|v'|^{p-2}v'.$$

Agora,

$$\vec{b}\cdot\nabla\widehat{u} = \frac{\vec{b}(-k_1)v_1 e^{k_1(R-|x-x^1|)}}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1}\frac{(x-x^1)}{|x-x^1|} = \frac{-\vec{b}(x-x^1)}{|x-x^1|}v'.$$

Denotando $b = -\vec{b}(x-x^1)/|x-x^1|$, obtemos $\vec{b}\cdot\nabla\widehat{u} = bv'$, e portanto, temos a afirmação. ■

Para k_1 suficientemente grande, $(N-1)/|x-x^1| - (p-1)k_1 < 0$, e, além disso,

$$\left(\frac{N-1}{|x-x^1|} - (p-1)k_1\right)|v'|^{p-2} \leq \left(\frac{N-1}{|x-x^1|}k_1^{p-2} - (p-1)k_1^{p-1}\right)\left(\frac{e^{k_1R/2}v_1}{e^{k_1R/2}-1}\right)^{p-2}$$

sobre G. De fato,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{N-1}{|x-x^1|} - (p-1)k_1\right)|v'|^{p-2} = \\
&= \left(\frac{N-1}{|x-x^1|} - (p-1)k_1\right)\left(\frac{k_1 v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1}\right)^{p-2} e^{k_1(p-2)(R-|x-x^1|)} \\
&= \left(\frac{N-1}{|x-x^1|}k_1^{p-2} - (p-1)k_1^{p-1}\right)\left(\frac{v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1}\right)^{p-2} e^{k_1(p-2)(R-|x-x^1|)}.
\end{aligned}$$

Mas, em G, $R/2 < |x-x^1| < R$. Ou seja, $-R < -|x-x^1| < -R/2$, donde $0 < R - |x-x^1| < R/2$. Daí,

$$\left(\frac{N-1}{|x-x^1|} - (p-1)k_1\right)|v'|^{p-2} \leq \left(\frac{N-1}{|x-x^1|}k_1^{p-2} - (p-1)k_1^{p-1}\right)\left(\frac{e^{k_1R/2}v_1}{e^{k_1R/2}-1}\right)^{p-2} \tag{4.20}$$

Como o segundo membro em (4.20) tende a $-\infty$ se $k_1 \to +\infty$, $b \in L^\infty(G)$ e $v' > 0$, então $-\Delta_p\widehat{u} + \vec{b}\cdot\nabla\widehat{u} \leq 0$ sobre G para k_1 suficientemente grande. Por construção, $u \geq \widehat{u}$ sobre ∂G se v_1 for suficientemente pequeno, pois

$$\widehat{u}|_{\partial G} = \begin{cases} \dfrac{e^{k_1R/2}v_1}{(e^{k_1R/2}-1)} - \dfrac{v_1}{(e^{k_1R/2}-1)} = v_1, & \text{se } |x-x^1| = R/2, \\ 0, & \text{se } |x-x^1| = R. \end{cases}$$

Desde que $-\Delta_p u + \vec{b}\cdot\nabla u \geq 0$, pelo princípio de comparação fraco (Proposição 4.2), resulta $u \geq \widehat{u}$ em G. Notemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(x_0 + h(x^1 - x_0)) - u(x_0)) > 0. \tag{4.21}$$

De fato, para $h < 1$, e sabendo que $R = |x_0 - x^1|$, temos

$$\begin{aligned}\widehat{u}(x_0 + h(x_1 - x_0)) &= \frac{v_1 e^{k_1(R-|x_0+h(x^1-x_0)-x^1|)}}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1} - \frac{v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1} \\ &= \frac{v_1 e^{k_1(R-(1-h)|x_0-x^1|)} - v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1} = \frac{v_1 e^{k_1 Rh} - v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1}.\end{aligned}$$

Aplicando L'Hospital, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{u}(x_0 + h(x_1 - x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(e^{k_1 Rh} - 1)v_1}{h(e^{k_1\frac{R}{2}} - 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{k_1 v_1 R e^{k_1 Rh}}{e^{k_1\frac{R}{2}} - 1} = v'(0)R.$$

Desde que $\widehat{u}(x_0) = u(x_0) = 0$ e $u \geq \widehat{u}$ sobre G, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(x_0 + h(x^1 - x_0)) - u(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} u(x_0 + h(x^1 - x_0)) \geq v'(0)R.$$

A relação (4.21) é, portanto, verdadeira, já que $v'(0) > 0$. Temos, então, uma contradição, já que a hipótese $u \in C^1(\Omega)$ implica $\nabla u(x_0) = 0$.

A prova do lema de Hopf segue a mesma idéia acima. Agora, tomemos o anel G correspondendo à bola $B := B(x^1, R)$ da condição da esfera interior em x_0. Como antes, $u \geq \widehat{u}$ em G. A dificuldade técnica é que agora G toca $\partial\Omega$; mas pode ser superada movendo G ao longo de ν : substituímos x^1 por $(x^1)^\varepsilon = x^1 + \varepsilon\nu$ para um $\varepsilon > 0$ pequeno e deixando R fixo. Se ε for suficientemente pequeno, o anel G_ε será tal que $\overline{G}_\varepsilon \subset \Omega$. Argumentando como acima, temos $u(x) \geq \widehat{u}(x - \varepsilon\nu) \equiv v(R - |x - x^1 - \varepsilon\nu|; k_1, R/2, v_1)$ *q.t.p.* em G, e k_1 não depende de ε. Agora, fazendo $\varepsilon \to 0$ e lembrando que $v'(0) > 0$, obtemos $\partial u/\partial\nu(x_0) > 0$. ■

Vamos provar, agora, a positividade de todas as soluções de (4.3).

Proposição 4.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$. Se u é uma solução do problema* (4.3)*, então $u \geq 0$ em Ω. Se, além disso, $u \not\equiv 0$, então $u > 0$ em Ω.*

Prova. Se u é solução de (4.3), então $u|_{\partial\Omega} = 0$. Como f é definida de $\mathbb{R}$ em $[0, +\infty)$, para toda $\varphi \geq 0$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b} \cdot \nabla u \varphi = \int_\Omega f(t+u)\varphi \geq 0 = \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi + \int_\Omega \vec{b}\nabla\overline{u}\varphi,$$

onde $\overline{u} \equiv 0$. Logo, Pela Proposição 4.2, $u \geq 0$ em Ω. A outra parte segue imediatamente do Lema 4.3 acima. ■

4.2 Existência de um Contínuo de Soluções Positivas

Nesta seção vamos reduzir o problema de encontrar uma solução não trivial de (4.3) para $t = 0$ ao problema de estabelecer estimativas a priori para algumas soluções de (4.3). Isto pode ser feito graças ao seguinte

Teorema 4.2 (*Existência de um Contínuo de Soluções*). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$, $1 < p \leq 2$, $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$ e f uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{u\to 0} f(|u|)/|u|^{p-1} = 0$. Seja $\mathcal{C}^+$ a componente, em $\mathbb{R}^+ \times C_0^1(\overline{\Omega})$, das soluções de*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \psi + \int_\Omega \vec{b}\cdot \nabla u \psi = \int_\Omega f(t+|u|)\psi, \quad \forall\, \psi \in C_c^\infty(\overline{\Omega}), \\ u \geq 0, \quad t \geq 0, \quad u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \end{cases} \tag{4.22}$$

contendo $(0,0)$. Se

$$\mathcal{C}^+ \cap (\{0\} \times C_0^1(\overline{\Omega})) = \{(0,0)\},$$

então $\mathcal{C}^+$ é ilimitado em $\mathbb{R}^+ \times C_0^1(\overline{\Omega})$. Em particular, $\mathcal{C}^+$ contém outros pontos, além de $(0,0)$. Este resultado é válido para todo $1 < p < +\infty$ se $\vec{b} = 0$.

Para provarmos este resultado, utilizaremos o seguinte

Lema 4.4 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, real. Seja $G : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ contínua e, tal que, aplica subconjuntos limitados em subconjuntos relativamente compactos. Suponhamos, também, que G satisfaça*

1. *$G(0,0) = 0$,*
2. *Existe $R > 0$ tal que*
   (a) *$u \in X$, $\|u\| \leq R$ e $u = G(0,u)$ implica $u = 0$,*
   (b) *$deg(I - G(0,\cdot), B(0,R), 0) = 1$.*

Seja J o conjuto das soluções do problema

$$(\mathcal{P}) \qquad u = G(t,u)$$

em $\mathbb{R}^+ \times X$. Seja $\mathcal{C}$ a componente (subconjunto conexo, fechado e maximal com respeito à inclusão) de J que contém $(0,0)$. Então, se

$$\mathcal{C} \cap (\{0\} \times X) = \{(0,0)\},$$

temos que $\mathcal{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R}^+ \times X$.

Prova. É conveniente estendermos G a $\mathbb{R} \times X$ pondo $\widetilde{G}(t,u) := G(|t|,u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in X$ (com o fim de utilizarmos um espaço metrico). Observamos que $\widetilde{G} : \mathbb{R} \times X$ é compacto, $\widetilde{G}(0,0) = 0$ e satisfaz (b), isto é, existe $R > 0$ tal que

1. $u \in X$, $\|u\| \leq R$ e $u = \widetilde{G}(0,0) = G(0,u)$ implica $u = 0$,
2. $deg(I - \widetilde{G}(0,\cdot), B(0,R), 0) = deg(I - G(0,\cdot), B(0,R), 0) = 1$.

Seja $\widetilde{J}$ o conjunto das soluções do problema

$$u = \widetilde{G}(t, u) \qquad t \in \mathbb{R},\ u \in X. \tag{4.23}$$

Claramente, $(0,0) \in \widetilde{J}$ e $\widetilde{J} = J \cup \{(-t, u) : (t, u) \in J\}$. Seja $\widetilde{\mathcal{C}}$ a componente de $\widetilde{J}$ em $\mathbb{R} \times X$ que contém $\{(0,0)\}$. Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{C}$ seja limitado em $\mathbb{R}^+ \times X$ e que $\mathcal{C} \cap (\{0\} \times X) = \{(0,0)\}$. Então $\widetilde{\mathcal{C}}$ é limitado em $\mathbb{R} \times X$ e $\widetilde{\mathcal{C}} \cap (\{0\} \times X) = \{(0,0)\}$.

Notemos que $\widetilde{\mathcal{C}}$ é compacta em $\mathbb{R} \times X$. Com efeito, seja (t_n, u_n) uma seqüência de soluções de (4.23). Desde que $\widetilde{\mathcal{C}}$ é limitado e do fato que $\widetilde{G}$ aplica conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, obtemos uma subseqüência (u_{n_k}) convergente de (u_n). Por outro lado, a seqüência (t_n) de números reais, sendo limitada, possui uma subseqüência (t_{n_k}) convergente. Pelo método da diagonal de Cantor, existe uma subseqüência, ainda denotada por (t_{n_k}, u_{n_k}), convergente. Portanto, $\widetilde{\mathcal{C}}$ é compacta em $\mathbb{R} \times X$. Seja U uma vizinhança-δ_1 de $\widetilde{\mathcal{C}}$ em $\mathbb{R} \times X$ onde $0 < \delta_1 \leq R/2$ (e δ_1 suficientemente pequeno para que $U \cap (\{0\} \times X) \subset B(0, R)$). Seja $K := U \cap \widetilde{J}$. Então, K é um espaço métrico que, pelos argumentos acima para $\widetilde{\mathcal{C}}$, é compacto. Por construção, $\partial U \cap \widetilde{\mathcal{C}} = \emptyset$. Logo, $\widetilde{\mathcal{C}}$ e $\partial U \cap \widetilde{J}$ são dois subconjuntos compactos de K que são disjuntos. Pelo Lema 0.9, existem dois subconjuntos compactos A e B de K satisfazendo $\widetilde{\mathcal{C}} \subset A$, $\partial U \cap \widetilde{J} \subset B$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = K$. Claramente, $\sigma := dist(A, B) > 0$. Notemos que $A \cap \partial U = (A \cap \widetilde{J}) \cap \partial U = A \cap (\widetilde{J} \cap \partial U) \subset A \cap B = \emptyset$. Como A é compacto e ∂U é fechada, também temos $\mu := dist(A, \partial U) > 0$.

Se $\mathcal{O}$ denota uma vizinhança-δ de A com $0 < \delta < \mu$, então $\mathcal{O} \subset U$ (se $x \in A, y \in B(x, \delta)$ e $z \in \partial U$, então $dist(z, y) \geq dist(z, x) - dist(y, x) \geq \mu - \delta > 0$). Se, além disso, $0 < \delta < \sigma$, temos

$$\partial \mathcal{O} \cap \widetilde{J} = \emptyset.$$

De fato, $\partial \mathcal{O} \cap \widetilde{J} = \partial \mathcal{O} \cap K = (\partial \mathcal{O} \cap A) \cup (\partial \mathcal{O} \cap B)$. Como $\mathcal{O}$ é uma vizinhança-δ de A, $\partial \mathcal{O} \cap A = \emptyset$. Além disso, como $\delta < \sigma$, temos $dist(\partial \mathcal{O}, B) \geq \sigma - \delta > 0$ e assim, $\partial \mathcal{O} \cap B = \emptyset$. Por outro lado, $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{O}$ e $\partial \mathcal{O} \cap (\{0\} \times X) \subset (\{0\} \times B(0, R))$.

Seja $\mathcal{O}_t := \{u \in X : (t, u) \in \mathcal{O}\}$. Do Lema 0.10 e da maximalidade de $\widetilde{\mathcal{C}}$, existe um número real c tal que $deg(I - \widetilde{G}(t, \cdot), \mathcal{O}_t, 0) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\mathcal{O}_t = \emptyset$ para $|t|$ grande, $c = 0$. Por outro lado, $deg(I - \widetilde{G}(0, \cdot), \mathcal{O}_0, 0) = deg(I - G(0, \cdot), \mathcal{O}_0, 0) = 1$ por hipótese. Logo, temos uma contradição. ■

Na prova do Teorema 4.2 aplicamos o Lema acima com G definida por

$$\begin{array}{rcl} G : [0, +\infty) \times C_0^1(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & C_0^1(\overline{\Omega}) \\ (t, u) & \longmapsto & K(f(t + u)), \end{array} \tag{4.24}$$

onde o operador $K : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ é definido como no Teorema 4.1. A razão do lema seguinte é garantir que G satisfaça a hipótese (2) do Lema 4.4, acima.

Lema 4.5 *Sob as hipóteses do* Teorema 4.2, *existe um número real $R > 0$ tal que, se $(u, \lambda) \in C_0^1 \times [0, 1]$ é uma solução de*

$$\begin{cases} u = K(\lambda f(|u|)), \\ u \not\equiv 0, \end{cases} \tag{4.25}$$

então $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} > R$.

Prova. Suponhamos, por contradição, que exista uma subseqüência de soluções (u_n, λ_n) de (4.25) com $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to 0$ se $n \to \infty$, $u_n \not\equiv 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $v_n := u_n/\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}$. Então (v_n, λ_n) satisfaz a equação

$$-\Delta_p v_n = -\vec{b} \cdot \nabla v_n \|u_n\|^{p-2}_{C^1(\overline{\Omega})} + \lambda_n \frac{f(|u_n|)}{\|u_n\|^{p-1}_{C^1(\overline{\Omega})}} \quad \text{em } W^{-1,p'}(\Omega). \tag{4.26}$$

De fato, como (u_n, λ_n) é uma solução de (4.25),

$$-\Delta_p u_n + \vec{b} \cdot \nabla u_n = \lambda_n f(|u_n|) \quad \text{em } W^{-1,p'}(\Omega),$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi + \int_\Omega \vec{b} \cdot \nabla u_n \varphi = \int_\Omega \lambda_n f(|u_n|), \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\overline{\Omega}).$$

Dividindo por $\|u_n\|^{p-1}_{C^1(\overline{\Omega})}$, fica

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p-2}}{\|u\|^{p-2}_{C^1(\overline{\Omega})}} \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}} \nabla \varphi + \int_\Omega \vec{b} \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}} \|u_n\|^{2-p}_{C^1(\overline{\Omega})} \varphi = \frac{1}{\|u_n\|^{p-1}_{C^1(\overline{\Omega})}} \int_\Omega \lambda_n f(|u_n|)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$. Isto é

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla \varphi = -\|u_n\|^{2-p}_{C^1(\overline{\Omega})} \int_\Omega \vec{b} \cdot \nabla v_n \varphi + \frac{1}{\|u_n\|^{p-1}_{C^1(\overline{\Omega})}} \int_\Omega \lambda_n f(|u_n|) \varphi$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$, que é equivalente a (4.26). Pela definição da norma $\|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, ∇v_n é lipschitziana para todo n. Daí, v_n ser equicontínua. Além disso, v_n é, por definição, equi-limitada. Pelo teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subseqüência, ainda denotada por (v_n) e $v \neq 0$ em $C(\overline{\Omega})$ tal que $v_n \to v$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Se $p < 2$ ou $\vec{b} = 0$ e $1 < p < \infty$, então pela hipótese sobre f, o segundo membro de (4.26) tende a 0 em $L^\infty(\Omega)$. Então, pelas propriedades do inverso do operador p-laplaciano (ver Teorema 4.1), $v_n \to 0$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Se $p = 2$, (4.26) converge a $-\Delta_p v_n = -\vec{b} \cdot \nabla v_n$. Pelas propriedades do operador $-\Delta_p(\cdot) + \vec{b}\nabla(\cdot)$ do Teorema 4.1, também obtemos $v_n \to 0$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Em ambos os casos, isto contradiz $v \neq 0$. ■

Prova do Teorema 4.2. Vamos aplicar o Lema 4.4 com $X = C_0^1(\overline{\Omega})$ e G definida por (4.24). pelo Teorema 4.1, $G(0,0) = K(f(0)) = u(0) = 0$, a hipótese *(1)* é satisfeita.

Tomemos $R > 0$ como no Lema 4.5, $\lambda = 1$, e $t = 0$. Se $u(u \geq 0)$ é tal que $u = K(f(|u|) = K(f(u) = G(0,u)$ e $\not\equiv 0$, então $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} > R$; ou equivalentemente, se $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq R$ e $u = G(0,u)$, então $u = 0$. Assim, a hipótese *2.(a)* fica satisfeita.

Definamos $h : [0,1] \times B(0,R) \to C_0^1(\overline{\Omega})$, onde $B(0,R)$ denota uma bola em $C_0^1(\overline{\Omega})$, por

$$h(\lambda, u) := K(\lambda f(|u|)), \quad \forall\, \lambda \in [0,1],\ \forall\, u \in B(0,R).$$

pelo Teorema 4.1, h é compacta e contínua, $h(1,\cdot) = K(f(|\cdot|)) = G(0,\cdot)$; $h(0,\cdot) = K(0) \equiv 0$, já que 0 é a única solução de (4.17) se $f = 0$. Agora, pelo Lema 4.5 acima, $u - h(\lambda,u) \neq 0$ para todo $u \in \partial B(0,R)$ e $\lambda \in [0,1]$. Portanto, $deg(I - G(0,\cdot), B(0,R), 0) = deg(I - 0, B(0,R), 0) = 1$ e a hipótese *2.(b)* é satisfeita.

Notemos que (4.22) é equivalente a $u = G(t, u)$, pela definição da função G. Portanto, o teorema está provado. ■

Portanto, pelo Teorema 4.2, provar a existência de uma solução não trivial de $(\mathcal{P}_b)$, está reduzido a estabelecer estimativas a priori para soluções de (4.3) pertencentes ao contínuo $\mathcal{C}^+$. Mais precisamente, a existência de uma solução não trivial para $(\mathcal{P}_b)$ é provada tão logo tenhamos estabelecido algum limite a priori em $\mathbb{R}^+ \times C_0^1(\overline{\Omega})$ para o contínuo $\mathcal{C}^+$.

4.3 Blow-up

Nesta seção, usamos o método de blow-up para reduzir o problema de encontrar estimativas a priori para toda solução de (4.22) à prova de algum teorema do tipo Liouvilli.

Antes de exibir os resultados, queremos lembrar a idéia do método de blow-up. Supomos, por contradição, que não exista limite a priori, e assim, existe uma seqüência (u_n, t_n) de soluções de (4.3) com $\|u_n\|_\infty + t_n \to \infty$. Fazemos, então, uma mudança de variável (uma rescalada) nas funções u_n para obtermos uma nova seqüência (w_n, t_n) de soluções para um novo problema definido em um domínio Ω_n, que vai crescendo (com o n) e tende, em algum sentido, para todo o $\mathbb{R}^N$. Então, tentamos mostrar que $w_n \to w$ para alguma função $w \neq 0$, onde w é solução de um certo problema em $\mathbb{R}^N$ que, por outro lado, é sabido que não possui solução não trivial, uma contradição.

Inicialmente, tratamos, por simplicidade, o caso onde $f(u) = |u|^q$. Nesta tentativa, temos o

Lema 4.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $1 < p < \infty$, $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$, e (u_n, t_n) uma seqüência de soluções de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + \vec{b} \cdot \nabla u_n = (t_n + u_n)^q, \\ u \in C_0^1(\overline{\Omega}), \ u_n \geq 0, \ t_n \geq 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

com $q > \max\{p-1, 1/(p-1)\}$ se $\vec{b} \not\equiv 0$ e $q > p-1$ se $\vec{b} = 0$, e tal que $\|u\|_\infty + t_n \to +\infty$. Suponhamos que $dist(x_n, \partial\Omega) \geq \delta$ para todo $n \in N_0$ e algum $\delta > 0$, onde $x_n \in \Omega$ satisfaz $u_n(x_n) = \|u_n\|_\infty$. Então existe uma função $w \in C^1(\mathbb{R}^N)$ que é solução de

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} w^q \psi \, dx, \quad \forall\, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \\ w(x) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \\ \|w\|_\infty = 1. \end{cases} \tag{4.28}$$

Prova. Primeiramente, vamos provar que existe uma subseqüência, ainda denotada por (u_n, t_n), satisfazendo

$$\frac{t_n}{\|u\|_\infty} \to 0 \quad \text{com} \quad \|u_n\|_\infty > 0 \qquad \text{para todo } n. \tag{4.29}$$

Observamos que se $\|u_n\|_\infty = 0$, então $t_n = 0$. Se (t_n) é limitada, então (4.29) é óbvio, pois $\|u_n\|_\infty + t_n \to +\infty$, por hipótese. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $t_n \to +\infty$. Façamos a mudança de variável

$$v_n := \frac{u_n}{t_n}, \quad \lambda_n := t_n^{q-p+1}.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, (v_n, λ_n) é solução de

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla v\, dx + \lambda_n^{(2-p)/(q-p+1)}\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla v_n v\, dx = \lambda_n\int_\Omega (1+v_n)^q v\, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

De fato, (u_n, t_n) satisfaz $-\Delta_p u_n + \vec{b}\cdot\nabla u_n = (t_n + u_n)^q$; ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v\, dx + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u_n v\, dx = \int_\Omega (t_n + u_n)^q v\, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Logo,

$$t_n^{p-1}\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla v\, dx + t_n\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla v_n v\, dx = t_n^q\int_\Omega (1+v_n)^q v\, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dividindo tudo por t_n^{p-1}, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla v\, dx + t_n^{2-p}\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla v_n v\, dx = t_n^{q-p+1}\int_\Omega (1+v_n)^q v\, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Substituindo t_n por $\lambda_n^{1/(q-p+1)}$, chegamos à expressão desejada. Como

$$\lambda_n\int_\Omega (1+v_n)^q v\, dx \geq \lambda_n\int_\Omega v\, dx,\ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ v \geq 0,$$

pelo princípio de comparação fraco (Proposição 4.2), temos que $v_n \geq \overline{v}_n$ onde $\overline{v}_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é a solução de

$$\int_\Omega |\nabla \overline{v}_n|^{p-2}\nabla \overline{v}_n \nabla v\, dx + \lambda_n^{(2-p)/(q-p+1)}\int_\Omega \vec{b}\nabla\overline{v}_n v\, dx = \lambda_n\int_\Omega v\, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.30}$$

Tais funções v_n existem pelo Teorema 4.1 (basta tomarmos $f_n = \lambda_n$). Suponhamos, por contradição, que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|\overline{v}_n\|_\infty = C_1 < +\infty.$$

Tomando, então, $v = \overline{v}_n$ em $\int_\Omega \vec{b}\nabla\overline{v}_n v$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \vec{b}\nabla\overline{v}_n\overline{v}_n\, dx &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i\overline{v}_n(\overline{v}_n)_{x_i}\, dx = -\sum_{i=1}^N\int_\Omega (b^i\overline{v}_n)_{x_i}\overline{v}_n\, dx \\
&= -\sum_{i=1}^N\int_\Omega b^i_{x_i}\overline{v}_n\overline{v}_n\, dx - \sum_{i=1}^N\int_\Omega b^i(\overline{v}_n)_{x_i}\overline{v}_n\, dx \\
&= -\int_\Omega div(\vec{b})\overline{v}_n^2\, dx - \int_\Omega \vec{b}\nabla\overline{v}_n\overline{v}_n\, dx.
\end{aligned}$$

Donde

$$\int_\Omega \vec{b}\nabla\overline{v}_n\overline{v}_n\, dx \geq 0,$$

pois $div(\vec{b}) \leq 0$. Logo, tomando $v = \overline{v}_n$ em (2.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\overline{v}_n\|_{1,p}^p &= \int_\Omega |\nabla\overline{v}_n|^p\, dx = \int_\Omega |\nabla\overline{v}_n|^{p-2}\nabla\overline{v}_n\nabla\overline{v}_n\, dx \leq \lambda_n\int_\Omega \overline{v}_n\, dx \\
&\leq \lambda_n\int_\Omega \|\overline{v}_n\|_\infty\, dx \leq C_1\lambda_n|\Omega|, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Dividindo (4.30) por λ_n e fixando $v \in C_0^\infty(\Omega),\ v \geq 0,\ v \not\equiv 0$, obtemos

$$0 < \int_\Omega v\,dx \leq \frac{1}{\lambda_n}\int_\Omega |\nabla \overline{v}_n|^{p-1}|\nabla v|\,dx + \lambda_n^{\frac{2-p}{q-p+1}-1}\int_\Omega |\vec{b}||\nabla \overline{v}_n|v\,dx, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.32)$$

Usando a desigualdade de Hölder e (4.31), vem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n}\int_\Omega |\nabla \overline{v}_n|^{p-1}|\nabla v|\,dx &\leq \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_\Omega |\nabla \overline{v}_n|^p|\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|v\|_{1,p} = \frac{1}{\lambda_n}\|\overline{v}\|_{1,p}^{p-1}\|v\|_{1,p}\\ &\leq \lambda_n^{-\frac{1}{p}}(C_1|\Omega|)^{\frac{p-1}{p}}\|v\|_{1,p},\end{aligned}$$

que tende a 0 para v fixo e $n \to \infty$, pois $\lambda_n \to \infty$ já que $t_n \to \infty$ ($q > p-1$). Usando ainda (4.31), resulta

$$\begin{aligned}\lambda_n^{\frac{2-p}{q-p+1}-1}\int_\Omega |\vec{b}||\nabla \overline{v}_n||v|\,dx &\leq \lambda_n^{\frac{2-p}{q-p+1}-1}\|\vec{b}\|_\infty\|v\|_\infty\|\overline{v}_n\|_{1,p}C_2\\ &\leq (C_1|\Omega|)^{\frac{1}{p}}C_2\|\vec{b}\|_\infty\|v\|_\infty\lambda_n^{\frac{q(1-p)+1}{p(q-p+1)}},\end{aligned}$$

onde C_2 é a constante da injeção $L^p(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$. Como $q > \max\{p-1, 1/(p-1)\}$ se $\vec{b} \neq 0$, este termo também tende a 0, contradizendo (4.32). Notemos que se $\vec{b} = 0$, precisamos apenas de $q > p-1$. Assim, provamos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\|u_n\|_\infty/t_n = \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\|v_n\|_\infty \geq \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\|\overline{v}_n\| = +\infty.$$

De agora em diante, assumimos que $\|u_n\|_\infty > 0$ para todo n e $t_n/\|u_n\|_\infty \to 0$. Consideremos, agora, as funções

$$w_n(y) := \frac{u_n(\alpha_n^{-k}y + x_n)}{\alpha_n} \qquad \forall y \in \Omega_n$$

onde $\alpha_n := \|u_n\|_\infty, \Omega_n := \alpha_n^k(\Omega - x_n)$, e $k := (q-p+1)/p$. Pela hipótese de superlinearidade ($q > p-1$), $k > 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N},\ w_n$ satisfaz as equações

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega_n}|\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n\nabla\psi\,dy + \alpha_n^{\frac{q(1-p)+1}{p}}\int_{\Omega_n}\vec{b}\nabla w_n\psi\,dy = \int_{\Omega_n}\left(\frac{t_n}{\alpha_n} + w_n\right)^q\psi\,dy,\\ w_n \in C_c^1(\overline{\Omega_n}),\ w_n \geq 0 \text{ sobre } \Omega_n,\ \|w_n\|_\infty = 1.\end{cases} \quad (4.33)$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega_n)$. De fato, consideremos o difeomorfismo $J : \Omega_n \to \Omega$ definido por $J(y) = \alpha_n^{-k}y + x_n$, com determinante jacobiano denotado por $\det J$, e notemos que $\nabla w_n(y) = \alpha_n^{-k-1}\nabla u_n(\alpha_n^{-k}y + x_n)$. De (4.27), temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u_n(x)\varphi\,dx = \int_\Omega (t_n + u_n(x))^q\varphi\,dx,\ \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Daí,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u_n(\alpha_n^{-k}y + x_n)|^{p-2}\nabla u_n(\alpha_n^{-k}y + x_n)\nabla\varphi(\alpha_n^{-k}y + x_n)\,dx +\\ &\quad + \int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla u_n(\alpha_n^{-k}y + x_n)\varphi(\alpha_n^{-k}y + x_n)\,dx = \int_\Omega (t_n + u_n(\alpha_n^{-k}y + x_n))^q\varphi(\alpha_n^{-k}y + x_n)\,dx,\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Aplicando o Teorema da Mudança de Variáveis, temos

$$\int_{\Omega_n} |\alpha^{k+1}\nabla w_n(y)|^{p-2}\alpha^{k+1}\nabla w_n(y)\alpha_n^k\nabla\psi(y)|\det J|\,dy+$$
$$+\int_{\Omega_n} \vec{b}\alpha^{k+1}\nabla w_n(y)\psi(y)|\det J|\,dy = \int_{\Omega_n}(t_n+\alpha_n w_n(y))^q\psi(y)|\det J|\,dy,$$

onde denotamos $\psi(y) := \varphi(\alpha_n^{-k}y + x_n)$, que implica $\nabla\varphi(\alpha_n^{-k}y + x_n) = \alpha_n^k\nabla\psi(y)$. Daí,

$$\alpha^{(k+1)(p-1)+k}\int_{\Omega_n} |\nabla w_n(y)|^{p-2}\nabla w_n(y)\nabla\psi(y)\,dy\ +$$
$$+\ \alpha^{k+1}\int_{\Omega_n} \vec{b}\nabla w_n(y)\psi(y)\,dy = \alpha_n^q\int_{\Omega_n}\left(\frac{t_n}{\alpha_n}+w_n(y)\right)^q\psi(y)\,dy.$$

Dividindo esta equação por α_n^q e substituindo o valor de k, obtemos a expressão desejada.

Notemos que $\|u_n\|_\infty \to \infty$; se assim não fosse, teríamos $t_n \to \infty$, (por hipótese) o que contradiria $t_n/\|u_n\|_\infty \to 0$. Assim, como $q > 1/(p-1)$, temos $\alpha_n^{(q(1-p)+1)/p} \to 0$, e $\alpha_n^k \to +\infty$. Logo, dada qualquer bola fechada $\overline{B}$ centrada na origem, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\overline{B} \subset \Omega_n$ para todo $n \geq n_0$. Fixando uma tal bola, podemos usar o resultado de regularidade local $C^{1,\alpha}$ de Tolksdorf. Assim, obtemos a existência de algumas constantes $K > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ dependendo apenas de $N, p, B, \vec{b}$ tais que

$$w_n \in C^{1,\alpha}(\overline{B}) \text{ e } \|w_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B})} \leq K \tag{4.34}$$

Como a imersão $C^{1,\alpha}(\overline{B}) \hookrightarrow C^1(\overline{B})$ é compacta, então, pelo teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma uma função $w \in C^1(\overline{B})$ e uma subseqüência convergente $w_n' \to w$ em $C^1(\overline{B})$. Como $t_n/\alpha_n \to 0$, tomando funções testes em $C_c^\infty(B)$ na equação (4.33), passando ao limite (em (4.33)), e usando o fato que $q > 1/(p-1)$, obtemos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_B |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\psi\,dx = \int_B |w|^q\psi\,dx, \quad \forall\,\psi \in C_c^\infty(B),\\ w \in C^1(\overline{B}),\ w \geq 0 \text{ sobre } \overline{B},\ \|w\|_{L^\infty(B)} = 1.\end{cases}$$

Além disso, como $w \not\equiv 0$, segue $w(x) > 0$ para todo $x \in B$, pelo Lema 4.3. Tomando bolas cada vez maiores, e repetindo o argumento para a subseqüência (w_n') obtida acima, podemos obter (pelo método da diagonal de Cantor) uma subseqüência (w_{n_k}') que converge em C^1 para uma função $w \in C^1(\mathbb{R}^N)$, sobre todo compacto do $\mathbb{R}^N$, satisfazendo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q\psi\,dx, \quad \forall\,\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\\ \|w\|_\infty = 1,\ w(x) > 0,\ \forall\,x \in \mathbb{R}^N.\end{cases}$$

■

Podemos aplicar o mesmo raciocínio da prova acima, se (u_n, t_n) são soluções de (4.3), onde f satisfaz (4.1) com $q > \max\{p-1, 1/(p-1)\}$ se $\vec{b} \not\equiv 0$ e $q > p-1$ se $\vec{b} \equiv 0$. Neste caso, a conclusão do Lema 4.6 permanece verdadeira se (4.28) for substituída por

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\psi\,dx \geq C_0\int_{\mathbb{R}^N} |w|^q\psi\,dx, \quad \forall\,\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\\ w(x) > 0, \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^N,\\ \|w\|_\infty = 1.\end{cases} \tag{4.35}$$

Isto nos conduz ao seguinte resultado:

Lema 4.7 *Sob as mesmas hipóteses do* Lema 4.6, *se* (u_n, t_n) *é uma seqüência de soluções de* (4.3), *então existe uma função* $w \in C^1(\mathbb{R}^N)$, *solução de* (4.35).

Prova. Como na prova do Lema 4.6, provamos a existência de uma sequência, ainda denotada por (u_n, t_n), satisfazendo (4.29). Consideremos a mudança de variável $v_n := u_n/t_n,\ \lambda_n := t_n^{q-p+1}$. Desde que f satisfaz (4.28), e (u_n, t_n) satisfaz (4.3), vemos, analogamente ao que foi feito no Lema 4.6 acima, que (v_n, λ_n) é solução de

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla v\, dx + \lambda_n^{(2-p)/(q-p+1)}\int_\Omega \vec{b}\cdot\nabla v_n v\, dx \geq C_0\lambda_n\int_\Omega (1+v_n)^q v\, dx.$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Definindo $\overline{v}_n \in C_0^1(\Omega)$ como solução de

$$\int_\Omega |\nabla \overline{v}_n|^{p-2}\nabla \overline{v}_n \nabla v\, dx + \lambda_n^{(2-p)/(q-p+1)}\int_\Omega \vec{b}\nabla \overline{v}_n v\, dx = C_0\lambda_n\int_\Omega v\, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

temos, semelhantemente ao Lema 4.6, que $v_n \geq \overline{v}_n$ e $\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\|\overline{v}_n\| = +\infty$. Assim, podemos assumir $\|u_n\|_\infty > 0$ para todo n e $t_n/\|u_n\|_\infty \to 0$ quando $n \to +\infty$. Tomando a seqüência (w_n) definida no Lema 4.6, resulta que, para cada $n \in \mathbb{N}_0,\ w_n$ satisfaz

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_n} |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n\nabla\psi\, dy + \alpha_n^{\frac{q(1-p)+1}{p}}\int_{\Omega_n}\vec{b}\nabla w_n\psi\, dy = \alpha_n^{1-p(k+1)}\int_{\Omega_n} f(t_n+\alpha_n w_n)\psi\, dy \\ w_n \in C_0^1(\overline{\Omega}_n), \quad w_n \geq 0,\ \|w_n\|_\infty = 1, \end{cases}$$

onde $\psi \in C_c^\infty(\Omega_n)$. Pelas hipóteses sobre f e pela definição de k,

$$C_0\left|\frac{t_n}{\alpha_n} + w_n\right|^q \leq \alpha_n^{1-p(k+1)} f(t_n+\alpha_n w_n) \leq C^1\left|\frac{t_n}{\alpha_n} + w_n\right|^q, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Desde que $t_n/\alpha_n \to 0$ e (w_n) é limitada em $L^\infty(\Omega_n)$, podemos usar a estimativa local $C^{1,\alpha}$ de Tolksdorf-[31] sobre uma bola fixa $\overline{B}$ para obtermos, como antes, a existência de $w \in C^1(\overline{B})$ com $w_n \to w$ em $C^1(\overline{B})$ e

$$\int_B |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\psi\, dx \geq C_0\int_B |w|^q\psi\, dx, \quad \forall\, \psi \in C_c^\infty(B),\ \psi \geq 0.$$

Tomando bolas cada vez maiores e usando o Lema 4.3, obtemos a existência de uma função $w \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\psi\, dx \geq C_0\int_{\mathbb{R}^N}|w|^q\psi\, dx, \quad \forall\, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \psi \geq 0, \\ \|w\|_\infty = 1,\ w(x) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

∎

Para obtermos estimativas a priori para (4.3) (e assim, existência para $(\mathcal{P}_b)$) deste resultado de blow-up, precisamos, primeiramente, de um resultado de não-existência para soluções de (4.35). Este é o conteúdo do sequinte lema, provado por Mitidieri-Pohozaev-[24].

Lema 4.8 *Se $p-1 < q \leq N(p-1)/(N-p)$, $N > p$ e $C > 0$ é uma constante, então o problema*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla \psi\, dx \geq C \int_{\mathbb{R}^N} w^q \psi\, dx, \quad \forall\, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \psi \geq 0, \\ w(x) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \\ w \in C^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

não tem solução.

4.4 Existência de Solução no Caso Radial

Para aplicarmos o Lema 4.7, também precisamos de informações sobre a localização de algum máximo global das soluções de (4.3). Em geral, obter tal informação, não é possível (ainda é uma questão aberta). Não obstante, podemos considerar o caso em que Ω é uma bola e o problema é radialmente simétrico; para isto, $\vec{b}$ não pode ser uma função geral.

Nesta seção, mostramos que é possível usar os resultados de blow-up da seção anterior, no caso particular onde Ω é uma bola centrada na origem. Vamos supor que $\vec{b} = -g(|x|)x$ para alguma função g. Consideremos, inicialmente, o problema (4.3):

$$\begin{cases} -\Delta_p u - g(|x|)\vec{x}\nabla u = |t+u|^q \quad \text{em } \Omega \\ u \in C_0^1(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

onde $\Omega = B(0,R)$ é a bola do $\mathbb{R}^N$ centrada na origem e de raio $R > 0$, e com $t > 0$ fixo. Estamos interessados em soluções radiais, isto é, soluções fracas $u(r)$ sobre $[0,R]$ do problema:

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' - g(r)r^N u' = |t+u|^q r^{N-1} \quad \text{em } (0,R), \\ u(R) = 0,\ u'(0) = 0,\ u \in C^1[0,R]. \end{cases} \tag{4.36}$$

Com efeito, seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$, $r = |x|$ e $u(r) = u(x)$. Então,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = u'(r)\frac{x_i}{r}.$$

Logo,

$$x\nabla u = \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N x_i^2 \frac{u'(r)}{r} = ru'(r).$$

Escrevendo $-\Delta_p u - g(|x|)\vec{x}\nabla u = |t+u|^q$ na forma de integrais, temos:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega g(|x|)x\nabla u \varphi = \int_\Omega |t+u|^q \varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\int_\Omega r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\varphi' - \int_\Omega r^{N-1} g(r) r u' \varphi = \int_\Omega |t+u|^q r^{N-1}\varphi.$$

Usando integração por partes na primeira integral, obtemos

$$-\int_\Omega (r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'\varphi - \int_\Omega r^N g(r) u' \varphi = \int_\Omega |t+u|^q r^{N-1}\varphi,$$

ou seja,

$$\int_\Omega [-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' - r^N g(r)u' - |t+u|^q r^{N-1}]\varphi = 0.$$

Aplicando o Lema IV.2 do Brezis-[7], resulta que

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' - r^N g(r)u' - |t+u|^q r^{N-1} = 0;$$

isto é,

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' - r^N g(r)u' = |t+u|^q r^{N-1},$$

que é a primeira parte em (4.36).

Temos o seguinte resultado:

Lema 4.9 *Suponhamos que* $\vec{b} = -g(|x|)x \in C^1([0,\infty))$ *e* $div(g(|x|)x) \geq 0$. *Então, qualquer solução* u *do problema* (4.36) *satisfaz* $u'(r) < 0$, $u(r) > 0$ *para todo* $r \in (0,R)$. *Além disso,* $u'(R) < 0$. *Em particular, qualquer solução radial atinge seu máximo global em 0.*

Prova. Suponhamos, inicialmente, que exista um pequeno intervalo $(0,r]$ sobre o qual $u' \neq 0$. Então, neste intervalo, pelos resultados de regularidade para equações elípticas quasilineares de segunda ordem, u é de classe C^2 e a equação é satisfeita pontualmente. Assim, integrando (4.36)

$$(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = -(g(r)r^N u' + |t+u|^q r^{N-1}).$$

sobre $[0,r]$, obtemos

$$\begin{aligned} r^{N-1}|u'|^{p-2}u' &= -\int_0^r (g(s)s^N u' + |t+u|^q s^{N-1})\, ds \\ &= -\int_0^r s^{N-1}(g(s)su' + |t+u|^q)\, ds. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Sabemos que $u \geq 0$ (Proposição 4.3), u' e $\vec{b}$ são contínuas sobre $[0,R]$ e $u'(0) = 0$. Então, para r suficientemente pequeno, o primeiro termo na integral é menor que o segundo, logo a integral é positiva. Assim, sobre um pequeno intervalo $(0,\delta]$, temos $u' < 0$ (δ depende de u e t). Observamos que precisamos pedir $u'(0) = 0$ se quizermos $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Mostremos que $u'(r) < 0$ para todo $r \in (0,R)$. Suponhamos que u' se anula em algum lugar de $(\delta,R]$. Seja $r_0 \in (\delta,R]$ definido por $r_0 := \inf\{r \in (\delta,R] : u'(r) = 0\}$. Então $u \in C^2(\delta,r_0)$ e satisfaz, fortemente, a equação

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = g(r)r^N u' + |t+u|^q r^{N-1}, \qquad \forall\, r \in (\delta,r_0), \quad (4.38)$$

ou, equivalentemente,

$$g(r)r^N u' = -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' - |t+u|^q r^{N-1}, \qquad \forall\, r \in (\delta,r_0), \quad (4.39)$$

Pela definição de r_0, existe uma seqüência crescente $\widetilde{r}_n \to r_0$, $(\widetilde{r}_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset (\delta,r_0)$, para a qual $u'(\widetilde{r}_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Conseqüentemente, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ temos $\widetilde{r}_n^{N-1}|u'(\widetilde{r}_n)|^{p-2}u'(\widetilde{r}_n) < 0$. Tomando uma seqüência (r_k) em $\{r \in (\delta,R] : u'(r) = 0\}$ convergindo para r_0, temos $\lim_{k\to\infty} u'(r_k) = u'(r_0) = 0$. Definamos $f(r) := r^{N-1}|u'|^{p-2}u'$. Então, pelo teorema do valor médio, existe $r_n \in (\widetilde{r}_n, r_0)$ tal que $f(r_0) - f(\widetilde{r}_n) = f'(r_n)(r_0-$

$\widetilde{r}_n$). Desde que $f(r_0) = 0,\ f(\widetilde{r}_n) < 0$ e $r_0 \geq \widetilde{r}_n$, temos que $f'(r_n) > 0$. Ou seja, existe uma seqüência $(r_n) \to r_0,\ r_n < r_0$ para todo n tal que

$$(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'|_{r_n} > 0. \tag{4.40}$$

Como $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega})$ e r_n é limitada, existe uma constante $D > 0$, independente de n, tal que $g(r_n)r_n^N \leq D$. Desde que $u'(r_n) < 0$, usando (4.40) e (4.39), temos, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, que

$$Du'(r_n) \leq g(r_n)r_n^N u'(r_n) < -(t + |u(r_n)|)^q r_n^{N-1} < -t^q r_1^{N-1}$$

e assim, $u'(r_n) < -t^q r_1^{N-1}/D$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} u'(r_n) < 0$. Por outro lado, como $u'(r_0) = 0$, temos que u' não é contínua e, portanto, u não é de classe C^1. Uma contradição. Assim, $u' < 0$ sobre $(0, R]$. Desde que $u \geq 0$ e $u' < 0$, temos $u > 0$ sobre $[0, R)$.

Supomos, no início, que $u' \neq 0$ em um pequeno intervalo $(0, r]$. Se isto não for o caso (e $u \neq 0$), existem duas seqüências decrescentes $0 < a_n \to 0$ e $a_n < b_n \to 0$ tais que $u'(a_n) = 0$, mas $u'(r) \neq 0$ para todo $a_n < r < b_n$. De fato, o conjunto $\{r \in (0, R) : u'(r) = 0\}$ é um conjunto fechado - imagem inversa de $\{0\}$ por uma função contínua - não contendo nenhum subconjunto aberto de medida positiva, pois se contivesse tal conjunto, cotradiria (4.38), já que $t > 0$. Seu complementar pode ser escrito como a união (talvez não enumerável) de subintervalos abertos. Para n suficientemente grande, desde que a equação é satisfeita pontualmente (mesma justificativa acima) sobre cada (a_n, b_n), podemos escrever o equivalente de (4.37) para tal intervalo e fazer o mesmo raciocínio acima para concluir, finalmente, que $u' < 0$ sobre $(a_n, R]$ para todo n suficientemente grande, provando o resultado. ■

Consideramos, aqui, o caso particular onde $f(u) = |u|^q$. Assim, podemos, aplicar o Lema 4.6, como também, o seguinte teorema do tipo Liouville, provado por Ni-Serrin-[25].

Lema 4.10 *O problema* (4.28) *não possui solução radial não trivial se* $p - 1 < q < Np/(N-p) - 1,$ *e* $p < N$.

Isto implica o seguinte resultado de existência e estimativa a priori.

Proposição 4.4 *Suponhamos que* $\vec{b} = -g(|x|)x \in C^1([0, \infty))$ *e* $div(g(|x|)x) \geq 0$. *Suponhamos, também, que* $1 < p \leq 2$ *e* $\max\{p-1, 1/(p-1)\} < q < Np/(N-p) - 1$. *Então, todas as soluções* (u, t) *de* (4.36) *são, a priori, limitadas. Além disso,* (4.36) *tem uma solução não trivial da forma* $(u, 0)$ *com* $u > 0$ *sobre* $[0, R)$ *e* $u' < 0$ *sobre* $(0, R]$.

Prova. O Teorema 4.2 permanece válido no caso onde Ω é uma bola, $\vec{b} = -g(|x|)x$ e o espaço $C_0^1(\overline{\Omega})$ é substituído por $C_{0,r}^1(\overline{\Omega}) := \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u$ é radialmente simétrica$\}$. Precisamos, apenas, substituir na aplicação do Lema 4.4 o operador G por

$$G : [0, \infty) \times C_{0,r}^1(\overline{\Omega}) \to C_{0,r}^1(\overline{\Omega}) : (t, u) \mapsto K(f(t + u)),$$

onde $K : L_r^\infty(\Omega) \to C_{0,r}^1(\overline{\Omega})$ é o operador definido como no Teorema 4.1, com $C_0^1(\overline{\Omega})$ trocado por $C_{0,r}^1(\overline{\Omega})$. Para vermos que G e K estão bem definidas, basta considerarmos, no Teorema 4.1, o operador H com o espaço $C_{0,r}^1(\overline{\Omega})$.

Suponhamos que nem toda solução de (4.36) seja limitada. Então, pelo Lema 4.6 (suas hipóteses são satisfeitas com a ajuda do Lema 4.9), existe uma função radial (não nula) que satisfaz (4.28). Isto contradiz o Lema 4.10.

Agora, pelo Teorema 4.2, (4.36) tem uma solução não trivial da forma $(u, 0)$ com $u > 0$ sobre $[0, R)$ e $u' < 0$ sobre $(0, R]$, pelo Lema 4.9. ∎

Vamos, agora, tratar o caso mais geral, onde $f(u)$ não é necessariamente uma potência. Neste caso, a prova do Lema 4.9 permanece válida se substituirmos (4.36) pelo problema

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' - g(r)r^N u' = f(t + |u|)r^{N-1} & \text{em } (0, R), \\ u(R) = 0, \ u'(0) = 0, \ u \in C^1[0, R], \end{cases} \tag{4.41}$$

onde f é uma função contínua e positiva satisfazendo (4.1). Trocando $|t+u|^q$ por $f(t+u)$ nessa prova, obtemos o

Lema 4.11 *Suponhamos que f é uma função contínua e positiva satisfazendo* (4.1). *Suponhamos, também, que* $\vec{b} = -g(|x|)x \in C^1([0, \infty))$ *e* $div(g(|x|)x) \geq 0$. *Então qualquer solução do problema* (4.41) *satisfaz* $u'(r) < 0, \ u(r) > 0$ *para todo* $r \in (0, R)$. *Além disso,* $u'(R) < 0$. *Em particular, toda solução radial atinge seu máximo global em 0.*

Usando o método de continuação e os resultados de blow-up, como na prova da Proposição 4.4, obtemos finalmente o seguinte resultado de existência:

Proposição 4.5 *Suponhamos que* $\vec{b} = -g(|x|)x \in C^1([0, \infty))$ *e* $div(g(|x|)x) \geq 0$, *e que f é uma função contínua e positiva satisfazendo* (4.1). *Suponhamos, também, que* $1 < p \leq 2$ *e* $\max\{p - 1, 1/(p - 1)\} < q \leq N(p - 1)/(N - p)$. *Então todas as soluções* (u, t) *de* (4.41) *são, a priori, limitadas. Além disso,* (4.41) *tem uma solução não trivial da forma* $(u, 0)$ *com* $u > 0$ *em* $[0, R)$ *e* $u' < 0$ *em* $(0, R]$.

Apêndice A

Resultados Complementares

Este apêndice destina-se a apresentar demonstrações de algumas resultados utilizados no corpo do trabalho.

Lema A.1 (i) *Se* $p \in [2, +\infty)$ *então vale:*

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2} \qquad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^N \;\; e \;\; \beta \in \mathbb{R}.$$

(ii) *Se* $p \in (1, 2]$, *então vale:*

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \bar{\beta}|z-y|^{p-1} \qquad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^N \;\; e \;\; \bar{\beta} \in \mathbb{R}.$$

Prova. (i) Consideremos $f : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ tal que $f(t) = |y + t(z-y)|^{p-2}(y + t(z-y))$. Então, $f(1) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)dt$ implica $|f(1) - f(0)| \leq \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt$. Além disso, como para $t \in [0,1]$, temos

$$|y + t(z-y)| \leq |y| + t|z-y| \leq |y| + |z-y| \leq |y| + |z| + |y| \leq 2(|z|+|y|),$$

segue-se

$$\begin{aligned}
||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| &\leq |z-y| \int_0^1 |y + t(z-y)|^{p-2}\, dt + \\
&+ (p-2)|z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-4}|(y+t(z-y))(y+t(z-y))|\, dt \\
&= (p-1)|z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-2}\, dt \\
&\leq (p-1)|z-y| \int_0^1 [2(|z|+|y|)]^{p-2}\, dt \\
&= 2^{p-2}(p-1)|z-y|(|z|+|y|)^{p-2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq 2^{p-2}(p-1)|z-y|(|z|+|y|)^{p-2} = \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2},$$

com $\beta = 2^{p-2}(p-1)$.

(ii) O caso $p = 2$ é imediato.

Notemos, inicialmente, que

$$\begin{aligned}
\left||z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y\right|^2 &= \left(|z|^{p-1}\right)+\left(|y|^{p-1}\right)-2|z|^{p-2}|y|^{p-2}\langle z,y\rangle \\
&= ||z|^{p-1}-|y|^{p-1}|^2+2|z|^{p-2}|y|^{p-2}|z||y|-2|z|^{p-2}|y|^{p-2}\langle z,y\rangle \\
&= ||z|^{p-1}-|y|^{p-1}|^2+2|z|^{p-2}|y|^{p-2}(|z||y|-\langle z,y\rangle),
\end{aligned}$$

para todo $z,y\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$.
Seja $r\in(0,\infty)$. Tomemos $C_r=1$ se $r\in(0,1]$ e $C_r=2^{1-r}$ se $r>1$. Assim, temos:

$$a^r+b^r\geq C_r(a+b)^r,\quad \forall\, a,b\in[0,\infty). \tag{A.1}$$

Com efeito, para $r>1$, fica $(a+b)^r\leq 2^{r-1}(a^r+b^r)$. Isto é o Lema A.3.
Para $r=1$, é imediato.
Para $r\in(0,1)$, fica $a^r+b^r\geq(a+b)^r$. Com efeito, a função $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=(x+b)^t-x^t-b^t$ com $t\in(0,1)$ *e* $b\in[0,\infty)$ satisfaz $f(0)=0$ e $f'(x)\leq 0$ para todo $x\in[0,\infty)$, pois, supondo $f'(x)>0$ obtemos a contradição $b<0$.

Neste caso, temos

$$\left||\bar a|^r-|\bar b|^r\right|\leq|\bar a-\bar b|^r\quad \forall\,\bar a,\bar b\in\mathbb{R}^N. \tag{A.2}$$

De fato, $|\bar a-\bar b|^r+|\bar b|^r\geq\left(|\bar a-\bar b|+|\bar b|\right)^r\geq|\bar a|^r$ implica $|\bar a-\bar b|^r\geq|\bar a|^r-|\bar b|^r$. Semelhanemente, $|\bar a-\bar b|^r+|\bar a|^r\geq\left(|\bar b-\bar a|+|\bar a|\right)^r\geq|\bar b|^r$ implica $|\bar a-\bar b|^r\geq|\bar b|^r-|\bar a|^r$. Portanto, $\left||\bar a|^r-|\bar b|^r\right|\leq|\bar a-\bar b|^r$.

Se $y=0$ ou $z=0$, é trivial. Podemos, então, supor $y,z\neq 0$. Utilizando (A.2) com $r=p-1$, $\bar a=z$, $\bar b=y$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left||z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y\right|^2 &= \left||z|^{p-1}-|y|^{p-1}\right|^2+2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right) \\
&\leq |z-y|^{2(p-1)}+2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right) \\
&= |z-y|^{2(p-1)}+2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right)^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right)^{2-p} \\
&\leq |z-y|^{2(p-1)}+2\left(|z||y|-zy\right)^{p-1}2^{2-p} \\
&\leq |z-y|^{2(p-1)}+2\frac{1}{2^{p-1}}|z-y|^{2(p-1)}2^{2-p} \\
&= \left(1+2^{2(2-p)}\right)\left(|z-y|^{p-1}\right)^2
\end{aligned}$$

que implica em (ii) com $\bar\beta=\left(1+2^{2(2-p)}\right)^{1/2}$. ■

Deve ser notado que na penúltima desigualdade utilizamos $-1\leq\dfrac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\leq 1$, e na última, usamos $(|z|-|y|)^2\geq 0$; ou melhor, $\dfrac{|z-y|^2}{2}\geq|z||y|-\langle z,y\rangle$.

Lema A.2 (i) *Se* $p\in(1,2]$, *então vale:*

$$(|z|+|y|)^{2-p}\langle|z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y,z-y\rangle\geq|z-y|^2\qquad\forall\,y,z\in\mathbb{R}^N.$$

(ii) *Se* $p\in[2,+\infty)$ *então vale:*

$$\langle|z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y,z-y\rangle\geq K(p)|z-y|^p\qquad\forall\,y,z\in\mathbb{R}^N.$$

onde $K(p)=\min\{2^{-1-p},5^{2-p}\}$

Prova. O caso $p = 2$ é imediato. Igualmente simples, quando $z = 0$ ou $y = 0$. Podemos então supor $p \neq 2$ e $z, y \neq 0$. Denotemos

$$r_p(y,z) = \langle |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y\rangle$$

e, por simetria, podemos tomar $|z| \geq |y| > 0$. Escrevamos $y = \beta z + \gamma w$, onde $w \neq 0$ é um vetor ortogonal a z e $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\langle y, z\rangle = \beta\langle z, z\rangle + \gamma\langle w, z\rangle = \beta|z|^2,$$

donde

$$|\beta| \leq \frac{|y|}{|z|} \leq 1. \tag{A.3}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} r_p(y,z) &= |z|^p - |z|^{p-2}\langle y, z\rangle - |y|^{p-2}\langle y, z\rangle + |y|^p \\ &= |z|^p + |y|^p - \beta\left(|z|^{p-2} + |y|^{p-2}\right)|z|^2. \end{aligned} \tag{A.4}$$

(i) Dessa última igualdade, temos

$$\begin{aligned} r_p(y,z) &= |z|^p - |y|^{p-2}|z|^2 - \beta|z|^p + \beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^{p-2}|z|^2 - 2\beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^p \\ &= |z|^p - |y|^{p-2}|z|^2 - \beta|z|^p + \beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^{p-2}|z|^2 - 2|y|^{p-2}\langle y, z\rangle + |y|^p \\ &= |z|^p - |y|^{p-2}|z|^2 - \beta|z|^p + \beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^{p-2}\langle z - y, z - y\rangle \\ &= (1-\beta)\left(|z|^{p-2} - |y|^{p-2}\right)|z|^2 + |y|^{p-2}|z - y|^2. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Agora, usando (A.3), temos

$$r_p(y,z) \geq |y|^{p-2}|z - y|^2 \geq \frac{|z - y|^2}{(|z| + |y|)^{2-p}}.$$

Daí resulta a desigualdade desejada.

(ii) Dado $\beta \leq 0$, a igualdade (A.4) e a desigualdade (A.1) implicam

$$r_p(y,z) \geq |z|^p + |y|^p \geq 2^{1-p}(|z| + |y|)^p \geq 2^{1-p}|z - y|^p \geq K(p)|z - y|^p$$

Para $\beta \in (0, 1/4)$, usando (A.4) e $|y| \leq |z|$, temos

$$\begin{aligned} r_p(y,z) &\geq |z|^p + |y|^p - \beta\left(|z|^{p-2} + |z|^{p-2}\right)|z|^2 = |z|^p + |y|^p - 2\beta|z|^p \\ &\geq (1 - 2\beta)|z|^p \geq \frac{1}{2}|z|^p = \frac{1}{4}(|z|^p + |z|^p) \geq \frac{1}{4}(|z|^p + |y|^p) \\ &\geq \frac{1}{4}2^{1-p}(|z|^p + |y|^p) \geq 2^{-1-p}|z - y|^p \geq K(p)|z - y|^p. \end{aligned}$$

Finalmente, para $\beta \in [1/4, 1]$ em (A.5) temos, evidentemente,

$$r_p(y,z) \geq |y|^{p-2}|z - y|^2.$$

E por (A.3), vem

$$\frac{|z - y|}{|y|} \leq \frac{|z| + |y|}{|y|} = \frac{|z|}{|y|} + 1 \leq \frac{1}{\beta} + 1 \leq 5;$$

então

$$\begin{aligned} r_p(y,z) &\geq |y|^{p-2}|z-y|^2 = |y|^{p-2}|z-y|^{2-p}|z-y|^p = \left(\frac{|z-y|}{|y|}\right)^{2-p}|z-y|^p \\ &\geq 5^{2-p}|z-y|^p \geq K(p)|z-y|^p, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Lema A.3 *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a \geq 0$, $b \geq 0$, *então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{A.6}$$

Prova. Se $a = 0$, (A.6) é óbvio. Se $a > 0$, (A.6) pode ser escrito na forma $(1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p)$ onde $0 \leq x = b/a$. A função $f(x) = (1+x)^p/(1+x^p)$ satisfaz $f(0) = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $f(x) > 1$ se $0 < x < \infty$. Portanto, f tem um máximo para $x \geq 0$ em seu único ponto crítico, $x = 1$. Como $f(1) = 2^{p-1}$, obtemos $(1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p)$, o que prova o lema. ■

Lema A.4 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado e* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1, *com derivada* F' *limitada. Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *para algum* $1 < p < \infty$, *então*

$$v := F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad e \quad v_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Prova. Temos que $|F'(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema do Valor Médio, $|F(x) - F(0)| = |F'(\xi)||x - 0|$, onde ξ está entre x e 0. Logo,

$$|F(x)| \leq M|x| + |F(0)| \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$\int_\Omega |v|^p = \int_\Omega |F(u)|^p \leq \int_\Omega (M|u| + |F(0)|)^p \leq 2^p M^p \int_\Omega |u|^p + 2^p|F(0)|^p|\Omega| < \infty,$$

pois Ω é limitado e $u \in L^p(\Omega)$. Além disso,

$$\int_\Omega |F'(u)u_{x_i}|^p \leq M^p \int_\Omega |u_{x_i}|^p < \infty,$$

pois $u_{x_i} \in L^p(\Omega)$. Resta verificar que para $i = 1, \ldots, N$

$$\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega F(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega F'(u)u_{x_i}\varphi \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Desde que Ω é limitado e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existe uma seqüência (u_n) em $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Daí $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ em $L^p(\Omega)$ $i = 1, \ldots, N$.

A menos de subseqüências, $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ q.t.p. em Ω e $|u_n| \leq h$, $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq h_i$ q.t.p. em Ω, com $h, h_i \in L^p(\Omega)$. Além disso,

$$F(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \to F(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad F'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \to F'(u_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \quad q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

e

$$\left|F(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq M\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| h + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| |F(0)| \leq (Mh + F(0))\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \quad q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

$$\left|F'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\right| \leq Mh_i|\varphi| \quad q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

Como $(Mh + F(0))\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|$, $Mh_i\varphi \in L^1(\Omega)$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_\Omega F(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \to \int_\Omega F(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \int_\Omega F'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \to \int_\Omega F'(u_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi.$$

Mas, por integração por partes e da regra da cadeia usual temos que

$$\int_\Omega F(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega F'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega F(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega F'(u)u_{x_i}\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \;\text{ e }\; i = 1, \ldots, N.$$

Portanto, $v = F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v_{x_i} = F'(u)u_{x_i}$ $i = 1, \ldots, N$. ■

Proposição A.1 *Seja Ω limitado e $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u_+ = \max\{u, 0\}$, $u_- = \max\{-u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega)$, e*

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u, & q.t.p. \text{ sobre } \{u > 0\} \\ 0, & q.t.p. \text{ sobre } \{u \leq 0\}, \end{cases} \qquad \nabla u_- = \begin{cases} -\nabla u, & q.t.p. \text{ sobre } \{u < 0\} \\ 0, & q.t.p. \text{ sobre } \{u \geq 0\}. \end{cases}$$

Conseqüentemente, $\nabla u = 0$ q.t.p. sobre o conjunto $\{u = 0\}$. Além disso, $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prova. Para $\varepsilon > 0$, definamos

$$f_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & \text{se } z > 0 \\ 0, & \text{se } z \leq 0. \end{cases}$$

Por um cálculo simples, temos que $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ e tem derivada limitada. Além disso, notemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(u) = \begin{cases} u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u \leq 0. \end{cases}$$

Isto é, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(u) = u_+$.

Pelo Lema A.4, $f_\varepsilon(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\dfrac{\partial f_\varepsilon(u)}{\partial x_i} = f'_\varepsilon(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Com isso, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_{\{u\geq 0\}} \phi \frac{u}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \to \int_\Omega u_+\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \text{quando } \varepsilon \to 0,$$

e

$$\int_{\{u\geq 0\}} \phi \frac{u}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial x_i} \to \int_{\{u\geq 0\}} \phi\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega u_+\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_{\{u\geq 0\}} \phi\frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto, $\dfrac{\partial u_+}{\partial x_i}$ existe, e

$$\frac{\partial u_+}{\partial x_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{q.t.p. sobre } \{u>0\} \\ 0, & \text{q.t.p. sobre } \{u\leq 0\}. \end{cases}$$

com $i = 1, \ldots, N$.

Desde que $|u_+| \leq |u|$ e $\left|\dfrac{\partial u_+}{\partial x_i}\right| \leq \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|$, segue que

$$\int_\Omega |u_+|^p \leq \int_\Omega |u|^p < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega \left|\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\right|^p \leq \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Logo, $u_+, \dfrac{\partial u_+}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$; donde $u_+ \in W^{1,p}(\Omega)$, e

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{q.t.p. sobre } \{u>0\} \\ 0, & \text{q.t.p. sobre } \{u\leq 0\}, \end{cases}$$

Como $u_- = (-u)_+$, segue que $u_- \in W^{1,p}(\Omega)$, pois $-u \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla u_- = \nabla(-u)_+ = \begin{cases} \nabla(-u), & \text{q.t.p. sobre } \{-u>0\} \\ 0, & \text{q.t.p. sobre } \{-u\leq 0\}, \end{cases}$$

donde

$$\nabla u_- = \begin{cases} -\nabla u, & \text{q.t.p. sobre } \{u<0\} \\ 0, & \text{q.t.p. sobre } \{u\geq 0\}. \end{cases}$$

Notemos que $\{u=0\} = \{u \geq 0\} \cap \{u \leq 0\}$, donde $\nabla u_+ = \nabla u_- = 0$ q.t.p. sobre $\{u=0\}$. Logo, $\nabla u = \nabla u_+ - \nabla u_- = 0 \quad q.t.p.$ sobre $\{u=0\}$.

Além disso, como $|u| = u_+ + u_-$ e $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, temos que $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$. ■

O resultado sequinte nos fornece um método alternativo para provarmos o Teorema 3.6 (cf. Observação 3.8).

Teorema A.1 *Sejam X e Y espaços de Banach reais e $T, S : X \to Y$ dois operadores (geralmente não lineares) tais que:*
(i) T é bijetivo e T^{-1} é contínuo;
(ii) S é compacto.
Seja $\lambda \neq 0$ um número real tal que:
(iii) $\|(\lambda T - S)x\| \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$;
(iv) existe uma constante $R > 0$ tal que:

$(iv)_1$ $\|(\lambda T - S)x\| > 0$ se $\|x\| \geq R$;

$(iv)_2$ $deg\left(I - T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}S\right), B(0,R), 0\right) \neq 0$.
Então $\lambda T - S$ é sobrejetivo de X sobre Y.

Prova. Claramente, $\left(\frac{1}{\lambda}S\right) : \overline{B}(0,R) \to X$ é compacto e, em virtude de $(iv)_1$, o grau de Leray-Schauder em $(iv)_2$ pode ser definido. Além disso, pelo lema de excisão,

$$deg\left(I - T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}S\right), B(0,R_1), 0\right) = deg\left(I - T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}S\right), B(0,R), 0\right) \neq 0, \quad \forall\, R_1 \geq R.$$

Seja y um elemento em Y. Provemos que existe $x \in X$ tal que

$$(\lambda T - S)x = y. \tag{A.7}$$

Seja $R_1 \geq R$ tal que

$$\|(\lambda T - S)x\| > \|y\| \qquad \text{se } \|x\| \geq R_1. \tag{A.8}$$

Mostraremos que existe $x \in B_{R_1}$ satisfazendo (A.7) ou, equivalentemente,

$$\exists\, x \in B(0,R_1) \quad \text{tal que} \quad x = T^{-1}\left[\frac{1}{\lambda}(Sx + y)\right].$$

Consideremos o operador compacto

$$A : \overline{B}(0,R_1) \to X, \quad Ax = T^{-1}\left[\frac{1}{\lambda}(Sx + y)\right].$$

Em virtude de (A.8), $x \neq Ax$ para qualquer $x \in \partial B(0,R_1)$. Mostraremos que $deg(I - A, B(0,R_1), 0) \neq 0$. Para isto, consideremos a homotopia de transformações compactas

$$H : ([0,1] \times \overline{B}(0,R_1)) \to X, \quad H(t,x) = T^{-1}\left[\frac{1}{\lambda}(Sx + ty)\right].$$

Em virtude de (A.8), $x \neq H(t,x)$ para todo $t \in [0,1]$ e todo $x \in \partial B(0,R_1)$. Conseqüentemente, temos

$$deg(I - H_1, B(0,R_1), 0) = deg(I - H_0, B(0,R_1), 0),$$

isto é,

$$deg(I - A, B(0,R_1), 0) = deg\left(I - T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}S\right), B(0,R_1), 0\right) \neq 0.$$

Segue-se que A tem um ponto fixo em $B(0,R_1)$ ou, equivalentemente, (A.7) tem uma solução em $B(0,R_1)$. ■

Observação A.1 *Uma condição suficiente para satisfazer as hipóteses do Teorema* A.1 *é, de início, existir uma constante* $r > 0$ *tal que, de* $x = tT^{-1}\left((1/\lambda)S\right)x$, *com* $x \in X$ *e* $t \in [0, 1]$, *segue que* $\|x\| < r$.

De fato, seja $r_1 > 0$ *tal que* $\|(\lambda T - S)\| > 0$ *se* $\|x\| \geq r_1$ *e seja* $R = \max\{r, r_1\}$. *Então,* $deg(I - T^{-1}\left((1/\lambda)S\right), B(0, R), 0) \neq 0$. *Para provar isto é suficiente usar a invariância do grau por homotopia de transformações compactas, com* $H : ([0, 1] \times \overline{B}(0, R)) \to X$ *dada por* $H(t, x) = tT^{-1}\left((1/\lambda)S\right)$.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Anane, A., *Etude des valeurs propres et de la résonnance pour l'opérateur p-Laplacien*, Th. Doct., Universite Libre de Bruxelles, 1987.

[3] Azizieh, C., *A Priori Estimates and Continuation Methods for Positive Solutions of p-Laplacian Equations*, Journal of Differential Equations, **179**, 213-245, 2002.

[4] Azizieh, C., *Some results on positive solutions of equations including the p-Laplacian operator*, Nonlinear Analysis, **55**, 191-207, 2003.

[5] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[6] Berestycki, M. H., *Methodes Topologiques Et Problemes Aux Limites Non Lineaires,* Soutenue le 18 MARS 1975.

[7] Brezis, H., *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.

[8] Chang, K. C., *Variational Methodes for Non-Differentiable Functionals and Applications to Partial Differential Equations*, J. Math. Anal. Appl. **80**, 102-129, 1981.

[9] Costa, D. G., *Tópicos em Análise Não Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[10] Costa, D. G., Magalhaes, C. A., *Existence results for perturbations of the p-Laplacian*, J. Nonlinear Analysis TMA, **24**(3), 409-418, 1995.

[11] Cringanu, J., *Multivalued Neumann Problems with p-Laplacian*, Analele Universitatii Bucuresti, Bucharest, 2003.

[12] Cringanu, J., *Variational and topological methods for Neumann problems with p-Laplacian*, Communications on Applied Nonlinear Analysis, vol. 11, **Nº 1**, 1-38, 2004.

[13] Dinca, G., Jebelean, P., Mawhim, J., *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian*, Portugaliae Mathematica, vol. 58, **Nº 3**, 339-378, 2001.

[14] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[15] Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[16] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, 2001.

[17] Hachimi, A., Gossez, J. P., *On a nonresonance condition near the first eigenvalue for a quasilinear elliptic problem*, Partial Differential Equations, **Nº 82**, 144-151, 1993.

[18] Jebelean, P., *Metode de analiza neliniara cu aplicatii in probleme la limita cu p-Laplacian - Monotonie si compacitate*, Editura Universitatii de Vest, Timisoara, 2001.

[19] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[20] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1989.

[21] Liebermann, G. M., *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, TMA **12**, 1203-1219, 1988.

[22] Lions, J. L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[23] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[24] Mitidieri, E., Pohozaev, S. I., *Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$*, PSMI **227**, 1-32, 1999.

[25] Ni, W. M., Serrin, J., *Nonexistence theorems for quasilinear partial differential equations*, CPAM **39**, 379-399, 1986.

[26] Pelissier, M. C., *Sur quelques problèmes non-linéaires en glacelogie*, These, Publ. Math. d'Orsay, **110**, 1975.

[27] Peral, I. A., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Spain, 1997.

[28] Rabinowitz, P. H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Aplications to Differential Equations*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Nr. **65**, Amer. Math. Soc., 1986.

[29] Rabinowitz, P. H., *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, Journal of Functional Analysis **7**, 487-513, 1970.

[30] Struwe, M., *Variational Methods and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian systems*, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[31] Tolksdorf, P., *On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations in domains with conical boundary points*, CPDE **8**, 773-817, 1983.

[32] Vázquez, J. L., *A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations*, J. Math. Anal. Appl. Math. Optim.**12**, 191-202, 1984.

[33] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, 1996.

[34] Wang, Xu-Jia, *Neumann Problems of Semilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Journal of Differential Equations **93**, 283-310, 1991.