Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções Periódicas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano no $\mathbb{R}^3$

por

Naldisson dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho de 2006

João Pessoa - PB

Dedicatória

À,

Adelaide Elídia Gouveia(In Memorian)

Agradecimentos

- Ao Professor Nelson Nery de Oliveira Castro, por ter sido, não apenas, um excelente Orientador, mas também, um verdadeiro amigo. Agradeço também, pela confiança no meu trabalho, pela paciência e exigência necessárias, pela enorme contribuição, sem a qual este trabalho não teria sido realizado. Em fim, sou eternamente grato a Nelson Nery.

- Aos professores participantes da minha banca, Fágner Dias Araruna e Jorge Ferreira, pelas correções, sugestões e por outros grandes motivos.

- Aos meus pais, José dos Santos e Maria Arlete dos Santos, e aos meus irmãos, Ana, Neuma, Ada, Unaldo, Fábio, Fabiana, Flávia, pela confiança e apoio constante.

- Aos professores da pós-graduação. Especialmente, aos professores Roberto Callejas Bedregal, Everaldo Souto de Medeiros, Fernando Antônio, João Marcos Bezerra do Ó.

- Aos colegas de curso e amigos, pela troca de experiências e risos, numa convivência prazerosa. Em especial, aos meus dois grandes amigos, Anderson e Gilson, por infinitos motivos.

- Aos meus grandes amigos do bar do Paulista: Elvis, Kirque, Alex, Nego, Sávio, Marcela, Radamark. Em especial, ao grande Lúcero (conhecido como priquitinho), por momentos de alegria, descontração, companherismo, etc.

- A CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamente de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções periódicas para um sistema de equações diferenciais parciais de evolução não-linear de segunda ordem envolvendo o operador pseudo-Laplaciano. Para mostrar a existência de soluções periódicas usamos o método de Faedo-Galerkin juntamente com argumentos da teoria do ponto fixo.

Palavras-Chave: soluções periódicas, pontos fixo, problema de evolução não-linear, pseudo-Laplaciano.

Abstract

In this work we study the existence of periodic solutions for a nonlinear evolution system of second order partial differential equations involving the pseudo-Laplacian operator. To show the existence of periodic solutions we together use the method of Faedo-Galerkin with arguments of the theory of the fixed point.

Keywords: periodic solutions, fixe points, nonlinear evolution problem, Pseudo-Laplacian.

Conteúdo

Introdução

O movimento de mesons carregados em um campo eletromagnético pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações não lineares de Klein-Gordon:

$$Bu + \alpha^2 u + av^2 u = 0, \qquad Bv + \beta^2 v + bu^2 v = 0, \tag{1}$$

onde $B = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, u, v são campos escalares de massas α e β, respectivamente, e a, b são constantes de interação. Este modelo foi proposto por I. Segal [21].

Em 1987, Medeiros e Milla Miranda [17] consideraram a seguinte generalização de (1):

$$Bu + |v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u = f, \qquad Bv + |u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v = g. \tag{2}$$

Aqui ρ é um número real, $\rho > -1$, e f, g são funções dadas. Os autores em [17] provaram existência de soluções para (2) com condições iniciais e condições de fronteira Dirichlet homogênea para qualquer dimensão n, e unicidade para qualquer $n \leq 3$.

Mais recentemente, em 1997, Castro [9] estudou o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'' + Au - \Delta u' + |v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u & = & f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + |u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v & = & f_2. \end{array} \right. \tag{3}$$

onde $z' = \dfrac{\partial z}{\partial t}$ e A é o operador pseudo-Laplaciano dado por

$$A\omega = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\Big), \quad p > 2.$$

Este sistema pode ser visto como uma generalização matemática de (2). Castro em [9] obteve resultados sobre a existência de soluções globais e seu decaimento quando $t \to \infty$ com uma condição inicial dada e considerando condições de fronteira Dirichlet homogênea. Para problemas relacionados, veja [26] e [27].

Aqui estudamos, com algumas condições impostas, a existência de soluções periódicas, em um sentido fraco, para o sistema (3).

Esta dissertação está organizada como segue:

- No capítulo 1, damos, sem prova, alguns resultados que serão úteis no decorrer do capítulo 2. Para as provas dos resultados, referências são dadas no final da dissertação.

- No capítulo 2 enunciamos e provamos o teorema de existência de soluções periódicas para o sistema (3).

- Por fim, apresentamos dois apêndices, A e B. O apêndice A é voltado inteiramente ao operador pseudo-Laplaciano, demonstrando algumas de suas propriedades, e o apêndice B a pequenos cálculos, porém cruciais na demonstração do teorema principal.

Aqui, particularizamos a dimensão do espaço, provamos o teorema para $n = 3$. O caso geral foi estudado por [8].

Notações

Serão usados as seguintes notações no decorrer desta dissertação:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, aberto limitado bem regular;

- $Q = \Omega \times (0,T),\ T > 0$, é o cilindro em $\mathbb{R}^4$ com base Ω e altura T;

- $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$ é a fronteira lateral de Q, onde Γ é a fronteira de Ω;

- $\Delta = \displaystyle\sum_{i=}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano;

- A é o operador pseudo-Laplaciano definido por

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

$$u \longmapsto Au,$$

onde $Au = -\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big).$

No Apêndice provaremos que A tem as seguintes propriedades:

- A é monótono, hemicontínuo, coercivo e limitado;
- $\big\langle Au, u \big\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = ||u(t)||_0^p;$
- $\big\langle Au(t), u'(t) \big\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \dfrac{1}{p}\dfrac{d}{dt}||u||_0^p,\ \frac{d}{dt} =';$
- $||Au||_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C||u||_0^{p-1}.$

- $||\ .\ ||_0$, norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $||\ .\ ||_{1,p}$, norma em $W^{1,p}(\Omega)$;

- $||\ .\ ||_m$, norma euclidiana em $\mathbb{R}^m$;

- $||\ .\ ||,\ \big((\ .\ )\big)$, norma e produto interno, respectivamente, em $H_0^1(\Omega)$;

- $|\ .\ |,\ (\ .\ )$, norma (às vezes denotará também o valor absoluto, donde as circunstâncias deixarão clara a distinção) e produto interno em $L^2(\Omega)$;

- V' denota o espaço dual topológico do espaço linear V e p' denota o expoente conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

- $V \hookrightarrow H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ denotam, imersão contínua e densa, e imersão compacta, respectivamente, de V em H;

- $C_T^k(\mathbb{R})$, subespaço linear de todas funções reais T-periódicas em $C^k(\mathbb{R})$, $T > 0$;

- I_T, qualquer intervalo da forma $[a, a+T]$. A integral sobre I_T será denotado por $\displaystyle\int_T$;

- Seja X um espaço de Banach. Então $L^p(T, X)$ denotará o espaço linear de todas funções T-periódicas, $u : \mathbb{R} \to X$, tal que $||u(t)||_X \in L^p(I_T)$, onde $||\ .\ ||_X$ é a norma em X;

- Se $1 \leq p \leq \infty$, então $||u||_{L^p(T,X)} = \big(\displaystyle\int_T ||u(t)||_X^p dt\big)^{1/p}$ define uma norma em $L^p(T, X)$, com a qual é um espaço de Banach;

- Se $p = \infty$, $L^\infty(T, X)$ é um espaço de Banach com respeito a norma definida por $||u||_{L^\infty(T,X)} = \sup ess ||u(t)||_X$;

- Denota-se por W_{2m} o espaço $W_{2m} = C_T^1(\mathbb{R}) \times \cdots \times C_T^1(\mathbb{R})$, produto cartesiano de $2m$-cópias do espaço $C_T^1(\mathbb{R})$ e por $K(W_{2m})$ o espaço linear de todos operadores compactos de W_{2m} em W_{2m}. Para $Y_m \in W_{2m}$, define-se

$$||Y_m||_{W_{2m}} = \sup_t \{||Y_m(t)||_{2m} + ||Y_m'(t)||_{2m}\}.$$

Prova-se que $||\ ||_{W_{2m}}$ é uma norma sobre W_{2m} e que, munido desta norma, W_{2m} é um espaço de Banach.

Capítulo 1

Terminologia e Resultados Preliminares

O objetivo deste capítulo é listar algumas definições e notações básicas da Teoria das Equações Diferencias Parciais a fim de apresentar os resultados preliminares fundamentais para o desenvolvimento do cerne deste trabalho. Entretanto, não nos preocupamos, neste capítulo, em demonstrar os resultados enunciados, apenas mencionaremos as referências bibliográficas onde os mesmos podem ser encontrados.

1.1 Resultados de Convergência

Teorema 1.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_n$ uma sequência fortemente limitada em X' (dual de X). Então $(f_n)_n$ tem uma subsequência $(f_{nk})_k$ que converge fraco-$*$, isto é, $f_{nk} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em X'.*

Prova. ver [2]. ∎

Teorema 1.2 (Kakutani) *Sejam X um espaço de Banach. X é reflexivo se, e somente se, $(x_n)_n$ fortemente limitada em X possui uma subsequência (x_{nk}) que converge fraco, isto é, $x_{nk} \rightharpoonup x$ em X.*

Prova. ver [2]. ∎

Teorema 1.3 (Aubin-Lions) *Sejam X, B, Y espaços de Banach, X é reflexivo e $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. Suponha que $(u_n)_n$ seja uma sequência uniformemente limitada em*

$L^p(0,T;X)$ *tal que* $(\frac{d}{dt}u_n)_n = (u'_n)_n$ *seja limitada em* $L^p(0,T;Y)$ *para algum* $p > 1$. *Então existe uma subsequência de* $(u_n)_n$ *que converge fortemente em* $L^2(0,T;B)$.

Prova. ver [12]. ■

Teorema 1.4 (Lebesgue) *Seja* $(u_n)_n$ *uma sequência de funções integráveis em* (a,b), *convergente quase sempre para uma função* u. *Se existir uma função integrável* u_0 *tal que* $|u_n(t)| \leq u_0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* u *é integrável e tem-se que* $\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$.

Prova. ver [16]. ■

Teorema 1.5 (Lema de Fatou) *Sejam* $(u_n)_n$ *uma sequência de funções integráveis tal que*

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t), \quad em \quad X, \quad q.s. \quad em \quad (a,b)$$

e suponhamos que existe uma constante positiva C *tal que* $\int_a^b ||u_n(t)||dt \leq C, \quad \forall\ n.$ *Então* u *é integrável e*

$$\int_a^b ||u(t)||dt \leq \liminf \int_a^b ||u_n(t)||dt$$

Prova. ver [16]. ■

Lema 1.1 (Lions) *Sejam* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$, g *e* g_j *funções de* $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, *tais que*

$$||g_j||_{L_q(\Omega)} \leq C, \ \forall\ j,$$

e

$$g_j \longrightarrow g, \quad q.s\ em \quad \Omega.$$

Então

$$g_j \rightharpoonup g, \quad em \quad L^q(\Omega).$$

Prova. ver [7], [12]. ■

Proposição 1.6 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e suponha que* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X'. *Então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* X'.

Prova. ver [2], [7]. ■

1.2 Desigualdades

- Desigualdade de Poincaré.

  Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe um constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||_0, \quad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

- Desigualdade de Young.

  Sejam $p > 1,\ q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall a \geq 0,\ \forall b \geq 0.$$

- Desigualdade de Holder.

  Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int |fg| \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)}.$$

- Desigualdade de Minkowsky.

  Sejam $f, g \in L^p(\Omega),\ p \geq 1$. Então $f + g \in L^p(\Omega)$ e

$$||f + g||_{L^p(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{L^p(\Omega)}.$$

As provas destas desigualdades podem ser vistas, por exemplo, em [2], [7].

1.3 Resultados de Existência

Teorema 1.7 *Sejam V e H dois Espaços de Hilbert e suponha que $V \subset H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. Então existe uma base espectral, $\{\omega_j\}_j$ de V, formando um sistema ortonormal completo em H.*

Prova. ver [18] ■

Lema 1.2 (Browder-B. An Ton) *Seja W um espaço de Banach separável e reflexivo. Existe um espaço de Hilbert H, separável, tal que $H \subset W$, com imersão contínua e densa.*

Prova. ver [3] ∎

Teorema 1.8 (Representação de Riesz) *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. *Então, existe uma única* $u \in L^{p'}(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u f dx, \quad \forall\ f \ \in \ L^p(\Omega),$$

e $||u||_{L^{p'}(\Omega)} = ||\varphi||_{(L^p(\Omega))'}$, *onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

Prova. ver [2] ∎

Teorema 1.9 *Todo espaço de Hilbert possui uma base ortonormal completa.*

Prova. ver [11] ∎

Teorema 1.10 *Se* H *é um espaço de Hilbert separável, então todo conjunto ortonormal completo em* H *é enumerável.*

Prova. ver [11] ∎

1.4 Espaços das Distribuições Escalares

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real contínua. O suporte de u é por definição, o fecho em Ω do conjunto $\{x \ \in \ \Omega; u(x) \neq 0\}$. Este conjunto será representado por *supp*(u). Segue diretamente da definição que o suporte é o menor fechado fora do qual u se anula, e vale:

a) $supp(u + v) \subset supp\ u + supp\ v$;

b) $supp(uv) \subset supp\ u \cap supp\ v$;

c) $supp(\lambda v) = supp\ v. \qquad \lambda \neq 0.$

Aqui, usaremos inicialmente o espaço das funções infinitamente diferenciáveis cujo suporte é um compacto contido Ω, com notação $C_0^\infty(\Omega)$.

Um multi-índice é uma $n - upla$ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n$. Escrevemos $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ e representaremos D^α como o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}.$$

Observe que, para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ temos $D^0 u = u$. Note também que $supp(D^\alpha u) \subset supp\ u, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, quando u for suficientemente diferenciável.

Aqui, também é importante darmos a noção de convergência no espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, já que com tal convergência ele se tornará um espaço topológico.

Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se:

$i)$ Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp \varphi \subset K \ \text{ e } \ supp \varphi_n \subset K, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N};$$

$ii)$ $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Representaremos $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima, por $D(\Omega)$, denominado de Espaço das Funções Testes.

Note que, se $\varphi_n \to \varphi$ em $D(\Omega)$ então $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, em $D(\Omega)$.

Uma distribuição escalar sobre Ω é uma forma linear e contínua $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ com respeito a topologia de $D(\Omega)$. Assim, se uma sequência $(\varphi_n)_n$ convergir para uma φ em $D(\Omega)$, então $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$, cujo valor de T aplicada a φ será denotado por $\langle T, \varphi \rangle$.

Denotamos por $D'(\Omega)$, o espaço vetorial de todas as distribuições escalares sobre Ω.

Considere-se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, u é uma função de Ω em $\mathbb{R}$, localmente integrável, ou seja, u é integrável a Lebesgue sobre todo compacto $K \subset \Omega$. O funcional $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

é linear e contínuo, logo, uma distribuição escalar sobre Ω. Para mais detalhes veja ([10]). Daí, T_u é dita distribuição gerada por uma função localmente integrável u. Observe que se $T_u = T_v$ então $u = v$ (ver [10]), logo T_u é univocamente determinada por u, portanto, neste sentido podemos identificar u com sua distribuição T_u.

Exemplo 1 *Seja $x_0 \in \Omega$. Então δ_{x_0} definida por*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D(\Omega)$$

é uma distribuição sobre Ω, denominada delta de Dirac. prova-se (ver [10]) que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função localmente integrável, isto é, não existe uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Logo, o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ não é igual ao espaço $D'(\Omega)$, uma vez que existem distribuições sobre Ω que não são geradas por nehuma função localmente integrável.

1.4.1 Convergência e Derivação em $D'(\Omega)$

Dizemos que a sequência de distribuições escalares $(T_n)_n$ converge para T em $D'(\Omega)$ se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \text{ em } \mathbb{R}, \; \forall \; \varphi \; \in \; D(\Omega).$$

Com essa noção de convergência, $D'(\Omega)$ torna-se um espaço vetorial topológico, e temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), \; 1 < p < \infty.$$

Além disso, necessitamos do conceito de derivada distribucional, uma vez que isso se faz necessário para o estudo dos espaços de Sobolev que veremos a seguir.

O que motivou a formulação de derivada fraca e consequentemente a derivada distribucional, foi a fórmula de integração por partes do cálculo.
De fato, em dimensão 1, temos a fórmula de integração

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx,$$

e quando $\varphi \; \in \; D(a,b)$ temos

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx.$$

Motivado pela igualdade acima Sobolev, definiu a derivada fraca de uma função $u \; \in \; L^1_{loc}(a,b)$ como uma distribuição $v \; \in \; L^1_{loc}(\Omega)$, caso exista, tal que:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b v(x)\varphi'(x)dx, \; \forall \; \varphi \; \in \; C_0^\infty(a,b).$$

Este conceito foi generalizado para distribuições quaisquer, em $D'(\Omega)$, da seguinte maneira. Dados $T \; \in \; D'(\Omega)$ e $\alpha \; \in \; \mathbb{N}^n$, definimos a derivada distribucional de ordem

α de T como a forma linear $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \varphi \in D(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição (ver [10]).

1.5 Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach, $1 \leq p \leq \infty$ e $T > 0$ um número real. Representa-se por $L^p(0,T;X)$ o espaço das funções $u : (0,T) \to X$ mensuráveis tais que $||u(t)||_X \in L^p(0,T)$. Para $1 \leq p < \infty$ este é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = \infty$, $L^\infty(0,T;X)$ será um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} ess ||u(t)||_X.$$

Agora, fixemos $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$, e consideremos o espaço $D(0,T)$. Associada a função u, definamos a função $T_u : D(0,T) \to X$, dada por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)ds, \ \forall \ \varphi \in D(0,T).$$

Observe que esta integral é um vetor no espaço vetorial X. Prova-se que T_u é linear e contínua.(ver [14])

Diz-se então que T_u é uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ à valores em X, definida por uma função $u \in L^p(0,T;X)$, e escreve-se

$$T_u \in \mathcal{L}(D(0,T), X).$$

O espaço $\mathcal{L}(D(0,T), X)$ é dito espaço vetorial das distribuições sobre $(0,T)$ a valores em X, e contém em particular as distribuições vetoriais definidas pelas funções de $L^p(0,T;X)$. Na prática, denotamos $\mathcal{L}(D(0,T), X) = D'(0,T;X)$.

1.6 Espaços de Sobolev

1.6.1 Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, p um número real tal que $1 \leq p < \infty$ e m um número natural. Denota-se por $W^{m,p}(\Omega)$, ao espaço vetorial

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \ \in \ L^p(\Omega); D^\alpha u \ \in \ L^p(\Omega), \ \forall \ |\alpha| \leq m\}.$$

A função

$$||.||_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$||u||_{m,p} = \big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \big)^{\frac{1}{p}},$$

é uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$, o qual é Banach com esta norma.

Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$, são ditos espaços de Sobolev de ordem α sobre Ω. Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ recebem a notação

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Verifica-se que $H^m(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert, com o produto interno definido por

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(.)_{L^2(\Omega)}$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$.

1.6.2 O espaço $W^{m,\infty}(\Omega)$

Seja $m \in \mathbb{N}$. Por $W^{m,\infty}(\Omega)$ entende-se como o espaço vetorial

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{u \ \in \ L^\infty(\Omega); D^\alpha u \ \in \ L^\infty(\Omega), \ \forall \ |\alpha| \leq m\}.$$

Munido da norma

$$||u||_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)},$$

$W^{m,\infty}(\Omega)$ torna-se um espaço de Banach.

1.6.3 Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$

Note que o espaço das funções testes $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$ (ver[10]). Porém, não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$.

Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$, o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Como consequência da Desigualdade de Poincaré, a expressão

$$||u||_0 = \Big(\sum_{0<|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma natural para este espaço.

Em $W^{1,p}_0(\Omega)$, caso que nos diz respeito, temos

$$||u||_0 = \Big(\sum_{i=1}^n || \frac{\partial u}{\partial x_i} ||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$||u||_{1,p} = \Big(\sum_{i=1}^n || \frac{\partial u}{\partial x_i} ||^p_{L^p(\Omega)} + ||u||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Prova-se que

$$||u||_0 \leq ||u||_{1,p} \leq C||u||_0, \quad \forall \; u \in \; W^{1,p}_0(\Omega).$$

Existem outras caracterizações para tal espaço, veja por exemplo, [10].

Uma atenção especial deve ser dada ao espaço dual de $W^{m,p}_0(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, denotado por $W^{-m,q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que é constituído pelos funcionais lineares contínuos

$$T : W^{m,p}_0(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Mostra-se que, se $T \in D'(\Omega)$, então $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se , e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha.$$

Veja a demonstração em [10], por exemplo.

1.7 Teoremas de Imersão

- Caso $\Omega = \mathbb{R}^n$

Teorema 1.11 *Se $1 \leq p < n$ então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0.$$

Teorema 1.12 *Se $n > mp$ e $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$ então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Teorema 1.13 *Se* $kp < n$ *e* $\dfrac{1}{q_k} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{n}$ *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-k,q_k}(\Omega).$$

Teorema 1.14 *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *com* $n \geq 2$ *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall\ q \geq 1$$

Teorema 1.15 *Sejam* $\alpha = m - \dfrac{n}{p} > 0$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *tais que* $k < \alpha \leq k+1$. *Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega).$$

- Caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado e bem regular

Teorema 1.16 *Sejam* n *um número natural,* p *um número real e suponhamos* $1 \leq p < n$. *Então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}.$$

Teorema 1.17 *Suponha que* $n > mp$. *Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad q \leq \frac{np}{n-mp}.$$

Tem-se ainda,

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad q < \frac{np}{n-mp}.$$

Teorema 1.18 *Se* $k \leq m$ *e* $n > (m-k)p$, *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad q \leq \frac{np}{n-(m-k)p}.$$

Além disso,

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,q}(\Omega), \quad q < \frac{np}{n-(m-k)p}.$$

Teorema 1.19 *Se* $mp = n$. *Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \forall\ q \ \in \ [1, +\infty).$$

Teorema 1.20 *Se* $mp > n$. *Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{0,\mu}(\overline{\Omega}),$$

para,

$$\mu = m - \frac{n}{p}, \quad se, \quad m - \frac{n}{p} < 1,$$

$$\mu < 1, \quad se, \quad m - \frac{n}{p} = 1,$$

$$\mu = 1, \quad se, \quad m - \frac{n}{p} > 1.$$

Teorema 1.21 *As Imersões nos teoremas acima, caso* $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$*, permanecem verdadeiras quando se considera* Ω *apenas limitado e se substitui* $W^{m,p}(\Omega)$ *por* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

As demonstrações destes teoremas podem ser vistas em [10].

Sejam, I um intervalo real e $T > 0$. Consideremos X um espaço de Banach. Denotamos $C(0,T;X)$, como o espaço das funções contínuas, definidas em $I = (0,T)$ a valores em X, isto é,

$$u \in C(0,T;X) \Leftrightarrow u : (0,T) \to X \text{ é contínua},$$

onde a continuidade é medida no seguinte sentido: "Se $t \to t_0$ em $(0,T)$ então $u(t) \to u(t_0)$ na norma de X."

Lema 1.3 *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach, tais que* X *é imerso contínua e densamente em* Y*. Suponha que* $u \in L^p(0,T;X)$ *e* $u' \in L^p(0,T;Y)$, $1 \leq p \leq \infty$*. Então* $u \in C([0,T];Y)$.

Prova. Ver [14]. ■

Teorema 1.22 *O espaço das combinações lineares finitas, de somas finitas, de produtos do tipo* $c_j\omega_j$*, com* $c_j \in C_T^1(\mathbb{R})$, $\omega_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *é denso no espaço*

$$V = \left\{v \in L^2(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\}.$$

Prova. Ver [13]. ■

Teorema 1.23 (Hellinger-Toeplitz) *Se um operador linear* T *é definido sobre todo um espaço de Hilbert* H *e satisfaz* $< Tx, y >=< x, Ty >$*, para todo* $x, y \in H$*, então* T *é limitado.*

Prova. ver [11]. ■

Teorema 1.24 (Fórmula de Leibnitz) *Se* $\alpha(x)$ *e* $\beta(x)$ *são funções continuamente diferenciáveis de* x*, e* $h(x,y)$ *é uma função contínua de* (x,y) *sobre* $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ *que tem uma derivada parcial contínua* $h_x(x,y)$ *com respeito a* x *sobre* $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$*, então*

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(x,y)dy = \beta'(x)h(x,\beta(x)) - \alpha'(x)h(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h_x(x,y)dy.$$

Prova. ver [11]. ■

1.8 Função de Green

Consideremos o problema de contorno

$$\begin{cases} y_m''(t) + ay_m'(t) + by_m(t) = 0 \\ y_m(0) = y_m(T), \quad y_m'(0) = y_m'(T). \end{cases} \tag{1.1}$$

Notemos que para $a^2 > 4b$, $y_m \equiv 0$ é a única solução do sistema acima. Dessa forma,

$$y_m(t) = \int_0^T G_m(t,s)f(s)ds$$

é a única solução do sistema não-homogênio

$$\begin{cases} y_m''(t) + ay_m'(t) + by_m(t) = f(t) \\ y_m(0) = y_m(T), \quad y_m'(0) = y_m'(T), \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $G_m : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ é a função de Green associada a (1.1) e tem as seguintes propriedades:

i) $G_m(t,s)$ é contínua em todo ponto $(t,s) \in I_T \times I_T$ e, para cada s, $G_m(t,s)$ satisfaz as condições iniciais dadas;

ii) $\dfrac{\partial}{\partial t} G_m(t,s)$ existe e é contínua para $t \neq s$;

iii) Seja $t_0 \in I_T$. Se $(t,s) \to (t_0,t_0)$, $t > s$, então $\dfrac{\partial}{\partial t} G_m(t,s)$ tem, para limite, um valor finito $\dfrac{\partial}{\partial t} G_m(t_0^+, t_0)$. Resultado análogo para $(t,s) \to (t_0,t_0)$ com $t < s$

iv) $G_m(t,s) = G_m(s,t)$.

Para maiores detalhes sobre funções de Green, veja, por exemplo, [22].

1.9 Grau de Brouwer

Sejam X um espaço vetorial normado de dimensão finita e $\Omega \subset X$, um aberto. Seja ainda $D_y(\Omega, X) = \{f \in C(\overline{\Omega}, X); y \notin f(\partial\Omega)\}$. Para cada $y \in X$, existe uma aplicação $d(\cdot, \Omega, y) : D_y(\Omega, X) \to \mathbb{Z}$, satisfazendo:

i) se $y \in \Omega$, então $d(I, \Omega, y) = 1$;

ii) se Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos, disjuntos, abertos, de Ω e $f : \overline{\Omega} \to X$ é contínua com $y \notin f\big(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2)\big)$, então

$$d(f, \Omega, y) = d(f\Big|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, y) + d(f\Big|_{\overline{\Omega}_2}, \Omega_2, y);$$

iii) $d(\cdot, \Omega, y)$ é contínua;

iv) se $f \in D_y(\Omega, X)$, então $d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0)$.

A aplicação $d(\cdot, \Omega, y)$, acima, é dita o grau de Brouwer de y em relação $\overline{\Omega}$.

Definição 1.25 *Seja $\epsilon > 0$. Um subconjunto $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ de X, espaço normado, é chamado um ϵ-net do subconjunto $B \subset X$ se a família das bolas abertas $\{B_\epsilon(x_\alpha); \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de B. Se o conjunto $\{x_\alpha\}$ é finito, então dizemos que $\{x_\alpha\}$ é um ϵ-net finito de B.*

Sejam $T : X \to X$, um operador compacto e $B \subset X$ um aberto, limitado com fronteira ∂B. Denota-se por I o operador identidade e suponhamos que $0 \notin (I - T)(\partial B)$. Então existe $r > 0$ tal que

$$\inf_{y \in \partial B} ||(I - T)(y) - 0|| \geq r.$$

Para demonstração ver [23], [25]. destacamos da demonstração dois fatos importantes, a saber:

- S_n, subspaço de dimensão finita de X contendo um $\epsilon_n - net$ de $\overline{T(B)}$ e pelo menos um elemento de B.

- $B_n = S_n \cap B$, aberto limitado não-vazio.

Em S_n e B_n o grau de Brouwer faz sentido.

Para maiores detalhes sobre o grau de Brouwer, veja por exemplo, [23], [24].

1.10 Grau de Leray-Schauder

Dados um espaço normado X, um compacto $K \subset X$ e um ϵ-net, $\{x_1, \ldots, x_p\}$, de K, define-se:

$$m_i(x) = \begin{cases} \epsilon - ||x - x_i||, & \text{se} \quad ||x - x_i|| \leq \epsilon \\ 0, & \text{se} \quad ||x - x_i|| > \epsilon \end{cases}$$

e

$$F_\epsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p} m_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^{p} m_i(x)}.$$

Teorema 1.26 *Consideremos um operador compacto $T : X \to X$ e $M \subset X$, um subconjunto limitado. Seja ainda $K \subset X$, um compacto e suponhamos $T(M) \subset K$. Então, para $x \in M$, tem-se*

$$||Tx - F_\epsilon x|| < \epsilon$$

Prova. ver [23]. ∎

Teorema 1.27 *Seja $(\epsilon_n)_n$ uma sequência monótona decrescente tal que $\lim_{\epsilon \longrightarrow \infty} \epsilon_n = 0$. Para cada $\epsilon_n > 0$ considera-se um ϵ-net, $\{x_1, \ldots, x_{p_n}\}$, de $\overline{T(K)}$. Então, $T_n = F_{\epsilon_n}T$ é uma ϵ_n-aproximação de T.*

Prova. Ver [23]. ∎

Sejam T um operador compacto de X e $B \subset X$ um subconjunto aberto limitado. O grau de Leray-Schauder de $I - T$ em 0 com relação a $\overline{B}$, denotado por $d(I - T, \overline{B}, 0)$, é definido como $d(I - T_n, \overline{B}_n, 0)$, onde T_n é como no Teorema 1.27 e B_n como na seção 1.9.

Para um estudo mais detalhado sobre o grau de Leray-Schauder, ver [23], [24] e [25].

1.10.1 Homotopia de Operadores Compactos

Uma aplicação $T_m : [0, 1] \to K(X)$ é dita uma homotopia de operadores compactos se, dados $\epsilon > 0$ e $M \subset X$ limitado, existe $\delta > 0$ tal que

$$||T_m(\mu)x - T_m(\lambda)x||_X < \epsilon, \quad \forall x \in M, \quad para \quad |\mu - \lambda| < \delta.$$

Proposição 1.28 (Invariância sob Homotopia) *seja $T_m : [0, 1] \to K(X)$ uma homotopia de operadores compactos. Seja $B \subset X$ um aberto limitado com fronteira ∂B. Suponhamos que $(I - T_m(\mu))x \neq 0$, $\forall x \in \partial B$, $\forall \mu \in [0, 1]$. Então, para todo $\mu \in [0, 1]$, $d(I - T_m(\mu), \overline{B}, 0)$ existe e tem o mesmo valor.*

Prova. Ver [23]. ∎

Teorema 1.29 *Seja* $T_m : [0,1] \to K(X)$ *uma homotopia de operadores compactos. Suponha que existe* $M > 0$ *tal que se* $(I - T_m(\mu))x_\mu = 0$, $\forall \mu \in [0,1]$, *então* $||x_\mu||_X \leq M$, *com* M *independente de* μ. *Seja*

$$B = \{x \in X; ||x||_X \leq rM, r > 1\}.$$

Então $d(I - T_m(\mu), B, 0)$ *existe e tem o mesmo valor, qualquer que seja* $\mu \in [0,1]$.

Prova. Ver [23]. ∎

Capítulo 2

Soluções Periódicas

Dados $2 < p < 3$, $0 \leq \rho \leq \frac{4p-8}{p+4}$, $f_i \in L^2(T; L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$, nosso objetivo é demonstrar a existência de soluções periódicas, em um sentido fraco, para o sistema:

$$\begin{cases} u'' + Au - \Delta u' + |v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u = f_1 & \\ & \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ v'' + Av - \Delta v' + |u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v = f_2 & \\ & \\ u(x,0) = u(x,T), \quad u'(x,0) = u'(x,T) & \\ & \text{em} \qquad \Omega \\ v(x,0) = v(x,T), \quad v'(x,0) = v'(x,T) & \\ & \\ \qquad u = 0, \quad v = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.1 *Uma solução periódica do sistema* (2.1) *é um par de funções* (u, v) *satisfazendo:*

i) $u, v \in L^\infty(T, W_0^{1,p}(\Omega))$*;*

ii) $u', v' \in L^2(T, H_0^1(\Omega))$*;*

iii) $$-\int_T (u'(t), w)\theta' dt + \int_T \langle Au(t), w\rangle \theta dt + \int_T ((u'(t), w))\theta dt + \\ + \int_T \langle |v(t)|^{\rho+2}|u(t)|^{\rho}u(t), w\rangle \theta dt = \int_T (f_1(t), w)\theta dt,\ \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \forall \theta \in C_T^1(R);$$

iv) $-\displaystyle\int_T (v'(t),w)\theta' dt + \int_T \langle Av(t),w\rangle \theta dt + \int_T ((v'(t),w))\theta dt +$
$$+\int_T \langle |u(t)|^{\rho+2}|v(t)|^{\rho}v(t),w\rangle \theta dt = \int_T (f_2(t),w)\theta dt,\ \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \forall \theta \in C_T^1(R).$$

O teorema a seguir é o principal resultado desta dissertação.

Teorema 2.2 *O sistema* (2.1) *admite solução períodica.*

O teorema será provado construindo um "sistema aproximado"em um espaço de dimensão finita com o método de Faedo-Galerkin e então provando que este problema aproximado tem soluções periódicas. A prova segue-se através de três etapas. O esquema é o seguinte:

Primeira etapa. Mostraremos que existe uma sequência de Soluções aproximadas $((u_n)_n,(v_n)_n)$. Introduziremos um parâmetro μ, $0 \leq \mu \leq 1$, e consideraremos um sistema μ-parametrizado. Fazendo uso de propriedades das funções de Green e teoria do grau de Leray-Schauder, provaremos a existência de soluções periódicas aproximadas para o sistema original.

Segunda etapa. Olharemos para as estimativas obtidas sobre as soluções aproximadas com o objetivo para passar o limite.

Terceira etapa. A passagem ao limite é realizado usando argumentos de compacidade e propriedades de monotonicidade do operador A.

2.1 Problema Aproximado

Seja $H_0^s(\Omega)$ um espaço de Hilbert imerso contínua e densamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, como no Lema B.1 do Apêndice B. Sendo $p > 2$, temos, dessa forma, a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega).$$

Notemos ainda que, sendo $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, segue-se que $H_0^s(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, logo, pelo Teorema 1.7 da Seção 1.3, existe uma base espectral, $\{\omega_j\}_j$ de $H_0^s(\Omega)$, formando um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$.

Seja

$$V_m = [\omega_1, \cdots, \omega_m],$$

o subespaço vetorial de dimensão finita de $H_0^s(\Omega)$ gerado pelos m-primeiros vetores da base $\{\omega_j\}_j$. O problema aproximado consiste em determinar $u_m(t), v_m(t) \in V_m$ solução para o sistema:

$$\begin{cases} (u''_m(t), \omega) + < Au_m(t), \omega > + ((u'_m(t), \omega)) + < |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), \omega >= \\ \qquad = (f_1(t), \omega), \qquad \forall \omega \in V_m, \\ \\ (v''_m(t), \omega) + < Av_m(t), \omega > + ((v'_m(t), \omega)) + < |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t), \omega >= \\ \qquad = (f_2(t), \omega), \qquad \forall \omega \in V_m, \\ \\ u_m(t) = u_m(t+T), \quad u'_m(t) = u'_m(t+T), \\ v_m(t) = u_m(t+T), \quad v'_m(t) = u'_m(t+T). \end{cases} \tag{2.2}$$

Para mostrar a existência de solução para o sistema (2.2), primeiramente o transformaremos em um sistema vetorial equivalente, como segue.

Podemos escrever (2.2), de forma equivalente, no sistema

$$\begin{cases} (u''_m(t), \omega_j) + < Au_m(t), \omega_j > + ((u'_m(t), \omega_j)) + < |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), \omega_j >= \\ \qquad = (f_1(t), \omega_j), \qquad j = 1, \cdots, m, \\ \\ (v''_m(t), \omega_j) + < Av_m(t), \omega_j > + ((v'_m(t), \omega_j)) + < |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t), \omega_j >= \\ \qquad = (f_2(t), \omega_j), \qquad j = 1, \cdots, m, \\ \\ u_m(t) = u_m(t+T), \quad u'_m(t) = u'_m(t+T), \\ u_m(t) = u_m(t+T), \quad u'_m(t) = u'_m(t+T). \end{cases} \tag{2.3}$$

Agora, supondo $(u_m(t), v_m(t))$ solução de (2.3), temos

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)\omega_i, \qquad v_m(t) = \sum_{i=1}^{m} d_{im}(t)\omega_i,$$

com

$$c_{im}(t) = c_{im}(t+T), \qquad c'_{im}(t) = c'_{im}(t+T),$$

$$d_{im}(t) = d_{im}(t+T), \qquad d'_{im}(t) = d'_{im}(t+T)$$

e $c_{im}, d_{im} \in C^1_T(\mathbb{R})$.

Substituindo $u_m(t)$ e $v_m(t)$ em (2.3), obtemos

$$\begin{cases} \Big(\sum_{i=1}^{m} c''_{im}(t)\omega_i, \omega_j\Big) + < Au_m(t), \omega_j > + ((u'_m(t), \omega_j)) + < |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), \omega_j >= \\ \qquad = (f_1(t), \omega_j), \\ \\ \Big(\sum_{i=1}^{m} d''_{im}(t)\omega_i, \omega_j\Big) + < Av_m(t), \omega_j > + ((v'_m(t), \omega_j)) + < |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t), \omega_j >= \\ \qquad = (f_2(t), \omega_j), \\ \\ c_{jm}(t) = c_{jm}(t+T), \quad c'_{jm}(t) = c'_{jm}(t+T), \\ d_{jm}(t) = d_{jm}(t+T), \quad d'_{jm}(t) = d'_{jm}(t+T), \qquad j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Sendo $\{\omega_j\}_j$ um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\begin{cases} c''_{jm}(t) + < Au_m(t), \omega_j > + ((u'_m(t), \omega_j)) + < |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), \omega_j >= \\ \qquad = (f_1(t), \omega_j), \\ \\ d''_{jm}(t) + < Av_m(t), \omega_j > + ((v'_m(t), \omega_j)) + < |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t), \omega_j >= \\ \qquad = (f_2(t), \omega_j), \\ \\ c_{jm}(t) = c_{jm}(t+T), \quad c'_{jm}(t) = c'_{jm}(t+T), \\ d_{jm}(t) = d_{jm}(t+T), \quad d'_{jm}(t) = d'_{jm}(t+T)\ , \qquad j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Agora, definindo

$$Y_m(t) = \big(c_{1m}(t), \ldots, c_{mm}(t), d_{1m}(t), \ldots, d_{mm}(t)\big)^*,$$

$$F(Y_m(t) = \big(\big\langle Au_m(t), \omega_1\big\rangle, \ldots, \big\langle Au_m(t), \omega_m\big\rangle, \big\langle Av_m(t), \omega_1\big\rangle, \ldots, \big\langle Av_m(t), \omega_m\big\rangle\big)^*,$$

$$H(Y_m(t), Y'_m(t)) = \big(\big\langle |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), \omega_1\big\rangle + ((u'_m(t), \omega_1)), \ldots,$$

$$\big\langle |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), \omega_m\big\rangle + ((u'_m(t), \omega_m)), \big\langle |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t), \omega_1\big\rangle + ((v'_m(t), \omega_1))$$

$$, \ldots, \big\langle |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t), \omega_1\big\rangle + ((v'_m(t), \omega_1))\big)^*,$$

$$P(t) = \big((f_1(t), \omega_1), \ldots, (f_1(t), \omega_m), (f_2(t), \omega_1), \ldots, (f_2(t), \omega_m)\big),$$

onde $Y_m \in W_{2m}$ ($Y_m(t) \in \mathbb{R}^{2m}$) e * denota a transposta, escrevemos o sistema (2.5) na forma vetorial

$$\begin{cases} Y_m''(t) + F(Y_m(t)) + H(Y_m(t), Y_m'(t)) = P(t) \\ Y_m(t) = Y_m(t+T), \quad Y_m'(t) = Y_m'(t+T). \end{cases} \tag{2.6}$$

Dessa forma, o sistema (2.2) foi transformado no sistema equivalente (2.6), de modo que problema agora resume-se a mostrar que o sistema (2.6) possui solução.

2.2 Existência de Soluções (Primeira Parte)

Sejam β e δ números reais positivos para os quais o sistema homogêneo

$$\begin{cases} Y_m''(t) + \delta Y_m'(t) + \beta Y_m(t) = 0 \\ Y_m(0) = Y_m(T), \quad Y_m'(0) = Y_m'(T), \end{cases} \tag{2.7}$$

tenha solução única $Y_m(t) \equiv 0$.

Considerando a função de Green $G_m(t,s)$ associada com (2.7), então $Y_m(t) = \int_0^T G_m(t,s)P(s)ds$ é a única solução do sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} Y_m''(t) + \delta Y_m'(t) + \beta Y_m(t) = P(t) \\ Y_m(0) = Y_m(T), \quad Y_m'(0) = Y_m'(T). \end{cases} \tag{2.8}$$

Por unicidade e processo de "colagem", podemos estender $Y_m(t)$ como solução periódica de (2.8) a $\mathbb{R}$.

Para $\mu \in [0,1]$, consideremos o sistema μ-parametrizado a seguir:

$$\begin{cases} Y_m''(t) + \delta Y_m'(t) + \beta Y_m(t) + \mu\big[F(Y_m(t)) + H(Y_m(t), Y_m'(t)) - \\ \quad -\delta Y_m'(t) - \beta Y_m(t)\big] = P(t) \\ \quad Y_m(t) = Y_m(t+T), \quad Y_m'(t) = Y_m'(t+T). \end{cases} \tag{2.9}$$

Sendo $G_m(t,s)$ a função de Green do problema (2.7), para cada $\mu \in [0,1]$, segue que

$$\begin{aligned} T_m(\mu)Y_m(t) = \int_T \big\{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \\ +\delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] + P(s)\big\}G_m(t,s)ds \end{aligned} \tag{2.10}$$

é solução de $(2.9)_1$, satisfazendo $T_m(\mu)Y_m(0) = T_m(\mu)Y_m(T)$ e $(T_m(\mu)Y_m)'(0) = (T_m(\mu)Y_m)'(T)$. Podemos estender $T_m(\mu)Y_m(t)$ como solução periódica de (2.9) a $\mathbb{R}$ (por unicidade e processo de colagem).

Observe que, para $\mu = 0$, $T_m(0)Y_m(t)$ é solução de (2.8). Por outro lado, $Y_m(t) = \int_0^T G_m(t,s)P(s)ds$ é a única solução de (2.8), logo, $T_m(0)Y_m(t) = Y_m(t)$, isto é, $T_m(0)$ tem um ponto fixo.

A idéia, então, é mostrar que o operador $T_m(1)$ tem um ponto fixo, em algum espaço de Banach, o que será feito usando a teoria do grau de Leray-Schauder. Com isto, o sistema (2.6), que é equivalente a (2.2), tem solução.

2.3 Propriedades do Operador $T_m(\mu)$, $\mu \in [0,1]$.

Lema 2.1 *Para cada $\mu \in [0,1]$ e $Y_m \in W_{2m}$, tem-se $T_m(\mu)Y_m \in W_{2m}$.*

Prova. Devemos mostrar que, para cada $\mu \in [0,1]$ e para cada $Y_m \in W_{2m}$, a aplicação $T_m(\mu)Y_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2m}$, dada por (2.10), é periódica, contínua e possui derivada contínua.

- Periodicidade de $T_m(\mu)Y_m$.

É trivial, pois, para cada $\mu \in [0,1]$, $T_m(\mu)Y_m$ é solução de (2.9).

- Continuidade de $T_m(\mu)Y_m$.

Sendo $T_m(\mu)Y_m$ periódica, é suficiente mostrarmos a continuidade de $T_m(\mu)Y_m$ em algum intervalo I_T da reta de comprimento T. Suponhamos, dessa forma, $t, t_0 \in I_T$. Então,

$$T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\mu)Y_m(t_0) = \int_T \big\{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \\ +\delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] + P(s)\big\}\big(G_m(t,s) - G_m(t_0,s)\big)ds.$$

Daí, sendo $\mu \in [0,1]$ e usando propriedades da norma, obtemos

$$||T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\mu)Y_m(t_0)||_{2m} \leq \int_T \big\{|| - F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \\ +\delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\big\}|G_m(t,s) - G_m(t_0,s)|ds \leq \\ \leq \int_T \big\{||F(Y_m(s))||_{2m} + ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \delta||Y_m'(s)||_{2m} + \\ +\beta||Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\big\}|G_m(t,s) - G_m(t_0,s)|ds.$$

Da continuidade de $G_m(t,s)$, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t-t_0|<\delta \Rightarrow |G_m(t,s)-G_m(t_0,s)|<\epsilon.$$

Sendo assim, obtemos

$$||T_m(\mu)Y_m(t)-T_m(\mu)Y_m(t_0)||_{2m} \leq \epsilon \int_T \{||F(Y_m(s))||_{2m}+||H(Y_m(s),Y_m'(s))||_{2m}+ \\ +\delta||Y_m'(s)||_{2m}+\beta||Y_m(s)||_{2m}+||P(s)||_{2m}\}ds,$$

sempre que $|t-t_0|<\delta$. Assim, para mostrarmos que $T_m(\mu)Y_m$ é contínua, basta mostrarmos que

$$\int_T \{||F(Y_m(s))||_{2m}+||H(Y_m(s),Y_m'(s))||_{2m}+\delta||Y_m'(s)||_{2m}+ \\ +\beta||Y_m(s)||_{2m}+||P(s)||_{2m}\}ds<\infty. \tag{2.11}$$

i) $\displaystyle\int_T ||F(Y_m(s))||_{2m}ds<+\infty.$

Tomemos a norma do máximo em $\mathbb{R}^{2m}$ e, sem perda de generalidade, assumimos que

$$||F(Y_m(s))||_{2m}=|\langle Au_m,\omega_1\rangle|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_T ||F(Y_m(s))||_{2m}ds &= \int_T |\langle Au_m,\omega_1\rangle|ds \\ &= \int_T \left|\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}dx\right|ds \\ &\leq \int_T \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right|dxds.\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}\int_T ||F(Y_m(s))||_{2m}ds &\leq \int_T ds\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right|dx \\ &\leq T\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right|dx.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Agora, sendo $u_m(s)=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}c_{jm}(s)\omega_j$, resulta que

$$\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}c_{jm}(s)\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

Daí,

$$\left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right| \leq \sum_{j=1}^{m} |c_{jm}(s)| \left|\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right|. \tag{2.13}$$

Mas,

$$||Y_m||_{W_{2m}} \geq ||Y_m(s)||_{2m} \geq \sum_{j=1}^{m} |c_{jm}(s)|, \quad \forall s$$

e, além disso, como $\omega_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $j = 1, \cdots, m$, tem-se que $\dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$, $\left|\dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right|$, $\displaystyle\max_{j=1,\cdots,m}\left|\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right|$ $\in L^p(\Omega)$. Logo, de (2.13), obtemos

$$\left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right| \leq \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right| \sum_{j=1}^{m} |c_{jm}(s)| \leq \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right| ||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}}, \tag{2.14}$$

onde denotamos $\left|\dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}\right| := \displaystyle\max_{j=1,\cdots,m}\left|\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right|$. Assim, de (2.14), obtemos

$$\left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right|^{p-1} \leq C \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-1}. \tag{2.15}$$

Agora, voltando a (2.12), usando (2.15) e a Desigualdade de Holder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_T ||F(Y_m(s))||_{2m} ds &\leq TC \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-1} \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right| dx \\
&\leq TC \sum_{i=1}^{3} \left(\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right|^{p} dx\right)^{1/p} \\
&\leq TC \sum_{i=1}^{3} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p}\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right|^{p} dx\right)^{1/p} \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ii) $\displaystyle\int_T ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} ds < +\infty.$

Tomando mais uma vez a norma do máximo em $\mathbb{R}^{2m}$ e supondo que

$$||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} = |\langle |v_m(s)|^{\rho+2} |u_m(s)|^{\rho} u_m(s), \omega_1\rangle + ((u_m'(s), \omega_1))|,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_T ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} ds = \int_\Omega |\langle |v_m(s)|^{\rho+2} |u_m(s)|^{\rho} u_m(s), \omega_1\rangle + \\
&+((u_m'(s), \omega_1))| ds \leq \int_\Omega |\langle |v_m(s)|^{\rho+2} |u_m(s)|^{\rho} u_m(s), \omega_1\rangle| + \\
&+|((u_m'(s), \omega_1))| ds.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora, sendo

$$u'_m(s) = \sum_{j=1}^{m} c'_{jm}(s)\omega_j,$$

temos

$$((u'_m(s), \omega_1)) = ((\sum_{j=1}^{m} c'_{jm}(s)\omega_j, \omega_1)) = \sum_{j=1}^{m} c'_{jm}(s)((\omega_j, \omega_1)).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_T |((u'_m(s), \omega_1))| &= \int_T \left| \sum_{j=1}^{m} c'_{jm}(s)((\omega_j, \omega_1)) \right| ds \\
&\leq \int_T \sum_{j=1}^{m} |c'_{jm}(s)||((\omega_j, \omega_1))| ds \\
&\leq \int_T \sum_{j=1}^{m} |c'_{jm}(s)| \sum_{j=1}^{m} |((\omega_j, \omega_1))| ds \\
&\leq T||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}} \sum_{j=1}^{m} |((\omega_j, \omega_1))| ds \\
&< \infty. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_T |\langle |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^{\rho}u_m(s), \omega_1\rangle| ds = \int_T \left| \int_\Omega |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^{\rho}u_m(s)\omega_1 dx \right| ds$$
$$\leq \int_T \int_\Omega |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^{\rho+1}|\omega_1| dx ds. \qquad (2.19)$$

Mas

$$|u_m(s)| = \left| \sum_{j=1}^{m} C_{jm}(s)\omega_j \right| \leq \sum_{j=1}^{m} |C_{jm}(s)||\omega_j| \leq ||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}}|\omega|,$$

onde denotamos $|\omega| := \max_{j=1,\cdots,m} |\omega_j|$, de modo que

$$|u_m(s)|^{\rho+1} \leq C|\omega|^{\rho+1}. \qquad (2.20)$$

De modo análogo, obtemos

$$|v_m(s)|^{\rho+2} \leq C|\omega|^{\rho+2}. \qquad (2.21)$$

Dessa forma, substituindo (2.20) e (2.21) em (2.19), obtemos

$$\int_T | < |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^{\rho}u_m(s), \omega_1 > | ds \leq C \int_T \int_\Omega |\omega|^{\rho+2}|\omega|^{\rho+1}|\omega_1| dx ds \leq$$
$$\leq CT \int_\Omega |\omega|^{\rho+2}|\omega|^{\rho+1}|\omega_1| dx \leq CT \left\{ \int_\Omega \left(|\omega|^{\rho+2}|\omega|^{\rho+1} \right)^{\theta} dx \right\}^{1/\theta} \left\{ \int_\Omega |\omega_1|^{\gamma} dx \right\}^{1/\gamma}, \qquad (2.22)$$

onde $\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\gamma}=1$.

Agora, sendo $|\omega|\in W_0^{1,p}(\Omega)$, segue, pelo lema B.5 (Apêndice B), que

$$\left\{\int_\Omega \left(|\omega|^{\rho+2}|\omega|^{\rho+1}\right)^\theta dx\right\}^{1/\theta}<\infty. \tag{2.23}$$

Além disso, pelo lema B.6 (Apêndice B), $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$, portanto, existe $C>0$ tal que

$$|\omega_1|_{L^\gamma(\Omega)}\leq\|\omega_1\|_0<\infty. \tag{2.24}$$

Dessa forma, de (2.23) e (2.24),

$$\int_T \left|\left\langle |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s),\omega_1\right\rangle\right|ds<\infty. \tag{2.25}$$

Finalmente, por (2.18) e (2.25), concluimos que

$$\int_T ||H(Y_m(s),Y_m'(s))||_{2m}ds<\infty. \tag{2.26}$$

iii) $\displaystyle\int_T ||P(s)||_{2m}ds<+\infty$.

Temos que

$$\begin{aligned}\int_T ||P(s)||_{2m}ds &= \int_T |(f_1(s),\omega_1)|ds\\ &\leq \int_T |f_1(s)||\omega_1|ds\\ &= \int_T |f_1(s)|ds\\ &\leq \left(\int_T 1ds\right)^{1/2}.\left(\int_T |f_1(s)|^2ds\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $f_1\in L^2(T,L^2(\Omega))$, segue que

$$\int_T ||P(s)||_{2m}ds<+\infty. \tag{2.27}$$

iv) $\displaystyle\int_T ||Y_m(s)||_{2m}ds<+\infty$ e $\displaystyle\int_T ||Y_m'(s)||_{2m}ds<+\infty$.

Segue do fato de que

$$||Y_m(s)||_{2m}\leq||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}}<+\infty \tag{2.28}$$

e

$$||Y_m'(s)||_{2m} \leq ||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}} < +\infty. \tag{2.29}$$

De $(i)-(iv)$, concluimos que

$$\begin{aligned}&\int_T \{||F(Y_m(s))||_{2m} + ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \delta||Y_m'(s)||_{2m} + \\ &+\beta||Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\} ds < \infty\end{aligned} \tag{2.30}$$

e, portanto, $T_m(\mu)Y_m$ é contínua.

- Continuidade de $\frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m$.

Observemos primeiro que

$$\begin{aligned}&T_m(\mu)Y_m(t) = \int_0^T \big\{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] + \\ &+P(s)\big\}G_m(t,s)ds = \int_0^t \big\{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \delta Y_m'(s) + \\ &+\beta Y_m(s)\big] + P(s)\big\}G_m(t,s)ds + \int_t^T \big\{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \\ &+\delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] + P(s)\big\}G_m(t,s)ds.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Daí, utilizando a fórmula de Leibnitz (Teorema 1.24), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t) = &\int_0^T \big\{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] + \\ &+P(s)\big\}\frac{\partial}{\partial t}G_m(t,s)ds.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Agora, para $t, t_0 \in I_T$, arbitrários, temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t) - \frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t_0) = \int_0^T \big\{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \\ &+\delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] + P(s)\big\}\Big(\frac{\partial}{\partial t}G_m(t,s) - \frac{\partial}{\partial t}G_m(t_0,s)\Big)ds.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t) - \frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t_0)\Big\|_{2m} \leq \int_0^T \big\{||F(Y_m(s))||_{2m} + ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \\ &+\delta||Y_m'(s)||_{2m} + \beta||Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\big\}\Big|\frac{\partial}{\partial t}G_m(t,s) - \frac{\partial}{\partial t}G_m(t_0,s)\Big|ds.\end{aligned}$$

Da continuidade de $\frac{\partial}{\partial t}G_m(t,s)$, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|\frac{\partial}{\partial t}G_m(t,s) - \frac{\partial}{\partial t}G_m(t_0,s)\Big| < \epsilon.$$

Assim,

$$\left\|\frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t)-\frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t_0)\right\|_{2m}\leq\epsilon\int_0^T\{||F(Y_m(s))||_{2m}+||H(Y_m(s),Y_m'(s))||_{2m}+$$
$$+\delta||Y_m'(s)||_{2m}+\beta||Y_m(s)||_{2m}+||P(s)||_{2m}\Big\}ds,$$

sempre que$|t-t_0|<\delta$. Mas por (2.30),

$$\int_T\{||F(Y_m(s))||_{2m}+||H(Y_m(s),Y_m'(s))||_{2m}+\delta||Y_m'(s)||_{2m}+$$
$$+\beta||Y_m(s)||_{2m}+||P(s)||_{2m}\}ds<\infty,$$

logo, $\dfrac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m$ é contínua. ■

Lema 2.2 *Para cada $\mu\in[0,1]$, o operador $T_m(\mu):W_{2m}\to W_{2m}$, definido como antes é contínuo.*

Prova. Sejam $(Y_m^{(\nu)})_\nu$ uma sequência em W_{2m} e $Y_m\in W_{2m}$ tais que

$$Y_m^{(\nu)}\to Y_m \quad em \quad W_{2m}. \tag{2.33}$$

Devemos mostrar que

$$||T_m(\mu)Y_m^{(\nu)}-T_m(\mu)Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}}\to 0, \quad \text{quando} \quad \nu\to\infty. \tag{2.34}$$

De (2.33), obtemos

$$||Y_m^{(\nu)}||_{\mathrm{W_{2m}}}\leq C, \quad \forall\nu, \tag{2.35}$$

$$||Y_m^{(\nu)}(t)||_{2m}\leq||Y_m^{(\nu)}||_{\mathrm{W_{2m}}}\leq C, \quad \forall\nu, \quad \forall t, \tag{2.36}$$

$$||Y_m^{'(\nu)}(t)||_{2m}\leq||Y_m^{(\nu)}||_{\mathrm{W_{2m}}}\leq C, \quad \forall\nu, \quad \forall t. \tag{2.37}$$

Agora,

$$||T_m(\mu)Y_m^{(\nu)}(t)-T_m(\mu)Y_m(t)||_{2m}=\Big\|\int_T\{\mu\big[-F(Y_m^{(\nu)}(s))+F(Y_m(s))-$$
$$-H(Y_m^{(\nu)}(s),Y_m^{'(\nu)}(s))+H(Y_m(s),Y_m'(s))+\delta(Y_m^{'(\nu)}(s)-Y_m'(s))+$$
$$+\beta(Y_m^{(\nu)}(s)-Y_m(s))\big\}G_m(t,s)ds\Big\|_{2m}\leq\int_T\{||F(Y_m^{(\nu)}(s))-F(Y_m(s))||_{2m}+$$
$$+||H(Y_m^{(\nu)}(s),Y_m^{'(\nu)}(s))-H(Y_m(s),Y_m'(s))||_{2m}+\delta\|Y_m^{'(\nu)}(s)-Y_m'(s)\|_{2m}+$$
$$+\beta\|Y_m^{(\nu)}(s)-Y_m(s)\|_{2m}\big\}|G_m(t,s)|ds.$$

Da continuidade de $G_m(t,s)$ em $I_T \times I_T$, segue que $G_m(t,s)$ é limitada em $I_T \times I_T$. Logo,

$$\begin{aligned}
&||T_m(\mu)Y_m^{(\nu)}(t) - T_m(\mu)Y_m(t)||_{2m} \leq C\Big\{ \int_T \big[||F(Y_m^{(\nu)}(s)) - F(Y_m(s))||_{2m} + \\
&+||H(Y_m^{(\nu)}(s), Y_m'^{(\nu)}(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \delta\|Y_m'^{(\nu)}(s) - Y_m'(s)\|_{2m} + \\
&+\beta\|Y_m^{(\nu)}(s) - Y_m(s)\|_{2m}\big] ds\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
||F(Y_m^{(\nu)}(s)) - F(Y_m(s))||_{2m} &= \big|\big\langle Au_m(s), \omega_1\big\rangle - \big\langle Au_m^{(\nu)}(s), \omega_1\big\rangle\big| = \\
= \Big|\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}dx - \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}&\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}.\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}dx\Big| = \\
= \Big|\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Big\{\Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big\}&\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}dx\Big| \leq \\
\leq \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Big|\Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|&\Big|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\Big|dx,
\end{aligned}$$

e, pelo lema B.7 (Apêndice B),

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big| \leq \\
&\leq C\sup\Big\{\Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}, \Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big\}\Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&||F(Y_m^{(\nu)}(s)) - F(Y_m(s))||_{2m} \leq \\
&\leq C\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \sup\Big\{\Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}, \Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big\}\Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|\Big|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\Big|dx \leq \\
&\leq C\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|\Big|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\Big|dx + \\
&+C\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big|\Big|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\Big|dx.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Sendo

$$\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} c_{jm}^{(\nu)}(s)\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\Big| &\leq \sum_{j=1}^{m}\big|c_{jm}^{(\nu)}(s)\big|\Big|\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\Big| \leq \Big|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\Big|\sum_{j=1}^{m}\big|c_{jm}^{(\nu)}(s)\big| \leq \\
&\leq ||Y_m^{(\nu)}(s)||_{2m}\Big|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\Big| \leq ||Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}}\Big|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\Big|,
\end{aligned}$$

onde $\left|\dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}\right| = \max\limits_{j=1,\ldots,m}\left|\dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right|$. Assim,

$$\left|\frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \leq C\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-2}. \tag{2.40}$$

De modo análogo,

$$\left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \leq C\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-2}. \tag{2.41}$$

Temos também,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m^{(\nu)}(s)}{\partial x_i}\right| &= \left|\sum_{j=1}^m c_{jm}(s)\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m c_{jm}^{(\nu)}(s)\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^m \big(c_{jm}(s) - c_{jm}^{(\nu)}(s)\big)\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left|c_{jm}(s) - c_{jm}^{(\nu)}(s)\right|\left|\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right| \\
&\leq ||Y_m - Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}}\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

As estimativas (2.40), (2.41) e (2.42) conduzem, juntas com (2.49), a

$$\begin{aligned}
&||F(Y_m^{(\nu)}(s)) - F(Y_m(s))||_{2m} \leq C||Y_m - Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}}\sum_{i=1}^3\int_\Omega \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right| \leq \\
&\leq C||Y_m - Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}}\sum_{i=1}^3\int_\Omega \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right| \leq \\
&\leq C||Y_m - Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}}\sum_{i=1}^3\left(\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|^{p-1}\right)^{p'}dx\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right|^{p}dx\right)^{1/p} = \\
&= C||Y_m - Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}}\sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}^{p'-1}\left\|\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

uniformemente, em s, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Agora,

$$\begin{aligned}
&||H(Y_m(s), Y_m'(s)) - H(Y_m^{(\nu)}(s), Y_m'^{(\nu)}(s))||_{2m} = \Big|\Big\langle |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s), \omega_1\Big\rangle + \\
&+((u_m'(s), \omega_1)) - \Big\langle |v_m^{(\nu)}(s)|^{\rho+2}|u_m^{(\nu)}(s)|^\rho u_m^{(\nu)}(s), \omega_1\Big\rangle - ((u_m'^{(\nu)}(s), \omega_1))\Big| \leq \\
&\leq \Big|\Big\langle |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s), \omega_1\Big\rangle - \Big\langle |v_m^{(\nu)}(s)|^{\rho+2}|u_m^{(\nu)}(s)|^\rho u_m^{(\nu)}(s), \omega_1\Big\rangle\Big| + \\
&+\Big|((u_m'(s), \omega_1)) - ((u_m'^{(\nu)}(s), \omega_1))\Big| \leq \Big|((u_m'(s) - u_m'^{(\nu)}(s), \omega_1))\Big| + \\
&+\Big|\Big\langle |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s), \omega_1\Big\rangle - \Big\langle |v_m^{(\nu)}(s)|^{\rho+2}|u_m^{(\nu)}(s)|^\rho u_m^{(\nu)}(s), \omega_1\Big\rangle\Big|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&||H(Y_m(s), Y_m'(s)) - H(Y_m^{(\nu)}(s), Y_m'^{(\nu)}(s))||_{2m} \leq \Big|((u_m'(s) - u_m'^{(\nu)}(s), \omega_1))\Big| + \\
&+\Big|\Big\langle |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s), \omega_1\Big\rangle - \Big\langle |v_m^{(\nu)}(s)|^{\rho+2}|u_m^{(\nu)}(s)|^\rho u_m^{(\nu)}(s), \omega_1\Big\rangle\Big|.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
&\big|((u'_m(s)-u'^{(\nu)}_m(s),\omega_1))\big| = \Big|\big(\big(\sum_{j=1}^{m}\big(c'_{jm}(s)-c'^{(\nu)}_{jm}(s)\big)\omega_j,\omega_1\big)\big)\Big| = \\
&= \Big|\sum_{j=1}^{m}\big(c'_{jm}(s)-c'^{(\nu)}_{jm}(s)\big)\big((\omega_j,\omega_1)\big)\Big| \le \sum_{j=1}^{m}\big|c'_{jm}(s)-c'^{(\nu)}_{jm}(s)\big|\sum_{j=1}^{m}\big|\big((\omega_j,\omega_1)\big)\big| \le \\
&\le ||Y'_m - Y'^{(\nu)}_m||_{W_{2m}}\sum_{j=1}^{m}\big|\big((\omega_j,\omega_1)\big)\big| \quad \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

uniformemente, em s, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Seja

$$\begin{aligned}
I &:= \big|\big\langle |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s),\omega_1\big\rangle - \big\langle |v^{(\nu)}_m(s)|^{\rho+2}|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s),\omega_1\big\rangle\big| = \\
&= \big|\int_\Omega \big(|v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s) - |v^{(\nu)}_m(s)|^{\rho+2}|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s)\big)\omega_1 dx\big| \le \\
&\le \int_\Omega \big||v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s) - |v^{(\nu)}_m(s)|^{\rho+2}|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s)\big||\omega_1|dx = \\
&= \int_\Omega \big||v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho u_m(s) - |v_m(s)|^{\rho+2}|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s) + \\
&+|v_m(s)|^{\rho+2}|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s) + |v^{(\nu)}_m(s)|^{\rho+2}|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s)\big||\omega_1|dx \le \\
&\le \int_\Omega |v_m(s)|^{\rho+2}\big||u_m(s)|^\rho u_m(s) - |u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s)\big||\omega_1|dx + \\
&+ \int_\Omega |u_m(s)|^{\rho+1}\big||v^{(\nu)}_m(s)|^{\rho+2} - |v^{(\nu)}_m(s)|^{\rho+2}\big||\omega_1|dx.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Defina

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_\Omega |v_m(s)|^{\rho+2}\big||u_m(s)|^\rho u_m(s) - |u^{(\nu)}_m(s)|^\rho u^{(\nu)}_m(s)\big||\omega_1|dx \le \\
&\le C\int_\Omega \sup\big\{|u_m(s)|^\rho, |u^{(\nu)}_m(s)|^\rho\big\}|u_m(s)-u^{(\nu)}_m(s)||v_m(s)|^{\rho+2}|\omega_1|dx \le \\
&\le C\int_\Omega |v_m(s)|^{\rho+2}|u_m(s)|^\rho|u_m(s)-u^{(\nu)}_m(s)||\omega_1|dx + \\
&+C\int_\Omega |v_m(s)|^{\rho+2}|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho|u_m(s)-u^{(\nu)}_m(s)||\omega_1|dx.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Agora, sendo

$$|v_m(s)|^{\rho+2} \le C|\omega|^{\rho+2},$$

$$|u_m(s)|^\rho \le C|\omega|^\rho,$$

$$|u_m(s)-u^{(\nu)}_m(s)| \le ||Y_m - Y^{(\nu)}_m||_{W_{2m}}|\omega|,$$

$$|u^{(\nu)}_m(s)|^\rho \le C|\omega|^\rho,$$

segue que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C||Y_m - Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}} \int_\Omega |\omega|^{\rho+2}|\omega|^{\rho+1}|\omega| dx \\ &\leq C||Y_m - Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}} \left(\int_\Omega \left(|\omega|^{\rho+2}|\omega|^{\rho+1} \right)^\theta dx \right)^{1/\theta} \left(\int_\Omega |\omega|^\gamma dx \right)^{1/\gamma} \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.48}$$

uniformemente, em s, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

De forma análoga, chegamos a

$$I_2 := \int_\Omega |u_m(s)|^{\rho+1} \big| |v_m^{(\nu)}(s)|^{\rho+2} - |v_m^{(\nu)}(s)|^{\rho+2} \big| |\omega_1| dx \longrightarrow 0, \tag{2.49}$$

uniformemente, em s, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

De (2.48) e (2.49), concluimos que $I \longrightarrow 0$ uniformemente, em s, quando $\nu \longrightarrow \infty$, de modo que, juntamente com (2.45),

$$||H(Y_m(s), Y'_m(s)) - H(Y_m^{(\nu)}(s), Y_m'^{(\nu)}(s))||_{2m} \longrightarrow 0, \tag{2.50}$$

uniformemente, em s, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Temos tambem que

$$||Y_m^{(\nu)}(s) - Y_m(s)||_{2m},\ ||Y_m'^{(\nu)}(s) - Y'_m(s)||_{2m} \leq ||Y_m^{(\nu)} - Y_m||_{W_{2m}} \longrightarrow 0, \tag{2.51}$$

uniformemente em s quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Finalmente, fazendo $\nu \longrightarrow \infty$ em (2.38), obtemos, via (2.43), (2.50), (2.51), que

$$||T_m(\mu)Y_m^{(\nu)}(t) - T_m(\mu)Y_m(t)||_{2m} \longrightarrow 0, \tag{2.52}$$

uniformemente, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Mostraremos agora que

$$\left\| \frac{d}{dt} T_m(\mu) Y_m(t) - \frac{d}{dt} T_m(\mu) Y_m^{(\nu)}(t) \right\|_{2m} \longrightarrow 0,$$

uniformemente, quando $\nu \longrightarrow \infty$. De fato,

$$\begin{gathered} \left\| \frac{d}{dt} T_m(\mu) Y_m(t) - \frac{d}{dt} T_m(\mu) Y_m^{(\nu)}(t) \right\|_{2m} = \left\| \int_T \mu \big[F(Y_m(s)) - F(Y_m^{(\nu)}(s)) + \right. \\ + H(Y_m(s), Y'_m(s)) - H(Y_m^{(\nu)}(s), Y_m'^{(\nu)}(s)) + \beta \big(Y_m(s) - Y_m^{(\nu)}(s) \big) + \\ \left. + \delta \big(Y'_m(s) - Y_m'^{(\nu)}(s) \big) \big] \frac{\partial}{\partial t} G_m(t,s) ds \right\|_{2m} \leq \int_T \big[||F(Y_m(s)) - F(Y_m^{(\nu)}(s))||_{2m} + \\ + ||H(Y_m(s), Y'_m(s)) - H(Y_m^{(\nu)}(s), Y_m'^{(\nu)}(s))||_{2m} + \beta ||Y_m(s) - Y_m^{(\nu)}(s)||_{2m} + \\ + \delta ||Y'_m(s) - Y_m'^{(\nu)}(s)||_{2m} \big] \left| \frac{\partial}{\partial t} G_m(t,s) \right| ds. \end{gathered}$$

Logo, sendo $\dfrac{\partial}{\partial t}G_m(t,s)$ limitada em $I_T \times I_T$ e pelos resultados anteriores, temos que

$$\Big\|\frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m(t) - \frac{d}{dt}T_m(\mu)Y_m^{(\nu)}(t)\Big\|_{2m} \longrightarrow 0, \tag{2.53}$$

uniformemente, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Por (2.52) e (2.53), segue que

$$||T_m(\mu)Y_m - T_m(\mu)Y_m^{(\nu)}||_{W_{2m}} \longrightarrow 0, \tag{2.54}$$

como queríamos demonstrar. ▪

Lema 2.3 *O operador $T_m(\mu)$ é compacto.*

Prova. Seja B um conjunto limitado em W_{2m}. Então existe $C > 0$ tal que

$$||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}} \leq C, \quad \forall Y_m \in B.$$

Devemos mostrar que

$$T_m(\mu)B = \{T_m(\mu)Y_m : [0,T] \to \mathbb{R}^{2m}; Y_m \in B\}$$

é relativamente compacto em W_{2m}.

Sendo $[0,T]$ compacto e dimensão de $\mathbb{R}^{2m}$ finita, afim de que $T_m(\mu)B$ seja relativamente compacto em W_{2m}, é suficiente mostrarmos, via teorema de Ascoli-Arzelá, que:

(a) $||T_m(\mu)Y_m(t)||_{2m} \leq C$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall Y_m \in B$;

(b) $T_m(\mu)B$ é equicontínuo.

Prova (a). Sejam $Y_m \in B$ e $t \in [0,T]$. Então,

$$\begin{aligned} ||T_m(\mu)Y_m(t)||_{2m} \;\leq\; & \int_T \{||F(Y_m(s))||_{2m} + ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \delta||Y_m'(s)||_{2m} + \\ & +\beta||Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\}|G_m(t,s)|ds. \end{aligned}$$

Sendo $G_m(t,s)$ contínua em $I_T \times I_T$, segue que $G_m(t,s)$ é limitada, logo,

$$\begin{aligned} ||T_m(\mu)Y_m(t)||_{2m} \;\leq\; & C\int_T \{||F(Y_m(s))||_{2m} + ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \delta||Y_m'(s)||_{2m} + \\ & +\beta||Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\}ds. \end{aligned}$$

Além disso, sendo

$$||Y_m(s)||_{2m} \leq ||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}} \leq C, \qquad \forall s \in [0,T], \forall Y_m \in B,$$

$$||Y_m'(s)||_{2m} \leq ||Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}} \leq C, \qquad \forall s \in [0,T], \forall Y_m \in B$$

e pelas limitações dadas em (2.16), (2.26) e (2.27), obtemos

$$||T_m(\mu)Y_m(t)||_{2m} \leq C, \qquad\qquad \forall s \in [0,T], \forall Y_m \in B, \tag{2.55}$$

como queríamos.

Prova (b). Sejam $t_0 \in [0,T] = I_T$ e $Y_m \in B$. Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \;\text{ em }\; I_T \Rightarrow ||T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\mu)Y_m(t_0)||_{2m} < \epsilon, \forall Y_m \in B.$$

Temos que,

$$||T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\mu)Y_m(t_0)||_{2m} \leq \int_T \big[||F(Y_m(s))||_{2m} + ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} +$$
$$+\delta||Y_m'(s)||_{2m} + \beta||Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\big]|G_m(t,s) - G_m(t_0,s)|ds$$

e, sendo $G_m(t,s)$ contínua em $I_T \times I_T$, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \;\text{ em }\; I_T \Rightarrow |G_m(t,s) - G_m(t_0,s)| < \epsilon.$$

Dessa forma,

$$||T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\mu)Y_m(t_0)||_{2m} \leq \epsilon \int_T \big[||F(Y_m(s))||_{2m} + ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} +$$
$$+\delta||Y_m'(s)||_{2m} + \beta||Y_m(s)||_{2m} + ||P(s)||_{2m}\big]ds,$$

sempre que $|t - t_0| < \delta$ em I_T. Mas, das limitações obtidas anteriormente, obtemos que

$$|t - t_0| < \delta \;\text{ em }\; I_T \Rightarrow ||T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\mu)Y_m(t_0)||_{2m} \leq \epsilon C, \forall Y_m \in B.$$

Com isso, $T_m(\mu)B$ é equicontínuo e, portanto, o lema 2.3 está demonstrado. ■

Lema 2.4 *Se B é um subconjunto limitado de W_{2m}, então*

$$||T_m(\mu)Y_m - T_m(\lambda)Y_m||_{\mathrm{W_{2m}}} \leq C|\mu - \lambda|, \quad \forall Y_m \in B.$$

Prova. Seja $Y_m \in B$. Então

$$\|T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)\|_{2m} = \Big\| \int_T (\mu-\lambda)\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) +$$
$$+ \delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] G_m(t,s) ds \Big\|_{2m} \le |\mu-\lambda| \int_T \{||F(Y_m(s))||_{2m} +$$
$$+ ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \delta ||Y_m'(s)||_{2m} + \beta ||Y_m(s)||_{2m}\} |G_m(t,s)| ds$$

Pela continuidade de $G_m(t,s)$ e pela limitações encontradas, segue que

$$\|T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)\|_{2m} \le C|\mu-\lambda|, \quad \forall t \in I_T, \quad \forall Y_m \in B. \tag{2.56}$$

Temos também

$$\Big\| \frac{d}{dt}(T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)) \Big\|_{2m} = \Big\| \int_T (\mu-\lambda)\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) +$$
$$+ \delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] \frac{\partial}{\partial t} G_m(t,s) ds \Big\|_{2m} \le |\mu-\lambda| \int_T \{||F(Y_m(s))||_{2m} +$$
$$+ ||H(Y_m(s), Y_m'(s))||_{2m} + \delta ||Y_m'(s)||_{2m} + \beta ||Y_m(s)||_{2m}\} \Big| \frac{\partial}{\partial t} G_m(t,s) \Big| ds.$$

Pela continuidade de $\frac{\partial}{\partial t} G_m(t,s)$ e pelas limitações encontradas, segue que

$$\Big\| \frac{d}{dt}(T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)) \Big\|_{2m} \le C|\mu-\lambda|, \quad \forall t \in I_T, \quad \forall Y_m \in B. \tag{2.57}$$

De (2.56) e (2.57), resulta que

$$\|T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)\|_{2m} + \Big\| \frac{d}{dt}(T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)) \Big\|_{2m} \le$$
$$\le C|\mu-\lambda|, \quad \forall t \in I_T, \quad \forall Y_m \in B.$$

Portanto,

$$||T_m(\mu)Y_m - T_m(\lambda)Y_m||_{W_{2m}} = \sup_t \Big\{ \|T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)\|_{2m} +$$
$$+ \Big\| \frac{d}{dt}(T_m(\mu)Y_m(t) - T_m(\lambda)Y_m(t)) \Big\|_{2m} \Big\} \le C|\mu-\lambda|, \quad \forall Y_m \in B, \tag{2.58}$$

como queríamos. ∎

2.4 Existência de Soluções (Segunda Parte)

Foi provado na sessão anterior que o operador $T_m : [0,1] \to K(W_{2m})$, que a cada $\mu \in [0,1]$, associa $T_m(\mu) \in K(W_{2m})$, onde para $Y_m \in W_{2m}$, tem-se

$$T_m(\mu)Y_m(t) = \int_T \{\mu\big[-F(Y_m(s)) - H(Y_m(s), Y_m'(s)) + \delta Y_m'(s) + \beta Y_m(s)\big] +$$
$$+ P(s)\} G_m(t,s) ds$$

é uma homotopia de operadores compactos.

Sabemos que $T_m(0)Y_m = Y_m$, ou seja, o grau de Leray-Schauder de $I - T_m(0)$ é igual 1. Nosso objetivo é provar que $I - T_m(1)$ tem também grau de Leray-Schauder igual a 1, ou seja, $T_m(1)$ tem um ponto fixo.

Suponhamos que $(I - T_m(\mu))Y_m = 0$ para cada $\mu \in [0,1]$. Então Y_m é solução de (2.9). Multiplicando (2.9) por $Y_m'(t)$ em $\mathbb{R}^{2m}$, obtemos

$$\begin{gathered}\big(Y_m''(t), Y_m'(t)\big)_{2m} + \delta\big(Y_m'(t), Y_m'(t)\big)_{2m} + \beta\big(Y_m(t), Y_m'(t)\big)_{2m} + \\ +\mu\big(F(Y_m(t)), Y_m'(t)\big)_{2m} + \mu\big(H(Y_m(t), Y_m'(t)), Y_m'(t)\big)_{2m} - \mu\delta\big(Y_m'(t), Y_m'(t)\big)_{2m} - \\ -\mu\beta\big(Y_m(t), Y_m'(t)\big)_{2m} = \big(P(t), Y_m'(t)\big)_{2m},\end{gathered}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||Y_m'(t)||_{2m}^2 + \delta||Y_m'(t)||_{2m}^2 + \frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}||Y_m(t)||_{2m}^2 + \mu(F(Y_m(t)), Y_m'(t))_{2m} + \\ &+\mu(H(Y_m(t), Y_m'(t)), Y_m'(t))_{2m} - \mu\delta||Y_m'(t)||_{2m}^2 - \frac{\mu\beta}{2}\frac{d}{dt}||Y_m(t)||_{2m}^2 = \\ &= (P(t), Y_m'(t))_{2m} \leq ||P(t)||_{2m}||Y_m'(t)||_{2m}.\end{aligned} \tag{2.59}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\big(F(Y_m(t), Y_m'(t)\big)_{2m} &= \sum_{j=1}^{m}\big\langle Au_m(t), \omega_j\big\rangle c_{jm}'(t) + \sum_{j=1}^{m}\big\langle A_m(t), \omega_j\big\rangle d_{jm}'(t) = \\ &= \big\langle Au_m(t), \sum_{j=1}^{m} c_{jm}'(t)\omega_j\big\rangle + \big\langle Av_m(t), \sum_{j=1}^{m} d_{jm}'(t)\omega_j\big\rangle = \\ &= \big\langle Au_m(t), u_m'(t)\big\rangle + \big\langle Av_m(t), v_m'(t)\big\rangle = \\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}||v_m(t)||_0^p\end{aligned} \tag{2.60}$$

e

$$\begin{gathered}\big(H(Y_m(t), Y_m'(t)), Y_m'(t)\big)_{2m} = \big\langle|v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t), \sum_{j=1}^{m} c_{jm}'(t)\omega_j\big\rangle + \\ +\big(\big(u_m'(t), \sum_{j=1}^{m} c_{jm}'(t)\omega_j\big)\big) + \big\langle|u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^\rho v_m(t), \sum_{j=1}^{m} d_{jm}'(t)\omega_j\big\rangle + \\ +\big(\big(v_m'(t), \sum_{j=1}^{m} d_{jm}'(t)\omega_j\big)\big) = \big\langle|v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m'(t)\big\rangle + \\ +\big(\big(u_m'(t), u_m'(t)\big)\big) + \big\langle|u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m'(t)\big\rangle + \big(\big(v_m'(t), v_m'(t)\big)\big) = \\ = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2}dx + \\ +||u_m'(t)||^2 + ||u_m'(t)||^2 = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + ||u_m'(t)||^2 + ||u_m'(t)||^2,\end{gathered} \tag{2.61}$$

ou seja,

$$\big(H(Y_m(t),Y_m'(t)),Y_m'(t)\big)_{2m} = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + ||u_m'(t)||^2 + \\ + ||u_m'(t)||^2. \tag{2.62}$$

Dessa forma, da expressão (2.59) resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||Y_m'(t)||^2_{2m} + \delta||Y_m'(t)||^2_{2m} + \frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}||Y_m(t)||^2_{2m} + \frac{\mu}{p}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^p_0 + \\ + \frac{\mu}{p}\frac{d}{dt}||v_m(t)||^p_0 + \frac{\mu}{\rho+2}\frac{d}{dt}||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \mu||u_m'(t)||^2 + \mu||u_m'(t)||^2 \leq \\ \leq \mu\delta||Y_m'(t)||^2_{2m} + \frac{\mu\beta}{2}\frac{d}{dt}||Y_m(t)||^2_{2m} + ||P(t)||_{2m}||Y_m'(t)||_{2m}. \tag{2.63}$$

Integrando em I_T e usando as condições periódicas, obtemos

$$\delta\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt + \mu\int_T \big(||u_m'(t)||^2 + ||v_m'(t)||^2\big)dt \leq \\ \leq \mu\delta\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt + \int_T ||P(t)||_{2m}||Y_m'(t)||_{2m}dt. \tag{2.64}$$

Agora, temos que

$$|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2 = ||Y_m'(t)||^2_{2m}, \tag{2.65}$$

e, sendo $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|u| \leq \delta_0||u||_0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\frac{\mu}{\delta_0^2}\int_T \big(|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2\big)dt \leq \mu\int_T \big(||u_m'(t)||_0^2 + ||v_m'(t)||_0^2\big)dt.$$

Assim, de (2.64), resulta que

$$\delta\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt + \frac{\mu}{\delta_0^2}\int_T \big(|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2\big)dt \leq \\ \leq \mu\delta\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt + \int_T ||P(t)||_{2m}||Y_m'(t)||_{2m}dt. \tag{2.66}$$

Por (2.65), obtemos

$$\delta\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt + \frac{\mu}{\delta_0^2}\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt \leq \\ \leq \mu\delta\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt + \int_T ||P(t)||_{2m}||Y_m'(t)||_{2m}dt. \tag{2.67}$$

Restringindo nosso $\delta > 0$, inicial, ao intervalo $0 < \delta < \frac{1}{\delta_0^2}$, obtemos

$$\int_T ||Y_m'(t)||^2_{2m}dt \leq \int_T \frac{1}{\delta}||P(t)||_{2m}||Y_m'(t)||_{2m}dt.$$

Usando a desigualdade de Young com $a = \frac{1}{\delta}||P(t)||_{2m}$ e $b = ||Y'_m(t)||_{2m}$ obtemos

$$\int_T ||Y'_m(t)||^2_{2m}dt \leq \frac{1}{2\delta^2}\int_T ||P(t)||^2_{2m}dt + \frac{1}{2}\int_T ||Y'_m(t)||^2_{2m}dt,$$

ou seja,

$$\int_T ||Y'_m(t)||^2_{2m}dt \leq \frac{1}{\delta^2}\int_T ||P(t)||^2_{2m}dt.$$

Sendo $\int_T ||P(t)||^2_{2m}dt < \infty$, concluimos que

$$\int_T ||Y'_m(t)||^2_{2m}dt \leq C, \tag{2.68}$$

com C independente de μ.

Multiplicando a equação (2.9), com $\mu = 1$, por $Y_m(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\big(Y''_m(t), Y_m(t)\big)_{2m} + \big(F(Y_m(t)), Y_m(t)\big)_{2m} + \big(H(Y_m(t), Y'_m(t), Y_m(t)\big)_{2m} = \\ &= \big(P(t), Y_m(t)\big)_{2m}.\end{aligned} \tag{2.69}$$

Mas,

$$\big(F(Y_m(t)), Y_m(t)\big)_{2m} = ||u_m(t)||^p_0 + ||v_m(t)||^p_0$$

e

$$\begin{aligned}\big(H(Y_m(t), Y'_m(t), Y_m(t)\big)_{2m} = 2||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2.\end{aligned}$$

Logo, (2.69) é equivalente a

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(Y'_m(t), Y_m(t)\big)_{2m} - ||Y'_m(t)||^2_{2m} + ||u_m(t)||^p_0 + ||v_m(t)||^p_0 + \\ &+2||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2 = \big(P(t), Y_m(t)\big)_{2m}.\end{aligned} \tag{2.70}$$

Integrando (2.70) em I_T e usando as condições periódicas, obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_T ||Y'_m(t)||^2_{2m}dt + \int_T \big(||u_m(t)||^p_0 + ||v_m(t)||^p_0\big)dt + \\ &+2\int_T ||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt = \int_T \big(P(t), Y_m(t)\big)_{2m}dt.\end{aligned} \tag{2.71}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\big(P(t), Y_m(t)\big)_{2m} &= \sum_{j=1}^m \big(f_1(t), \omega_j\big)c_{jm}(t) + \sum_{j=1}^m \big(f_2(t), \omega_j\big)d_{jm}(t) = \\ &= \big(f_1(t), \sum_{j=1}^m c_{jm}(t)\omega_j\big) + \big(f_2(t), \sum_{j=1}^m d_{jm}(t)\omega_j\big) = \\ &= \big(f_1(t), u_m(t)\big) + \big(f_2(t), v_m(t)\big),\end{aligned}$$

portanto,

$$|\big(P(t),Y_m(t)\big)_{2m}| \leq |f_1(t)||u_m(t)| + |f_2(t)||v_m(t)|,$$

e, sendo $W_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$|\big(P(t),Y_m(t)\big)_{2m}| \leq C|f_1(t)|||u_m(t)||_0 + C|f_2(t)||v_m(t)||_0.$$

Usando a desigualdade de Young com $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, obtemos

$$|\big(P(t),Y_m(t)\big)_{2m}| \leq \frac{C^{p'}}{p'}|f_1(t)|^{p'} + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{C^{p'}}{p'}|f_2(t)|^{p'} + \frac{1}{p}|v_m(t)||_0^p.$$

Dessa forma, de (2.71), obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_T ||Y_m'(t)||_{2m}^2 dt + \int_T \big(||u_m(t)||_0^p + ||v_m(t)||_0^p\big)dt + 2\int_T ||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq \\
\leq \frac{C^{p'}}{p'}\int_T \big(|f_1(t)|^{p'} + |f_2(t)|^{p'}\big)dt + \frac{1}{p}\int_T \big(||u_m(t)||_0^p + ||v_m(t)||_0^p\big)dt,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
-\int_T ||Y_m'(t)||_{2m}^2 dt + \frac{1}{p'}\int_T \big(||u_m(t)||_0^p + ||v_m(t)||_0^p\big)dt + \\
+2\int_T ||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq \frac{C^{p'}}{p'}\int_T \big(|f_1(t)|^{p'} + |f_2(t)|^{p'}\big)dt.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Sendo $p>2$ e $p=\dfrac{p'}{p'-1}$, resulta que $p'<2$. Logo, $L^2(T,L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^{p'}(T,L^2(\Omega))$ e como, por hipótese, $f_i \in L^2(T,L^2(\Omega))$, $i=1,2$, obtemos de (2.72) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p'}\int_T \big(||u_m(t)||_0^p + ||v_m(t)||_0^p\big)dt + \\
+2\int_T ||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq \int_T ||Y_m'(t)||_{2m}^2 dt + C.
\end{aligned}$$

Mas, $\displaystyle\int_T ||Y_m'(t)||_{2m}^2 dt \leq C$, então

$$\frac{1}{p'}\int_T \big(||u_m(t)||_0^p + ||v_m(t)||_0^p\big)dt + 2\int_T ||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq C, \tag{2.73}$$

de modo que

$$\int_T \big(||u_m(t)||_0^p + ||v_m(t)||_0^p\big)dt \leq C. \tag{2.74}$$

Afirmamos que

$$\int_T ||Y_m(t)||_{2m}^2 dt \leq C,$$

com C indepedente de μ. Com efeito, temos que

$$||Y_m(t)||_{2m}^2 = |u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2,$$

e, como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, resulta que

$$||Y_m(t)||_{2m}^2 \leq C(||u_m(t)||_0^2 + ||v_m(t)||_0^2).$$

Portanto,

$$\int_T ||Y_m(t)||_{2m}^2 dt \leq C \int_T (||u_m(t)||_0^2 + ||v_m(t)||_0^2) dt.$$

Sendo $p > 2$, resulta que $L^p(T, W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(T, W_0^{1,p}(\Omega))$, de modo que

$$||u||_{L^2(T,W_0^{1,p}(\Omega))}^2 \leq C||u||_{L^p(T,W_0^{1,p}(\Omega))}^2, \quad \forall u \in L^p(T, W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_T ||Y_m(t)||_{2m}^2 dt &\leq C\big[\big(\int_T ||u_m(t)||_0^p dt\big)^{2/p} + \big(\int_T ||v_m(t)||_0^p dt\big)^{2/p}\big] \\ &\leq C, \end{aligned} \tag{2.75}$$

por (2.74), com C independente de μ, como queríamos.

Sejam $s, t \in I_T$ com $s < t$. Integrando (2.63) de s a t, obtemos

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}||Y_m'(t)||_{2m}^2 + \delta \int_s^t ||Y_m'(\sigma)||_{2m}^2 d\sigma + \frac{\beta}{2}||Y_m(t)||_{2m}^2 + \frac{\mu}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{\mu}{p}||v_m(t)||_0^p + \\ + \frac{\mu}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \mu \int_s^t \big(||u_m'(\sigma)||^2 + ||v_m'(\sigma)||^2\big) d\sigma \leq \frac{1}{2}||Y_m'(s)||_{2m}^2 + \\ + \frac{\beta}{2}||Y_m(s)||_{2m}^2 + \frac{\mu}{p}||u_m(s)||_0^p + \frac{\mu}{p}||v_m(s)||_0^p + \frac{\mu}{\rho+2}||u_m(s)v_m(s)||_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \\ + \mu\delta \int_s^t ||Y_m'(\sigma)||_{2m}^2 d\sigma + \frac{\mu\beta}{2}||Y_m(t)||_{2m}^2 - \frac{\mu\beta}{2}||Y_m(s)||_{2m}^2 + \int_s^t ||P(\sigma)||_{2m}||Y_m'(\sigma)||_{2m} d\sigma. \end{gathered} \tag{2.76}$$

Sendo $\mu \in [0, 1]$, resulta que

- $\mu \int_s^t \big(||u_m'(\sigma)||^2 + ||v_m'(\sigma)||^2\big) d\sigma \geq 0,$
- $\mu\delta \int_s^t ||Y_m'(\sigma)||_{2m}^2 d\sigma \leq \delta \int_s^t ||Y_m'(\sigma)||_{2m}^2 d\sigma,$
- $\frac{\mu\beta}{2}||Y_m(t)||_{2m}^2 \leq \frac{\beta}{2}||Y_m(t)||_{2m}^2.$

Logo, de (2.76), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}||Y_m'(t)||_{2m}^2+\frac{\mu}{p}||u_m(t)||_0^p+\frac{\mu}{p}||v_m(t)||_0^p+\frac{\mu}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}\leq\\&\leq\frac{1}{2}||Y_m'(s)||_{2m}^2+\frac{\beta}{2}||Y_m(s)||_{2m}^2-\frac{\mu\beta}{2}||Y_m(s)||_{2m}^2+\frac{\mu}{p}\big(||u_m(s)||_0^p+||v_m(s)||_0^p\big)+\\&+\frac{\mu}{\rho+2}||u_m(s)v_m(s)||_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}+\int_s^t||P(\sigma)||_{2m}||Y_m'(\sigma)||_{2m}d\sigma.\end{aligned}\tag{2.77}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_s^t||P(\sigma)||_{2m}||Y_m'(\sigma)||_{2m}d\sigma &\leq \frac{1}{2}\int_s^t||P(\sigma)||_{2m}^2d\sigma+\frac{1}{2}\int_s^t||Y_m'(\sigma)||_{2m}^2d\sigma\\&\leq\frac{1}{2}\int_T||P(\sigma)||_{2m}^2d\sigma+\frac{1}{2}\int_T||Y_m'(\sigma)||_{2m}^2d\sigma\\&\leq C\end{aligned}$$

e, além disso,

$$\frac{\beta}{2}||Y_m(s)||_{2m}^2-\frac{\mu\beta}{2}||Y_m(s)||_{2m}^2\leq\beta||Y_m(s)||_{2m}^2.$$

Dessa forma, obtemos apartir de (2.77), que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}||Y_m'(t)||_{2m}^2+\frac{\mu}{p}||u_m(t)||_0^p+\frac{\mu}{p}||v_m(t)||_0^p+\frac{\mu}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\leq\\&\leq\frac{1}{2}||Y_m'(s)||_{2m}^2+\frac{\mu}{p}\big(||u_m(s)||_0^p+||v_m(s)||_0^p\big)+\frac{\mu}{\rho+2}||u_m(s)v_m(s)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}+\\&+\beta||Y_m(s)||_{2m}^2+C\leq\frac{1}{2}||Y_m'(s)||_{2m}^2+\frac{1}{p}\big(||u_m(s)||_0^p+||v_m(s)||_0^p\big)+\\&+\frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}+\beta||Y_m(s)||_{2m}^2+C.\end{aligned}$$

Integrando esta última em relação a s, de $t-T$ a t, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}||Y_m'(t)||_{2m}^2+\frac{\mu}{p}\big(||u_m(t)||_0^p+||v_m(t)||_0^p\big)+\frac{\mu}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\leq\\&\leq\frac{1}{T}\bigg\{\frac{1}{2}\int_T||Y_m'(s)||_{2m}^2ds+\frac{1}{p}\int_T\big(||u_m(s)||_0^p+||v_m(s)||_0^p\big)ds+\\&+\frac{1}{\rho+2}\int_T||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}ds+\beta\int_T||Y_m(s)||_{2m}^2ds+C\bigg\}.\end{aligned}$$

Por (2.68), (2.73), (2.75), obtemos, via expressão acima, que

$$\frac{1}{2}||Y_m'(t)||_{2m}^2+\frac{\mu}{p}\big(||u_m(t)||_0^p+||v_m(t)||_0^p\big)+\frac{\mu}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\leq C,$$

com C independente de μ. Daí, fazendo o limite com $\mu\to1$, obtemos

$$\frac{1}{2}||Y_m'(t)||_{2m}^2+\frac{1}{p}\big(||u_m(t)||_0^p+||v_m(t)||_0^p\big)+\frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\leq C,$$

com C independente μ. Assim,

$$||Y'_m(t)||_{2m} \leq C \tag{2.78}$$

e

$$||u_m(t)||_0, ||v_m(t)||_0 \leq C, \tag{2.79}$$

com C independente de μ.

De $||Y_m(t)||_{2m}^2 = |u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$||Y_m(t)||_{2m}^2 \leq C\big(||u_m(t)||_0^2 + ||u_m(t)||_0^2\big).$$

Assim, via (2.79), resulta que

$$||Y_m(t)||_{2m} \leq C, \quad \text{com C independente de } \mu. \tag{2.80}$$

Finalmente, de (2.78) e (2.80), concluimos que

$$||Y_m(t)||_{W_{2m}} \leq C, \quad \text{com C independente de } \mu. \tag{2.81}$$

De acordo com o Teorema de Leray-Schauder, se

$$\omega_{2m} = \{Y_m \in W_{2m}; ||Y_m||_{W_{2m}} \leq rC,\ r > 1\}$$

então, $d(I - T_m(\mu), \omega_{2m}, 0)$ existe e tem o mesmo valor qualquer que seja $\mu \in [0,1]$. Como $d(I - T_m(0)) = 1$, segue-se que $d(I - T_m(1)) = 1$, ou seja, $T_m(1)$ tem um ponto fixo, que é solução para (2.6) e, por equivalência, (2.2) tem solução.

2.5 Estimativas a Priori

2.5.1 Estimativa I

Substituindo ω por $u'_m(t)$ em $(2.2)_1$ e por $v'_m(t)$ em $(2.2)_2$, obtemos

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u'_m(t)) + &< Au_m(t), u'_m(t) > + ((u'_m(t), u'_m(t))) + \\ + &< |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), u'_m(t) > = (f_1(t), u'_m(t))\end{aligned} \tag{2.82}$$

e

$$\begin{aligned}(v''_m(t), v'_m(t)) + &< Av_m(t), v'_m(t) > + ((v'_m(t), v'_m(t))) + \\ + &< |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t), v'_m(t) > = (f_2(t), v'_m(t)).\end{aligned} \tag{2.83}$$

Observando que

- $\big(u''_m(t), u'_m(t)\big) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|u'_m(t)|^2$

- $\big\langle Au_m(t), u'_m(t)\big\rangle = \dfrac{1}{p}\dfrac{d}{dt}||u_m(t)||_0^p$

- $\big(\big(u'_m(t), u'_m(t)\big)\big) = ||u'_m(t)||^2$

- $\big\langle |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t), u'_m(t)\big\rangle = \dfrac{1}{\rho+2}\displaystyle\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}dx,$

resulta, de (2.82) e (2.83), que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}||u_m(t)||_0^p + ||u'_m(t)||^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}dx =\\ = \big(f_1(t), u'_m(t)\big) \leq |f_1(t)||u'_m(t)|\end{aligned} \tag{2.84}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}||v_m(t)||_0^p + ||v'_m(t)||^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2}dx =\\ = \big(f_2(t), v'_m(t)\big) \leq |f_2(t)||v'_m(t)|.\end{aligned} \tag{2.85}$$

Somando (2.84) a (2.85), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(t)||_0^p\Big] + ||u'_m(t)||^2 +\\ + ||v'_m(t)||^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \frac{d}{dt}\big[|u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho+2}\big]dx \leq\\ \leq |f_1(t)||u'_m(t)| + |f_2(t)||v'_m(t)|.\end{aligned} \tag{2.86}$$

Observando que

$$\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \frac{d}{dt}\big[|u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho+2}\big]dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$$

e integrando (2.86) em I_T, observando as condições periódicas, obtemos

$$\int_T \big(||u'_m(t)||^2 + ||v'_m(t)||^2\big)dt \leq \int_T \big(|f_1(t)||u'_m(t)| + |f_2(t)||v'_m(t)|\big)dt. \tag{2.87}$$

Agora, sendo $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que

$$\int_T \big(||u'_m(t)||^2 + ||v'_m(t)||^2\big)dt \leq C\int_T |f_1(t)|||u'_m(t)||dt + C\int_T |f_2(t)|||v'_m(t)||dt \tag{2.88}$$

e, usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_T \big(||u'_m(t)||^2 + ||v'_m(t)||^2\big)dt \leq \frac{C^2}{2}\int_T |f_1(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_T ||u'_m(t)||^2 dt + \\ + \frac{C^2}{2}\int_T |f_2(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_T ||v'_m(t)||^2 dt,\end{aligned} \tag{2.89}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_T \big(||u'_m(t)||^2 + ||v'_m(t)||^2\big)dt &\leq C^2 \int_T \big(|f_1(t)|^2 + |f_1(t)|^2\big)dt \\ &< \infty,\end{aligned} \tag{2.90}$$

pois $f_i \in L^2(T, L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$. Logo,

$$(u'_m)_m, (v'_m)_m \text{ são limitadas em } L^2(T, H_0^1(\Omega)). \tag{2.91}$$

2.5.2 Estimativa II

Substituindo ω por $u_m(t)$ em $(2.2)_1$ e por $v_m(t)$ em $(2.2)_2$, obtemos

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u_m(t)) + < Au_m(t), u_m(t) > + ((u'_m(t), u_m(t))) + \\ + < |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t) >= (f_1(t), u_m(t))\end{aligned} \tag{2.92}$$

e

$$\begin{aligned}(v''_m(t), v_m(t)) + < Av_m(t), v_m(t) > + ((v'_m(t), v_m(t))) + \\ + < |u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t) >= (f_2(t), v_m(t)).\end{aligned} \tag{2.93}$$

Observando que

- $\big(u''_m(t), u_m(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(u'_m(t), u_m(t)\big) - |u'_m(t)|^2$

- $< Au_m(t), u_m(t) >= ||u_m(t)||_0^p$

- $((u'_m(t), u_m(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2$

- $< |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t) >= ||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$,

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(u'_m(t), u_m(t)\big) - |u'_m(t)|^2 + ||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + \\ + ||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} = (f_1(t), u_m(t)) \leq |f_1(t)||u_m(t)|\end{aligned} \tag{2.94}$$

e

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(v_m'(t),v_m(t)\big)-|v_m'(t)|^2+||v_m(t)||_0^p+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2+\\&+||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}=(f_2(t),v_m(t))\le|f_2(t)||v_m(t)|.\end{aligned}\tag{2.95}$$

Integrando (2.94) em I_T, observando as condições periódicas, obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_T|u_m'(t)|^2dt+\int_T||u_m(t)||_0^pdt+\int_T||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt\le\\&\le\int_T|f_1(t)||u_m(t)|dt.\end{aligned}\tag{2.96}$$

Como, $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}&\int_T||u_m(t)||_0^pdt+\int_T||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt\le\\&\le\int_T|u_m'(t)|^2dt+C\int_T|f_1(t)|||u_m(t)||_0dt.\end{aligned}\tag{2.97}$$

Usando a desigualdade de Young e o fato de que $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_T||u_m(t)||_0^pdt+\int_T||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt\le\\&\le C\int_T||u_m'(t)||^2dt+\frac{C^{p'}}{p'}\int_T|f_1(t)|^{p'}dt+\frac{1}{p}\int_T||u_m(t)||_0^pdt.\end{aligned}\tag{2.98}$$

De (2.91) e do fato de que $1-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p'}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p'}\int_T||u_m(t)||_0^pdt+\int_T||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt\le\\&\le C+\frac{C^{p'}}{p'}\int_T|f_1(t)|^{p'}dt.\end{aligned}\tag{2.99}$$

Sendo $p>2$, segue que $p'<2$. Logo, $L^2(T,L^2(\Omega))\hookrightarrow L^{p'}(T,L^2(\Omega))$. Assim,

$$||f_1||^{p'}_{L^{p'}(T,L^2(\Omega))}\le C||f_1||^{p'}_{L^2(T,L^2(\Omega))},$$

de modo que via (2.99), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p'}\int_T||u_m(t)||_0^pdt+\int_T||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt\le\\&\le C+C\Big(\int_T|f_1(t)|^2dt\Big)^{p'/2}\le C,\end{aligned}\tag{2.100}$$

pois $f_1\in L^2(T,L^2(\Omega))$. Dessa forma, mostramos que

$$\int_T||u_m(t)||_0^pdt+p'\int_T||u_m(t)v_m(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt\le C,\tag{2.101}$$

com C independente de m e t.

O mesmo procedimento com a equação (2.95) conduz a

$$\int_T ||v_m(t)||_0^p dt + p' \int_T ||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq C, \tag{2.102}$$

com C independente de m e t.

Assim,

$$\left(u_m\right)_m, \left(v_m\right)_m \text{ são limitadas em } L^p(T, W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{2.103}$$

e

$$\left(u_m v_m\right)_m \text{ é limitada em } L^{\rho+2}(T, L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{2.104}$$

2.5.3 Estimativa III

Da expressão (2.86), do fato de que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e usando a Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(t)||_0^p + \\ &+ \frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\Big\} + ||u'_m(t)||^2 + ||v'_m(t)||^2 \leq \\ &\leq \frac{C^2}{2}|f_1(t)|^2 + \frac{1}{2}||u'_m(t)||^2 + \frac{C^2}{2}|f_2(t)|^2 + \frac{1}{2}||v'_m(t)||^2, \end{aligned} \tag{2.105}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(t)||_0^p + \\ &+ \frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\Big\} + \frac{1}{2}\big(||u'_m(t)||^2 + ||v'_m(t)||^2\big) \leq \\ &\leq \frac{C^2}{2}\big(|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2\big). \end{aligned} \tag{2.106}$$

Sejam $s, t \in I_T$, com $s < t$. Integrando (2.106) entre s e t, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(t)||_0^p + \\ &+ \frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\int_s^t \big(||u'_m(\sigma)||^2 + ||v'_m(\sigma)||^2\big)d\sigma \leq \\ &\leq \frac{C^2}{2}\int_s^t \big(|f_1(\sigma)|^2 + |f_2(\sigma)|^2\big)d\sigma + \frac{1}{2}|u'_m(s)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(s)|^2 + \\ &+ \frac{1}{p}||u_m(s)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(s)||_0^p + \frac{1}{\rho+2}||u_m(s)v_m(s)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Daí,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(t)||_0^p + \\ &+ \frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq \frac{1}{2}|u'_m(s)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(s)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(s)||_0^p + \\ &+ \frac{1}{p}||v_m(s)||_0^p + \frac{1}{\rho+2}||u_m(s)v_m(s)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + C. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Agora, integrando em relação a s de $t-T$ a t e usando o fato de que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(t)||_0^p + \\ &\frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq \frac{1}{T}\Bigg\{ \int_T \Bigg(\frac{C}{2}||u'_m(s)||^2 + \frac{C}{2}||v'_m(s)||^2 \\ &+ \frac{1}{p}||u_m(s)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(s)||_0^p + \frac{1}{\rho+2}||u_m(s)v_m(s)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + C\Bigg) ds \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Por (2.91), (2.103), (2.104), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t)||_0^p + \frac{1}{p}||v_m(t)||_0^p + \\ &\frac{1}{\rho+2}||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}(\Omega) \leq C, \end{aligned} \tag{2.110}$$

onde C independe de m e t.

Daí,

$$(u_m)_m, (v_m)_m \text{ são limitadas em } \; L^\infty(T; W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{2.111}$$

$$(u'_m)_m, (v'_m)_m \text{ são limitadas em } \; L^\infty(T; L^2(\Omega)), \tag{2.112}$$

$$(u_m v_m)_m \text{ é limitada em } \; L^\infty(T; L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{2.113}$$

Por (2.111) e pela limitação de A (veja Apêndice A), segue que

$$(Au_m)_m, (Av_m)_m \text{ são limitadas em } \; L^\infty(T; W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{2.114}$$

Além disso, considerando α e β como no Apêndice B, temos que

$$\begin{aligned} |||v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t)||_{L^\theta(\Omega)}^\theta &= \int_\Omega \left(|v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho+1}\right)^\theta dx \\ &= \int_\Omega |u_m(t)v_m(t)|^{(\rho+1)\theta}|v_m(t)|^\theta dx \\ &\leq \left\{ \int_\Omega |u_m(t)v_m(t)|^{(\rho+1)\theta\alpha} dx \right\}^{1/\alpha} \left\{ \int_\Omega |v_m(t)|^{\theta\beta} dx \right\}^{1/\beta}. \end{aligned}$$

Mas, $(\rho+1)\theta\alpha = \rho+2$ e $1 < \beta\theta = \dfrac{6p}{3p-2} < \dfrac{3p}{3-p}$. Logo, pelo Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema 1.16), segue que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta\theta}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} |||v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t)||_{L^\theta(\Omega)}^\theta &\leq ||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{(\rho+2)/\alpha}||v_m(t)||_{L^{\beta\theta}(\Omega)}^\theta \\ &\leq C||u_m(t)v_m(t)||_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{(\rho+2)/\alpha}||v_m(t)||_0^\theta \\ &\leq C, \end{aligned}$$

por (2.111) e (2.113) . Analogamente,

$$|||u_m(t)|^{\rho+2}|v_m(t)|^{\rho}v_m(t)||^{\theta}_{L^{\theta}(\Omega)} \leq C.$$

Dessa forma,

$$(|v_m|^{\rho+2}|u_m|^{\rho}u_m)_m,\ (|u_m|^{\rho+2}|v_m|^{\rho}v_m)_m \text{ são limitadas em } \ L^{\infty}(T;L^{\theta}(\Omega)). \tag{2.115}$$

2.5.4 Estimativa IV

Mostraremos que $\big(u''_m\big)_m, \big(v''_m\big)_m$ são limitadas em $L^2\big(T, H^{-s}(\Omega)\big)$. Para isto, seja $P_m : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, o operador projeção, dado por

$$P_m(h) = \sum_{j=1}^{m}(h,\omega_j)\omega_j.$$

Temos que

$i)$ $P_m \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega)\big)$ e $P_m = P_m^*$, onde * denota a adjunta de P_m

$ii)$ $P_m \in \mathcal{L}\big(H_0^s(\Omega)\big)$

$iii)$ $P_m(\omega) = \omega, \quad \forall \omega \in V_m.$

Com efeito,

$i)$ Pela linearidade do produto interno em $L^2(\Omega)$, segue que P_m é linear. Agora, para todo $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\big(P_m(h_1),h_2\big) &= \Big(\sum_{j=1}^{m}\big(h_1,\omega_j\big),h_2\Big) = \sum_{j=1}^{m}\Big(\big(h_1,\omega_j\big),h_2\Big) = \sum_{j=1}^{m}\big(h_1,\omega_j\big)\big(\omega_j,h_2\big) = \\ &= \sum_{j=1}^{m}\Big(h_1,\big(h_2,\omega_j\big)\omega_j\Big) = \Big(h_1,\sum_{j=1}^{m}\big(h_2,\omega_j\big)\omega_j\Big) = \big(h_1,P_m(h_2)\big).\end{aligned} \tag{2.116}$$

Logo, pelo Teorema de Hellinger-Toeplitz, $P_m \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega)\big)$ e $P_m = P_m^*$.

$ii)$ Seja $h \in H_0^s(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}||P_m(h)||_{H_0^s(\Omega)} &= ||\sum_{j=1}^{m}\big(h,\omega_j\big)\omega_j||_{H_0^s(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{m}||\big(h,\omega_j\big)\omega_j||_{H_0^s(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{m}|\big(h,\omega_j\big)|||\omega_j||_{H_0^s(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{m}|h||\omega_j|||\omega_j||_{H_0^s(\Omega)} \leq \\ &\leq C||h||_{H_0^s(\Omega)}\sum_{j=1}^{m}||\omega_j||_{H_0^s(\Omega)} \leq C||h||_{H_0^s(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.117}$$

donde, $P_m \in \mathcal{L}\big(H_0^s(\Omega)\big)$.

$ii)$ Seja $\omega \in V_m$. Então, $\omega = \sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i$. Assim,

$$P_m(h) = P_m\big(\sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i\big) = \sum_{i=1}^{m} C_i P_m(\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=1}^{m} \big(\omega_i, \omega_j\big)\omega_j = \sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i = \omega. \tag{2.118}$$

Temos que

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega),$$

e, pelo Lema B.6 (Apêndice B), $L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$. Logo, segue da equação aproximada $(2.2)_1$, que

$$\big\langle u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t), w\big\rangle_{H^{-s}(\Omega), H_0^s(\Omega)} = 0,$$

para todo $w \in V_m$. Mas, $P_m(\omega) = \omega, \quad \forall \omega \in V_m$, logo,

$$\big\langle u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t), P_m(\omega)\big\rangle_{H^{-s}(\Omega), H_0^s(\Omega)} = 0,$$

para todo $w \in V_m$, ou seja,

$$\big(u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t), P_m(\omega)\big) = 0,$$

para todo $w \in V_m$. Daí, sendo $P_m = P_m^*$, segue que

$$P_m^*(u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t)) = 0$$

em V_m.

O Teorema de Extensão de Hahn-Banach afirma que se X é um espaço normado, Y um espaço de Banach, M um subespaço denso de X e $T : M \subset X \to Y$ é uma transformação linear limitada, então existe uma única transformação linear limitada $\overline{T} : X \to Y$ tal que $\overline{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in M$, e $||\overline{T}|| = ||T||$.

Usando este resultado, obtemos

$$P_m^*(u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t)) = 0$$

em $H_0^s(\Omega)$. Daí, pela linearidade de P_m^* e do fato de que $u_m''(t) \in V_m$, segue que

$$u_m''(t) = -P_m^*(Au_m(t)) + P_m^*(\Delta u_m'(t)) - P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^\rho u_m(t)) + P_m^*(f_1(t))$$

em $H^{-s}(\Omega)$. Aplicando a norma em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} ||u_m''(t)||_{H^{-s}(\Omega)} &\leq ||P_m^*(Au_m(t))||_{H^{-s}(\Omega)} + ||P_m^*(\Delta u_m'(t))||_{H^{-s}(\Omega)} + \\ &+ ||P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t))||_{H^{-s}(\Omega)} + ||P_m^*(f_1(t))||_{H^{-s}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Mas, $P_m^* \in \mathcal{L}\big(H^{-s}(\Omega)\big)$ e $W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$. Logo $P_m^* \in \mathcal{L}\big(W^{-1,p'}(\Omega), H^{-s}(\Omega)\big)$ e, então,

$$||P_m^*(Au_m(t))||_{H^{-s}(\Omega)} \leq C||Au_m(t)||_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C||u_m(t)||_0^{p-1}. \tag{2.120}$$

Temos ainda $P_m^* \in \mathcal{L}\big(H^{-s}(\Omega)\big)$ e $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$. Assim $P_m^* \in \mathcal{L}\big(H^{-1}(\Omega), H^{-s}(\Omega)\big)$ e daí obtemos

$$||P_m^*(\triangle u_m'(t))||_{H^{-s}(\Omega)} \leq C||\triangle u_m'(t)||_{H^{-1}(\Omega)} \leq C||u_m'(t)||. \tag{2.121}$$

Também, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\gamma}(\Omega)$ e $L^{\theta}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$. Assim, como $P_m^* \in \mathcal{L}\big(H^{-s}(\Omega)\big))$, segue que $P_m^* \in \mathcal{L}\big(L^{\theta}(\Omega), H^{-s}(\Omega)\big))$. Obtemos então

$$\begin{aligned} ||P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t))||_{H^{-s}(\Omega)} &\leq C|||v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho}u_m(t)||_{L^{\theta}(\Omega)} \\ &\leq C, \end{aligned} \tag{2.122}$$

pois

$$(|v_m|^{\rho+2}|u_m|^{\rho}u_m)_m \;\text{ é limitada em }\; L^{\infty}(T; L^{\theta}(\Omega)).$$

Por fim, sendo $P_m^* \in \mathcal{L}\big(H^{-s}(\Omega)\big)$ e $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$, segue que $P_m^* \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega), H^{-s}(\Omega)\big)$. Assim,

$$||P_m^* f_1(t)||_{H^{-s}(\Omega)} \leq C|f_1(t)|, \;\; f_1(t) \in L^2(\Omega). \tag{2.123}$$

Levando em conta as limitações $(2.120) - (2.123)$, concluimos, via expressão (2.119), que

$$(u_m'')_m \;\text{ é limitada em }\; L^2(T; H^{-s}(\Omega)). \tag{2.124}$$

Um raciocínio semelhante, usando a equação aproximada $(2.2)_2$, conduz a

$$(v_m'')_m \;\text{ é limitada em }\; L^2(T; H^{-s}(\Omega)). \tag{2.125}$$

2.6 Passagem ao limite

Se X é um espaço de Banach reflexivo, tem-se que

$$L^\infty(T;X) = \big(L^1(T;X')\big)', \qquad L^2(T;X) = \big(L^2(T;X')\big)'.$$

Dessa forma, das limitações obtidas em (2.91), (2.111) – (2.115), segue do Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki, a existência de subsequências $(u_\nu)_\nu$, $(v_\nu)_\nu$ de $(u_m)_m$, $(v_m)_m$, respectivamente, tais que

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u,\ v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v \ \text{ em } \ L^\infty(T;W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{2.126}$$

$$u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta_1,\ v'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \tau_1 \ \text{ em } \ L^\infty(T;L^2(\Omega)). \tag{2.127}$$

$$u'_\nu \rightharpoonup \zeta_2,\ v'_\nu \rightharpoonup \tau_2 \ \text{ em } \ L^2(T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.128}$$

$$u_\nu v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varpi \ \text{ em } \ L^\infty(T;L^{\rho+2}(\omega)) \tag{2.129}$$

$$Au_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi,\ Av_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \ \text{ em } \ L^\infty(T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{2.130}$$

$$|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \xi,\ |u_\nu|^{\rho+2}|v_\nu|^\rho v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \ \text{ em } \ L^\infty(T;L^\theta(\Omega)). \tag{2.131}$$

Sendo $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(T;W_0^{1,p}(\Omega))$ e $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta_1$ em $L^\infty(T;L^2(\Omega))$, então, como $L^\infty(T;L^2(\Omega)) \subset D'(T;L^2(\Omega))$ e $L^\infty(T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset D'(T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset D'(T;L^2(\Omega))$, segue que

$$u_\nu \to u, \quad u'_\nu \to \zeta_1 \ \ em \ \ D'(T;L^2(\Omega)).$$

Logo, pela continuidade da derivada distribucional, se $u_\nu \to u$ e $u'_\nu \to \zeta_1$ em $D'(T;L^2(\Omega)$, temos $u' = \zeta_1$. De maneira análoga, mostra-se que $v' = \tau_1$, $v' = \tau_2$, $u' = \zeta_2$.

- Convergência de $(|v_m|^{\rho+2}|u_m|^\rho u_m)_m$

Por (2.111) e (2.112) e o fato que $W_0^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, segue, pelo Teorema de Aubin-Lions, a existência de uma subsequência $(u_\nu)_\nu$ de $(u_m)_m$ tal que

$$u_\nu \to u \ \text{ em } \ L^2(T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(I_T \times \Omega)$$

e, portanto,

$$u_\nu \to u, \quad \text{q.s. em } \ I_T \times \Omega. \tag{2.132}$$

Mesmo resultado em relação à sequência $(v_m)_m$, isto é, existe uma subsequência $(v_\nu)_\nu$ tal que

$$v_\nu \to v, \quad \text{q.s. em} \;\; I_T \times \Omega. \tag{2.133}$$

De (2.132) e (2.133), segue que

$$\begin{cases} |v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu \longrightarrow |v|^{\rho+2}|u|^\rho u, \quad q.s. \;\; em \;\; I_T \times \Omega \\ |u_\nu|^{\rho+2}|v_\nu|^\rho v_\nu \longrightarrow |u|^{\rho+2}|v|^\rho v, \quad q.s. \;\; em \;\; I_T \times \Omega. \end{cases} \tag{2.134}$$

Dessa forma, por (2.115), (2.134) e o Lema 1.1, obtemos

$$\begin{cases} |v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu \rightharpoonup |v|^{\rho+2}|u|^\rho u, \quad em \;\; L^\theta(I_T \times \Omega) \\ |u_\nu|^{\rho+2}|v_\nu|^\rho v_\nu \rightharpoonup |u|^{\rho+2}|v|^\rho v, \quad em \;\; L^\theta(I_T \times \Omega). \end{cases} \tag{2.135}$$

Portanto, $\xi = |v|^{\rho+2}|u|^\rho u$, $\lambda = |u|^{\rho+2}|v|^\rho v$.

De forma análoga, mostra-se que

$$u_\nu v_\nu \rightharpoonup uv \;\; \text{em} \;\; L^{\rho+2}(I_T \times \Omega). \tag{2.136}$$

Portanto, $\varpi = uv$.

A convergência $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(T; L^2(\Omega)) = \big(L^1(T; L^2(\Omega))\big)'$ implica

$$\big\langle u'_\nu, \psi \big\rangle \to \big\langle u', \psi \big\rangle, \qquad \forall \psi \in L^1(T; L^2(\Omega)).$$

Daí, sendo $\big\langle u'_\nu, \psi \big\rangle = \displaystyle\int_T \big(u'_\nu(t), \psi(t)\big)dt$, temos, para $\psi(x,t) = \omega(x)\phi'(t)$, onde $\omega \in L^2(\Omega)$ e $\phi \in C^1_T(\mathbb{R})$, que

$$\int_T \big(u'_\nu(t), \omega\big)\phi'(t)dt \to \int_T \big(u'(t), \omega\big)\phi'(t)dt, \quad \forall \omega \in L^2(\Omega), \quad \forall \phi \in C^1_T(\mathbb{R}). \tag{2.137}$$

De $Au_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi$ em $L^\infty(T; W^{-1,p'}(\Omega)) = \big(L^1(T; W^{1,p}_0(\Omega))\big)'$, segue que

$$\big\langle Au_\nu, \psi \big\rangle \to \big\langle \chi, \psi \big\rangle, \qquad \forall \psi \in L^1(T; W^{1,p}_0(\Omega)).$$

Em particular, $\psi(x,t) = \omega(x)\phi(t)$, onde $\omega \in W^{1,p}_0(\Omega)$, $\phi \in C^1_T(\mathbb{R})$, está em $L^1(T, W^{1,p}_0(\Omega))$. Logo,

$$\int_T \big\langle Au_\nu(t), \omega \big\rangle \phi(t)dt \to \int_T \big\langle \chi(t), \omega \big\rangle \phi(t)dt, \quad \forall \omega \in W^{1,p}_0(\Omega), \quad \forall \phi \in C^1_T(\mathbb{R}). \tag{2.138}$$

Agora, de $u'_\nu \rightharpoonup u$ em $L^2(T; H^1_0(\Omega))$, segue que

$$\big\langle \psi, u'_\nu \big\rangle \to \big\langle \psi, u' \big\rangle, \qquad \forall \psi \in \big(L^2(T; H^1_0(\Omega))\big)',$$

ou seja,

$$\int_T \big((u'_\nu(t),\psi(t))\big)dt \to \int_T \big((u'(t),\psi(t))\big)dt, \qquad \forall \psi \in L^2(T;H_0^1(\Omega)).$$

Em particular, $\psi(x,t) = \omega(x)\phi(t)$, onde $\omega \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \in C_T^1(\mathbb{R})$, está em $L^2(T;H_0^1(\Omega))$. Logo,

$$\int_T \big((u'_\nu(t),\omega)\big)\phi(t)dt \to \int_T \big((u'(t),\omega)\big)\phi(t)dt, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \phi \in C_T^1(\mathbb{R}). \tag{2.139}$$

A convergência $|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} |v|^{\rho+2}|u|^\rho u$ em $L^\infty(T;L^\theta(\Omega))$ implica

$$\int_T \big\langle |v_\nu(t)|^{\rho+2}|u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t),\psi\big\rangle dt \to \int_T \big\langle |v(t)|^{\rho+2}|u(t)|^\rho u(t),\psi\big\rangle dt,$$

$\forall \psi \in L^1(T;L^\gamma(\Omega))$.

Em particular, $\psi(x,t) = \omega(x)\phi(t)$, onde $\omega \in L^\gamma(\Omega)$, $\phi \in C_T^1(\mathbb{R})$, está em $L^1(T;L^\gamma(\Omega))$, logo,

$$\int_T \big\langle |v_\nu(t)|^{\rho+2}|u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t),\omega\big\rangle \phi dt \to \int_T \big\langle |v(t)|^{\rho+2}|u(t)|^\rho u(t),\omega\big\rangle \phi dt, \tag{2.140}$$

$\forall \omega \in L^\gamma(\Omega)$, $\forall \phi \in C_T^1(\mathbb{R})$.

Consideremos, então, a equação aproximada $(2.2)_1$, isto é,

$$\big(u''_\nu(t),\omega\big) + \big\langle Au_\nu(t),\omega\big\rangle + \big((u'_\nu(t),\omega)\big) + < |v_\nu(t)|^{\rho+2}|u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t),\omega\big\rangle = \big(f_1(t),\omega\big)$$

com $\nu \geq m$, $\omega \in V_m$.

Multiplicando a expressão acima por $\phi \in C_T^1(\mathbb{R})$, e em seguida, integrando por partes em I_T, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_T \big(u'_\nu(t),\omega\big)\phi' dt + \int_T \big\langle Au_\nu(t),\omega\big\rangle \phi dt + \int_T \big((u'_\nu(t),\omega)\big)\phi dt + \\ + \int_T \big\langle |v_\nu(t)|^{\rho+2}|u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t),\omega\big\rangle \phi dt = \int_T \big(f_1(t),\omega\big)\phi dt, \quad \forall \omega \in V_m. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\nu \to \infty$, e observando as convergências $(2.137) - (2.140)$, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_T \big(u'(t),\omega\big)\phi' dt + \int_T \big\langle \chi(t),\omega\big\rangle \phi dt + \int_T \big((u'(t),\omega)\big)\phi dt + \\ \int_T \big\langle |v(t)|^{\rho+2}|u(t)|^\rho u(t),\omega\big\rangle \phi dt = \int_T \big(f_1(t),\omega\big)\phi dt, \quad \forall \omega \in V_m, \quad \forall \phi \in C_T^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Por ser V_m denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} -\int_T \big(u'(t),\omega\big)\phi' dt + \int_T \big\langle \chi(t),\omega\big\rangle \phi dt + \int_T \big((u'(t),\omega)\big)\phi dt + \\ + \int_T \big\langle |v(t)|^{\rho+2}|u(t)|^\rho u(t),\omega\big\rangle \phi dt = \int_T \big(f_1(t),\omega\big)\phi dt, \quad \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \phi \in C_T^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{2.141}$$

De modo semelhante, usando a equação aproximada $(2.2)_2$, obtemos

$$-\int_T \big(v'(t),\omega\big)\phi' dt + \int_T \big(\eta(t),\omega\big)\phi dt + \int_T \big(\big(v'(t),\omega\big)\big)\phi dt +$$
$$+\int_T \langle |u(t)|^{\rho+2}|v(t)|^{\rho}v(t),\omega\rangle \phi dt = \int_T \big(f_2(t),\omega\big)\phi dt, \quad \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \phi \in C_T^1(\mathbb{R}). \tag{2.142}$$

2.6.1 Condições Periódicas

- $u(t) = u(t+T)$ e $u'(t) = u'(t+T)$.

Tem-se, via (2.111), que $(u_m(t))_m$ e $(u_m(t+T))_m$ são sequências limitadas em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo, existem, pelo Teorema 1.2 (Kakutani), subsequências $(u_\nu(t))_\nu$, $(u_\nu(t+T))_\nu$ de $(u_m(t))_m$, $(u_m(t+T))_m$, respectivamente, tais que

$$u_\nu(t) \rightharpoonup \sigma \ \ em \ \ W_0^{1,p}(\Omega)$$
$$u_\nu(t+T) \rightharpoonup \vartheta \ \ em \ \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

(Prova-se que $\sigma = u(t)$ e $\vartheta = u(t+T)$). Dessa forma, sendo $u_\nu(t) = u_\nu(t+T)$, segue, pela unicidade do limite fraco, que $u(t) = u(t+T)$.

Agora tem-se, via (2.112), que $(u'_m(t))_m$ e $(u'_m(t+T))_m$ são sequências limitadas em $L^2(\Omega)$. Sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo, existem pelo Teorema 1.2 (Kakutani), subsequências $(u'_\nu(t))_\nu$, $(u'_\nu(t+T))_\nu$ de $(u'_m(t))_m$, $(u'_m(t+T))_m$, respectivamente, tais que

$$u'_\nu(t) \rightharpoonup \sigma_1 \ \ em \ \ L^2(\Omega)$$
$$u'_\nu(t+T) \rightharpoonup \vartheta_1 \ \ em \ \ L^2(\Omega).$$

(Prova-se que $\sigma_1 = u'(t)$ e $\vartheta_1 = u'(t+T)$). Dessa forma, sendo $u'_\nu(t) = u'_\nu(t+T)$, segue-se, pela unicidade do limite fraco, que $u'(t) = u'(t+T)$.

As demonstrações para $v(t) = v(t+T)$ e $v'(t) = v'(t+T)$ são análogas.

2.6.2 $Au(t) = \chi(t)$ q.s. e $Av(t) = \eta(t)$ q.s.

Seja W o espaço das combinações lineares finitas, de somas finitas, de produtos do tipo $c_j\omega_j$, com $c_j \in C_T^1(\mathbb{R})$, $\omega_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então as expressões (2.141), (2.42) valem para todo elemento de W.

Seja

$$V=\{v\in L^2(T;W_0^{1,p}(\Omega));\ v'\in L^2(T;L^2(\Omega))\}$$

munido da norma

$$||v||_V=||v||_{L^2(T;W_0^{1,p}(\Omega))}+||v'||_{L^2(T;L^2(\Omega))}.$$

Prova-se que V é um espaço de Banach e W é denso em V (Ver [13]).

Assim, por densidade, temos

$$\begin{aligned}&-\int_T \big(u'(t),\omega'(t)\big)dt+\int_T \big\langle\chi(t),\omega(t)\big\rangle dt+\int_T \big(\big(u'(t),\omega(t)\big)\big)dt+\\&+\int_T \big\langle|v(t)|^{\rho+2}|u(t)|^{\rho}u(t),\omega(t)\big\rangle dt=\int_T \big(f_1(t),\omega(t)\big)dt,\quad\forall\omega\in V.\end{aligned}$$

Por (2.111) e (2.112) segue que $u\in V$. Assim,

$$\begin{aligned}&-\int_T |u'(t)|^2dt+\int_T \big\langle\chi(t),u(t)\big\rangle dt+\frac{1}{2}\int_T \frac{d}{dt}||u(t)||^2dt+\\&+\int_T ||u(t)v(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt=\int_T \big(f_1(t),u(t)\big)dt.\end{aligned}$$

Observando as condições periódicas para u, obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_T |u'(t)|^2dt+\int_T \big\langle\chi(t),u(t)\big\rangle dt+\int_T ||u(t)v(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt=\\&=\int_T \big(f_1(t),u(t)\big)dt.\end{aligned}\tag{2.143}$$

Reconsideremos a equação aproximada,

$$\begin{aligned}&\big(u''_\nu(t),\omega\big)+\big\langle Au_\nu(t),\omega\big\rangle+\big(\big(u'_\nu(t),\omega\big)\big)+\big\langle|v_\nu(t)|^{\rho+2}|u_\nu(t)|^{\rho}u_\nu(t),\omega\big\rangle=\\&=\big(f_1(t),\omega\big),\quad\forall\omega\in V_\nu.\end{aligned}$$

Tomando $\omega=u_\nu(t)$ nesta equação, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(u'_\nu(t),u_\nu(t)\big)-|u_\nu(t)|^2+\big\langle Au_\nu(t),u_\nu(t)\big\rangle+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_\nu(t)||^2+\\&+||u_\nu(t)v_\nu(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}=\big(f_1(t),u_\nu(t)\big).\end{aligned}$$

Integrando em I_T, observando as condições periódicas, obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_T |u'_\nu(t)|^2dt+\int_T \big\langle Au_\nu(t),u_\nu(t)\big\rangle dt+\int_T ||u_\nu(t)v_\nu(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt=\\&=\int_T \big(f_1(t),u_\nu(t)\big)dt.\end{aligned}\tag{2.144}$$

A convergência em (2.136) implica em

$$\int_T ||u(t)v(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt\le\liminf\int_T ||u_\nu(t)v_\nu(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}dt.\tag{2.145}$$

Tomando o lim inf em (2.144), obtemos

$$\begin{aligned} -\int_T |u'(t)|^2 dt + \liminf \int_T \big\langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\big\rangle dt + \int_T ||u(t)v(t)||^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} dt \leq \\ \leq \int_T \big(f_1(t), u(t)\big) dt. \end{aligned} \tag{2.146}$$

De (2.143) e (2.146), obtemos

$$\liminf \int_T \big\langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\big\rangle dt \leq \int_T \big\langle \chi(t), u(t)\big\rangle dt. \tag{2.147}$$

Agora, pela monotonicidade do operador A, temos que

$$\big\langle Au_\nu(t) - A\omega, u_\nu(t) - \omega\big\rangle \geq 0, \quad \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja,

$$\big\langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\big\rangle \geq \big\langle Au_\nu(t), \omega\big\rangle + \big\langle A\omega, u_\nu(t) - \omega\big\rangle, \quad \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Integrando esta última expressão em I_T, passando o lim inf em ambos os lados e observando (2.147), obtemos

$$\int_T \big\langle \chi(t), u(t)\big\rangle dt \geq \int_T \big\langle \chi(t), \omega\big\rangle dt + \int_T \big\langle A\omega, u(t) - \omega\big\rangle dt, \quad \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_T \big\langle \chi(t), u(t) - \omega\big\rangle dt \geq \int_T \big\langle A\omega, u(t) - \omega\big\rangle dt, \quad \forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Considerando $\omega = u(t) + \lambda v$, $\lambda > 0$, $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e substituindo na desigualdade anterior, obtemos

$$\int_T \big\langle \chi(t), \lambda v\big\rangle dt \geq \int_T \big\langle A(u(t) + \lambda v), \lambda v\big\rangle dt, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dividindo esta desigualdade por λ, temos

$$\int_T \big\langle \chi(t), v\big\rangle dt \geq \int_T \big\langle A(u(t) + \lambda v), v\big\rangle dt, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Fazendo $\lambda \to 0$ temos, pela hemicontinuidade do operador A que

$$\int_T \big\langle \chi(t), v\big\rangle dt \geq \int_T \big\langle Au(t), v\big\rangle dt, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_T \big\langle \chi(t) - Au(t), v\big\rangle dt \geq 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Substituindo v por $-v$ e na desigualdade anterior, obtemos

$$\int_T \big\langle \chi(t) - Au(t), v \big\rangle dt \leq 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dessa forma,

$$\int_T \big\langle \chi(t) - Au(t), v \big\rangle dt = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

de modo que $Au(t) = \chi(t)$ $q.s.$

A demonstração para $Av(t) = \eta(t)$ q.s. é similar.

Voltando as expressões encontradas em (2.141) e (2.142), temos

$$\begin{aligned} -\int_T (u'(t), w)\phi' dt + \int_T < Au(t), w > \phi dt + \int_T ((u'(t), w))\phi dt + \\ + \int_T < |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^{\rho} u(t), w > \phi dt = \int_T (f_1(t), w)\phi dt, \end{aligned} \tag{2.148}$$

$\forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall \phi \in C_T^1(R)$.

$$\begin{aligned} -\int_T (v'(t), w)\phi' dt + \int_T < Av(t), w > \phi dt + \int_T ((v'(t), w))\phi dt + \\ + \int_T < |u(t)|^{\rho+2} |v(t)|^{\rho} v(t), w > \phi dt = \int_T (f_2(t), w)\phi dt, \end{aligned} \tag{2.149}$$

$\forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall \phi \in C_T^1(R)$.

Com isso, o Teorema 2.2 está demonstrado.

Apêndice A

Propriedades do Operador p-Laplaciano A

Neste apêndice estudaremos algumas propriedades do operador A.

A.1 Definições e Resultados

Definição A.1 *Dados um espaço de Banach X e um funcional $J : X \to \mathbb{R}$, suponha que exista*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}[J(u + \lambda v) - J(u)] = J'(u, v).$$

Se para cada $u \in X$ fixado, $J'(u, v)$ é uma forma linear contínua em v, então dizemos que o funcional J é derivável no sentido de Gateaux, e sua derivada é $J'(u)$.

Notação: $J'(u, v) = \big\langle J'(u), v \big\rangle = J'(u)(v)$.

Exemplo1: Seja $X = L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$.

Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça:

i) $|g(s)| \leq \alpha |s|^p$, $\alpha > 0$.

ii) g continuamente diferenciável tal que $|g'(s)| \leq \beta |s|^{p-1}$, $\beta > 0$.

Considere o funcional $J : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) = \int_{\Omega} g(v(x))dx.$$

Tem-se, usando o Teorema do Valor Médio, que

$$\begin{aligned} J(u+\lambda v) - J(u) &= \int_\Omega (g(u(x)+\lambda v(x)) - g(u(x)))dx \\ &= \int_\Omega (g'(u(x)+\theta\lambda v(x)))\lambda v(x)dx, \end{aligned}$$

onde $\theta = \theta(x)$, $0 < \theta < 1$. Daí, se $\lambda \neq 0$ temos

$$\frac{1}{\lambda}[J(u+\lambda v) - J(u)] = \int_\Omega (g'(u(x)+\theta\lambda v(x)))v(x)dx.$$

Tomando o limite quando $\lambda \to 0$ e usando a continuidade de g', obtemos

$$\big\langle J'(u), v \big\rangle = \int_\Omega g'(u(x))v(x)dx. \tag{A.1}$$

Observação A.1 *As integrais anteriores existem em virtude das hipóteses sobre g e g'.*

Considera-se, a seguir, um caso geral do exemplo anterior, do qual obter-se-á um operador significativo para o que se tem em mente estudar.

Exemplo2: Seja $A : D(A) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ um operador linear, onde

$$D(A) = \{v \in L^p(\Omega); Av \in L^p(\Omega)\}.$$

O espaço vetorial $D(A)$ com a norma do gráfico de A, isto é,

$$||v||^p_{D(A)} = ||v||^p_{L^p(\Omega)} + ||Av||^p_{L^p(\Omega)}$$

é um subspaço de Banach de $L^p(\Omega)$. Resulta que o funcional

$$J(u) = \int_\Omega g(Au(x))dx$$

é bem definido em $D(A)$ com valores reais. Pelo mesmo método anterior constata-se que J, assim definido, possui derivada de Gateaux

$$J'(u).v = \int_\Omega g'(Au(x)).Av(x)dx. \tag{A.2}$$

Observação A.2 *Resta apenas justificar que $J'(u)$ é de fato uma forma linear limitada* *em $D(A)$. Temos que*

$$\begin{aligned}
\big|\big\langle J'(u),v\big\rangle\big| &\leq \int_\Omega |g'(Au(x))||Av(x)|dx \\
&\leq \Big(\int_\Omega |g'(Au(x))|^{p'}dx\Big)^{1/p'}\Big(\int_\Omega |Av(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\
&\leq C\Big(\int_\Omega |Au(x))|^{(p-1)p'}dx\Big)^{1/p'}\Big(\int_\Omega |Av(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\
&= C\Big(\int_\Omega |Au(x))|^p dx\Big)^{1/p'}.||A(v)||_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C||v||_{D(A)}.
\end{aligned}$$

Logo, $J'(u)$ é limitado em $D(A)$.

Exemplo3: Seja Ω um aberto, limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$. Tomemos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma $||.||_0$ e seja $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, o funcional dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p dx.$$

Pelo exemplo anterior, com $A_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, $g(s) = |s|^p$ $(g'(s) = p|s|^{p-2}s, p \geq 2)$, obtemos

$$\big\langle J'(u),v\big\rangle = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx,$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Em particular, para $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\big\langle J'(u),\varphi\big\rangle = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = -\int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)\Big]\varphi\ dx.$$

Portanto,

$$J'(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big), \quad p \geq 2,$$

isto é,

$$J' : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

$$u \longrightarrow J'(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big).$$

Daí, concluimos que a derivada de Gateaux do funcional

$$J(u) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p} dx, \ 2 \leq p < \infty,$$

é o operador

$$J'(u) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big), \quad p \geq 2.$$

Este operador, que denotamos por A, é o operador do nosso sistema, isto é,

$$A(u) = J'(u) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big), \quad p \geq 2,$$

denominado de operador p-Laplaciano.

Note que

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

$$u \longrightarrow A(u) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big),$$

temos que $Au : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é linear e contínuo. Além disso, como $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ver [10]), e

$$\big\langle J'(u), \varphi\big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, temos que

$$\big\langle J'(u), w\big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx,$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definição A.2 *Sejam V um espaço de Banach e V' seu dual. Dizemos que $A : V \to V'$ é um operador* ***hemicontínuo*** *se, para u, v, w em V, a função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \to \big\langle A(u+\lambda v), w\big\rangle$ é contínua.*

Definição A.3 *Diz-se que um operador $A : V \to V'$ é* ***monótono*** *se*

$$\big\langle Au - Av, u - v\big\rangle \geq 0, \quad \forall\ u, v \in V,$$

onde $\big\langle , \big\rangle$ denota a dualidade V', V.

Proposição A.4 *Se $J : V \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo, então sua derivada de Gateaux $J' : V \to V'$ é um operador monótono.*

Prova. Sendo J convexo, temos

$$J[(1-\theta)u + \theta v] \leq (1-\theta)J(u) + \theta J(v), \quad 0 < \theta < 1$$

ou melhor,

$$J[u + \theta(v-u)] - J(u) \leq \theta[J(v) - J(u)].$$

Dividindo esta última desigualdade por $\theta \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\theta}[J(u + \theta(v-u)) - J(u)] \leq [J(v) - J(u)].$$

Fazendo $\theta \to 0$ resulta que

$$\left\langle J'u, v-u \right\rangle \leq J(v) - J(u).$$

Agora, trocando u por v, obtemos

$$\left\langle J'v, u-v \right\rangle \leq J(u) - J(v).$$

Daí,

$$\left\langle J'u, u-v \right\rangle + \left\langle J'v, v-u \right\rangle \leq 0,$$

donde concluimos que

$$\left\langle J'u - J'v, u-v \right\rangle \geq 0,$$

como queríamos. ∎

Definição A.5 *Dizemos que um operador $A : V \to V'$ é **coercivo**, se*

$$\lim_{||v||_V \to +\infty} \frac{\left\langle Au, u \right\rangle}{||u||_V} = +\infty$$

A.2 Propriedades de A

A.2.1 A é hemicontínuo

De fato, sejam $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \to \lambda_0$. Então

$$\left\langle A(u + \lambda v), w \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx$$

Notemos que

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial w}{\partial x_i}\leq 2^{p-3}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}+\lambda^{p-2}\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

e

$$\Bigg|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial w}{\partial x_i}\Bigg|=\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|\Big|\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big|=$$

$$=\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p-1}\Big|\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big|\to\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda_0\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p-1}\Big|\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big|,\quad \text{q.s em } \Omega.$$

Observando que as funções do segundo membro da desigualdade acima são integráveis, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\big\langle A(u+\lambda v),w\big\rangle=\big\langle A(u+\lambda_0 v),w\big\rangle.$$

Logo A é hemicontínuo.

A.2.2 A é monótono

Pela Proposição $A.4$, basta mostrarmos que o funcional $J:W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$, dado por

$$J(u)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p dx,\quad 2<p<\infty,$$

é convexo, pois o operador A é a derivada de Gateaux desse funcional.

Sendo $p>2$, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=|x|^p$, é convexa. Logo,

$$|(1-\theta)x+\theta y|^p\leq(1-\theta)|x|^p+\theta|y|^p,\quad \forall x,y\in\mathbb{R},\quad 0<\theta<1.$$

Assim, para $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $0<\theta<1$ temos que

$$\begin{aligned}J((1-\theta)u+\theta v) &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\Big|(1-\theta)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\theta\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^p dx\\ &\leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega(1-\theta)\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p+\theta\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^p dx\\ &= (1-\theta)J(u)+\theta J(v).\end{aligned}\tag{A.3}$$

Portanto, J é convexo.

A.2.3 $\langle Au, u \rangle = ||u||_0^p$.

De fato,

$$\langle Au, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx = ||u||_0^p.$$

A.2.4 A é coercivo

Temos $\langle Au, u \rangle = ||u||_0^p$, logo

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{||u||_0} = ||u||_0^{p-1},$$

donde

$$\lim_{||u||_0 \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{||u||_0} = \infty.$$

A.2.5 A é limitado

A limitação aqui é no sentido que A leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

De fato, temos

$$||Au||_{-1,p'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle Au, v \rangle|}{||v||_0}.$$

Como,

$$|\langle Au, v \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= ||u||_0^{p-1} ||v||_0,$$

obtemos

$$\frac{|\langle Au, v \rangle|}{||v||_0} \leq ||u||_0^{p-1}.$$

Portanto,

$$\sup_{v \neq 0} \frac{|\langle Au, v \rangle|}{||v||_0} \leq ||u||_0^{p-1},$$

isto é,

$$||Au||_{-1,p'} \leq ||u||_0^{p-1}.$$

A.2.6 $\langle Au, u' \rangle = \dfrac{1}{p}\dfrac{d}{dt}||u(t)||_0^p$

De fato, observe que, se $u : (0,T) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que $u'(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\langle Au, u' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\ dx.$$

Assim,

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}||u(t)||_0^p = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{-1}\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx =$$

$$= \langle Au, u' \rangle,$$

ou seja,

$$\langle Au, u' \rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}||u(t)||_0^p.$$

Apêndice B

Resultados Auxiliares

Lema B.1 *Se* $s > 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + 1$, *então* $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prova. Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach separável e reflexivo, tem-se, via lema de Browder-B. An Ton, a existência de um espaço de Hilbert separável com imersão contínua e densa em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Construiremos um tal espaço.

Mediante as imersões de Sobolev, tem-se:

$$W_0^{m,p} \hookrightarrow W_0^{m-k,q_k}(\Omega), \quad \text{onde} \;\; \frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{3}, \quad k > 0.$$

Considere, $m - k = 1, \quad q_k = p$ em $W_0^{m-k,q_k}(\Omega)$ e $p = 2$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Daí, temos

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \;\; \text{com} \;\; \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{m-1}{3}.$$

De, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m-1}{3}$, temos

$$\frac{m-1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow m - 1 = 3\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big) \Leftrightarrow m = 3\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big) + 1.$$

Logo

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \;\; \text{para} \;\; m = 3\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big) + 1.$$

Tomando-se $s > 3\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big) + 1$, temos:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

Sendo $H^s(\Omega)$ um espaçoo de Hilbert separável e $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$, segue-se que $H_0^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com imersão contínua e densa em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Lema B.2 *Sejam* $p, \rho \in \mathbb{R}$ *tais que* $2 < p < 3$ *e* $0 \leq \rho < \dfrac{4p-8}{p+4}$. *Então:*

i) $\rho < \dfrac{4}{3p-2}$.

ii) $\dfrac{12p}{3p-2} \leq \dfrac{3p}{3-p}$

Prova. *i)* $2 < p < 3 \Rightarrow 3p(3-p) > 0$. Daí,

$$3p(3-p) > 0 \Longleftrightarrow 3p^2 - 3^2p < 0 \Longleftrightarrow$$

$$3p - 3^2p + 3p^2 - 2 + 2.3 - 2p < 3p - 2 + 2.3 - 2p \Longleftrightarrow$$

$$3p(1-3+p) - 2(1-3+p) < 2(3-p-1) + 3p \Longleftrightarrow$$

$$(3p-2)(1-3+p) < 2(3-p-1) + 3p \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1-3+p}{2(3-p-1)+3p} < \frac{1}{3p-2} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{4(1-3+p)}{2(3-p-1)+3p} < \frac{4}{3p-2} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{4p-8}{p+4} < \frac{4}{3p-2}.$$

ii)

$$2 < p \Longrightarrow 21p^2 > 42p \Longrightarrow 36p - 12p^2 < 9p^2 - 6p \Longrightarrow$$

$$12p(3-p) < 3p(3p-2).$$

Sendo p<3, segue o resultado. ■

Lema B.3 *Sejam* p *e* ρ *como no lema B.2 e consideremos*

$$\theta = \frac{6p(\rho+2)}{(3p-2)(\rho+2) + 6p(\rho+1)}, \qquad \gamma = \frac{6p(\rho+2)}{(3p+2)(\rho+2) - 6p(\rho+1)}.$$

Então:

i) $1 < \theta < \dfrac{\rho+2}{\rho+1}$

ii) $1 < \gamma \leq \dfrac{3p}{3-p}$

iii) $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\gamma} = 1.$

Prova. Imediata. ∎

Lema B.4 *Sejam p e ρ como antes e defina*

$$\alpha = \frac{\rho+2}{(\rho+1)\theta}, \qquad \beta = \frac{\rho+2}{(\rho+2)-(\rho+1)\theta}$$

Então:

i) $\alpha > 1$, $\beta > 1$;

ii) $\theta\beta = \dfrac{6p}{3p-2}$;

iii) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1.$

Prova. Imediata. ∎

Lema B.5 *Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então:*

i) $uv \in L^{\rho+2}(\Omega)$;

ii) $|v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u,\ |u|^{\rho+2}|v|^{\rho}v \in L^{\theta}(\Omega)$.

Prova. Temos, pelo lema B.2, que $0 \leq \rho < \dfrac{4}{3p-2}$, $\dfrac{12p}{3p-2} \leq \dfrac{3p}{3-p}$. Assim,

$$2(\rho+2) < \frac{12p}{3p-2} \leq \frac{3p}{3-p}.$$

Logo, pelo Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema 1.16), $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega)$.

i) $$\int_\Omega |uv|^{\rho+2}dx \leq \Big(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}dx\Big)^{1/2} . \Big(\int_\Omega |v|^{2(\rho+2)}dx\Big)^{1/2}.$$

Mas,

$$\Big(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}dx\Big)^{1/2} = ||u||^{\rho+2}_{L^{2(\rho+2)}} \leq C||u||_0^{\rho+2} < \infty.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\Big(\int_\Omega |v|^{2(\rho+2)}dx\Big)^{1/2} < \infty.$$

Assim,

$$\int_\Omega |uv|^{\rho+2}dx \leq \Big(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}dx\Big)^{1/2} . \Big(\int_\Omega |v|^{2(\rho+2)}dx\Big)^{1/2} < \infty.$$

$ii)$ Tem-se que

$$\int_\Omega \left||v|^{\rho+2}|u|^\rho u\right|^\theta dx = \int_\Omega |v|^{\theta(\rho+2)}|u|^{\theta(\rho+1)}dx = \int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta}|v|^\theta dx \leq$$
$$\leq \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha}dx\right)^{1/\alpha}\left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta}dx\right)^{1/\beta}.$$

Sendo $(\rho+1)\theta\alpha = \rho+2$, segue, via $i)$, que

$$\left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha}dx\right)^{1/\alpha} = \left(\int_\Omega |uv|^{\rho+2}dx\right)^{1/\alpha} < \infty.$$

Agora, sendo $1 < \beta\theta = \dfrac{6p}{3p-2} < \dfrac{3p}{3-p}$, segue, pelo Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema 1.16), que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta\theta}(\Omega)$. Dessa forma,

$$\left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta}dx\right)^{1/\beta} = ||v||^\theta_{L^{\beta\theta}(\Omega)} \leq C||v||_0^\theta < \infty.$$

Logo,

$$\int_\Omega \left||v|^{\rho+2}|u|^\rho u\right|^\theta dx \leq \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha}dx\right)^{1/\alpha}.\left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta}dx\right)^{1/\beta} < \infty,$$

como queríamos. ∎

Lema B.6 *Tem-se que* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$ *e* $L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$.

Prova. Segue-se do lema B.4, ítem $ii)$ que

$$1 < \gamma < \frac{3p}{3-p}.$$

Logo, pelo Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema 1.16), $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$. Consequentemente, $L^\theta(\Omega) = \big(L^\gamma(\Omega)\big)' \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$. ∎

Lema B.7 *Seja* $p \in \mathbb{R}$, $p > 2$. *Então, para todo* $s, s_0 \in \mathbb{R}$, *tem-se que*

$$\left||s|^{p-2}s - |s_0|^{p-2}s_0\right| \leq Cmax\big\{|s|^{p-2}, |s_0|^{p-2}\big\}|s-s_0|,$$

para algum $C > 0$.

Prova. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo

$$f(s) = |s|^{p-2}s.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t \in [0,1]$ tal que

$$f(s) - f(s_0) = (s-s_0)f'(ts + (1-t)s_0).$$

Mas, $f'(s) = (p-1)|s|^{p-2}$, logo,

$$|s|^{p-2}s - |s_0|^{p-2}s_0 = (p-1)(s-s_0)\big|ts + (1-t)s_0\big|^{p-2},$$

donde

$$\begin{aligned} \big||s|^{p-2}s - |s_0|^{p-2}s_0\big| &= (p-1)|s-s_0||ts+(1-t)s_0|^{p-2} \\ &\leq (p-1)|s-s_0|(|s|+|s_0|)^{p-2} \\ &\leq (p-1)2^{p-2}max\big\{|s|^{p-2}, |s_0|^{p-2}\big\}|s-s_0| \\ &\leq Cmax\big\{|s|^{p-2}, |s_0|^{p-2}\big\}|s-s_0|, \end{aligned} \tag{B.1}$$

como queríamos. ∎

Bibliografia

[1] Biazutti, A.- *Sobre uma Equação Não Linear de Vibrações - Existência de Soluções Fracas e Comportamento Assintótico.* IM/UFRJ.

[2] Brezis, Haim. - *Análisis Funcional, Teoría e Aplicaciones.* Alianza Editora. Madrid, Paris, 1984.

[3] Browder, F. E., Ton, Buy An - *Nonlinear Funcional Equations in Banach Espaces and Elliptic Super Regularization.* Math. Zeitsch. 105(1968), 177-195.

[4] Clark, M. R., Maciel, A. - *On a Mixed Problem for a Nonlinear $k \times k$ Sistem.* International Journal of Applied Mathematics , Vol 9 n^o 2, 2002, 207-218

[5] Clark, M. R., Clark, H. R., Lima, O. A. - *On a Nonlinear Coupled System.* International Journal of and Apllied Mathematics, Vol 20 n^o 1, 2005, 81-95

[6] Evans, L. C. - *Partial Differential Equations*; Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19; AMS; 1998.

[7] Castro, N. N. O. - *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano.* João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão. João Pessoa, 2005.

[8] Castro, N. N. O. - *Periodic Solutions of a Nonlinear Evolution Problem.* Appl. of Mathematics, 47(2002), n^o 5, 381-396.

[9] Castro, N. N. de O. - *Existence and Asymptotic Behaviour of Solutions of a Non-Linear Evolution Problem.* Appl. of Mathematics, 42(1997), n^o 6, 411-420.

[10] Cavalcante, M. M., Cavalcante, V. N. D. - *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, Vol1 e Vol2. Maringá: Universidade Estadual de

Maringá. Notas. Maringá, 2000.

[11] Kreyszig, Erwin - *Introductory Functional Analisis with Aplications.* New York. Jonh Wiley & Sons.

[12] J. L. Lions. - *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes Aux Limites Nom Linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[13] Lions, J. L. - *Equations Differentielles Operationnelles Et Problémes Aux Limites.* Springer Verlag, Berlin. Gottingen. Heidelberg, 1961.

[14] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. - *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: Editora da UFRJ,1989.

[15] Medeiros, L. A. Miranda, M. M., Malta, S. - *Tópicos de Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1998.

[16] Medeiros, L. A., Melo, E. A. - *Teoria da Integração.* Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1989.

[17] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. - *Weak Solutions of Nonlinear Klein-Gordon Equations.* Ann. Math. Pura Appl. IV, Ser. 146(1987), 173-183

[18] Medeiros, L. A. - *Equações Diferenciais Parciais* - R.J. - 1981.

[19] Miranda, M. M. - *Análise Espectral em Espaços de Hilbert* - Notas de Aula IM-UFRJ; 1990. Tópicos de Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro, Editora da UFRJ, 1998

[20] Nakao, M. - *A Difference Inequality and its Applications to Nonlinear Evolution Equations*, J. Math. Soc. Jap. 30 (4) (1978), 747-762

[21] Segal, I. - *Nonlinear Partial Differential Equations in Quantum Field Theory.* Proc. Symp. Appl. Math. AMS, 17(1965), 210-226.

[22] Yosida, K. - *Équations Differentielles et Intégrales*, Dunod, Paris, 1971.

[23] Cronin, J. - *Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis*, 1964.

[24] Amann, H. - *Lectures on Some Fixed Point Theorems*, Monografias de matemática, IMPA.

[25] Zeidler, E. - *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I: Fixed Point Theorems*, Springer, 1986.

[26] T. Kakita - *On the Existence of Time Periodic Solutions of Some Nonlinear Evolution Equations.* Appl. Anal. 4(1974), 63-76.

[27] M. Tsutsumi - *Some Nonlinear Evolution Equations of Second Order.* Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci. 47(1971), 210-226.