Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado em Matemática

Caracterizações de Superfícies que contém Geodésicas Helicais em $\mathbb{S}^3$

por

Liliane Xavier Neves

sob orientação do

Prof. Dr. Rodrigo Ristow Montes

João Pessoa-Paraíba
julho de 2006

Caracterizações de Superfícies que contém Geodésicas Helicais em $\mathbb{S}^3$

por

Liliane Xavier Neves

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. Rodrigo Ristow Montes
Orientador

Prof. Dr. Romildo Pina

Prof. Dr. Pedro Venegas

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado em Matemática

julho de 2006

Aos meus pais,
Nelma, Raimundo e minhas queridas irmãs.

Agradecimentos

Ao meu orientador Rodrigo Ristow Montes pelo incentivo e por sua paciência durante este período de preparação da dissertação.

Aos professores Everaldo Souto de Medeiros e Pedro Hinojosa coordenador do Mestrado em Matemática da UFPB, por toda ajuda prestada durante o Mestrado.

Aos professores do Mestrado em Matemática da UFPB, a quem tive o prazer de conviver durante esse tempo.

Aos colegas e amigos que fiz aqui na UFPB, em particular, Kalina, Maria e Célia, por quem tenho grande amizade.

Aos amigos Naldisson e Anderson por estarem sempre prontos a me ajudar quando precisei.

À Sebastião Marques, um grande amigo que nunca vou esquecer.

À Aparecida Gomes, pelo acolhimento e amizade.

Aos meus pais, a quem não canso de agradecer por todo amor que me dedicam. Eu os amo muito.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio finaceiro.

Resumo

O principal resultado deste trabalho é o teorema que classifica superfícies imersas na esfera $\mathbb{S}^3$, usando o conceito geométrico de geodésicas helicais. Em [16], Tamura define as geodésicas helicais como curvas que são hélices no espaço ambiente e geodésicas na superfície imersa.

Neste trabalho, com o objetivo de estudar a geometria da esfera $\mathbb{S}^3$, estabeleceremos suas equações de estruturas. Também determinaremos as equações de estrutura para uma superfície em $\mathbb{S}^3$, que nos possibilitará fazer um estudo mais detalhado da geometria de $\mathbb{S}^2$ e do Toro Hopf. Como aplicação desta teoria demonstraremos o teorema de Tamura que diz que as superfícies completas de curvatura média constante imersas em $\mathbb{S}^3$ contendo duas geodésicas helicais são a 2-esfera e o Toro Hopf.

Palavras-chaves : superfícies isoparamétricas, geodésicas helicais, Toro Hopf.

Abstract

The main result of this work is the theorem that classifies immersed surfaces in the sphere $\mathbb{S}^3$ using the concept of helical geodesics. in [16], Tamura introduces helical geodesics like curves with two properties: "helices"in ambient space and geodesics in immersed surface.

In this work, in order to study the geometry of the sphere $\mathbb{S}^3$, we determine structure equations of $\mathbb{S}^3$. Also, we compute structure equations for an immersed surface in $\mathbb{S}^3$, and it will be possible to find geometric results of the sphere$\mathbb{S}^2$ and the Hopf torus. As an application of this theory we will prove the Tamura´s theorem , that says that complete immersed surfaces with constant mean curvature and with two helical geodesics in $\mathbb{S}^3$ are the sphere $\mathbb{S}^2$ and the Hopf torus.

Key words : surfaces isoparametrics, helical geodesics, Hopf torus.

Conteúdo

Introdução

Michico Tamura, em [17], definiu as geodésicas helicais em uma superfície em $\mathbb{R}^3$ como curvas que são hélices em $\mathbb{R}^3$ e geodésicas sobre a superfície. Por exemplo, as curvas dadas por

$$\alpha(t) = (r\cos(at+b), r\sin(at+b), ct+d)$$

são geodésicas do cilíndro circular e como têm curvatura e torção constantes, são hélices no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

Ainda em [17], Tamura classificou as superfícies completas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante contendo duas geodésicas helicais como planos, esferas ou cilíndros circulares.

Em [16], Tamura generalizou este resultado para superfícies completas imersas em um espaço Riemanniano tridimensional de curvatura constante, os quais, sem perda de generalidade, ele escolheu como sendo os espaços Riemannianos $\mathbb{R}^3$ com curvatura zero, $\mathbb{S}^3$ com curvatura um ou $\mathbb{H}^3$ com curvatura menos um.

Baseados em [16], nós classificaremos as superfícies completas de curvatura média constante contendo geodésicas helicais em $\mathbb{S}^3$ como segue.

Teorema 0.1 *Seja M uma superfície completa de curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$. Se existem duas geodésicas helicais sobre M passando por cada ponto de M, então M é ou uma 2-esfera totalmente geodésica, ou uma 2-esfera totalmente umbílica ou um Toro Hopf sobre um círculo.*

Para o bom desenvolvimento deste trabalho, nós estudaremos a geometria da esfera $\mathbb{S}^3$ determinando suas equações de estrutura e também as esquações de estrutura de uma superfície imersa em $\mathbb{S}^3$. Isso nos possibilitará fazer um estudo mais detalhado da esfera $\mathbb{S}^2$ e do toro como superfícies em $\mathbb{S}^3$.

Dividimos este trabalho da seguinte forma:

No primeiro capítulo reunimos a teoria necessária para o bom entendimento de todo o restante do trabalho. Neste capítulo encontram-se os resultados citados nos capítulos posteriores, como por exemplo a descrição do Toro Hopf em $\mathbb{S}^3$, que é definido como a imagem inversa pela aplicação Hopf, $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2(4)$, de uma curva fechada da esfera $\mathbb{S}^2$ com curvatura 4.

Também podemos encontrar neste capítulo a teoria das Equações de Estrutura do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, que serve como motivação para determinarmos depois as Equações de Estrutura da esfera $\mathbb{S}^3$.

O objetivo do segundo capítulo é determinar as Equações de Estrutura de uma superfície em $\mathbb{S}^3$. Estes resultados foram determinados por Rodrigo Ristow Montes, em [10]. Lá, ele introduz a noção de ângulo de contato que pode ser considerado como um novo invariante geométrico bastate útil no estudo da geometria de superfícies imersas em variedades Riemannianas.

Geometricamente, o ângulo de contato é o ângulo complementar entre a distribuição de contato ($\Delta_z = \{v \in T_zS; \langle \xi, v \rangle = 0\}$, onde $\xi \perp S$) e o espaço tangente à superfície.

Por meio das formas de conexão e formas duais de uma superfície em $\mathbb{S}^3$ deduziremos a seguinte fórmula para a curvatura

$$K = 1 + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^2)(e_1, e_2).$$

Em particular, utilizando referenciais adaptados, encontraremos as formas de conexão e as formas duais da esfera $\mathbb{S}^2$ e do Toro como superfícies em $\mathbb{S}^3$, podendo assim determinar suas Equações de Estrutura.

No terceiro capítulo definimos, segundo Tamura em [16], as geodésicas helicais em uma superfície imersa em $\mathbb{S}^3$. Aqui nos mostramos que as curvas dadas por

$$\gamma(s) = (\cos\phi\cos(as), \cos\phi\sin(as), \sin\phi\cos(bs), \sin\phi\sin(bs)),$$

onde $a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi = 1$ são geodésicas helicais do Toro raso em $\mathbb{S}^3$.

Também encontra-se neste capítulo a prova do teorema de Tamura que classifica superfícies completas que contém geodésicas helicais em $\mathbb{S}^3$. Nós mostraremos que essas superficies são isoparamétricas, ou seja, têm curvaturas principais constantes. Também mostraremos que superfícies isoparamétricas em $\mathbb{S}^3$ são 2-esferas totalmente geodésicas, ou 2-esferas totalmente umbílicas, ou um toro Hopf sobre um círculo e isso nos faz concluir o teorema.

Capítulo 1

Terminologia e Resultados Preliminares

Neste capítulo reuniremos a teoria necessária para o bom entendimento deste trabalho. Aqui, encontraremos todos os resultados citados nos capítulos posteriores. Provaremos alguns destes resultados. Outros, com demonstração mais extensa, indicaremos a bibliografia.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção conheceremos uma nova estrutura de espaços: As variedades diferenciáveis. Veremos que a esfera $\mathbb{S}^3$, que é a superfície mais importante neste trabalho, é uma variedade diferenciável. Assim, com os conceitos de variedades, poderemos trabalhar melhor dentro da esfera $\mathbb{S}^3$.

Uma variedade diferenciável de dimensão n é um par formado por um conjunto M e uma família de sistemas de coordenadas $x_\alpha : U_\alpha \subset R^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que :

(i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(ii) Para todo par $(\alpha\ ,\ \beta)$, com $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq 0$, os conjuntos ${x_\alpha}^{-1}(W)$ e ${x_\beta}^{-1}(W)$ são abertos em R^n e as aplicações ${x_\beta}^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.

A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ dos pares (U_α, x_α) com os abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ e os sistemas de coordenadas x_α satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M. Usaremos a notação M^n para identificar uma variedade diferenciável M de dimensão n e chamaremos as imagens $x_\alpha(U_\alpha)$, com $p \in x_\alpha$, de vizinhança coordenada em p.

Um exemplo trivial de variedade diferenciável é o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ com a estrutura diferenciável dada pela identidade.

Toda superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade diferenciável. De fato, as parametrizações de uma superfície em R^3 formam uma estrutura diferenciável.

O espaço $\mathbb{S}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$. é uma variedade diferenciável. De fato, como $\mathbb{S}^n$ é uma superfície regular, basta tomarmos as parametrizações de $\mathbb{S}^n$ dadas por

$$\begin{array}{rccl} \varphi_N: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{S}^n - \{N\}; \qquad\qquad N = (0, \dots, 0, 1) \\ & x & \mapsto & \left(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \varphi_S: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{S}^n - \{S\}; \qquad\qquad S = (0, \dots, 0, -1) \\ & x & \mapsto & \left(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}, \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\right) \end{array}$$

que são homeomorfismos. Claramente $S^n = S^n - \{N\} \cup S^n - \{S\}$. Agora, se tivermos U_α e U_β abertos em R^n tais que $\varphi_N(U_\alpha) \cap \varphi_S(U_\beta) = W \neq 0$, então W é aberto em S^n, pois φ_N e φ_S são homeomorfismos. Deste modo, ${\varphi_N}^{-1}(W)$ e ${\varphi_S}^{-1}(W)$ são abertos em R^n e $({\varphi_S}^{-1} \circ \varphi_N)(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ é diferenciável.

Seja M^n uma variedade diferenciável, o conjunto

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$$

é uma variedade diferenciável. Para ver isto, considere $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ a estrutura diferenciável de M. Sejam $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$ as bases nos espaços tangentes de $x_\alpha U_\alpha$. Para cada α, seja

$$\begin{array}{rlcl} y_\alpha: & U_\alpha \times R^n & \longrightarrow & TM \\ & (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right). \end{array}$$

Assim, $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em TM.

O Toro $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ é uma variedade diferenciável. Isto fica claro ao vermos o teorema seguinte.

Teorema 1.1 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciais de classe C^∞. Então $M \times N$ é uma variedade C^∞ de dimensão $m + n$ com estrutura determinada pelas vizinhanças coordenadas da forma $\{U \times V, \varphi \times \psi\}$, onde U, φ e V, ψ são vizinhanças coordenadas sobre M e N, respectivamente, e $(\varphi \times \psi)(p, q) = (\varphi(p), \psi(q))$ em $R^{m+n} = R^m \times R^n$.*

Prova. Ver [1, cap.3] ■

Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ entre variedades diferenciáveis é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to R^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Dizemos que uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ entre variedades diferenciáveis M^m e N^n é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Uma imersão φ que é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, é chamado um *mergulho*. Quando a aplicação inclusão $i : M \subset N$, com $M \subset N$, é um mergulho dizemos que M é uma *subvariedade* de N.

Exemplo 1 *Considere* $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *tal que*

$$\boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi).$$

Temos que $\boldsymbol{x}$ *é uma imersão de* $\mathbb{R}^2$ *na esfera unitária* $\mathbb{S}^3$*, cuja imagem* $\boldsymbol{x}(\mathbb{R}^2)$ *é o toro* T^2*.*

De fato, a matriz jacobiana da diferencial de $\boldsymbol{x}$*,*

$$d\boldsymbol{x}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vartheta' \sin\vartheta d\vartheta, \vartheta' \cos\vartheta d\vartheta, -\varphi' \sin\varphi d\varphi, \varphi' \cos\varphi d\varphi),$$

tem posto 2. Portanto, $d\boldsymbol{x}$ *é injetiva.*

Um campo de vetores é a atribuição, a cada ponto de uma variedade diferenciável, de um vetor no espaço tangente à variedade nesse ponto. À rigor, podemos escrever: Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.

Considerando uma parametrização $x : U \subset R^n \to M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to R$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é uma base associada a x, $i = 1, ..., n$. Diremos que X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização. O conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M é denotado por $\mathcal{X}(M)$.

Exemplo 2 *Os campos vetoriais sobre a esfera* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *são as aplicações* $X : \mathbb{S}^n \to R^{n+1}$ *tais que para cada vetor posição* $u \in S^n$ *temos* $\langle X(u), u \rangle = 0$*, já que X(u) está no espaço tangente.*

Sejam $\mathbb{S}^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4); \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = 1\}$ *e os campos vetoriais dados por*

$$\begin{aligned} X &= -x^2 \tfrac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \tfrac{\partial}{\partial x^2} + x^4 \tfrac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \tfrac{\partial}{\partial x^4}, \\ Y &= -x^3 \tfrac{\partial}{\partial x^1} - x^4 \tfrac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \tfrac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \tfrac{\partial}{\partial x^4}, \\ Z &= -x^4 \tfrac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \tfrac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \tfrac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \tfrac{\partial}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

em um ponto $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ *de* $\mathbb{S}^3$. *Sem muito esforço podemos ver que X, Y e Z são campos vetoriais ortonormais em* $\mathbb{R}^4$ *e são tangentes à* $\mathbb{S}^3$, *pois são ortogonais ao vetor posição* $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, *que é normal à esfera* $\mathbb{S}^3$.

Uma *curva integral* (ou trajetória) de um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ em uma variedade M é uma curva φ tal que $\varphi' = X(\varphi)$.

O teorema que enuciaremos a seguir, assegura a existência e a unicidade da curva integral mostrando que por cada ponto de uma certa vizinhança passa uma única curva integral do campo vetorial X. Este teorema se estende naturalmente às variedades diferenciáveis, pois é um teorema local e como sabemos toda variedade diferenciável é localmente difeomorfa ao espaço euclideano $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2 *Seja X um campo diferenciável de vetores em uma variedade diferenciável M, e seja* $p \in M$. *Então existem uma vizinhança* $U \subset M$ *de p e um intervalo* $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, *e uma aplicação diferenciável* $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \to M$ *tais que a curva* $t \to \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, $q \in U$, *é a única curva que satisfaz* $\varphi'(u) = X(\varphi(t, q))$ *e* $\varphi(0, q) = q$.

Prova. Ver [13, cap.3] ■

Uma correspondência que associa a cada ponto p de M uma forma bilinear simétrica e definida positiva, $<,>$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no sentido que: para todo par X, Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $< X, Y >$ é diferenciável em V, é chamada de *métrica Riemanniana* sobre uma variedade diferenciável M. Uma métrica Riemanniana então determina um produto interno sobre cada espaço tangente T_pM. Uma variedade diferenciável junto com uma métrica Riemanniana é chamada uma *variedade Riemanniana.*

Exemplo 3 *Seja* $f : M^n \to N^{n+k}$ *uma imersão. Se existe uma métrica Riemanianna definida em N, f induz uma estrutura Riemanniana em M por*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, u, v \in T_pM.$$

Como df_p *é injetiva,* $\langle , \rangle_p$ *é positivo definido e também simétrico já que*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} = \langle df_p(v), df_p(u)\rangle_{f(p)} = \langle v, u\rangle_p .$$

A métrica de M é chamada a métrica induzida por f, *e* f *é uma imersão isométrica. Se* $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é uma parametrização de uma subvariedade* $M \subset \mathbb{R}^m$ *com a métrica induzida, a métrica induzida nas coordenadas* $(u_1, \dots, u_n)$ *sobre* U *é exatamente*

$$g = \sum_{i=1}^{m}(dX_i)^2 = \sum_{i,j=1}^{m}(\frac{\partial X_i}{\partial u_j}du_j)^2.$$

Uma variedade diferenciável M é uma variedade Hausdorff se dados dois pontos distintos de M existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam. Quando M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas diz-se então que M tem base enumerável.

A seguinte proposição garante que todo espaço tangente a uma variedade diferenciável Hausdorff com base enumerável tem um produto interno associado. Para a prova desse resultado necessitaremos da noção de Partição da Unidade.Se o leitor quiser se aprofundar um pouco mais nesta teoria, sugerimos Plaza, [12].

Proposição 1.3 *Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Prova. Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade de M subordinada a uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de M por vizinhanças coordenadas. Isto significa que $\{V_\alpha\}$ é uma cobertura localmente finita (i.e., cada ponto de M possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices) e que $\{f_\alpha\}$ é um conjunto de funções diferenciáveis em M satisfazendo:

(i) $f_\alpha \geq 0, f_\alpha = 0$ no complementar do fecho $\overline{V}_\alpha$.

(ii) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ para todo p em M.

É claro que podemos definir uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle_\alpha$ em cada V_α: basta tomarmos a métrica induzida pelo sistema de coordenadas. Façamos

$$\langle u, v\rangle_p = \sum_\alpha f_\alpha(p) \langle u, v\rangle_{\alpha,p} \,,$$

que define uma métrica Riemanniana sobre M para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$. ■

O mais simples modelo de variedade Riemanniana é naturalmente o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, com a métrica Euclideana $\overline{g}$ dada por

$$\overline{g} = \sum_i dx_i dx_i = \sum_i (dx_i)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j.$$

Para a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, consideremos a aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1.$$

Então 0 é valor regular de f e $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$, por isso podemos definir em $f^{-1}(0)$ a métrica induzida pela aplicação inclusão. Mas observe que

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\} = S^{n-1}.$$

Veremos agora a noção de derivada covariante que nos permite derivar os campos vetoriais dos espaços tangentes à uma variedade.

Considere a aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ tal que

$$(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y,$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$,

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$, que é o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M, é o que chamamos de Conexão Afim em uma Variedade diferenciável M. A imagem $\nabla_X Y$ é chamada a derivada covariante de Y na direção de X.

A proposição seguinte vem como uma segunda definição da derivada covariante de um campo vetorial.

Proposição 1.4 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

3. *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.*

Prova. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R} \to M$ um sistema de coordenadas com $c(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$ e seja $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$, $t \in I$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então podemos expressar o campo V localmente como

$$V = \sum_j v^j X_j, \quad j = 1, ..., n,$$

onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$. Defina $\frac{DV}{dt}$ e $\mathbf{x}(U)$ por

$$(1) \quad \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j.$$

è imediato verificar que (1) possui as propriedades desejadas. ■

Dizemos que um campo de vetores é paralelo se sua derivada covariante é zero.

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica $\langle , \rangle$. Dizemos que a conexão é compatível com a métrica se para toda curva diferenciável c e pares de campos de vetores paralelos P e P' tivermos que ao longo da curva c,

$$\langle P, P' \rangle = constante.$$

A seguir veremos um modo mais prático de verificar se uma conexão afim é compatível com a métrica da variedade.

Proposição 1.5 *Seja M uma variedade Riemanniana. uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Prova. Ver [3, cap.2] $\blacksquare$

Corolário 1.6 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ temos*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle .$$

Prova. Suponhamos que ∇ é compatível com a métrica. Seja $p \in M$ e seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$, e com $\frac{dc}{dt}|_{t=t_0} = X(p)$. Então

$$X(p) \langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle |_{t=t_0} = \left\langle \nabla_{X_p} Y, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \nabla_{X(p)} Z \right\rangle_p .$$

A recíproca é óbvia. $\blacksquare$

Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX, \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

A conexão simétrica e compatível com a métrica da variedade Riemanniana é chamada de conexão Levi-Civita ou ainda, conexão Riemanniana. Mostraremos agora que uma conexão Riemanniana é única.

Teorema 1.7 *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

Prova. Suponhamos a existência de uma tal conexão ∇. Então

$$\begin{array}{lrcl} (1) & X \langle Y, Z \rangle & = & \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle , \\ (2) & Y \langle Z, X \rangle & = & \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle , \\ (3) & Z \langle X, Y \rangle & = & \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle . \end{array}$$

Somando (1) e (2) e subtraindo (3), obtemos, usando a simetria da conexão ∇, que

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z,\nabla_Y X\rangle .$$

Portanto,

$$(4)\quad \langle Z,\nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\}.$$

A expressão (4) mostra que a conexão ∇ está univocamente determinada pela métrica, portanto, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência defina ∇ por (4). ■

A partir de agora faremos um breve estudo das noções de Grupos de Lie e Álgebra de Lie. Mostraremos que a esfera $\mathbb{S}^n$ é um grupo de Lie e que o espaço vetorial dos campos C^∞ tangentes à variedade diferenciável M é uma Álgebra de Lie.

Consideraremos nesta parte do nosso estudo variedades diferenciáveis de Hausdorff e com base enumerável.

Um grupo de Lie é uma variedade G com uma estrutura de grupo de tal modo que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & x\cdot y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis.

Exemplo 4 $\mathbb{S}^3 = \{p \in \mathbb{R}^4; |p| = 1\}$ *é um grupo de Lie. Para mostrar isto, consideremos o conjunto dos quatérnios*

$$\mathbb{Q} = \{q = a + bi + cj + dk\},$$

que é isomorfo a $\mathbb{R}^4$ *e onde* i, j, k *se multiplicam segundo a tabela*

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Definamos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ & (q,q') & \mapsto & q\cdot q' \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ & q & \mapsto & q^{-1} \end{array}$$

onde

$$q = a + bi + cj + dk, q' = a' + b'i + c'j + d'k \quad e \quad q^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Claramente φ *e* ψ *são diferenciáveis e observemos que o denominador em* q^{-1} *não se anula, pois* $|q| = 1$*. Desta forma, suas restrições a* $\mathbb{S}^3$ *têm imagens em* $\mathbb{S}^3$*.*

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathcal{G}$, com uma operação bilinear $[\ ,\ ]: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, satisfazendo

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$

(ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, para todo X,Y,Z em $\mathcal{G}$.

Exemplo 5 *Seja $\mathcal{X}(M)$ o espaço vetorial dos campos C^∞ tangentes a M, onde M é uma variedade diferenciável e seja $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, definimos $[X, Y]$ como o campo*

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

Com esta operação $\mathcal{X}(M)$ é uma álgebra de Lie. De fato, o primeiro item da definição é imediato e para verificar o item (ii) basta observar que, por um lado temos

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

e, por outro lado,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY.$$

Como os segundos membros das expressões acima são iguais, usando o item (i) concluímos (ii).

1.2 Formas Diferenciais em $\mathbb{R}^n$

O objetivo desta seção é nos dar as ferramentas necessárias para podermos, na próxima seção, estabelecer as Equações de Estrutura do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ e depois disso, no capítulo 2, poderemos encontrar as Equações de Estrutura da esfera $\mathbb{S}^3$. Estudaremos as formas diferenciais com todas as suas propriedades.

Para fixar idéias trabalharemos inicialmente com o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Definimos o espaço dual do espaço tangente a $\mathbb{R}^3$ em p como o conjunto $(T_p\mathbb{R}^3)^*$ das aplicações lineares

$$\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Temos que $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ é uma base do espaço dual $(T_p\mathbb{R}^3)^*$, onde $x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a aplicação que assume em cada ponto sua i-ésima coordenada. Para $(e_i), i = 1, 2, 3,$

$$(dx_i)(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Uma aplicação ω que associa a cada $p \in \mathbb{R}^3$ um elemento $\omega(p) \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$ é uma forma diferencial de grau 1 em $\mathbb{R}^3$. Podemos escrever

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{3} a_i(p)dx_i,$$

onde a_i é uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^3$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Seja $\bigwedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ o conjunto das aplicações

$$\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que são bilineares e alternadas.

Quando φ_1 e φ_2 pertencem a $(T_p\mathbb{R}^3)^*$, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \bigwedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ fazendo

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_2(v_1)\varphi_1(v_2) = det(\varphi_i(v_j)).$$

Uma correspondência ω que associa a cada $p \in \mathbb{R}^3$ um elemento $\omega(p) \in \bigwedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ é uma forma diferencial de grau 2 em $\mathbb{R}^3$; ω pode ser escrito na forma

$$\omega(p) = \sum_{i<j} a_{ij}(p)dx_i \wedge dx_j, i, j = 1, 2, 3,$$

onde a_{ij} são funções reais diferenciáveis.

Agora nós generalizaremos a noção de forma diferencial para o espaço $\mathbb{R}^n$.

Seja $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n$ o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p e $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ seu espaço dual. Seja ainda $\bigwedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o conjunto de todas as aplicações alternadas k-lineares do tipo

$$\varphi : \underbrace{T_p\mathbb{R}^n \times \ldots \times T_p\mathbb{R}^n}_{kvezes} \to \mathbb{R}.$$

Dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in (T_p\mathbb{R}^n)^*$ nós podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ de $\bigwedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ fazendo

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

A seguir estabeleceremos uma base para o conjunto $\bigwedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Proposição 1.8 *O conjunto*

$$\{(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}), i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \quad com \quad i_j \in \{1, \ldots, n\}$$

é base para $\bigwedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Prova. Os elementos do conjunto são linearmente independentes. De fato, se

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

é aplicado a $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$, $j_1 < \ldots < j_k$, $j_l \in \{1, \ldots, n\}$, nós obtemos

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = a_{i_1\ldots i_k} = 0.$$

Agora mostraremos que, se $f \in \bigwedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$, então f é uma combinação linear da forma

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Para isto, façamos

$$g = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Note que $g \in \bigwedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$ e que

$$g(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}),$$

para todo $i_1, \ldots, i_k$. Segue que $f = g$. Fazendo $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = a_{i_1\ldots i_k}$ concluímos a demonstração. ∎

Uma k-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que associa a cada $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in \bigwedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$. Podemos escrever ω na forma

$$\omega(p) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \quad i_j \in \{1, \ldots, n\},$$

onde $a_{i_1\ldots i_k}$ são funções reais diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.9 *Sejam ω e φ duas k-formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$ dadas por*

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad \varphi = \sum_I b_I dx_I.$$

Definimos sua soma por

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Se ω é uma k-forma e φ é uma s-forma, o produto exterior $\omega \wedge \varphi$ é a $s+k$-forma dada por

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J, \text{ com}$$

$$\begin{aligned} \omega = &\ \textstyle\sum a_I dx_I, \quad I = \{i_1, \ldots, i_k\}, \quad i_1 < \ldots < i_k, \\ \varphi = &\ \textstyle\sum b_J dx_J, \quad J = \{j_1, \ldots, j_s\}, \quad j_1 < \ldots < j_s. \end{aligned}$$

O produto exterior de formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$ possui as seguintes propriedades.

Proposição 1.10 *Sejam ω uma $k-forma$, φ uma $s-forma$ e ϑ uma $r-forma$. Então:*

a) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \vartheta = \omega \wedge (\varphi \wedge \vartheta)$,

b) $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$,

c) $\omega \wedge (\varphi + \vartheta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \vartheta$, *se* $r = s$.

Prova. Provaremos o item b). Sejam

$$\omega = \sum a_I dx_I, \quad I = (i_1, ..., i_k), \quad i_1 < ... < i_k,$$
$$\varphi = \sum b_J dx_J, \quad J = (j_1, ..., j_s), \quad j_1 < ... < j_s.$$

Então

$$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= \textstyle\sum_{I,J} a_I b_J dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_s} \\ &= \textstyle\sum_{I,J} b_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge ... \wedge dx_{j_s} \\ &= \textstyle\sum_{I,J} b_J a_I (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_s}. \end{aligned}$$

Como J tem s elementos, nós obtemos repetindo o argumento anterior para cada dx_{j_ℓ}, $j_\ell \in J$,

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{J,I} b_J a_I (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega.$$

■

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Então f induz uma aplicação f^* que leva k-formas em $\mathbb{R}^m$ em k-formas em $\mathbb{R}^n$ definida como segue. Seja ω uma k-forma em $\mathbb{R}^m$. Por definição, $f^*\omega$ é a k-forma em $\mathbb{R}^n$ dada por

$$(f^*\omega)(p)(v_1, ..., v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), ..., df_p(v_k)).$$

A próxima proposição estabelece algumas propriedades de f^*.

Proposição 1.11 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável, ω e φ k-formas sobre $\mathbb{R}^m$. Então*

a) $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$,

b) $f^*(g\omega) = f^*(g) f^*(\omega)$; $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *uma 0-forma em* $\mathbb{R}^m$.

c) *Se* $\varphi_1, ..., \varphi_k$ *são 1-formas em* $\mathbb{R}^m$, $f^*(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge ... \wedge f^*(\varphi_k)$.

d) $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$.

e) $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$, *onde* $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação diferenciável.*

Prova.

a) $f^*(\omega+\varphi)(p)(v_1,...,v_k) = (\omega+\varphi)(f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k)) = (f^*\omega)(p)(v_1,...,v_k) + (f^*\varphi)(p)(v_1,...,v_k) = (f^*\omega + f^*\varphi)(v_1,...,v_k)$.

b) $f^*(g\omega)(p)(v_1,...,v_k) = (g\omega)(f(p))(df_p v_1,...,df_p v_k) = (g \circ f)(p) f^*\omega(p)(v_1,...,v_k) = f^*g(p)f^*\omega(p)(v_1,...,v_k)$.

c)

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k)(v_1,...,v_k) &= (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k)(df(v_1),...,df(v_k)) \\ &= det(\varphi_i(df(v_j))) = det(f^*\varphi_i(v_j)) \\ &= (f^*\varphi_1 \wedge ... \wedge f^*\varphi_k)(v_1,...,v_k). \end{aligned}$$

d) Tomando $(y_1,...,y_m) = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)) \in \mathbb{R}^m, (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\omega = \sum_I a_I dy_I, \varphi = \sum_J b_J dy_j$, obtemos

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \varphi) &= f^*(\textstyle\sum_{IJ} a_I b_J dy_I \wedge dy_J) \\ &= \textstyle\sum_{IJ} a_I(f_1,...,f_m) b_J(f_1,...,f_m) df_I \wedge df_J) \\ &= \textstyle\sum_I a_I(f_1,...,f_m) df_I \wedge \sum_J b_J(f_1,...,f_m) df_J) \\ &= (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} (f \circ g)^*\omega &= \textstyle\sum_I a_I((f \circ g)_1,...,(f \circ g)_m) d((f \circ g))_I \\ &= \textstyle\sum_I a_1(f_1(g_1,...,g_n),...,f_m(g_1,...,g_n)) df_I(dg_1,...,dg_n) \\ &= g^*(f^*\omega). \end{aligned}$$

■

Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Temos que g é uma 0-forma. A diferencial de g dada por

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

é uma 1-forma. A seguir definiremos uma operação que leva k-formas em (k+1)-formas.

Definição 1.12 *Seja* $\omega = \sum a_I dx_I$ *uma k-forma em* $\mathbb{R}^n$. *A diferencial exterior* $d\omega$ *de* ω *é definida por*

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Apresentaremos agora algumas propriedades da diferenciação exterior.

Proposição 1.13 **a)** $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$, *onde* ω_1 *e* ω_2 *são k-formas.*

b) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$, *onde* ω *é uma k-forma e* φ *é uma s-forma.*

c) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

d) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, *onde* ω *é uma k-forma em* $\mathbb{R}^m$ *e* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é uma aplicação diferenciável.*

Prova. Ver [4,cap.1] ■

1.3 Equações de Estrutura no espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$

O objetivo desta seção é encontra as Equações de Estrutura de $\mathbb{R}^n$. Faremos também um breve estudo da geometria de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ utilizando um referencial, as formas duais e formas de conexão da superfície em $\mathbb{R}^3$.

Consideremos $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e sejam $e_1, ..., e_n$ campos vetoriais diferenciáveis tais que para cada $p \in U$,

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dizemos que o conjunto formado por tais campos de vetores é um *referecial móvel ortonormal*.

Dado um referencial móvel $\{e_i\}, i = 1, ..., n$, o conjunto das 1-formas diferenciais ω_i tais que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}, j = 1, ..., n$ é, para cada ponto p, a base dual de $\{(e_i)_p\}$ e o denominamos coreferencial associado a $\{e_i\}$.

Como definimos acima, cada campo vetorial

$$e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

é uma aplicação diferenciável. A diferencial em $p \in U$,

$$(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

é uma aplicação linear. Desta forma, para cada p e cada $v \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever $(de_i)_p(v)$ em função dos próprios campos e_j como

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v) e_j.$$

Os coeficientes $(\omega_{ij})_p(v)$ dependem linearmente de v, pois fazendo o produto interno com e_j em ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\langle (de_i)_p(v), e_j \rangle = (\omega_{ij})_p(v).$$

Então $(\omega_{ij})_p$ é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$, já que é uma aplicação que associa a cada $v \in \mathbb{R}^n$ um elemento $(\omega_{ij})_p(v) \in \mathbb{R}$ e, como e_i é um campo vetorial diferenciável, ω_{ij} é uma 1-forma diferencial.

As n^2 formas ω_{ij} são chamadas formas de conexão de $\mathbb{R}^n$ no referencial móvel $\{e_i\}$ e elas são anti-simétricas nos índices i,j. De fato, se nós diferenciarmos

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

obtemos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

ou seja, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Apresentaremos agora as equações estruturais de Elie Cartan que estabelecem uma relação entre as formas ω_i e ω_{ij}.

Teorema 1.14 *Sejam $\{e_i\}$ um referencial móvel em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$ e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então*

$$(*) \begin{cases} d\omega_i &= \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \end{cases}$$

$i, j, k = 1, \ldots, n, \quad k \neq i, j.$

Prova. Ver [4, cap.5] ∎

Definição 1.15 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n sobre o espaço euclideano $\mathbb{R}^{n+k}$. Como toda imersão é localmente um mergulho, temos que para $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição*

$$f|U \subset M \to \mathbb{R}^n$$

é um mergulho. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma vizinhança de $f(p)$ em $\mathbb{R}^{n+k}$ tais que $V \cap M = f(U)$. Assuma que V é tal que existe um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_q\}$ em V tal que quando restrita a $f(U)$, os vetores $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a $f(U)$. Chamamos um tal referencial de referencial adaptado.

Ao referencial $\{e_i\}$ em V na definição anterior temos associado as formas coreferenciais ω_i e as formas de conexão ω_{ij} como no caso anterior.

Uma outra relação entre formas é dada pelo seguinte lema de Cartan.

Lema 1.1 *(Lema de Cartan) Seja V^n um espaço vetorial de dimensão n, e sejam $\omega_1, \ldots, \omega_r : V^n \to \mathbb{R}, r \leq n$, formas lineares em V que são linearmente independentes. Assuma que existem formas $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^r \omega i \wedge \theta_i = 0$. Então*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad \textit{com} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Prova. Ver [4, cap.5] ∎

Vamos aplicar o método dos referenciais móveis para o caso de superfícies no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ e assim determinar a curvatura Gaussiana da superfície em termos deste referencial.

Seja $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma variedade bidimensional em $\mathbb{R}^3$. Para cada ponto $p \in M^2$, um produto interno $\langle , \rangle_p$ está definido em T_pM pela regra

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle .$$

Assim, M^2 é uma variedade Riemanniana com a métrica induzida pela imersão f.

Sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p tal que a restrição $f|_U$ é um mergulho e $V \subset \mathbb{R}^3$ uma vizinhança de $f(p)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $V \cap f(M) = f(U)$, e que é possível escolher em V um referencial adaptado e_1, e_2, e_3. Associado ao referencial $\{e_i\}$ em V, temos os coreferenciais ω_i e as formas de conexão ω_{ij} satisfazendo as Equações de Estrutura $(*)$:

A imersão $f : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^3$ induz formas $f^*(\omega_i)$, $f^*(\omega_{ij})$ em U. Como f^* comuta com d e $\wedge$, tais formas satisfazem as Equações de Estrutura. Temos que

$$f^*(\omega_3)(v) = \omega_3(df(v)) = \omega_3(a_1e_1 + a_2e_2) = 0,$$

onde $v = a_1e_1 + a_2e_2$, para todo $q \in U$ e $v \in T_qM$. Com um certo abuso de notação, escreveremos

$$f^*(\omega_i) = \omega_i$$
$$f^*(\omega_{ij}) = \omega_{ij}.$$

Isto nos possibilita olhar para U como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ pela inclusão $f : U \to \mathbb{R}^3$. Estas formas diferenciais satisfazem as equações anteriores acrescentando que $\omega_3 = 0$. Como $\omega_3 = 0$,

$$d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0,$$

daí pelo lemma de Cartan

$$\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2$$
$$\omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2,$$

onde $h_{ij} = h_{ji}$ são funções diferenciáveis em U. Temos que (h_{ij}) é a matriz de $de_3 : U \subset M \to \mathbb{S}^2$ na base $\{e_1, e_2\}$. A matriz (h_{ij}) é simétrica, portanto a diferencial de_3 é uma aplicação linear, logo pode ser diagonalizada com autovalores λ_1, λ_2 e autovetores ortogonais. Assim, podemos definir a curvatura Gaussiana da superfície M em p por

$$K = det(h_{ij}) = \lambda_1\lambda_2 = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

e a curvatura média H de M em p por

$$H = \frac{1}{2}tr(h_{ij}) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}.$$

As expressões de K e H podem ser obtidas por meio do referencial móvel:

Lema 1.2 **1** $\omega_{13} \wedge \omega_{32} = K\omega_1 \wedge \omega_2$.

2 $\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = 2H\omega_1 \wedge \omega_2$.

Prova. Vamos encontrar a matriz do operador forma da superície M, $S(v) = -\nabla_v E_3$, onde E_3 é o campo vetorial normal à superfície M. Seja $\{E_1, E_2, E_3\}$ um referencial adaptado à superfície M. Temos

$$S(E_1) = -\nabla_{E_1} E_3 = -\omega_{31}(E_1)E_1 - \omega_{32}(E_1)E_2$$
$$S(E_2) = -\nabla_{E_2} E_3 = -\omega_{31}(E_2)E_1 - \omega_{32}(E_2)E_2.$$

Então a matriz de S é dada por

$$\begin{pmatrix} \omega_{13}(E_1) & \omega_{23}(E_1) \\ \omega_{13}(E_2) & \omega_{23}(E_2). \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23}(E_1, E_2) = \omega_{13}(E_1)\omega_{23}(E_2) - \omega_{13}(E_2)\omega_{23}(E_1) = detS = K.$$

$$\begin{aligned}(\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23})(E_1, E_2) &= \omega_{13}(E_1)\omega_2(E_2) + \omega_1(E_1)\omega_{23}(E_2) \\ &= \omega_{13}(E_1) + \omega_{23}(E_2) \\ &= 2H.\end{aligned}$$

■

Corolário 1.16 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$.

Prova.

$$d\omega_{12}(E_1, E_2) = (\omega_{13} \wedge \omega_{32})(E_1, E_2) = K.$$

■

Corolário 1.17 $K = E_2[\omega_{12}(E_1)] - E_1[\omega_{12}(E_2)] - \omega_{12}(E_1) - \omega_{12}(E_2)$.

Prova. Temos que

$$\omega_{12} = f_1\vartheta_1 + f_2\vartheta_2,$$

onde $f_i = \omega_{12}(E_i)$ para $i = 1, 2$. Então

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= df_1 \wedge \vartheta_1 + df_2 \wedge \vartheta_2 + f_1 d\vartheta_1 + f_2 d\vartheta_2 \\ &= df_1 \wedge \vartheta_1 + df_2 \wedge \vartheta_2 + f_1\omega_{12} \wedge \vartheta_2 + f_2\omega_{21} \wedge \vartheta_1. \end{aligned}$$

Agora, como $\vartheta_i(E_j) = \delta_{ij}$, obtemos

$$d\omega_{12}(E_1, E_2) = -df_1(E_2) + df_2(E_1) + f_1\omega_{12}(E_1) - f_2\omega_{21}(E_2).$$

Daí,

$$-K = -E_2[f_1] + E_1[f_2] + f_1\omega_{12}(E_1) + f_2\omega_{12}(E_2),$$

de onde segue o resultado. ■

1.4 Geodésicas de $\mathbb{S}^n$

Nesta seção, veremos algumas propriedades das geodésicas, além do teorema que garante que as geodésicas da esfera $\mathbb{S}^n$ são os grandes círculos, que são as interseções da esfera com planos passando pela origem.

Seja M uma variedade Riemanniana munida de uma conexão Riemanniana ∇. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ tal que

$$\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$$

no ponto $t_0 \in I$ é chamada uma geodésica de M em t_0. Se γ é uma geodésica em t para todo t, dizemos que γ é uma geodésica.

Para uma geodésica γ, temos que

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

Portanto, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ de uma geodésica γ é constante.

O teorema abaixo garante a existência e a unicidade das geodésicas.

Teorema 1.18 *Seja M uma variedade com uma conexão ∇. Para todo $p \in M$, $V \in T_pM$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma única geodésica $\gamma : I \to M$ satisfazendo $\gamma(t_0) = p$, $\gamma^{'}(t_0) = V$.*

Prova. Ver [9, cap.4] ■

Exemplo 6 *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma subvariedade com conexão Riemanniana ∇. Se $\overline{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{R}^{n+k}$, para uma curva c sobre M temos*

$$c''(t) = \frac{\overline{\nabla}}{dt}c'(t) = \overline{\nabla}_{c'(t)}c'(t).$$

Como

$$\nabla_{c'(t)}c'(t) = (\overline{\nabla}_{c'(t)}c'(t))^{\perp},$$

temos que as geodésicas da subvariedade M são as curvas com vetor aceleração normal.

As geodésicas do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ são as retas parametrizadas com velocidade constante. De fato,

$$\frac{D}{dt}c'(t) = 0 \Leftrightarrow c''(t) = 0 \Leftrightarrow c(t) = x_0 + tv.$$

A seguir classificaremos as geodésicas da esfera $\mathbb{S}^n$.

Teorema 1.19 *As geodésicas sobre $\mathbb{S}^n_R$ são precisamente os "grandes círculos"(interseções de $\mathbb{S}^n_R$ com planos bidimensionais passando pela origem), com parametrizações com velocidade constante.*

Prova. Consideremos uma geodésica

$$\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^{n+1}(t))$$

começando no pólo norte N cuja velocidade inicial V é um múltiplo de $\partial/\partial x^i$. É intuitivamente evidente por simetria que esta geodésica deve manter-se ao longo do meridiano

$$x^2 = ... = x^n = 0.$$

Para uma prova rigorosa disto, suponha o contrário; isto é, suponha que existe um t_0 tal que $x^i(t_0) \neq 0$ para algum $2 \leq i \leq n$. A aplicação linear

$$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

levando x^i a $-x^i$ e fixando as outras coordenadas é uma isometria da esfera que fixa $N = \gamma(0)$ e $V = \gamma'(0)$, e portanto leva γ a γ. Mas

$$\varphi(\gamma(t_0)) \neq \gamma(t_0),$$

o que é uma contradição.

Como geodésicas têm velocidade constante, a geodésica com ponto inicial N e velocidade inicial $c\partial/\partial x^i$ deve portanto ser um círculo onde S^n_R intersecta (x^1, x^{n+1})-plano, com uma parametrização constante. Como existe uma aplicação ortogonal levando qualquer outro ponto a N e qualquer outro vetor inicial levando a uma dessas formas, e já que aplicações ortogonais leva planos passando pela origem em planos passando pela origem, segue que as geodésicas sobre S^n_R são as intersecções de S^n_R com planos bidimensionais passando pela origem. ∎

Definição 1.20 *N é dito ser uma cobertura da variedade M com aplicação cobertura φ se φ é sobrejetora, N é conexa e se cada $p \in M$ tem uma vizinhança conexa U tal que*

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup U_\alpha,$$

uma união de componentes abertas U_α com a propriedade que a restrição de φ a U_α é um difeomorfismo sobre U. Um difeomorfismo $h : M \to M$ é dito ser uma transformação cobertura se $\varphi \circ h = \varphi$.

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ a cobertura padrão dada por

$$\varphi(x_1, x_2) = (exp(2\pi i x_1), exp(2\pi i x_2)).$$

Considere o espaço euclideano $\mathbb{R}^2$ com a métrica Riemanniana usual. Como as transformações cobertura são translações, elas são isometrias de $\mathbb{R}^2$. Segue que podemos definir sobre o toro T^2 uma métrica Riemanniana que faz a projeção φ uma isometria local, siginificando que φ_* é uma isometria de cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^2$ sobre $T_{\varphi(p)}T^2$. Com esta métrica a isometria de T^2 é localmente equivalente à geometria de $\mathbb{R}^2$. Como uma isometria local leva geodésicas em geodésicas, temos que as imagens das retas de $\mathbb{R}^2$ sobre T^2 são geodésicas de T^2.

Um campo vetorial V ao longo de uma curva γ é dito ser paralelo ao longo de γ se $D_tV \equiv 0$. Logo, podemos caracterizar uma geodésica como uma curva cujo campo vetorial velocidade é paralelo ao longo da curva.

Um campo vetorial sobre uma variedade M é dito ser paralelo se ele é paralelo ao longo de toda curva em M, ou seja, se $\nabla V \equiv 0$, onde ∇ é a conexão da variedade M.

Seja $\gamma : I \to M$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, em uma variedade Riemanniana M, definimos a curvatura geodésica k_g de γ pela igualdade

$$\gamma'' = k_g N,$$

onde N é o campo vetorial normal principal obtido quando rotacionamos 90° a curva γ'.

Com base nesta definição concluímos que a função curvatura geodésica k_g é identicamente nula se, e somente se a curva γ é uma geodésica.

Observe que se $f : M \to \overline{M}$ é uma imersão entre variedades Riemannianas e γ é uma curva em M, então γ tem duas curvaturas geodésicas distintas: sua curvatura intrínseca, como uma curva em M e sua curvatura extrínsica como uma curva em $\overline{M}$.

1.5 Curvaturas

O objetivo desta seção é mostrar que variedades Riemannianas completas e com curvatura seccional constante são isométricas aos espaços, denominados espaços modelos, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$. Também veremos que a curvatura seccional da esfera unitária S^3 é 1, fato que será muito usado nos próximos capítulos.

Seja M uma variedade Riemanniana. A curvatura R de M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Z\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

(i) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é, para $f, g \in \mathcal{D}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2).$$

(ii) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é, para $f \in \mathcal{D}(M), Z, W \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)(Z) + R(X,Y)(W) \ \ e \ \ R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $K(x,y)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p e é dada por

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde

$$|x \wedge y|^2 = \sqrt{|x|^2 \, |y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

é a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in \sigma$.

Lema 1.3 *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear* $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *por*

$$\langle R'(X,Y,W), Z\rangle = \langle X, W\rangle \langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle \langle X, Z\rangle \,,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_pM$. *Então M tem curvatura seccional constante se e só se* $R = K_oR'$, *onde R é a curvatura de M.*

Prova. Ver [3, cap.4] ■

Cada uma das variedades $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n_R$ tem um grupo de isometria que atua transitivamente sobre referenciais ortonormais, logo eles são homogêneos e portanto são geometricamente os mesmos em todo ponto. Esse mesmo grupo de isometrias atua transitivamente sobre planos bidimensionais no espaço tangente às variedades, daí cada um deles têm curvatura seccional constante no sentido que as curvaturas seccionais são as mesmas para todos os planos bidimensionais em todos os pontos.

Vamos agora calcular as curvaturas seccionais dos espaços citados acima.

(i) O Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$. Como cada subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^n$ é um plano cuja curvatura Gaussiana é zero, então a curvatura seccional de $\mathbb{R}^n$ é zero. Analiticamente, basta observarmos que o tensor curvatura do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ é zero. De fato, indicando por $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n).$$

Segue que

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n).$$

Logo,

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

(ii) A Esfera $\mathbb{S}^n_R$. Se p é um ponto de $\mathbb{S}^n_R$ então as geodésicas passando por p tangentes a um plano σ em $T_p(\mathbb{S}^3_R)$ são grandes círculos e formam uma 2-esfera de raio R. Como a curvatura Gaussiana dessa 2-esfera é dada por $\frac{1}{R^2}$ e a curvatura seccional $K(\sigma)$ é igual a curvatura Gaussiana de S^2_R em p, então $\mathbb{S}^n_R$ tem curvatura seccional constante igual a $\frac{1}{R^2}$.

Teorema 1.21 *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante C. Então M é isométrica a um dos espaços:* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, *ou* $\mathbb{H}^n$.

Prova. Ver [9, cap.11] ■

Definição 1.22 *Uma variedade Riemanniana é dita ser rasa se é localmente isométrica ao espaço euclideano, isto é, se todo ponto tem uma vizinhança que é isométrica a um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *com sua métrica euclideana.*

Teorema 1.23 *Uma variedade Riemanniana é rasa se, e somente se, seu tensor curvatura é identicamente nulo.*

Prova. Ver [9, cap.7] ■

1.6 A Aplicação Hopf

O objetivo desta seção é definir o Toro Hopf. Aqui, veremos que este toro é a imagem inversa pela aplicação Hopf de uma curva fechada em $S^2(4)$.

Identifiquemos a esfera S^2 com $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, onde o pólo norte de S^2 corresponde ao ∞, por meio da projeção estereográfica

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & S^2-\{(0,0,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ & (a,b,c) & \longmapsto & (\frac{a}{1-c},\frac{b}{1-c}) \end{array}$$

tal que

$$\begin{array}{rccc} \sigma^{-1}: & \mathbb{C}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & S^2-\{(0,0,1)\} \\ & (x,y) & \longmapsto & (\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}). \end{array}$$

Temos que $S^2=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ tem um atlas C^∞ consistindo de duas aplicações:

$$f_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \ \text{ e } \ f_2:\mathbb{C}-\{0\}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C},$$

onde f_1 é a identidade em $\mathbb{C}$ e

$$f_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{se} \quad z \neq \infty \\ 0, & \text{se} \quad z = \infty \end{cases}$$

Seja agora

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Então a Aplicação Hopf é dada por

$$\begin{array}{rccc} \pi : & S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & \frac{z_1}{z_2}. \end{array}$$

tal que $\frac{z_1}{z_2} = \infty$ se $z_2 = 0$.

A aplicação Hopf é claramente C^∞ sobre o conjunto no qual $z_2 \neq 0$ e também sobre o conjunto onde $z_1 \neq 0$.

A imagem inversa $\pi^{-1}(z_o)$ de qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é

$$\pi^{-1}(z_o) = \{(z_1, z_2) \in S^3; z_1 = z_o z_2\}.$$

Fazendo $z_j = x_j + iy_j$ para $j = 0, 1, 2$ podemos escrever

$$\pi^{-1}(z_o) = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S^3; x_1 = x_o x_2 - y_o y_2 \quad e \quad y_1 = x_o y_2 + x_2 y_o\},$$

que é a intersecção de S^3 com dois hiperplanos passando pela origem. Então $\pi^{-1}(z_o)$ é um grande círculo. Além disso, $\pi^{-1}(\infty) = \{(z_1, z_2) \in S^3; z_2 = 0\}$ é também um grande círculo.

Consideremos a aplicação ortogonal

$$f : S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

definida por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

que é um-a-um e tem no máximo um pólo de ordem ≤ 1. Normalizando f para $ad - bc = 1$, ela será ortogonal se e só se

$$\begin{array}{l} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ |b|^2 + |d|^2 = 1 \end{array} , a\bar{b} = c\bar{d}.$$

Nestas condições, $g(z_1, z_2) = (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)$ é uma isometria de $S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Agora, para qualquer conjunto $X \subset S^2$ temos que

$$(z_1, z_2) \in \pi^{-1}(f^{-1}(X)) \Leftrightarrow (z_1, z_2) \in S^3 \quad e \quad \pi(g(z_1, z_2)) \in X.$$

Então $\pi^{-1}(f^{-1}(X)) = g^{-1}(\pi^{-1}(X))$, ou seja substituindo X por um conjunto isométrico a ele em S^2 nós encontramos $\pi^{-1}(X) \subset S^3$ sobre uma isometria de S^3. Em particular, para encontrar $\pi^{-1}(\Sigma)$ para $\Sigma \subset S^2$ um círculo devemos assumir que Σ é paralelo ao plano-xy, tal que a projeção estereográfica de Σ em $\mathbb{C}$ é exatamente um círculo $\{z : |z| = R\}$. Então

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\{z : |z| = R\}) &= \{(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \left|\tfrac{z_1}{z_2}\right| = R\} \\ &= \{(z_1, z_2) : |z_1| = \tfrac{R}{\sqrt{1+R^2}} \quad \text{e} \quad |z_2| = \tfrac{1}{\sqrt{1+R^2}}\} \end{aligned}$$

que é exatamente o Toro Produto.

Vamos denotar por

$$\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2(4)$$

a aplicação Hopf de S^3 sobre a esfera de curvatura 4 e seja $\overline{\gamma}$ uma curva em $S^2(4)$ com curvatura $\overline{\mathtt{k}}$. Então a imagem inversa $M = \pi^{-1}(\overline{\gamma})$ é uma superfície rasa em S^3 com curvatura média $H = \frac{\overline{\mathtt{k}}\circ\pi}{2}$ e chama-se o cilíndro Hopf sobre $\overline{\gamma}$. Em particular, se $\overline{\gamma}$ é fechada, então M é difeomorfa ao Toro e chama-se Toro Hopf sobre $\overline{\gamma}$. O cilíndro Hopf sobre uma geodésica em $S^2(4)$ é o Toro de Clifford (minímo).

1.7 As Equações de Gauss e Codazzi

Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $k = n + m$, que chamaremos às vezes de espaço ambiente. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz uma métrica Riemanniana em M definida por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle \, .$$

Desta forma, f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$. Como nossas considerações são locais e toda imersão é localmente um mergulho, podemos assumir que M é um variedade Riemanniana mergulhada.

Em cada ponto $p \in M$ o espaço tangente ambiente $T_p\overline{M}$ decompõe-se como uma soma direta ortogonal

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais em M, nós podemos extendê-los a campos vetoriais sobre $\overline{M}$ aplicando o operador devivada covariante $\overline{\nabla}$, e então decompor em pontos de M para obter,

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Definimos a *Segunda Forma Fundamental* de M como sendo a aplicação de $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ dada por

$$\mathtt{II}(X,Y) := (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp},$$

onde X,Y são extensões arbitrárias a a $\overline{M}$.

O seguinte teorema mostra que o termo tangencial na decomposição de $\overline{\nabla}$ é $\nabla_X Y$. Portanto, podemos dizer que a segunda forma fundamental mede a diferença entre a conexão Riemanniana intrínseca sobre M e a conexão Riemanniana ambiente sobre $\overline{M}$.

Teorema 1.24 *(A Fórmula de Gauss) Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ são extensões arbitrárias a campos vetoriais a $\overline{M}$, a seguinte fórmula vale ao longo de M:*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y).$$

Prova. Ver [3,cap.6] ∎

Lema 1.4 *A segunda forma fundamental é*

(a) *independente das extensões de X e Y;*

(b) *bilinear sobre $C^{\infty}(M)$;*

(c) *simétrica em X e Y.*

Prova. Ver [9,cap.8] ∎

Um conceito que será bastante explorado neste trabalho é o seguinte.

Definição 1.25 *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\xi \in (T_pM)^{\perp}$ a segunda forma fundamental $\mathtt{II}_{\xi}$ é identicamente nula em p.*

Veremos agora que a segunda forma fundamental também pode ser expressa em termos da derivada covariante de campos vetoriais normais.

Lema 1.5 *(A Equação de Weingarten)Suponha $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi \in (T_pM)^{\perp}$. Quando X,Y,ξ são extendidas arbitrariamente a $\overline{M}$, a seguinte equação vale em pontos de M:*

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle = -\left\langle \xi, II(X,Y) \right\rangle.$$

Prova. Como $\langle \xi, Y \rangle = 0$ ao longo de M e X é tangente a M, temos

$$\begin{aligned} 0 &= X \langle \xi, Y \rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle + \left\langle \xi, \overline{\nabla}_X Y \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle + \left\langle \xi, \nabla_X Y + \mathtt{II}(X,Y) \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle + \left\langle \xi, \mathtt{II}(X,Y) \right\rangle. \end{aligned}$$

∎

Teorema 1.26 *(A Equação de Gauss)Para quaisquer $X, Y, Z, W \in T_pM$, a seguinte equação vale:*

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)Z, W \right\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle .$$

Prova. Ver [3,cap.6] ■

Seja M uma superfície suave e conexa em uma variedade Riemanniana de curvatura constante e considere ξ o campo vetorial unitário normal a M. O operador forma $S_\xi : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ de M é dado por

$$\langle \xi, \mathtt{II}(X,Y)\rangle = \langle S(X), Y\rangle , \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Da equação de Weingarten temos que

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle = - \langle \xi, \mathtt{II}(X,Y)\rangle = - \langle S(X), Y\rangle ,$$

de onde segue a igualdade

$$\overline{\nabla}_X \xi = -S_\xi(X).$$

O operador forma S_ξ é o negativo da derivada da aplicação normal de Gauss. Como é simétrica, a matriz do operador S_ξ, quando diagonalizada, apresenta como autovalores as curvaturas principais da superfície.

Para $p \in M$ e $\xi \in (T_pM)^\perp$ podemos tomar uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pM para a qual S_ξ é diagonal, ou seja, $S_\xi(e_i) = \lambda_i e_i$ onde λ_i é autovalor de S. Assim,

$$\langle \xi, \mathtt{II}(e_i, e_j)\rangle = \langle S(e_i), e_j\rangle = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Então segue da equação de Gauss que

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Como $\overline{K} = c$, a curvatura Gaussiana K é dada pela fórmula

$$K = c + \lambda_i \lambda_j = c + detS$$

e a curvatura média é $H = \frac{1}{2} trS$. O determinante de S é chamado a curvatura Gauss-Kronecker de M e é denotado por $\mathtt{k}_e$.

Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\xi \in (T_pM)^\perp$ tem-se que o traço do operador forma S_ξ é zero.

Proposição 1.27 *(A Equação de Codazzi)*

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)Z, \xi \right\rangle = (\overline{\nabla}_Y II)(X, Z, \xi) - (\overline{\nabla}_X II)(Y, Z, \xi)$$

Prova. Ver [3,cap.6] ■

Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a

$$(\overline{\nabla}_X \mathtt{II})Y = (\overline{\nabla}_Y \mathtt{II})X.$$

Podemos ver em [15,cap.7] que o operador forma S satisfaz a equação de Codazzi:

$$(\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X,$$

para todo campo vetorial X,Y sobre M.

Capítulo 2

A Geometria da Esfera $\mathbb{S}^3$

Este capítulo é voltado para as superfícies da esfera S^3. Aqui, o nosso objetivo é encontrar as Equações de Estrutura de uma tal superfície e para isso, necessitaremos de algumas propriedades dos produtos Interno e Hermitiano em $\mathbb{R}^4$. A partir das Equações de Estrutura, determinaremos uma fórmula para a curvatura gaussiana da superfície usando suas formas de conexão. Também faremos uma aplicação utilizando duas superfícies de grande importância neste trabalho: a esfera S^2_R e o Toro Hopf.

2.1 Produto Interno e Hermitiano em $\mathbb{R}^4$

Nesta seção trabalharemos com duas operações em $\mathbb{R}^4$; o produto interno e o produto Hermitiano. Veremos que elas possuem propriedades que serão de grande auxílio na determinação dos referenciais, formas duais e de conexão da esfera S^3 e também de uma superfície em S^3.

Considere o espaço

$$\mathbb{C}^2 = \{z = (z_1, z_2); z_j \in \mathbb{C}\}.$$

A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (z_1, z_2) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3, x_4), \end{array}$$

onde $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, estabelece um isormorfismo entre os espaços envolvidos. Logo, quando for conveniente, podemos identificar os elementos de $\mathbb{C}^2$ como elementos de $\mathbb{R}^4$.

Para $z, w \in \mathbb{C}^2$, com $z = (z_1, z_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, definimos

(i) o Produto Hermitiano

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w}_1 + z_2 \overline{w}_2.$$

(ii) o Produto Interno

$$z \cdot w = (z, w) + iW(z, w).$$

Temos que $W(z, w)$ é a forma de Kqeler.
Observe que

1. No produto interno temos

$$\begin{array}{rcl} (z, w) & = & x_1 u_1 + y_1 v_1 + x_2 u_2 + y_2 v_2 \\ W(z, w) & = & x_1 v_1 - y_1 u_1 + x_2 v_2 - y_2 u_2. \end{array}$$

2. $\langle z, iw \rangle = -i \langle z, w \rangle$ e $z \cdot iw = iz \cdot w$.

A partir de agora definiremos propriedades destas operações que nos auxiliarão na determinação do referencial, das formas duais e formas de conexão da esfera S^3.

Seja $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. O conjugado de z é dado por

$$\overline{z} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2).$$

Temos que a aplicação conjugação é $\mathbb{C}-$antilinear, ou seja,

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $z, w \in \mathbb{C}^2$.

(2) $\overline{c \cdot z} = \overline{c} \cdot \overline{z}$; $c \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^2$.

Dois elementos $z, w \in \mathbb{C}^2$ são $\mathbb{C}-$ortogonais se o produto interno entre eles é zero, ou seja, se

$$(z, w) = W(z, w) = 0.$$

Se apenas $(z, w) = 0$, então diremos que z e w são $\mathbb{R}-$ortogonais.

Facilmente vemos que $z \cdot z = (z, z) \in \mathbb{R}$ e que

$$z \cdot i \quad z = i \quad z \cdot z \text{ e que } z \cdot i \quad z = (z, iz) + iW(z, iz).$$

Então

$$(z, iz) = 0.$$

Desta forma, z é $\mathbb{R}-$ortogonal a iz, mas não são $\mathbb{C}-$ortogonais já que

$$W(z, iz) \neq 0.$$

A aplicação ortogonalização

$$\begin{array}{rlcl} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\perp} & \mathbb{C}^2 \\ & z=(z_1,z_2) & \mapsto & z^\perp=(-\overline{z}_2,\overline{z}_1) \end{array}$$

é tal que $z \cdot z^\perp = 0$, i.e., z e $z^\perp$ são $\mathbb{C}-$ ortogonais. Além disso,

$$\begin{array}{lcll} (z+w)^\perp & = & z^\perp + w^\perp & ; \\ (c \cdot z)^\perp & = & \overline{c} \cdot z^\perp, & \text{com } \ c \in \mathbb{C}; \\ (z^\perp)^\perp & = & -z. & \end{array}$$

Com isso, podemos dizer que φ é $\mathbb{R}-$linear, $\mathbb{C}-$antilinear e antinvolutiva, respectivamente.

2.2 Equações de Estrutura para uma superfície em $\mathbb{S}^3$

Nosso objetivo nesta seção é encontrar as Equações de Estrutura de uma superfície em $\mathbb{S}^3$. Para isso, determinaremos um referencial adaptado à superfície S e suas formas duais e formas de conexão associadas. Com todas essas ferramentas deduziremos uma fórmula para a curvatura da superfície em termos das suas formas de conexão.

Seja $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Definimos a diferencial de z por

$$dz = (dz_1, dz_2), \quad \text{onde} \ \ dz_j = dx_j + i dy_j.$$

A aplicação

$$dz : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

é a identidade, i.e., $dz_z(w) = w$.

Consideremos a base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ formada por

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (i,0), \quad e_3 = (0,1), \quad e_4 = (0,i).$$

Vamos encontrar a base dual de $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Para isso, observemos que o espaço dual de $T_z(\mathbb{C}^2)$ pode ser identificado como o dual de $T_p(\mathbb{R}^4)$. Assim, o espaço dual de $\mathbb{R}^4$ é o espaço dos funcionais lineares

$$\varphi : T_p(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{R}$$

denotado por $(T_p(\mathbb{R}^4))^*$ e uma base para este espaço é dada por $\{dx^i\}$ tal que

$$dx_p^i(e_j) = \frac{\partial x^i}{\partial x_j} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j, \end{array} \right.$$

onde x^i é uma aplicação que leva um vetor de $\mathbb{R}^4$ em sua i-ésima coordenada. Com isso, para simplificar a notação, escreveremos a base dual de $T_z(\mathbb{C}^2)$ como

$$\{dx^1, dy^1, dx^2, dy^2\}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} dz &= dz_1e_1 + dz_2e_2 \\ &= dx_1e_1 + idy_1e_1 + dx_2e_3 + idy_2e_3 \\ &= dx_1e_1 + dy_1e_2 + dx_2e_3 + dy_2e_4 \end{aligned}$$

Observemos que as aplicações conjugação ($z \mapsto \overline{z}$) e ortogonalização ($z \mapsto z^{\perp}$) são $\mathbb{R}-$lineares, logo a diferencial de ambas é a identidade. Com abuso de notação, escreveremos

$$d\overline{z} = \overline{dz} \ \text{ e } \ dz^{\perp} = (dz)^{\perp}.$$

Seja $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$ onde

$$S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2; \langle z, z\rangle = 1\} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 1\}.$$

Temos que $w \in T_zS^3$ se e só se

$$\langle w, z\rangle + \langle z, w\rangle = 0.$$

Para ver isso, basta diferenciarmos a igualdade

$$\langle z, z\rangle = 1.$$

Com base nestes resultados temos que $T_z\mathbb{S}^3$ é o kernel das formas

$$z_1d\overline{z}_1 + z_2d\overline{z}_2 + \overline{z}_1dz_1 + \overline{z}_2dz_2 = 0,$$

que equivale a

$$x_1dx_1 + y_1dy_1 + x_2dx_2 + y_2dy_2 = 0.$$

Com isso, se considerarmos a forma

$$(2.1) \quad \vartheta = \overline{z}_1dz_1 + \overline{z}_2dz_2,$$

então

$$\vartheta + \overline{\vartheta} = 0 \ \text{ sobre } \ \mathbb{S}^3.$$

Definição 2.1 *Seja M uma variedade de dimensão $M = n+k$ e assuma que para cada $p \in M$ é fixado um subespaço δ_p n-dimensional de T_pM. Suponha, além disso que em uma vizinhança U de cada $p \in M$ existem n campos vetoriais C^{∞} linearmente independentes $X_1, ..., X_n$ que formam uma base de δ_q para todo $q \in U$. Então nós diremos que δ é uma distribuição C^{∞} de dimensão n sobre M e $X_1, ..., X_n$ é uma base local de δ.*

A distribuição Holomorfa sobre $\mathbb{S}^3$ é o subespaço do espaço tangente T_zS^3 dado por

$$\Delta_z = \{w \in \mathbb{C}^2; \langle z, w\rangle = 0\}.$$

Logo,

$$\Delta_z = \{\alpha z^\perp; \alpha \in \mathbb{C}\},$$

ou seja $\Delta_z = [z^\perp] =$ reta complexa. Temos que $\{z^\perp, iz^\perp\}$ é base real de Δ_z e como $(z, iz) = 0$, então $\{z^\perp, iz^\perp, iz\}$ é base real de T_zS^3, $\{z^\perp, iz^\perp, iz, z\}$ é base real de $\mathbb{C}^2$ e $\{z, z^\perp\}$ é base complexa de $\mathbb{C}^2$.

O nosso próximo passo será encontrar as bases duais de $\{z, z^\perp\}$ e $\{z^\perp, iz^\perp, iz\}$.

Seja $\vartheta = \overline{z}_1 dz_1 + \overline{z}_2 dz_2$, como definido em (2.1). Temos que

$$\begin{array}{rcl} \vartheta(z) & = & \overline{z}_1 dz_1(z) + \overline{z}_2 dz_2(z) \\ & = & \overline{z}_1 z_1 + \overline{z}_2 z_2 \\ & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \vartheta(z^\perp) & = & \overline{z}_1 dz_1(z^\perp) + \overline{z}_2 dz_2(z^\perp) \\ & = & \overline{z}_1(-\overline{z}_2) + \overline{z}_2\overline{z}_1 \\ & = & 0. \end{array}$$

Agora, se tomarmos $\varphi = -z_2 dz_1 + z_1 dz_2$, então

$$\begin{array}{rcl} \varphi(z^\perp) & = & -z_2 dz_1(z^\perp) + z_1 dz_2(z^\perp) \\ & = & z_2(-\overline{z}_2) + z_1\overline{z}_1 \\ & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(z) & = & -z_2 dz_1(z) + z_1 dz_2(z) \\ & = & -z_2 z_1) + z_1 z_2 \\ & = & 0. \end{array}$$

Segue que $\{\vartheta, \varphi\}$ é base dual de $\{z, z^\perp\}$ e daí,

$$\begin{aligned} dz & = Id \\ & = \vartheta z + \varphi z^\perp \\ & = -i(\overline{z}_1 dz_1 + \overline{z}_2 dz_2)(iz) + (-z_2 dz_1 + z_1 dz_2) z^\perp. \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{array}{ll} (2.2) & \vartheta^3 = -i\vartheta \\ (2.3) & \vartheta^1 + i\vartheta^2 = \varphi, \end{array}$$

podemos escrever

$$\begin{array}{rl} dz = & \vartheta^3(iz) + (\vartheta^1 + i\vartheta^2) z^\perp \\ & \vartheta^1 z^\perp + \vartheta^2 iz^\perp + \vartheta^3 iz. \end{array}$$

Com isso temos que $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$ é base dual de $\{z^\perp, iz^\perp, iz\}$ sobre $\mathbb{S}^3$.

De $dz = \vartheta^3(iz) + \varphi z^\perp$, obtemos

$$(2.4)\left\{\begin{array}{ll} dz = & \varphi z^\perp + \vartheta^3(iz) \\ dz^\perp = & -i\vartheta^3 z^\perp - \overline{\varphi} z, \end{array}\right.$$

onde $\vartheta^3 = \overline{\vartheta^3}$, pois $\vartheta = -\overline{\vartheta}$.

Diferenciando a primeira equação em (2.4), temos

$$(2.5)\quad \begin{array}{ll} d\varphi - 2\vartheta^3 \wedge i\varphi & = 0 \\ & \\ d\vartheta^3 - i\varphi \wedge \overline{\vartheta} & = 0. \end{array}$$

Agora, diferenciando (2.3) e substituindo na segunda equação em (2.5), obtemos as Primeiras Equações de Estrutura de $\mathbb{S}^3$:

$$\begin{array}{ll} d\vartheta^1 + \vartheta^3 \wedge \vartheta^2 - \vartheta^2 \wedge \vartheta^3 & = 0 \\ d\vartheta^2 - \vartheta^3 \wedge \vartheta^1 + \vartheta^1 \wedge \vartheta^3 & = 0 \\ d\vartheta^3 + \vartheta^2 \wedge \vartheta^1 - \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 & = 0, \end{array}$$

onde as formas de conexão de S^3 são dadas por

$$w_2^1 = \vartheta^3, w_3^2 = \vartheta^1, w_3^1 = -\vartheta^2.$$

Então derivando as formas de conexão acima e usando as primeiras equações estruturais, obtemos as segundas equações estruturais:

$$\begin{array}{lll} d\omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 & = & \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \\ d\omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_2^1 & = & \vartheta^3 \wedge \vartheta^2 \\ d\omega_3^1 + \omega_1^2 \wedge \omega_3^2 & = & \vartheta^3 \wedge \vartheta^1. \end{array}$$

Agora, considere

$$e_1 = z^\perp, \quad e_2 = iz^\perp, \quad e_3 = iz, \quad e_4 = z$$

um referencial adaptado a $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base de TS^3 e $e_4 \perp S^3$. Considere $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3, \vartheta^4\}$ base dual de $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Das equações (2.4) temos

$$\left\{\begin{array}{lllll} de_1 = & & -\vartheta^3 e_2 & +\vartheta^2 e_3 & -\vartheta^1 e_4 \\ de_2 = & \vartheta^3 e_1 & & -\vartheta^1 e_3 & -\vartheta^2 e_4 \\ de_3 = & -\vartheta^2 e_1 & +\vartheta^1 e_2 & & -\vartheta^3 e_4 \\ de_4 = & \vartheta^1 e_1 & +\vartheta^2 e_2 & +\vartheta^3 e^3 & \end{array}\right.$$

De onde tiramos que

$$\begin{array}{llll} \omega_1^2 = & -\vartheta^3 & \omega_2^3 = & -\vartheta^1 \\ \omega_1^3 = & \vartheta^2 & \omega_2^4 = & -\vartheta^2 \\ \omega_1^4 = & -\vartheta^1 & \omega_3^4 = & -\vartheta^3. \end{array}$$

Como $\vartheta^4 = 0$ sobre S^3, obtemos as mesmas primeiras equações estruturais

$$\begin{aligned} d\vartheta^1 + \vartheta^3 \wedge \vartheta^2 - \vartheta^2 \wedge \vartheta^3 &= 0 \\ d\vartheta^2 - \vartheta^3 \wedge \vartheta^1 + \vartheta^1 \wedge \vartheta^3 &= 0 \\ d\vartheta^3 + \vartheta^2 \wedge \vartheta^1 - \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 &= 0, \end{aligned}$$

que reduzem-se a

$$\begin{aligned} d\vartheta^1 + w_2^1 \wedge \vartheta^2 - \vartheta^2 \wedge \vartheta^3 &= 0 \\ d\vartheta^2 + w_1^2 \wedge \vartheta^1 + \vartheta^1 \wedge \vartheta^3 &= 0 \\ d\vartheta^3 + w_1^3 \wedge \vartheta^1 - \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\begin{aligned} d\vartheta^1 + (w_2^1 + \vartheta^3) \wedge \vartheta^2 &= 0 \\ d\vartheta^2 + (w_1^2 - \vartheta^3) \wedge \vartheta^1 &= 0 \\ d\vartheta^3 - 2\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando as formas de conexão acima juntamente com as primeiras equações estruturais encontramos as Segundas Equações Estruturais de S^3:

$$d\omega_1^2 + \omega_3^2 \wedge \omega_1^3 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \quad \text{Equação de Gauss}$$

$$\left\{ \begin{aligned} d\omega_2^3 + \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 &= \vartheta^2 \wedge \vartheta^3 \\ d\omega_1^3 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 &= \vartheta^3 \wedge \vartheta^1. \end{aligned} \right. \quad \text{Equações de Codazzi}$$

Agora, determinaremos as equações estruturais para uma superfície S em S^3.

Sejam $S \subset S^3$ uma superfície e $\{e_1, e_2, e_3\}$ um referencial adaptado a S com base dual dada por $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$, onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base de TS e $e_3 \perp S$.

Derivando os campos e_1, e_2, e_3 covariantemente em S^3, obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} De_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ De_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\ De_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2. \end{aligned} \right.$$

Calculando a derivada covariante do mesmo referencial na superfície S e observando que e_3 é o campo normal unitário, temos

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla e_1 &= \omega_1^2 e_2 \\ \nabla e_2 &= \omega_2^1 e_1. \end{aligned} \right.$$

Como $\vartheta^3 = 0$ sobre S, as equações estruturais da superfície S são dadas por

$$\left\{ \begin{aligned} d\vartheta^1 + \omega_2^1 \wedge \vartheta^2 &= 0 \\ d\vartheta^2 + \omega_1^2 \wedge \vartheta^1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$d\omega_2^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_1^3 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^2.$$

Novamente usando o fato que $\vartheta^3 = 0$ sobre S, temos que

$$d\vartheta^3 = \vartheta^1 \omega_1^3 + \vartheta^2 \omega_2^3 = 0.$$

Logo, pelo lema 1.1 de Cartan, temos

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} \omega_1^3 &= h_{11}\vartheta^1 + h_{12}\vartheta^2 \\ \omega_2^3 &= h_{21}\vartheta^1 + h_{22}\vartheta^2, \end{aligned}$$

com $h_{ij} = h_{ji}$.

Temos que (h_{ij}) é a matriz (simétrica) do operador forma $S(v) = -de_3(v)$, que diagonalizada determina as curvaturas principais da superfície S. A curvatura Gauss-Kronecker de S é dada pelo determinante

$$k_e = h_{11}h_{22} - h_{12}^2.$$

Com isso, das equações (2.6) segue que

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 = -k_e\vartheta^1 \wedge \vartheta^2.$$

Então, pela equação de Gauss temos que a curvatura da superfície S é dada por

$$K = 1 + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^2)(e_1, e_2).$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_2^1(e_1, e_2) &= (\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2)(e_1, e_2) \\ &= 1 + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^2)(e_1, e_2) \\ &= K. \end{aligned}$$

2.3 Exemplos de Superfícies na esfera $\mathbb{S}^3$

Nesta seção veremos dois exemplos de superfícies em S^3, as 2-esferas e os toros. Vamos calcular suas formas duais e formas de conexão para assim, chegarmos às suas curvaturas Gaussianas.

1. 2-ESFERAS NA ESFERA $\mathbb{S}^3$.

Seja $S_R^2 \subset S^3$ a 2-esfera em $\mathbb{S}^3$ dada por

$$S_R^2 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in S^3; x^4 = \rho, 0 \leq \rho < 1\}.$$

Como

$$S^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in R^4; (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\},$$

podemos escrever S_R^2 na forma

$$S_R^2 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in S^3; (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1 - \rho^2\}.$$

Para encontrar uma parametrização da 2-esfera podemos usar a seguinte versão da projeção estereográfica, onde projetamos S_R^2 a partir do pólo norte $(0, 0, 1)$ no plano $x^3 = -1$:

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & R^2 & \longrightarrow & S_R^2\\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\frac{4Ru}{u^2+v^2+4},\frac{4Rv}{u^2+v^2+4},\frac{R(u^2+v^2-4)}{u^2+v^2+4}\right),\end{array}$$

A partir desta parametrização vamos encontrar um referencial adaptado à 2-esfera S_R^2. Primeiramente, calculemos as derivadas parciais de φ:

$$\varphi_u = \left(\frac{4R(-u^2+v^2+4)}{(u^2+v^2+4)^2}, \frac{-8Ruv}{(u^2+v^2+4)^2}, \frac{16Ru}{(u^2+v^2+4}) ^2\right),$$

$$\varphi_v = \left(\frac{-8Ruv}{(u^2+v^2+4)^2}, \frac{4R(u^2-v^2+4)}{(u^2+v^2+4)^2}, \frac{16Rv}{(u^2+v^2+4}) ^2\right),$$

então

$$\|\varphi_u(u,v)\| = \frac{4R}{u^2+v^2+4}, \quad \|\varphi_v(u,v)\| = \frac{4R}{u^2+v^2+4}.$$

Assim, considerando

$$\begin{array}{rclcl} E_1 & = & \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} & = & \left(\frac{-u^2+v^2+4}{u^2+v^2+4}, \frac{-2uv}{u^2+v^2+4}, \frac{4u}{u^2+v^2+4}\right),\\ E_2 & = & \frac{\varphi_v}{\|\varphi_v\|} & = & \left(\frac{-2uv}{u^2+v^2+4}, \frac{u^2-v^2+4}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}\right),\\ E_3 & = & E_1 \times E_2 & = & \left(\frac{-4u}{u^2+v^2+4}, \frac{-4v}{u^2+v^2+4}, \frac{4-u^2-v^2}{u^2+v^2+4}\right),\end{array}$$

temos que

$$\|E_1\| = \|E_2\| = \|E_3\| = 1.$$

Logo, $\{E_1, E_2, E_3\}$ é um referencial adaptado à 2- esfera S_R^2. Agora, vamos utilizar este referencial para construir outro que seja adaptado à esfera S^3.

Considere

$$e_1 = \left(\frac{-u^2+v^2+4}{u^2+v^2+4}, \frac{-2uv}{u^2+v^2+4}, \frac{4u}{u^2+v^2+4}, 0\right),$$

$$e_2 = \left(\frac{-2uv}{u^2+v^2+4}, \frac{u^2-v^2+4}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, 0\right),$$

$$e_3 = \left(\frac{-4u}{u^2+v^2+4}, \frac{-4v}{u^2+v^2+4}, \frac{4-u^2-v^2}{u^2+v^2+4}, \mu\right),$$

$$e_4 = \left(\frac{4Ru}{u^2+v^2+4}, \frac{4Rv}{u^2+v^2+4}, \frac{R(u^2+v^2-4)}{u^2+v^2+4}, \rho\right).$$

Um simples cálculo nos faz ver que

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_4\| = 1 \;\text{ e}$$

$$\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_1, e_4\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = \langle e_2, e_4\rangle = 0.$$

Vamos determinar μ de modo que

$$\langle e_3, e_4\rangle = 0 \;\text{ e }\; \|e_3\| = 1.$$

Resolvendo a equação $\langle e_3, e_4\rangle = 0$ chegamos que $\mu = \frac{R}{\rho}$. Assim, temos

$$\|e_3\| = \frac{1}{\rho}$$

e portanto

$$e_3 = \left(\frac{-4\rho u}{u^2+v^2+4}, \frac{-4\rho v}{u^2+v^2+4}, \frac{(4-u^2-v^2)\rho}{u^2+v^2+4}, R\right).$$

Portanto $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal adaptado à esfera S^3.

Seja

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{x}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\frac{4Ru}{u^2+v^2+4}, \frac{4Rv}{u^2+v^2+4}, \frac{R(u^2+v^2-4)}{u^2+v^2+4}, \rho\right) \end{array}$$

uma parametrização da superfície $\mathbb{S}^2_R$ contida em $\mathbb{S}^3$. Diferenciando- a, obtemos

$$\begin{array}{rcl} dx^1 & = & \frac{4R(-u^2+v^2+4)}{(u^2+v^2+4)^2}du - \frac{8Ruv}{(u^2+v^2+4)^2}dv \\ dx^2 & = & -\frac{8Ruv}{(u^2+v^2+4)^2}du + \frac{4R(u^2-v^2+4)}{(u^2+v^2+4)^2}dv \\ dx^3 & = & \frac{16R}{(u^2+v^2+4)^2}(udu+vdv) \\ dx^4 & = & 0. \end{array}$$

Como

$$dx = \frac{4Rdu}{u^2+v^2+4}e_1 + \frac{4Rdv}{u^2+v^2+4}e_2 + 0e_3 + 0e_4,$$

então de

$$d\mathbf{x} = \sum \theta_i e_i,$$

temos que os elementos da base dual $(\theta^i)_{i=1}^4$ são dados por

$$\theta^1 = \frac{4R}{u^2+v^2+4}du, \quad \theta^2 = \frac{4R}{u^2+v^2+4}dv, \quad \theta^3 = 0, \quad \theta^4 = 0.$$

Diferenciando exteriormente as duas equações anteriores e escrevendo as diferenciais em função de θ^i, obtemos

$$d\theta^1 = \frac{2v}{u^2+v^2+4}du \wedge \theta^2,$$

$$d\theta^2 = \frac{2u}{u^2+v^2+4}dv \wedge \theta^1.$$

Anti-simetrizando as 1-formas que aparecem nas equações anteriores e comparando com as primeiras equações de estrutura, obtemos

$$\omega_2^1 = \frac{-2vdu}{u^2+v^2+4} + \frac{2udv}{u^2+v^2+4}.$$

Diferenciando exteriormente a equação acima, chegamos a

$$d\omega_2^1 = \frac{1}{R^2}\theta^1 \wedge \theta^2.$$

Da equação de Gauss

$$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$$

segue que a curvatura Gaussiana da 2-esfera é

$$K = \frac{1}{R^2}.$$

2. TOROS NA ESFERA $\mathbb{S}^3$.

Seja

$$\begin{array}{rlcl} \mathbf{x}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \\ & (u,v) & \mapsto & (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v) \end{array}$$

superfície parametrizada tal que

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = a^2, \quad (x^3)^2 + (x^4)^2 = b^2,$$

onde $a^2 + b^2 = 1$. Esta superfície é o toro T em S^3.

Considere

$$\begin{array}{rl} e_1 = & (-\sin u, \cos u, 0, 0) \\ e_2 = & (0, 0, -\sin v, \cos v) \\ e_3 = & (b\cos u, b\sin u, -a\cos v, -a\sin v) \\ e_4 = & (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v). \end{array}$$

Observe que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, logo $\{e_i\}$ é um referencial adaptado à esfera S^3. Facilmente vemos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é um referencial adaptado do toro T. Seja $\{\theta^i\}_{i=1}^4$ base dual de $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Vamos determinar os elementos deste coreferencial: Primeiramente, lembremos que

$$e_i = \sum_j \beta_i^j \partial_j \quad \text{e} \quad \theta^i = \sum_j \beta_i^j dx^j.$$

Logo, de

$$x^1 = a\cos u, \quad x^2 = a\sin u, \quad x^3 = b\cos v, \quad x^4 = b\sin v,$$

segue que

$$\begin{array}{rl} dx^1 = & -a\sin u du \\ dx^2 = & a\cos u du \\ dx^3 = & -b\sin v dv \\ dx^4 = & b\cos v dv. \end{array}$$

A matriz formada pelas componentes do referencial é dada por

$$(\beta_i^j) = \begin{bmatrix} -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin v & \cos v \\ b\cos u & b\sin u & -a\cos v & -a\sin v) \\ a\cos u & a\sin u & b\cos v & b\sin v \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \theta^1 = &\ -\sin u dx^1 + \cos u dx^2 = & adu, \\ \theta^2 = &\ -\sin v dx^3 + \cos v dx^4 = & bdv, \\ \theta^3 = &\ 0, & \\ \theta^4 = &\ 0. & \end{aligned}$$

Para determinar as formas de conexão usaremos a igualdade

$$\omega = -d(\beta_i^j) \cdot^t (\beta_i^j).$$

As matrizes $d(\beta_i^j)$ e ${}^t(\beta_i^j)$ são dadas por

$$d(\beta_i^j) = \begin{bmatrix} -\cos u du & -\sin u du & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos v dv & -\sin v dv \\ -b\sin u du & b\cos u du & a\sin v dv & -a\cos v dv \\ -a\sin u du & a\cos u du & -b\sin v dv & b\cos v dv \end{bmatrix},$$

$${}^t(\beta_i^j) = \begin{bmatrix} -\sin u & 0 & b\cos u & a\cos u \\ \cos u & 0 & b\sin u & a\sin u \\ 0 & -\sin v & -a\cos v & b\cos v) \\ 0 & \cos v & -a\sin v & b\sin v \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -bdu & -adu \\ 0 & 0 & adv & -bdv \\ bdu & -adv & 0 & 0 \\ adu & bdv & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, nós temos

$$\begin{aligned} \omega_2^1 = &\ 0 & \omega_4^2 &= bdv \\ \omega_4^1 = &\ adu & \omega_1^3 &= -bdu \\ \omega_3^2 = &\ -adv & \omega_4^3 &= 0. \end{aligned}$$

Seja (h_i^j) a matriz do operador forma S da superfície T. Vimos na seção (1.3) do capítulo 1 que

$$\omega_1^3 = h_{11}\theta^1 + h_{12}\theta^2,$$

$$\omega_2^3 = h_{21}\theta^1 + h_{22}\theta^2,$$

logo, adaptando ao nosso caso, temos

$$-bdu = h_{11}adu + h_{12}bdv,$$

$$adv = h_{21}adu + h_{22}bdv.$$

Segue que

$$h_{11} = -\frac{b}{a}, \quad h_{12} = h_{21} = 0, \quad h_{22} = \frac{a}{b}.$$

Portanto, as curvaturas principais de T são dadas por

$$\lambda_1 = -\frac{b}{a} \;\text{ e }\; \lambda_2 = \frac{a}{b}$$

e a curvatura Gauss-Kronecker é

$$det(h_{ij}) = \lambda_1\lambda_2 = -1.$$

Então,

$$K = 1 + det(h_{ij}) = 0$$

é a curvatura Gaussiana do toro. A sua curvatura média é dada por

$$H = \frac{1}{2}tr(h_{ij}) = \frac{b^2 - a^2}{2ab},$$

logo o toro é uma superfície mínima se, e somente se $a = b$.

Capítulo 3

Geodésicas Helicais e o Teorema de Classificação

Neste capítulo definiremos, segundo Tamura, um tipo especial de curva, as geodésicas helicais e mostraremos o teorema que classifica as superfícies que contém geodésicas helicais no espaço ambiente $\mathbb{S}^3$. Este teorema é válido para superfícies em variedades de curvatura constante, mas é de nosso interesse neste trabalho prová-lo apenas para superfícies em S^3. Para uma melhor vizualização nós o demonstraremos, em um dos apêndices, para superfícies no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$. O teorema de classificação, que é como o chamaremos, diz que uma superfície completa de curvatura não negativa na esfera S^3 com duas geodésicas helicais passando por cada um de seus pontos é ou uma 2-esfera totalmente geodésica, uma 2-esfera totalmente umbílica, ou um Toro Hopf sobre um círculo.

3.1 Preliminares

Consideremos o espaço ambiente $\mathcal{M}^3(c)$ como o espaço Riemanniano tridimensional de curvatura constante c, munido da métrica $\langle , \rangle$ e simplesmente conexo. Sem perda de generalidade, podemos escolher $c = 0, \pm 1$. Desta forma, temos

$$\mathcal{M}^3(0) = \mathbb{R}^3, \ \ \mathcal{M}^3(1) = \mathbb{S}^3 \ \text{ e } \ \mathcal{M}^3(-1) = \mathbb{H}^3,$$

que são as únicas variedades Riemannianas completas e simplesmente conexas, com curvatura seccional constante a menos de isometrias.

Chamamos de *curva helical* (ou hélice) em $\mathcal{M}^3(c)$ uma curva que tem torção e curvatura constantes.

No espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, uma curva helical é dada por

$$\alpha(s) = (a\cos(s/c), a\sin(s/c), bs/c), \quad \text{onde} \quad c = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a > 0$$

com curvatura e torção

$$k(s) = \frac{a}{a^2+b^2} > 0, \qquad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Note que se o parâmetro b é zero, a hélice reduz-se a um círculo

$$\alpha(s) = (a\cos(s/c), a\sin(s/c), 0).$$

A curvatura deste círculo é $k = \frac{1}{a}$ e a torção é zero. Porém, se a curvatura de $\alpha(s)$ é zero, então o parâmetro a é zero e $\alpha(s) = (0,0,s)$ é uma geodésica em $\mathbb{R}^3$.

Na esfera $\mathbb{S}^3$ a curva parametrizada por

$$\gamma(s) = (\cos\varphi\cos(as), \cos\varphi\sin(as), \sin\varphi\cos(bs), \sin\varphi\sin(bs)),$$

onde $a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = 1$, é uma hélice com curvatura e torção dadas por

$$k = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \quad \text{e} \quad \tau = ab.$$

Observe que se $k = 0$, então

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - b^2 = 0.$$

Suponhamos que $a^2 - 1 = 0$, assim tomando $a = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \gamma'(s) = & \quad (-\cos\varphi\sin(s), \cos\varphi\cos(s), -b\sin\varphi\sin(bs), b\sin\varphi\cos(bs)) \quad \text{e} \\ \gamma''(s) = & \quad (-\cos\varphi\cos(s), -\cos\varphi\sin(s), -b^2\sin\varphi\cos(bs), -b^2\sin\varphi\sin(bs)). \end{aligned}$$

Segue que a curvatura normal de γ é dada por

$$k_n = \langle S(\gamma'), \gamma' \rangle = -\langle \nabla_{\gamma'} N, \gamma' \rangle = -(\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi).$$

Assim, calculando a curvatura geodésica de γ, temos

$$\begin{aligned} k_g^2 &= k^2 - k_n^2 \\ &= \|\gamma''\|^2 - k_n^2 \\ &= \cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi - (\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi - \cos^4\varphi - b^4\sin^4\varphi - 2\cos^2\varphi b^2\sin^2\varphi \\ &= \cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi) + b^2\sin^2\varphi(b^2 - b^2\sin^2\varphi) - 2\cos^2\varphi b^2\sin^2\varphi \\ &= 2\cos^2\varphi b^2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi b^2\sin^2\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo γ é uma geodésica em $\mathbb{S}^3$. Agora, se k é constante diferente de zero e $\tau = 0$ temos $a = 0$ ou $b = 0$. Suponhamos que $a = 0$, então

$$\gamma = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi\cos(bs), \sin\varphi\sin(bs))$$

é um círculo em $\mathbb{S}^3$, pois todo ponto de γ está a uma distância $1/(b^2\sin\varphi)$ do ponto fixo

$$c = (\cos\varphi, 0, \frac{b^2\sin^2\varphi\cos(bs) - \cos(bs)}{b^2\sin\varphi}, \frac{b^2\sin^2\varphi\sin(bs) - \sin(bs)}{b^2\sin\varphi}).$$

A partir das considerações anteriores, observemos que se uma curva helical em $\mathcal{M}^3(c)$ tem torção zero, então ela é um círculo Riemanniano e se a sua curvatura é zero ela será uma geodésica.

A uma curva helical com curvatura e torção diferentes de zero nós chamaremos de *hélice própria*.

Exemplo 7 *Um cilíndro circular no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ contém hélices próprias como geodésicas. De fato, qualquer curva no cilíndro circular $C : x^2 + y^2 = r^2$ é da forma*

$$\alpha(t) = (r\cos\varphi(t), r\sin\varphi(t), h(t)).$$

Como $T_p(C)$ é um subespaço bi-dimensional de $T_p(\mathbb{R}^3)$, existe somente uma direção normal a C em p, ou seja, todos os vetores normais em p são colineares. Temos que o gradiente de $g = x^2 + y^2$, $\nabla g = (2x, 2y, 0)$, é um campo vetorial normal a C, logo todos os campos normais a C têm z-coordenada nula. Deste modo, se α é uma geodésica sua aceleração é sempre normal a C, logo $h"(t) = 0$, o que nos faz concluir que $h(t) = ct+d$. Agora, como $\alpha"(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$, então

$$\frac{d}{dt}\langle\alpha', \alpha'\rangle = 2\langle\alpha", \alpha'\rangle = 0$$

e daí,

$$\|\alpha'\|^2 = r^2\varphi'^2 + h'^2$$

é constante, o que implica que φ' é constante e portanto $\varphi(t) = at+b$. Assim, podemos dizer que qualquer geodésica em C é da forma

$$\alpha(t) = (r\cos(at+b), r\sin(at+b), ct+d)$$

e como suas curvatura e torção são as constantes,

$$\kappa = \frac{(a^4c^2 + a^6r^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^2r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \quad e \quad \tau = \frac{2a^5cr^2}{a^4c^2r^2 + a^6r^4},$$

$\alpha(t)$ é uma curva helical. Se a e c são diferentes de zero, então $\alpha(t)$ é uma hélice própria no cilíndro circular em $\mathbb{R}^3$.

Agora, considerando o helicóide em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\boldsymbol{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v),$$

suas hélices

$$\alpha(t) = (a\cos h(t), a\sin h(t), h(t)), \quad h(t) \neq 0,$$

que obtemos fazendo $u = a = cte$ *diferente de zero na parametrização* $\boldsymbol{x}$ *acima, têm curvatura geodésica* $k_g = [(a^2+1)h''^2 + a^2h'^4]/[(a^2+1)h''^2 + a^2h'^4]^{\frac{1}{2}}$. *Portanto as hélices do helicóide não são geodésicas, pois* $k_g \neq 0$. *Também os meridianos de uma superfície de revolução parametrizada por*

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v),$$

que são suas curvas u-paramétricas

$$\alpha(t) = (g(t), h(t)\cos v_0, h(t)\sin v_0)$$

nem sempre são geodésicas, pois $k_g = (g''^2 + h''^2)/(g''^2 + h''^2)^{\frac{1}{2}}$ *será zero somente quando* $g''(t)$ *e* $h''(t)$ *se anularem.*

Pelos exemplos acima podemos observar que para uma superfície M em um espaço ambiente $\mathcal{M}^3(c)$, existem curvas que são hélices sobre a supefície M, mas não são geodésicas sobre a mesma ou hélices que também são geodésicas sobre a superfície M. Baseados nestes resultados definimos uma *geodésica helical* sobre uma superfície M em $\mathcal{M}^3(c)$ como uma curva que é helical como uma curva em $\mathcal{M}^3(c)$ e uma geodésica como uma curva sobre M.

Exemplo 8 *Sejam*

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

a esfera unitária mergulhada no espaço euclideano $\mathbb{R}^4$ *e o Toro raso dado por*

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 = \cos^2\phi, x_3^2 + x_4^2 = \sin^2\phi\},$$

que é uma superfície em $\mathbb{S}^3$, *pois para* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T$, *temos*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Como já vimos no início deste capítulo, a curva

$$\gamma(s) = (\cos\phi\cos(as), \cos\phi\sin(as), \sin\phi\cos(bs), \sin\phi\sin(bs)),$$

onde $a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi = 1$ *é uma hélice em* $\mathbb{S}^3$ *com curvatura e torção dadas por*

$$k = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \quad e \quad \tau = ab.$$

Observe que $\gamma(s) \in T$, *já que para todo s, temos*

$$(\cos\phi\cos(as))^2 + (\cos\phi\sin(as))^2 = \cos^2\phi, (\sin\phi\cos(bs))^2 + (\sin\phi\sin(bs))^2 = \sin^2\phi.$$

Além disso, $\gamma(s)$ é uma geodésica sobre o Toro. De fato, calculando $\gamma'(s)$ e rotacionando $90°$, obtemos

$$N = (-a\sin\phi\sin(as), a\sin\phi\cos(as), b\cos\phi\sin(bs), -b\cos\phi\cos(bs)).$$

Então, como

$$\begin{aligned} k_g &= \langle \gamma''(s), N\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

segue que $\gamma(s)$ é uma geodésica helical sobre o toro raso T em $\mathbb{S}^3$.

Da mesma forma que definimos as fórmulas de Frenet para curvas em $\mathbb{R}^3$ podemos também definí-las para uma curva helical em um espaço de curvatura constante. Para isso, denotaremos por D a conexão Riemanniana do espaço ambiente $\mathcal{M}^3(c)$, ∇ a conexão Riemanniana da superfície M imersa em $\mathcal{M}^3(c)$ com a métrica induzida $\langle , \rangle$ e por ξ o campo vetorial unitário normal a M.

Seja γ uma curva helical em $\mathcal{M}^3(c)$ parametrizada pelo comprimento de arco. Então pela fórmula de Frenet-Serret, existem campos vetoriais unitários $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ao longo de γ e constantes $\mathtt{k}$, τ tais que

$$(3.1) \quad \begin{aligned} D_{\gamma'}\gamma' &= \mathtt{k}X \\ D_{\gamma'}X &= -\mathtt{k}\gamma' + \tau Y, \\ D_{\gamma'}Y &= -\tau X \end{aligned}$$

onde γ' denota o campo vetorial tangente unitário de γ.

Se γ é uma geodésica helical da superfície M, então γ tem curvatura e torção constantes como uma curva em $\mathcal{M}^3(c)$. Isto nos dá as seguintes possibilidades:

(i) $k \neq 0$ e $\tau \neq 0$. Neste caso, como $D_{\gamma'}\gamma' = \mathtt{II}(\gamma', \gamma')\xi$ é normal a M podemos substituir X por ξ em (3.1). Assim, obtemos
$$D_{\gamma'}\xi = -\mathtt{k}\gamma' + \tau Y \quad \text{e} \quad D_{\gamma'}Y = -\tau\xi.$$

(ii) $k \neq 0$ e $\tau = 0$. Novamente substituindo X por ξ em (3.1) temos
$$D_{\gamma'}\xi = -\mathtt{k}\gamma'.$$

(iii) $k = 0$. Pela fórmula de Gauss e por (3.1) temos
$$\mathtt{II}(\gamma', \gamma')\xi = D_{\gamma'}\gamma' = 0 \Rightarrow \mathtt{II}(\gamma', \gamma') = 0.$$

Observe que no último caso (iii), em que a curvatura da curva γ é nula, concluímos que a segunda forma fundamental $\mathtt{II}(\gamma', \gamma')$ também é nula, então γ é uma curva assintótica sobre M, pois
$$\mathtt{II}(\gamma', \gamma') = \langle S(\gamma'), \gamma'\rangle = 0.$$

3.2 O Teorema de Classificação para Superfícies em $\mathbb{S}^3$

Nesta seção consideraremos superfícies M suaves e conexas imersas no espaço ambiente $\mathbb{S}^3$.

Antes de demonstrarmos o resultado central deste capítulo, o Teorema de Classificação para a esfera $\mathbb{S}^3$, provaremos três resultados que serão de grande auxílio.

Lema 3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana bi-dimensional. Se duas famílias de geodésicas intersectam toda a superfície M com um ângulo constante, então M é rasa.*

Prova. Seja X (ou Y) o campo vetorial dos vetores unitários tangentes às curvas da primeira (segunda) família de geodésicas. Seja α uma curva integral de X, então

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \Rightarrow \nabla X(\alpha(t)) = \alpha''(t) = 0.$$

Deste modo, X é paralelo ao longo das curvas integrais de X e como o ângulo entre X e Y é constante, suponhamos ϑ, então

$$\cos\vartheta = \langle X, Y\rangle \Rightarrow 0 = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

Como $\frac{DX}{dt} = 0$ em $\alpha(t)$ segue que o campo vetorial Y também deve ser paralelo ao longo das curvas integrais de X. Portanto

$$0 = \nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_X Y = \nabla_Y X = [X, Y].$$

Consequentemente,

$$R(X,Y)Y = \nabla_X(\nabla_Y Y) - \nabla_Y(\nabla_X Y) - \nabla_{[X,Y]}Y = 0.$$

■

Lema 3.2 *Seja M uma superfície de curvatura média constante em $\mathcal{M}^3(c)$ e seja U um conjunto aberto em M. Assuma que existem duas famílias de curvas assíntóticas sobre U todas as quais são geodésicas no espaço ambiente. Então U é totalmente geodésica ou congruente a uma parte aberta de um cilíndro circular em $\mathbb{R}^3$ ou um Toro Hopf sobre um círculo em $\mathbb{S}^3$.*

Prova. Suponhamos que U seja totalmente geodésico, então para toda curva $\alpha \in U$ temos

$$\langle S(\alpha'), \alpha' \rangle = 0.$$

Assim, α é uma curva assintótica sobre U tal que

$$\begin{aligned} \langle S(\alpha'), \alpha' \rangle &= -\langle D_{\alpha'}\xi, \alpha' \rangle \\ &= -\alpha' \langle \xi, \alpha' \rangle + \langle \xi, D_{\alpha'}\alpha' \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como ξ e α' são perpendiculares temos que $D_{\alpha'}\alpha' = 0$, ou seja, α é geodésica sobre o espaço ambiente.

Agora, sem perda de generalidade, vamos nos restringir ao caso em que U não é totalmente geodésico.

Sejam α_1 e α_2 curvas assintóticas sobre U passando por um ponto $p \in U$ que são geodésicas como curvas em $\mathcal{M}^3(c)$. Seja λ a curvatura principal da superfície M com vetor principal correspondente E_1. Como

$$H = \frac{\lambda + \lambda'}{2},$$

temos que $2H - \lambda$ é a curvatura principal de M com vetor principal correspondente E_2, onde H é a curvatura média de M, que é constante por hipótese.

Consideremos ϑ o ângulo entre E_1 e α_1' tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \cos\vartheta E_1 + \sin\vartheta E_2 \\ \alpha_2' &= -\cos\vartheta E_1 + \sin\vartheta E_2 \end{aligned}$$

onde α_1' e α_2' denotam os campos tangentes unitários de α_1 e α_2 respectivamente. Pondo

$$\nabla_{E_1} E_1 = \alpha E_2 \quad \text{e} \quad \nabla_{E_2} E_1 = \beta E_2,$$

pela simetria das formas de conexão obtemos

$$\nabla_{E_1} E_2 = -\alpha E_1 \quad \text{e} \quad \nabla_{E_2} E_2 = -\beta E_1.$$

Segue da Equação de Codazzi que

$$\text{(3.2)} \qquad \nabla_{E_1}\lambda = -2\beta(\lambda - H) \quad \text{e} \quad \nabla_{E_2}\lambda = 2\alpha(\lambda - H).$$

Como α_1 e α_2 são geodésicas sobre M, temos

$$\nabla_{\alpha_1'}\alpha_1' = \nabla_{\alpha_2'}\alpha_2' = 0.$$

Então

$$\nabla_{\alpha_1'}\alpha_1' = (\cos\vartheta E_2 - \sin\vartheta E_1)(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta + \nabla_{\alpha_1'}\vartheta) = 0$$

$$\nabla_{\alpha_2'}\alpha_2' = (\cos\vartheta E_2 + \sin\vartheta E_1)(\alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta + \nabla_{\alpha_2'}\vartheta) = 0.$$

Portanto,

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{aligned} &\nabla_{\alpha_1'}\vartheta + \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta = 0 \\ &\nabla_{\alpha_2'}\vartheta + \alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Sendo α_1 e α_2 curvas assintóticas, segue que $\langle S(\alpha_1'), \alpha_1'\rangle = 0$. Substituindo α_1' por $\cos\vartheta E_1 + \sin\vartheta E_2$ na igualdade anterior temos

$$\text{(3.4)} \qquad \lambda\cos^2\vartheta + (2H - \lambda)\sin^2\vartheta = 0.$$

Diferenciando a igualdade (3.4) com respeito a α_1' e usando (3.3), obtemos

$$(2\lambda - 2H)[\alpha \sin\vartheta(3\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \beta\cos\vartheta(\cos^2\vartheta - 3\sin^2\vartheta)] = 0.$$

Mas $2\lambda - 2H \neq 0$, pois caso contrário teríamos $H = \lambda$ e daí $2H - \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda$. Assim, $detS > 0$ implicando que U não admite direções assintóticas, o que contraria nossa hipótese. Portanto,

$$\alpha \sin\vartheta(3\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \beta\cos\vartheta(\cos^2\vartheta - 3\sin^2\vartheta) = 0.$$

De modo análogo, diferenciamos (3.4) com respeito a α_2' e encontramos

$$\alpha \sin\vartheta(3\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + \beta\cos\vartheta(\cos^2\vartheta - 3\sin^2\vartheta) = 0.$$

Logo,

$$\alpha \text{ ou } \beta \text{ é zero}, \quad 3\cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta \quad \text{ou} \quad \cos^2\vartheta = 3\sin^2\vartheta.$$

Com isso, tomando $\alpha = 0$, por exemplo, temos que $\cos^2\vartheta = 3\sin^2\vartheta$. Substituindo em (3.4) obtemos a igualdade $H = -\lambda$, logo λ é constante. Desta forma, se γ é uma linha de curvatura sobre U então

$$k(\gamma') = \lambda \quad (\text{ou} \quad 2H - \lambda)$$

é constante. Como $S(\gamma')$ é colinear a γ' segue que

$$k(\gamma') = \langle S(\gamma'), \gamma' \rangle = \langle b\gamma', \gamma' \rangle = \lambda \quad (\text{ou} \quad 2H - \lambda).$$

Derivando os dois últimos termos desta igualdade obtemos

$$\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0.$$

Logo, linhas de curvatura são geodésicas sobre U, já que U não é totalmente geodésico. Como duas famílias de linhas de curvatura intersectam U em um ângulo constante $\frac{\pi}{2}$, pelo lema 3.1, U é rasa. Então, de

$$K = c + detS$$

temos $detS = -c$. Por outro lado, como U admite duas famílias de curvas assintóticas,

$$detS \leq 0,$$

logo $c \geq 0$. Além disso, (3.2) implica que U tem curvaturas principais constantes, logo é isoparamétrica. Com isso, pelas proposições A.4 e A.6 concluímos que U é a parte aberta de um cilíndro circular ou um toro Hopf sobre círculos, dependendo de quem seja $\mathcal{M}^3(c) = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. ∎

Teorema 3.1 *Seja M uma superfície completa de curvatura média constante no espaço ambiente $\mathcal{M}^3(c)$, $c \geq 0$. Se M não tem pontos umbílicos, e existe uma geodésica helical sobre M passando por cada ponto de M cuja curvatura (como uma curva em $\mathcal{M}^3(c)$) é diferente de zero, então M é um "cilíndro circular"(aqui, por um "cilíndro circular"em $\mathcal{M}^3(c)$, $c > 0$, nós entendemos um cilíndro Hopf (Toro) sobre um círculo em $\mathbb{S}^3$).*

Prova. Seja γ uma geodésica helical sobre M passando por um ponto $p \in M$. Então da fórmula de Gauss e de (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} &\mathtt{II}(\gamma', \gamma')\xi = D_{\gamma'}\gamma' = \mathtt{k}\xi \\ (3.5) \qquad & \\ &\mathtt{II}(\gamma', Y)\xi = D_{\gamma'}Y = -\tau\xi. \end{aligned}$$

Agora, sejam λ e $2H - \lambda$ as curvaturas principais de M com campos vetoriais principais E_1 e E_2, respectivamente sobre M e seja ϑ o ângulo entre γ' e E_1 tal que

$$\begin{aligned} \gamma' &= \cos\vartheta E_1 + \sin\vartheta E_2 \\ Y &= -\sin\vartheta E_1 + \cos\vartheta E_2, \end{aligned}$$

então como

$$\mathtt{II}(E_1, E_1) = \langle S(E_1), E_1\rangle = \lambda \;\text{ e }\; \mathtt{II}(E_2, E_2) = \langle S(E_2), E_2\rangle = (2H - \lambda),$$

segue que

$$\begin{aligned} (3.6) \qquad & \mathtt{II}(\gamma', \gamma') = \langle S(\gamma'), \gamma'\rangle = \lambda\cos^2\vartheta + (2H - \lambda)\sin^2\vartheta \\ (3.7) \qquad & \mathtt{II}(Y, Y) = \langle S(Y), Y\rangle = \lambda\sin^2\vartheta + (2H - \lambda)\cos^2\vartheta. \end{aligned}$$

As equações (3.5) e (3.6) implicam que

$$\mathtt{k} = \mathtt{II}(\gamma', \gamma') = \lambda\cos^2\vartheta + (2H - \lambda)\sin^2\vartheta.$$

Daí, por (3.7),

$$\mathtt{II}(Y, Y) = 2H - \mathtt{k}.$$

Então a curvatura Gaussiana $\mathtt{K}$ de M é dada por

$$\mathtt{K} = c + \mathtt{II}(\gamma', \gamma') \cdot \mathtt{II}(Y, Y) - \{\mathtt{II}(\gamma', Y)\}^2 = c + \mathtt{k}(2H - \mathtt{k}) - \tau^2.$$

Como $\mathtt{K}$ deve ser igual a $c + detS$, temos

$$\mathtt{K} = c + \lambda(2H - \lambda).$$

Das igualdades obtidas a partir de $\mathtt{K}$, segue que

$$\lambda = \pm\sqrt{H^2 - \mathtt{k}(2H - \mathtt{k}) - \tau^2}.$$

Portanto as funções λ e $2H - \lambda$ são constantes ao longo de γ .

Diferenciando (3.6) com respeito a γ', obtemos

$$0 = 4\cos\vartheta\sin\vartheta\nabla_{\gamma'}\vartheta(H - \lambda).$$

Mas M não tem pontos umbílicos, logo

$$\lambda \neq 2H - \lambda \Rightarrow H \neq \lambda$$

do que segue

$$(3.8) \qquad \nabla_{\gamma'}\vartheta = 0.$$

Pondo

$$\nabla_{E_1}E_1 = \alpha E_2 \ \text{ e } \ \nabla_{E_2}E_1 = \beta E_2,$$

obtemos pela simetria das formas de conexão que

$$\nabla_{E_1}E_2 = -\alpha E_1 \ \text{ e } \ \nabla_{E_2}E_2 = -\beta E_1.$$

Como γ é uma geodésica sobre M, de (3.8) e das derivadas dos campos acima, obtemos

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = (\cos\vartheta E_2 - \sin\vartheta E_1)(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta) = 0.$$

Mas $(\cos\vartheta E_2 - \sin\vartheta E_1)$ é o campo binormal Y, logo

$$(3.9) \qquad \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta = 0.$$

Por outro lado, usando a equação de Codazzi no operador forma S, obtemos

$$(3.10) \qquad \nabla_{E_1}\lambda = -2\beta(\lambda - H) \quad e \quad \nabla_{E_2}\lambda = 2\alpha(\lambda - H).$$

Como

$$\langle D_{\gamma'}(\lambda\xi), \xi\rangle = \lambda\,\langle D_{\gamma'}\xi, \xi\rangle = \frac{\lambda}{2}D_{\gamma'}\,|\xi|^2 = 0,$$

temos que $D_{\gamma'}(\lambda\xi)$ é tangente a M, logo sua parte normal se anula. Então, de (3.10) temos

$$(3.11) \qquad \alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta = 0.$$

Portanto, de (3.9) e (3.11), temos que

$$\alpha = \beta = 0$$

ao longo de γ. Isto implica que todas as linhas de curvatura são geodésicas sobre M. Como duas famílias de linhas de curvatura intersectam M em uma ângulo constante, segue do lema (3.1) que M é rasa. Logo λ e $2H - \lambda$ são constantes em toda a M. Com isso, das proposições A.4 e A.6 temos que M é uma superfície totalmente geodésica, uma superfície totalmente umbílica ou um "cilíndro circular". Contudo, por nossa hipótese, M é livre de pontos umbílicos, logo se fosse totalmente geodésica teríamos

$$\mathtt{II}(E_1, E_1) = \lambda = 0 \quad e$$
$$\mathtt{II}(E_2, E_2) = 2H - \lambda = 0.$$

Daí, $\lambda = 2H - \lambda$, o que é absurdo. Então M é um "cilíndro circular". ∎

Agora estamos prontos para provar o Teorema de Classificação para Superfícies em $\mathbb{S}^3$.

Teorema 3.2 *Seja M uma superfície completa de curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$ de curvatura não negativa. Se existem duas geodésicas helicais sobre M passando por cada ponto de M, então M é uma 2-esfera totalmente geodésica, uma 2-esfera totalmente umbílica ou um Toro Hopf.*

Prova. Sejam γ_1 e γ_2 geodésicas helicais sobre M passando por um ponto $p \in M$. Logo, γ_1 e γ_2 são hélices em S^3. Assim, dos casos seguintes a (3.1) temos as seguintes possibilidades:

(i) γ_1 e γ_2 são geodésicas sobre $\mathbb{S}^3$,

(ii) γ_1 e γ_2 são círculos Riemannianos,

(iii) γ_1 e γ_2 são hélices próprias,

(iv) γ_1 é uma geodésica sobre $\mathbb{S}^3$ e γ_2 é um círculo Riemanniano,

(v) γ_1 é uma geodésica sobre $\mathbb{S}^3$ e γ_2 é uma hélice própria,

(vi) γ_1 é um círculo Riemanniano e γ_2 é uma hélice própria.

Primeiramente, suponha que a curvatura Gauss-Kronecker K_e é positiva em ao menos um ponto da superfície M, e tome

$$M_1 = \{p \in M; K_e(p) > 0\}.$$

Observe que se a curvatura k de alguma das geodésicas helicais γ_1 ou γ_2 é zero, então

$$\mathtt{II}(\gamma_i', \gamma_i') = \langle S(\gamma_i'), \gamma_i' \rangle \, \xi = 0 \quad i = 1, 2.$$

Deste modo, γ_i seria uma curva assintótica e portanto os pontos por onde γ_i passa não pertenceriam a M_1, pois sendo

$$K = 1 + K_e > 0,$$

M_1 não tem direções assintóticas. Portanto, por cada ponto de M_1 passam apenas geodésicas helicais dos tipos **(ii)**, **(iii)** ou **(vi)**.

Agora, considere os conjuntos

$$M_{11} = \{p \in M_1; \text{p é ponto umbílico}\} \ \text{ e } \ M_{12} = M_1 - M_{11}.$$

Se $M_{12} \neq \emptyset$, então ele é um conjunto sem pontos umbílicos e com geodésicas helicais cuja curvatura nunca é zero passando por cada um de seus pontos. Assim, pelo teorema 3.1, $K = 0$ sobre M_{12}. Porém, isto contradiz $K_e > 0$ sobre M_{12}, pois

$$K = 1 + K_e.$$

Então M_1 é totalmente umbílica.

Considerando a aplicação

$$\pi : M \to \mathbb{R}$$

que a cada ponto da superfície M associa a curvatura Gauss-Kronecker $K_e(p)$, temos que M_1 é a imagem inversa por uma aplicação contínua do intervalo aberto $]0, +\infty[$, logo é um subconjunto aberto de M. Por outro lado, M_1 também é fechado. Com isso, concluímos que M é uma superfície totalmente umbílica. Como podemos ver no teorema A.5, uma superfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^3$ é uma 2-esfera. Logo, M é uma 2-esfera totalmente umbílica em S^3. Se as curvaturas principais de M são nulas, temos que M é uma 2-esfera totalmente geodésica.

Agora suponhamos que $K_e \leq 0$ sobre a superfície M e tome

$$M_2 = \{p \in M; K_e(p) < 0\}.$$

Então por cada ponto de M_2 passam geodésicas helicais de todos os tipos (i)-(vi).

Sejam

$$M_{21} = \{p \in M_2; \text{existe um círculo ou uma hélice própria passando por p}\}$$

$$\text{e} \;\; M_{22} = M_2 - M_{21}.$$

Então

$$M_{21} \cup M_{22} = M_{21} \cup M_2 - M_{21} = M_2$$

e facilmente vemos que

$$(1) \qquad M_2 = ClM_{21} \cup IntM_{22}$$

$$(2) \qquad M_2 = ClM_{22} \cup IntM_{21}.$$

Para $p \in ClM_{21}$ temos por (2) que $p \in IntM_{21}$ e o mesmo acontece com M_{22}. Portanto, M_{21} ou M_{22} tem ponto interior, ou ainda, M_{21} ou M_{22} é denso em M_2.

Como $K_e < 0$ em M_2, não existem pontos umbílicos em M_2. Assim, se tivermos $IntM_{21} \neq \emptyset$ ou M_{21} denso em M_2,então, pelo Teorema 3.1 M_2 é rasa. Também, se $IntM_{22} \neq \emptyset$ ou M_{22} é denso em M_2, então todas as curvas assintóticas sobre M_2 são geodésicas sobre $\mathbb{S}^3$. Logo, pelo Lema 3.1, $K = 0$ sobre M_2. Assim,

$$M_2 = \{p \in M; K_e(p) = -1\}.$$

Daí M_2 é fechado e portanto M é rasa e como estamos supondo $K_e \leq 0$ temos que $K_e = -1$ sobre M. Assim, M é isoparamétrica, logo, pela proposição A.6, M é um Toro Hopf. ■

Apêndice A

Classificação das Superfícies Isoparamétricas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{S}^3$

Uma superfície M cujas curvaturas principais são constantes é chamada de superfície isoparamétrica. Nesta seção classificaremos superfícies isoparamétricas nos espaços ambientes $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{R}^3$. Estes resultados serão usados nas provas dos teoremas de classificação de superfície com geodésicas helicais em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{R}^3$.

Para a prova da proposição A.4, que classifica superfícies isoparamétricas em $\mathbb{R}^3$, usaremos os seguintes resultados:

Teorema A.1 *Seja M uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Se seu operador forma é identicamente nulo, então M é (parte de) um plano em $\mathbb{R}^3$.*

Prova. Seja S o operador forma da superfície M. Temos que $S = 0$ significa que todo campo vetorial unitário E_3 normal sobre M é paralelo. Então podemos identificá-lo com um ponto de $\mathbb{R}^3$. Fixe um ponto p de M. Mostraremos que M está no plano que passa por p ortogonal a E_3. Se q é um ponto arbitrário de M, então como M é conexa existe uma curva α em M de $\alpha(0) = p$ a $\alpha(1) = q$. Considere a função

$$f(t) = \langle (\alpha(t) - p), E_3 \rangle .$$

Agora,

$$\frac{df}{dt} = \langle \alpha', E_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 0;$$

daí f é identicamente nula. Em particular,

$$f(1) = \langle (q - p), E_3 \rangle = 0,$$

então todo ponto q de M está no plano. ■

Teorema A.2 *Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é totalmente umbílica e $K > 0$, então M é parte de uma esfera em $\mathbb{R}^3$.*

Prova. Escolha aleatoriamente um ponto p em M e um campo unitário E_3 normal a M em p. Mostraremos que o ponto

$$c = p + \frac{1}{k(p)} E_3(p)$$

é equidistante de todo ponto de M. Observe que aqui, $k(p) = k_1(p) = k_2(p)$ é a curvatura principal correspondente a $E_3(p)$.

Agora seja q um ponto qualquer de M, e seja α uma curva em M de $\alpha_0 = p$ a $\alpha_1 = q$. Extenda $E_3(p)$ a um campo unitário normal E_3 sobre α e considere a curva

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{k} E_3 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Aqui entendemos que a função curvatura principal k deriva de E_3, então k é contínua. Mas $K = k^2$ e como toda superfície totalmente umbílica tem curvatura gaussiana constante $K \geq 0$ (ver [11, cap.6]), K é constante, então k é constante. Assim,

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k} E_3'.$$

Mas

$$E_3' = -S(\alpha') = -k\alpha',$$

já que M é totalmente umbilica e , portanto S é a multiplicação escalar por k. Então

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k}(-k\alpha') = 0,$$

e assim a curva γ deve ser constante. Em particular

$$c = \gamma(0) = \gamma(1) = q + \frac{1}{k} E_3(q)$$

daí $d(c, q) = 1/|k|$ para todo ponto q de M. Portanto, M está contida em uma esfera de centro c. ■

Lema A.1 *Se p é um ponto não umbílico de $M \subset \mathbb{R}^3$, então existe um referencial principal (referencial adaptado E_1, E_2, E_3 em que E_1 e E_2 são vetores principais de M) sobre alguma vizinhança de p em M.*

Prova. Ver [11, cap.6] ■

Teorema A.3 *Se E_1, E_2, E_3 é um referencial principal sobre $M \subset \mathbb{R}^3$, então*

$$E_1[k_2] = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_2)$$

$$E_2[k_1] = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_1),$$

onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de M.

Prova. Ver [11, cap. 6] ■

Proposição A.4 *Seja M uma superfície isoparamétrica em $\mathbb{R}^3$. Então M é ou um plano (totalmente geodésico), uma esfera (totalmente umbílica) ou um cilíndro circular.*

Prova. Por hipótese temos que as curvaturas principais, k_1 e k_2, da superfície M são constantes, com isso temos as seguintes possibilidades:

(i) $k_1 = k_2 = 0$. Neste caso, seja $\{E_1, E_2\}$ um referencial ortonormal em M. Para todo vetor $v \in T_pM$ com $p \in M$ temos

$$S(v) = S(a_1E_1 + a_2E_2) = a_1S(E_1) + a_2S(E_2) = a_1k_1E_1 + a_2k_2E_2 = 0.$$

Segue do teorema A.2 que M é um plano totalmente geodésico em $\mathbb{R}^3$.

(ii) $k_1 = k_2 \neq 0$. Para o mesmo referencial $\{E_1, E_2\}$, se $u = \cos\theta E_1 + \sin\theta E_2$, e não a curvatura normal k de M na direção de u é

$$k(u) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_1.$$

Portanto, k é constante sobre todo vetor tangente unitário u em p. Assim, M é totalmente umbílica. Como sua curvatura gaussiana $K = k_1k_2$ é maior do que zero concluímos do teorema A.2 que M é uma esfera em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $k_1 \neq k_2$. Por hipótese M não tem pontos umbílicos, pois $k_1 \neq k_2$. Logo, pelo lema A.1, existe um referencial principal $\{E_1, E_2, E_3\}$ sobre M. Como k_1 e k_2 são constantes, temos

$$E_1[k_2] = E_2[k_1] = 0, \forall p \in M.$$

Do teorema A.3, temos

$$E_1[k_2] = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_2)$$

$$E_2[k_1] = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_1).$$

Segue que

$$\omega_{12}(E_1) = \omega_{12}(E_2) = 0.$$

Então, como

$$K = E_2[\omega_{12}(E_1)] - E_1[\omega_{12}(E_2)] - \omega_{12}(E_1) - \omega_{12}(E_2)$$

temos

$$K = k_1 k_2 = 0.$$

Logo, digamos, $k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$. Portanto todos os pontos de M são parabólicos. Assim, M é um cilíndro circular.

■

O teorema seguinte garante que superfícies bidimensionais totalmente umbílicas imersas na esfera $\mathbb{S}^3$ são 2-esferas. Usaremos este fato para classificar superfícies isoparamétricas em $\mathbb{S}^3$.

Teorema A.5 *Seja $S \subset \mathbb{R}^{m+1}$ uma m-esfera. Para $n \geq 2$ seja M^n uma subvariedade conexa e totalmente umbílica imersa em S. Então M é parte de uma n-esfera.*

Prova. Ver[15, cap.7] ■

Proposição A.6 *Seja M uma superfície isoparamétrica em $\mathbb{S}^3$. Então M é ou uma 2-esfera totalmente geodésica, ou uma 2-esfera totalmente umbílica ou um Toro Hopf sobre um círculo.*

Prova. Seja S o operador forma da superfície M. Sabemos que a matriz de S quando diagonalizada nos fornece as curvaturas principais k_1, k_2 de M, que são constantes, por hipótese. Neste caso, de (2.6) temos que

$$\begin{array}{rcl} \omega_1^3 & = & k_1 \vartheta^1 \\ \omega_2^3 & = & k_2 \vartheta^2. \end{array}$$

Daí, do fato que

$$K = 1 + (\omega_1^3 \wedge \omega_2^3)(e_1, e_2),$$

obtemos

$$K = 1 + k_1 k_2.$$

Temos as seguintes possibilidades:

(i) $k_1 = k_2 = 0$. Neste caso, a curvatura Gaussiana da superfície é $K = 1$. Como M é totalmente umbílica, pelo teorema A.5, M é uma 2-esfera totalmente geodésica em S^3, pois para um referencial adaptado, E_1, E_2, E_3, temos que a segunda forma fundamental é identicamente nula,

$$\begin{array}{rcccl} S(E_1) & = & k_1 E_1 & = & 0. \\ S(E_2) & = & k_2 E_2 & = & 0. \end{array}$$

(ii) $k_1 = k_2 \neq 0$. Como as curvaturas principais de M são iguais, ela é uma superfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^3$ com curvatura

$$K = 1 + k_1^2 > 0.$$

Novamente, pelo teorema A.5 temos que M é uma 2-esfera totalmente umbílica em $\mathbb{S}^3$.

(iii) $k_1 \neq k_2$. Neste caso, de

$$\begin{array}{rcl} \omega_1^3 & = & k_1\vartheta^1 \\ \omega_2^3 & = & k_2\vartheta^2. \end{array}$$

segue que

$$\begin{array}{rcl} d\omega_1^3 & = & k_1 d\vartheta^1 \\ d\omega_2^3 & = & k_2 d\vartheta^2. \end{array}$$

Por outro lado, das equações de Codazzi e pelo fato de $\vartheta^3 = 0$ sobre a superfície em $\mathbb{S}^3$, temos

$$\begin{array}{rcl} d\omega_1^3 & = & \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 & = & \omega_2^1 \wedge \omega_1^3. \end{array}$$

Portanto,

$$(1) \quad \begin{array}{rcccl} d\omega_1^3 & = & \omega_1^2 \wedge k_2\vartheta^2 & = & k_1 d\vartheta^1 \\ & & & & \\ d\omega_2^3 & = & \omega_2^1 \wedge k_1\vartheta^1 & = & k_2 d\vartheta^2. \end{array}$$

Das Equações Estruturais deuma superfície em $\mathbb{S}^3$,

$$d\vartheta^1 = \omega_2^1 \wedge \vartheta^2 \quad \text{e} \quad d\vartheta^2 = \omega_2^1 \wedge \vartheta^1$$

sobre M, fazendo $\omega_2^1 = a\vartheta^1 + b\vartheta^2$, segue de (1) que

$$ak_2\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 = ak_1\vartheta^1 \wedge \vartheta^2$$

$$bk_2\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 = bk_1\vartheta^1 \wedge \vartheta^2.$$

Portanto, concluímos que $a = b = 0$, pois $k_1 \neq k_2$. Logo, $\omega_2^1 = 0$, o que implica que a curvatura Gaussiana $K = 0$ sobre M. Assim, M é um toro Hopf em $\mathbb{S}^3$.

■

Apêndice B

O Teorema de Classificação para Superfícies em $\mathbb{R}^3$

O objetivo deste apêndice é provar o Teorema de Classificação para o espaço euclideano $\mathbb{R}^3$. Vamos, portanto caracterizar superfícies em $\mathbb{R}^3$ que contém geodésicas helicais. Todas as hipóteses sobre a superfície M feitas no capítulo 3 serão consideradas neste apêndice, por exemplo, que todas as superfícies em $\mathbb{R}^3$ são conexas.

Para a prova do Teorema de Classificação em $\mathbb{R}^3$ (B.2), precisaremos dos dois resultados seguintes. O primeiro diz que uma superfície rasa em $\mathbb{R}^3$ é um cílindro e o segundo resultado afirma que se U é um aberto de uma superfície com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ e se $K < 0$ sobre U, então não existem duas famílias de retas sobre U.

Proposição B.1 *Seja M uma supefície rasa completa no espaço euclideano* $\mathbb{R}^3$. *Então M é um cilíndro sobre uma curva plana.*

Prova. Ver[5, cap.5] ∎

Lema B.1 *Seja M uma superfície suave de curvatura média constante em* $\mathbb{R}^3$ *e seja U um conjunto aberto em M. Se a curvatura Gaussiana é negativa sobre U, então não existem duas famílias de curvas assintóticas sobre U, todas as quais são retas.*

Prova. Temos que uma reta em qualquer superfície em $\mathbb{R}^3$ é certamente uma curva assintótica, já que sua aceleração é zero, e então trivialmente tangente à superfície. Uma superfície regrada é dada pela parametrização

$$\mathbf{x}(u,v) = \beta(u) + v\delta(u) \quad \text{ou} \quad \beta(v) + u\delta(v),$$

onde β e δ são curvas em $\mathbb{R}^3$ com $\delta \neq 0$. Então, por definição uma superfície regrada contém uma reta passando por cada um de seus pontos, logo existe uma direção assintótica em cada um deles. Assim, a curvatura Gaussiana de uma superfície regrada é menor ou igual a zero. Temos que toda superfície duplamente regrada com $K < 0$ é uma superfície quádrica (ver [14] pg.232). Assim, se encurvarmos negativamente uma superfície duplamente regrada com $K < 0$ teremos uma superfície quádrica que não tem curvatura média constante. Então o resultado segue. ■

O Teorema de Classificação para superfícies que contém geodésicas helicais no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$:

Teorema B.2 *Seja M uma superfície completa de curvatura média constante em* $\mathbb{R}^3$. *Se existem duas geodésicas helicais sobre M passando por cada ponto de M, então M é um plano, uma esfera, ou um cilíndro circular.*

Prova. Sejam γ_1 e γ_2 geodésicas helicais sobre M passando por um ponto $p \in M$. Dos casos obtidos a partir de (3.1), considerando o espaço ambiente como $\mathbb{R}^3$ temos as seguintes possibilidades para γ_1 e γ_2:

(i) γ_1 e γ_2 são retas,

(ii) γ_1 e γ_2 são círculos,

(iii) γ_1 e γ_2 são hélices ordinárias,

(iv) γ_1 é uma reta e γ_2 é um círculo,

(v) γ_1 é uma reta e γ_2 é uma hélice ordinária,

(vi) γ_1 é um círculo e γ_2 é uma hélice ordinária.

Agora suponhamos que a curvatura Gaussiana K é positiva em ao menos um ponto de M e considere o conjunto

$$M_1 = \{p \in M; K(p) > 0\}.$$

Observe que se a curvatura de alguma das geodésicas helicais γ_1 ou γ_2 é zero, então

$$\mathtt{II}(\gamma_i', \gamma_i') = \langle S(\gamma_i'), \gamma_i' \rangle \, \xi = 0, \quad i = 1, 2.$$

Deste modo, as $\gamma_i' s$ seriam curvas assintóticas. Mas estamos considerando $K > 0$ em M_1, então não existem direções assintóticas. Assim, pelos pontos de M_1 passam geodésicas helicais dos tipos (ii), (iii) ou (vi).

Sejam

$$M_{11} = \{p \in M_1; \text{p é ponto umbílico}\} \;\; \text{e} \;\; M_{12} = M_1 - M_{11}.$$

Se $M_{12} \neq \emptyset$, então ele é um conjunto sem pontos umbílicos e no qual existem geodésicas helicais passando por cada um de seus pontos. Logo, pelo teorema 3.1, M_{12} é um cilíndro circular e portanto tem curvatura Gaussiana nula. Porém isto contradiz $K > 0$ sobre M_{12}. Logo, M_{12} é totalmente umbílica no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ e portanto é uma esfera.

Agora, considerando a aplicação

$$\pi : M \to \mathbb{R}$$

que a cada ponto da superfície M associa a curvatura gaussiana $K(p)$, temos que M_1 é a imagem inversa pela aplicação contínua π do intervalo aberto $]0, +\infty[$, logo é um subconjunto aberto de M. Por outro lado, M_1 também é fechado. Daí, como M_1 é aberto e fechado, temos que M é uma esfera em $\mathbb{R}^3$.

Suponhamos, agora que $K \leq 0$ sobre a superfície M e tome

$$M_2 = \{p \in M; K(p) < 0\}.$$

Assim, por cada ponto de M_2 passam geodésicas helicais de todos os tipos (i)-(ii).

Sejam

$$M_{21} = \{p \in M_2; \text{existe um círculo ou uma hélice ordinária passando por p}\}$$

$$\text{e} \;\; M_{22} = M_2 - M_{21}.$$

Então

$$M_{21} \cup M_{22} = M_{21} \cup M_2 - M_{21} = M_2$$

e facilmente vemos que

$$(1) \quad M_2 = ClM_{21} \cup IntM_{22}$$

$$(2) \quad M_2 = ClM_{22} \cup IntM_{21}.$$

Assim, se $p \in M_2$ então de (1) temos que $p \in ClM_{21}$ ou $p \in IntM_{22}$. Suponhamos que $p \in ClM_{21}$, deste modo de (2) segue que $p \in IntM_{21}$. Logo M_{21} ou M_{22} tem ponto interior; ou ainda, M_{21} ou M_{22} é denso em M_2.

Se Int$M_{21} \neq \emptyset$ ou M_{21} é denso em M_2, então M_2 possui duas geodésicas helicais passando por cada um de seus pontos e como M_2 não tem pontos umbílicos, pois $K < 0$, pelo teorema 3.1, M_2 é rasa, o que é uma contradição. Daí Int$M_{22} \neq \emptyset$ e M_{22} é denso em M_2. Isto implica que todas as geodésicas helicais sobre M_2 são retas e assim, todas as curvas assintóticas sobre M_2 também são retas . Pelo lema B.1, $M_2 = \emptyset$, então $K = 0$ sobre M. Portanto, como sua curvatura média é constante, M é um plano totalmente geodésico ou um cilíndro circular $\blacksquare$

Bibliografia

[1] Boothby, W. M.: An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, Inc., Orlando, Flórida, 1986.

[2] Chen, Bang-Yen: Geometry of Submanifolds.Department of Mathematics, Michigan State University. East Lansing, Michigan. Marcel Dekker, INC. New York, 1973.

[3] Do Carmo, M. P.: Geometria Riemanniana. Projeto Euclides/ IMPA, 1988.

[4] Do Carmo, M. P.: Diferential Forms and Aplplications. Projeto Euclides/ IMPA, 1992.

[5] Do Carmo, M. P.: Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Textos Universitários/ IMPA, 2005.

[6] Do Carmo, M. P.: Notas de um curso de Grupos de Lie, 1974.

[7] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J.: Riemannian Geometry, Second edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987, 1990. Printed in the United States of America.

[8] Kitagawa, Y.: Department of Mathematics, Utsunomiya University, Mine Machi, Utsunomiya 321, Japan. Math. Z. 198, 591-599 (1988).

[9] Lee, J. M.: Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature. Springer Verlag, New York.,1997.

[10] Montes, R.R.: Ângulos de Contato para Superfícies Imersas em S^{2n+1}. Tese apresentada ao IME da Universidade de São Paulo para obtenção do título de doutor em Matemática. Orientador: Prof. Dr. José Antonio Verderesi.Sâo Paulo, 2003.

[11] O' neill, B.:Elementary Diferential Geometry. Academic Press, New York, 1966.

[12] Plaza, Sérgio S.: Variedades Diferenciáveis, 2003.

[13] Sotomayor, J.: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides, IMPA 1979.

[14] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry, Vol. III. Publish or Perish, Berkley, 1975.

[15] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry, Vol. IV. Publish or Perish, Berkley, 1975.

[16] Tamura, Michiko.: Surfaces which contain Helical Geodesics in the 3-sphere, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane. Univ., Series B: Mathematical Science, 37 (2004), pp.59-65.

[17] Tamura, Michiko.: Surfaces which contain Helical Geodesics, Geometriae Dedicata 42: 311-315, 1992. Kluwer Academic. Printed in the Netherlands.

[18] Ventura, P.: Geometria Diferencial. Coleção Matemática Universitária, IMPA 1998.