



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística

Programa de Doutorado em Matemática
Exame de Qualificação em Geometria Riemanniana
João Pessoa/Campina Grande, 04 de março de 2013

Banca Examinadora:

Prof. Henrique Fernandes de Lima (UFCG)

Prof. Pedro A. Hinojosa (UFPB)

Aluno: _____ Nota: _____

Questão 1 Dado um sistema de coordenadas locais $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ de uma variedade Riemanniana n -dimensional M^n , obtenha a expressão dos símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k da conexão de Levi-Civita de M^n em termos dos coeficientes g_{ij} de sua métrica.

Questão 2 Uma variedade Riemanniana n -dimensional M^n é chamada uma variedade de Einstein se, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\text{Ric}(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle$ onde $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em M^n . Se M^n é uma variedade conexa e de Einstein, com $n \geq 3$, mostre que λ é constante em M^n .

Questão 3 Seja $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta M^n no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+k}$ munido de sua métrica canônica. Mostre que existem um ponto $p \in M^n$ e um vetor normal $\eta \in T_p M^\perp$ tais que o operador de Weingarten A_η é definido positivo. Conclua, então, que não existem subvariedades mínimas compactas do espaço Euclidiano.

Questão 4 Seja M uma variedade Riemanniana tal que para todos $p, q \in M$ existe uma isometria de M que leva p em q . Mostre que M é uma variedade completa.

Questão 5 Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão dois. Seja $p \in M$ e seja $V \subset T_p M$ uma vizinhança da origem onde $\exp_p$ é um difeomorfismo. Seja $S_r(0) \subset V$ um círculo de raio r centrado na origem e seja A_r a área da região limitada pela curva $\exp_p(S_r)$ em M . Prove que a curvatura seccional em $p \in M$ é dada por $K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12\pi r^2 - A_r}{r^4}$.

Questão 6 Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de Killing em M .

- (a) Mostre que a restrição $X(\gamma(s))$ de X a $\gamma(s)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ ;
(b) Use o item (a) para mostrar que se M é conexa e existe $p \in M$ tal que $X(p) = 0$ e $\nabla_Y X(p) = 0$ para todo $Y(p) \in T_p M$, então $X \equiv 0$.

Observação: O Exame consta de 6 questões das quais você deverá escolher 5 para resolver. Todas as questões têm a mesma pontuação.

Marque com um X as questões escolhidas.

☐ Questão 1 ☐ Questão 2 ☐ Questão 3 ☐ Questão 4 ☐ Questão 5 ☐ Questão 6

Bom Exame !!