

Programa de Doutorado em Matemática - UFPB/UFCG
Exame de Qualificação em Análise Funcional 2012

Aluno (a): _____ Matrícula: _____

Soluções a partir da página 2

1. (1.0) Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto l.i. de vetores em um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$. Mostre que $\exists c > 0$ tal que para todo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que $|\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_n| = 1$, temos

$$\|\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n\| \geq c.$$

2. (1.0) Sejam $f, g, h \in E'$ funcionais limitados em um espaço de Banach E tais que:

$$(\text{ se } x \in E, f(x) = g(x) = 0 \text{ devemos ter } h(x) = 0).$$

Mostre que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $h = \alpha f + \beta g$;

3. (1.5) *Projeção radial sobre a bola unitária.*

a) Seja E um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$. Defina $A : E \rightarrow E$ dado por

$$Ax = x, \text{ se } \|x\| \leq 1, \text{ e } Ax = \frac{x}{\|x\|}, \text{ se } \|x\| \geq 1.$$

Mostre que $\|Ax - Ay\| \leq 2\|x - y\|, \forall x, y \in E$.

b) Mostre que a constante 2 não pode ser melhorada, dependendo do espaço E escolhido. Contudo, se E é um espaço de Hilbert a constante na desigualdade pode ser melhorada.

4. (1.5) Seja H um espaço de Hilbert e $\mathcal{K} \subset H$ um cone fechado, ou seja, $\mathcal{K}$ é fechado e

$$\forall u, v \in \mathcal{K} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \mathcal{K}, \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

Mostre que para cada $z \in H$, existe um único $u \in \mathcal{K}$ tal que: $\|u - z\| = \text{dist}(z, \mathcal{K})$.

Mais ainda, u é o único com a propriedade:

$$u \in \mathcal{K}, \langle v, z - u \rangle \leq 0, \forall v \in \mathcal{K}, \text{ e } \langle u, z - u \rangle = 0.$$

5. (1.5) Considere $x_n = (\xi_{jn})$ uma sequência em $\ell^1(\mathbb{R})$ tal que: $\xi_{jn} \geq 0$, para todos $j, n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightharpoonup x \in \ell^1(\mathbb{R})$. Mostre que a sequência (x_n) converge para x na norma de $\ell^1(\mathbb{R})$.

6. (1.5) Mostre que o espaço $B([0, 1])$ de todas as funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, munido da norma usual:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\},$$

não é separável (sugestão: considere uma sequência qualquer de funções $f_n \in B([0, 1])$. Defina g de tal forma que $|g(1/n) - f_n(1/n)| \geq 1$).

7. (2.0) Seja (λ_j) uma sequência de números reais e suponha que $T : \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R})$ dado por

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j, \text{ para } x = (\xi_j) \in \ell^2(\mathbb{R})$$

(onde (e_k) é a base canônica Hilbertiana de $\ell^2(\mathbb{R})$), está bem definida e é limitada. Como deve ser a sequência (λ_j) ? Dê uma condição necessária e suficiente para que T seja um operador compacto. Quando T é compacto, como deve ser seu espectro?

Boa Sorte

RESPOSTAS

1. Caso contrário, existem n sequências $\beta_{k1}, \beta_{k2}, \dots, \beta_{kn} \in \mathbb{R}$ tal que $|\beta_{k1}| + |\beta_{k2}| + \dots + |\beta_{kn}| = 1$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\beta_{k1}v_1 + \dots + \beta_{kn}v_n\| = 0.$$

Como cada sequência (β_{kj}) é uma sequência limitada na reta, sem perder a generalidade, podemos supor que cada (β_{kj}) converge para algum $a_j \in \mathbb{R}$. Por continuidade temos

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = 1 \text{ e } a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

que é um absurdo, pois estes vetores são linearmente independentes.

2. Defina a transformação linear $T : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $T(x) = (f(x), g(x), h(x))$. A imagem $T(E)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ que não contém o vetor $(0, 0, 1)$. Como $T(E)$ é um subespaço próprio, $T(E)$ está contido em um plano que passa pela origem, portanto, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $af(x) + bg(x) + ch(x) = 0$, para todo $x \in E$. Veja que este plano não contém $(0, 0, 1)$ e, portanto, devemos ter $c \neq 0$. O exercício fica mostrado para $\alpha = -a/c$ e $\beta = -b/c$.
3. Estudaremos três situações: $\|x\|, \|y\| \leq 1$; $\|x\| \leq 1, \|y\| \geq 1$; e $\|x\|, \|y\| \geq 1$.

(a) $\|x\|, \|y\| \leq 1$: não precisa fazer;

(b) $\|x\|, \|y\| \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &= \frac{1}{\|x\|\|y\|} \|\|y\|x - \|x\|y\| = \frac{1}{\|x\|\|y\|} \|\|y\|(x - y) + (\|y\| - \|x\|)y\| \\ &\leq \frac{1}{\|x\|\|y\|} [\|y\|\|x - y\| + \|\|y\| - \|x\|\|\|y\|\|] \\ &\leq \frac{1}{\|x\|} [\|x - y\| + \|\|y\| - \|x\|\|] \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq 2\|x - y\|. \end{aligned}$$

(c) $\|x\| \leq 1, \|y\| \geq 1$: Seja z o único elemento do segmento de reta unindo x a y tal que $\|z\| = 1$. É fácil verificar que $\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$ e, usando o caso anterior,

$$\left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \|x - z\| + \left\| z - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \|x - z\| + 2\|z - y\| \leq 2\|x - y\|.$$

Para o caso em que E é um espaço de Hilbert, como foi feito anteriormente, basta mostrar o caso em que $\|x\|, \|y\| \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \|x\| \|y\| \leq (1 + 1 - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}) \|x\| \|y\| \\ &= 2\|x\| \|y\| - 2\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

(utilizamos a desigualdade de Young $p = q = 2$).

4. Sendo $\mathcal{K}$ um cone fechado, então o mesmo é um convexo fechado. Sabemos que existe, portanto, um único $u \in \mathcal{K}$ satisfazendo: $\|u - z\| = \text{dist}(z, \mathcal{K})$.

Então para cada $t > 0$ e cada $v \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} \|u - z\|^2 &\leq \|(u + tv) - z\|^2 = \|u - z\|^2 + 2t\langle u - z, v \rangle + t^2\|z\|^2 \\ &\Rightarrow 2\langle z - u, v \rangle \leq t\|z\|^2. \end{aligned}$$

Passando ao limite $t \rightarrow 0$, obtemos a primeira desigualdade.

Para a igualdade $\langle z - u, u \rangle = 0$, basta observar que a quadrática $t \rightarrow \|(1+t)u - z\|^2$ só possui um ponto de mínimo em $t = 0$.

5. Seja $x = (\xi_j)$ o limite fraco da sequência (x_n) em $\ell^1(\mathbb{R})$. Lembramos que os funcionais lineares contínuos em $\ell^1(\mathbb{R})$ são sequências limitadas. Certamente que para cada $j \in \mathbb{N}$, o funcional

$$f_{e_j}(z) = \sigma_j, \text{ para } z = (\sigma_j) \in \ell^1(\mathbb{R}),$$

é limitado e isto implica que cada sequência ξ_{jn} converge para ξ_j .

Dado $\varepsilon > 0$ fixe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=m_1}^{\infty} |\xi_j| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seja $y_1 = (\eta_j)$ a sequência limitada tal que $\eta_j = 0$, se $j \leq m_1 - 1$ e $\eta_j = 1$ para $j \geq m_1$. Portanto,

$$f_{y_1}(x_n) \rightarrow f_{y_1}(x), \text{ onde } f_{y_1}(z) = \sum_{j=m_1}^{\infty} \sigma_j, \forall z = (\sigma_j) \in \ell^1(\mathbb{R}).$$

Ora, $\xi_j, \xi_{jn} \geq 0$ para todo j, n . Portanto

$$\lim_n \sum_{j=m_1}^{\infty} |\xi_{jn}| = \lim_n f_{y_1}(x_n) = f_{y_1}(x) = \sum_{j=m_1}^{\infty} |\xi_j| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Agora fixe n_1 tal que

$$\sum_{j=m_1}^{\infty} |\xi_{jn}| < \frac{\varepsilon}{8}, \forall n \geq n_1.$$

Escolha $n_o > n_1$ tal que $|\xi_{jn} - \xi_j| < \varepsilon/(2m_1)$, para $n \geq n_o$ e para a quantidade finita de $j \in \{1, 2, 3, \dots, m_1 - 1\}$. Finalmente observe que, sendo $n > n_o$

$$\|x_n - x\|_1 \leq \sum_{j=m_1}^{\infty} |\xi_{jn} - \xi_j| + \sum_{j=m_1}^{\infty} |\xi_{jn}| + \sum_{j=m_1}^{\infty} |\xi_j| < \varepsilon$$

e o exercício está pronto.

6. Seguindo a sugestão, vamos definir $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ assim:

$$g(x) = 0, \text{ se } x \neq \frac{1}{n}, \forall n; \quad g\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \text{ se } |f_n\left(\frac{1}{n}\right)| \geq 1; \text{ e } g\left(\frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) + 1, \text{ se } |f_n\left(\frac{1}{n}\right)| < 1.$$

Mostre que $\|g\| \leq 2$ ($g \in B([0, 1])$) e $\|g - f_n\| \geq |g(1/n) - f_n(1/n)| \geq 1$.

7. Sendo T limitada, a sequência $T(e_j)$ é limitada em $\ell^2(\mathbb{R})$, ou seja

$$|\lambda_j| = \|\lambda_j e_j\|_2 = \|T(e_j)\|_2 \text{ é uniformemente limitada.}$$

Isto é, a sequência (λ_j) é limitada.

Para que T seja compacta é necessário que $T(e_j)$ admita uma subsequência $T(e_{j_k})$ convergente, isto é,

$$\lambda_{j_k}^2 + \lambda_{j_m}^2 = \|T(e_{j_k}) - T(e_{j_m})\|_2^2 \rightarrow 0.$$

Isto mostra que qualquer subsequencia (λ_{j_k}) deve convergir para zero, ou seja, $(\lambda_k) \rightarrow 0$. Reciprocamente, vamos supor que $(\lambda_k) \rightarrow 0$ e vamos considerar as transformações com imagens de dimensão finita: $T_n : \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R})$

$$T_n x = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j e_j, \text{ para } x = (\xi_j) \in \ell^2(\mathbb{R}).$$

Observe que

$$\|T_n x - Tx\|_2^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j^2 \xi_j^2 \leq \sup_{i \geq n} \lambda_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2, \text{ para } x = (\xi_j) \in \ell^2(\mathbb{R})$$

Isto mostra que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ e portanto T é compacta.