

Programa de Doutorado em Matemática - UFPB/UFCG
Exame de Qualificação em Variedades Diferenciáveis - 2012

Nome : _____ Matrícula : _____

Questão 1. (1,5 pontos) Sejam $N = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$, $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $M = \{(x, \nabla F(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

(a) Prove que M é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{2n}$.

(b) Seja $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla F(p) = 0$. Encontre uma condição necessária e suficiente sobre F tal que $T_{(p,0)}N \oplus T_{(p,0)}M = T_{(p,0)}\mathbb{R}^{2n}$.

Questão 2. (1 ponto)

(a) Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão m . Prove que não existe imersão $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

(b) Seja M uma variedade diferenciável compacta. Mostre que qualquer função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tem pelo menos dois pontos críticos.

Questão 3. (3 pontos)

(a) Seja G um grupo Lie de dimensão m . Prove que existem $X_1, X_2, \dots, X_m$ campos de vetores em G tais que $\{X_1(g), X_2(g), \dots, X_m(g)\}$ é uma base de $T_g G$ para todo $g \in G$.

(b) Sejam G um grupo de Lie e $X : G \longrightarrow TG$ um campo de vetores invariante por translação à esquerda em G . Prove que X é completo.

Questão 4. (1,5 pontos) Sejam M uma variedade diferenciável, Δ uma distribuição diferenciável em M . Suponha que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se $[X, Y](q) \in \Delta_q$ para todo $q \in M$. Prove que Δ é uma distribuição involutiva.

Questão 5. (1,5 pontos) Seja M uma variedade Riemanniana com métrica dada por $\langle, \rangle$ não trivial, isto é, $\langle, \rangle_p \neq 0$ para todo $p \in M$. Se $f : N \longrightarrow M$ é uma imersão, prove que sempre é possível definir uma métrica Riemanniana não trivial em N .

Questão 6. (1,5 pontos) Seja M uma variedade diferenciável com um número finito r de componentes conexas. Prove que $H^0(M)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^r$.