

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação EDP I(2012.1)

1. Sejam $f, g, h \in C([a, b], \mathbb{R})$ e considere o problema

$$\begin{cases} -u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x) & \text{em } (a, b) \\ u(a) = a_1, \quad u(b) = b_1, \end{cases} \quad (0.1)$$

onde $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Mostre que se $h \geq 0$ em (a, b) então o problema (0.1) tem no máximo uma solução clássica. Dê um exemplo para mostrar que a condição $h \geq 0$ em (a, b) é necessária.

2. Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica. Mostre que se $u = O(|x|^\alpha)$ quando $|x| \rightarrow +\infty$, $\alpha < 1$ então u é constante.
3. (2.0) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado satisfazendo a condição da esfera interior e L uniformemente elíptico com coeficientes limitados e $c \geq 0$. Sejam $f \in C(\bar{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$, $\alpha \geq 0$ em $\partial\Omega$ e considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.2)$$

- (a) Mostre que se $c \not\equiv 0$ ou $\alpha \not\equiv 0$ então (0.2) tem no máximo uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$;
- (b) Mostre que se $c \equiv 0$ e $\alpha \equiv 0$ então (0.2) tem no máximo uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ a menos de constantes;

Sugestão: Seja $\max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0)$ e analise os casos $x_0 \in \Omega$ e $x_0 \in \partial\Omega$.

4. Seja $\Omega := \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < a\}$ para algum $a > 0$. Se $p > 1$, mostre que a seguinte desigualdade de Poincaré é válida:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ onde $C = C(a, p)$.

5. Seja Ω um domínio limitado e $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tais que $\Delta u = f$ em Ω e $\Delta v = f$ em Ω . Mostre que se $|u(x) - v(x)| \leq \epsilon$ em $\partial\Omega$ então

$$|u(x) - v(x)| \leq \epsilon, \quad \text{para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

6. Seja Ω conexo e $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ tal que

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{em } \Omega_T.$$

Mostre $\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.

7. Seja $1 \leq p < n$. Use a sequência $u_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u_k(x) = \begin{cases} k^{n/p^*}(1 - k|x|) & \text{se } |x| \leq 1/k \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1/k \end{cases}$$

para mostrar que a imersão $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ não é compacta.