

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos
Semilineares Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev

Disson Soares dos Prazeres

2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos
Semilineares Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev

por

Disson Soares dos Prazeres

sob orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Agosto de 2010
João Pessoa-PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev

por
Disson Soares dos Prazeres

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovado por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa-UFCG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros-UFPB

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza-UFPB(Suplente)

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço:

- A Deus, por ter me dado saúde, disposição e por colocar no meu caminho pessoas maravilhosas que muito me ajudaram nessa difícil tarefa.

- Aos meus pais, Pólio Soares dos Prazeres e Sara Judite dos Prazeres, aos meus irmãos Diomedes, Dicson e Dicla, e aos meus sobrinhos Daniel, Laura e Pedro, pelo apoio e por serem sempre um porto seguro nos momentos difíceis.

- A todos os meus amigos de Aracaju, em especial à Rafaela e Kleber, que sempre estiveram ao meu lado mesmo estando distante.

- Ao meu Orientador, Professor Uberlandio Batista Severo, por ter sido, além de um grande orientador, um grande mestre e amigo.

- Ao programa de Pós-Graduação em matemática do CCEN-UEPB e em especial, à Graça, a Júnior e aos professores Daniel Marinho Pellegrino, Pedro Antonio Hinojosa Vera, Pedro Antonio Gomes Venegas, João Marcos Bezerra do Ó, pela contribuição em minha formação matemática.

- Aos professores Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa, Manassés Xavier de Souza e Everaldo Souto de Medeiros, por terem aceitado participar da minha banca, pelas correções e pelas sugestões. Agradeço ao professor Everaldo, também, pelos valiosos conselhos e pelo esclarecimento de várias dúvidas que surgiram ao longo de todo o mestrado.

- Aos professores da graduação Fábio dos Santos, Kalazas Vasconcelos e Paulo Rabelo, por grandes contribuições em minha formação.

- Aos meus colegas de mestrado, em especial a Adriano, Elano, Eduardo, Elielson, Diego, Mauricio, Pitágoras, Hudson, Tarciana, Roberto, Simeão, Anselmo, Juanice, Márcio, Andréa, Flávio, Reginaldo e Yane, pela amizade e companheirismo.

- À galera do futebol, à galera da graduação de matemática e estatística da UEPB, à galera do mestrado em engenharia mecânica, à galera do Maria Eulina e da padaria, as meninas da virtual, à dona Gisa, a seu Mariano, a seu Severino e a seu Silvano, pelos momentos divertidos que passamos juntos.

- A CAPES pelo apoio financeiro.

- Por fim, a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização desse trabalho.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev,

$$-\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + f(x, u), \quad x \in \Omega \text{ e } u(x) = 0, x \in \partial\Omega,$$

onde $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, λ é um parâmetro real positivo e $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Na prova dos resultados, usamos métodos variacionais, tais como, teoremas do tipo minimax, teoremas do tipo Lusternik-Schnirelman, bem como, lemas de concentração-compacidade.

Palavras-chave:

Expoente crítico de Sobolev; Métodos minimax; Categoria de Lusternik-Schnirelman; Princípio de Concentração-Compacidade.

Abstract

In this dissertation, we study the multiplicity of solutions for the following class of semilinear elliptic problems involving the critical Sobolev exponent,

$$-\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + f(x, u), \quad x \in \Omega \text{ e } u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

where $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth and bounded domain, λ is a positive real parameter and $2^* = 2N/(N-2)$ is the critical Sobolev exponent. In obtaining our result, we use variational methods, such as, minimax theorems, Lusternik-Schnirelman theorems, as well as, concentration-compactness lemma.

Key-words:

Critical Sobolev exponent; Minimax methods; Lusternik-Schnirelman category; Concentration-Compactness Principle.

Notação e Terminologia

Aqui, indicamos as notações e terminologias usadas ao longo do trabalho.

- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$;
- $B(x, r)$ denota a bola aberta centrada em x de raio r ;
- $\text{supp}(f)$ é o suporte da função f ;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$, denotam convergência fraca e forte, respectivamente, em um espaço normado X ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par de dualidade entre o espaço X e o seu dual X' ;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω ;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ denota o gradiente da função u ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u ;

- $L^p(X, \mu) = \{u : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int |u|^p d\mu < +\infty\}$ em que $1 \leq p < +\infty$, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_X |u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $X \subset \mathbb{R}^N$ e μ é a medida de Lebesgue denotaremos $L^p(X, \mu)$ por $L^p(X)$;

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}$$

- $C(X)$ o espaços das funções contínuas;
- $C^k(X)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre X e $C^\infty(X) = \cap_{k \geq 1} C^k(X)$;
- $C_c(X) = \{f \in C(X) : \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}$;

- $C_0(X) = \{f \in C(X); \text{ o conjunto } \{x; |f(x)| \geq \epsilon\} \text{ é compacto, para todo } \epsilon > 0\}$;
- $C_c^k(X) = C^k(X) \cap C_c(X)$, $C_0^k(X) = C^k(X) \cap C_0(X)$, $C_c^\infty(X) = C^\infty(X) \cap C_c(X)$ e $C_0^\infty(X) = C^\infty(X) \cap C_0(X)$;
- Seja μ uma medida. A relação $v(E) = \int_E f d\mu$, para todo $E \in \sigma$ -álgebra, será denotada por $v = f d\mu$.
- Para $1 \leq p < +\infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega); \text{ existem } g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega g_i \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma acima. Quando $p = 2$, $W_0^{1,p}(\Omega) = H_0^1$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

- O dual de $H_0^1(\Omega)$ é H^{-1} com a norma $\|\cdot\|_{H^{-1}}$.
- Para $f \in C(X)$, denotemos por $\|f\|_u = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$.
- $S = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$ é a melhor constante para a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$.
- q.s. é uma abreviação para quase sempre.

Sumário

1	Resultados Preliminares	1
1.1	A Categoria de Lusternik-Schnirelmann	1
1.2	Teoremas do Tipo Lusternik-Schnirelmann	6
1.3	O Dual de $C_0(X)$	11
1.4	Lemas de Concentração-Compacidade	15
2	Multiplicidade de Soluções para um Problema Crítico via Teoremas do Tipo Lusternik-Schnirelmann	20
2.1	O Problema	20
2.2	A Condição de Palais-Smale	22
2.3	Multiplicidade de Soluções	26
3	Multiplicidade de Solução para um Problema Crítico via Teorema do Passo da Montanha	32
3.1	O Problema	32
3.2	A Condição de Palais-Smale	33
3.3	Multiplicidade de Soluções	43
3.4	Existência de Solução Não-Negativa e de Solução Não-Positiva	46
A		51
A.1	Resultados Auxiliares	51

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência e multiplicidade de soluções para o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + f(x, u), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, λ é uma constante real positiva e $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Salientamos que quando falamos de solução neste texto, estamos nos referindo a solução fraca.

Um dos resultados pioneiros envolvendo problemas críticos não-lineares foram obtidos no célebre artigo de Brézis e Nirenberg [4]. Esse trabalho tem motivado uma grande quantidade de pesquisa sobre essa classe de problemas. Brézis e Nirenberg garantiram a existência de solução para o problema que estudamos no Capítulo 2 em [4]. Em 1989, Olivier Rey, em [19], garantiu, sob certas condições impostas sobre o domínio, a multiplicidade de soluções, para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 5$) e em 1992, Monica Lazzo, no artigo [17], melhora o resultado obtido por Rey, pois garante a multiplicidade de soluções quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 4$). O resultado do Capítulo 3 foi estudado por Silva e Xavier em [22] e garante, sob certas condições impostas sobre a não-linearidade, a multiplicidade de soluções para um problema que também foi estudado em [4]. Outros trabalhos que também tratam dessa classe de problemas são [2], [5], [6], [7], [13], [14], [19], [22].

Nossa abordagem para estudar (1) é variacional, isto é, associaremos ao problema (1) um funcional energia, cujos pontos críticos serão exatamente as soluções de (1). Na obtenção dos pontos críticos, usaremos teoremas do tipo minimax e lemas de concentração-compacidade. A principal dificuldade em lidar com esse tipo de problema vem do fato de que o funcional associado não satisfaz a condição de Palais-Smale, devido a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$ não ser compacta.

O nosso trabalho está dividido em três capítulos e um apêndice. No *Capítulo 1*, apresentamos resultados que nos auxiliam nas demonstrações dos resultados principais. Na *Seção 1.1*, abordamos a categoria de Lusternik-Schnirelman. Apresentamos definições e resultados que são usados na *Seção 1.2*. Nessa, demonstramos os teoremas de minimax do tipo Lusternik-Schnirelman que são os resultados centrais usados na prova do principal teorema do *Capítulo 2*. Em seguida, na *Seção 1.3*, caracterizamos o dual topológico do espaço $C_0(X)$ com o objetivo de esclarecer as hipóteses e demonstrar o Lema de Concentração-Compacidade de Lions. Este é enunciado e demonstrado na *Seção 1.4* e

nos possibilita mostrar que o funcional energia associado ao problema tratado no *Capítulo 3* satisfaz a condição de Palais-Smale.

No *Capítulo 2*, estabelecemos a multiplicidade de soluções não-negativas de (1), para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, $\lambda = 1$, $f(x, u) = -\varepsilon u$ e ε é um parâmetro real satisfazendo $\varepsilon > -\lambda_1(\Omega)$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω nas condições de fronteira de Dirichlet. Mais especificamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon u = |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \quad u \geq 0. \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

Iniciamos o capítulo fazendo estimativas a priori sobre o problema. Em seguida, mostramos que existe $\varepsilon^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que para $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$ o problema (P_ε) possui pelo menos $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não-triviais. Para isso, definimos o funcional

$$\varphi(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega); \psi(u) = 1\}, \quad \text{onde } \psi(u) = \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx,$$

e mostramos que $\varphi|_V$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Como consequência deste fato, obtemos que o funcional

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + \lambda v^2) dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (v^+)^{2^*} dx, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

satisfaz a condição de Palais-Smale e que

$$\|\Phi'(v)\| = \frac{\mu^{\frac{N-2}{4}}}{2} \left\| \varphi'(u) - \rho \psi'(u) \right\|$$

onde $\mu, \rho \in \mathbb{R}$ e $v = \mu^{\frac{N-2}{4}} u$. Em seguida, provamos que $\varphi|_V$ é limitado inferiormente e, usando propriedades da aplicação centro de massa, que $\text{cat}_{\varphi^{m(\varepsilon)}}(\varphi^{m(\varepsilon)}) \geq \text{cat}_\Omega(\Omega)$, onde $m(\varepsilon)$ será definido ao longo do texto. Assim, aplicando o Teorema 1.2.11, demonstramos que $\varphi|_V$ possui no mínimo $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos. Desse modo, pela Proposição 1.2.4 e pela relação acima, obtemos o resultado desejado.

No *Capítulo 3*, lidamos com a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2}u + f(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

onde $N \geq 3$, λ é uma constante positiva, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que é ímpar na segunda variável. Além disso, para a função f acrescentamos as seguintes condições:

f₀) $\sup\{|f(x, s)|; \text{tal que } x \in \Omega, |s| \leq M\} < +\infty$, para cada $M > 0$;

f₁) $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$, uniformemente q.s. em Ω ;

f₂) Existem $\sigma \in [0, 2)$ e $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2} f(x, s) s - F(x, s) \geq -a_1 - a_2 |s|^\sigma, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega$$

f₃) Existe uma constante $B \geq 0$ tal que

$$F(x, s) \geq \lambda_k \frac{|s|^2}{2} - B, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega,$$

$$\text{onde } F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt,$$

f₄) $\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{2F(x, s)}{s^2} = a(x) \leq \lambda_j$, uniformemente q.s. em Ω , onde $\lambda_j \leq \lambda_k$ são autovalores de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Dirichlet.

Para estabelecermos a existência e multiplicidade de soluções para o problema (P_λ) usamos uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha dada por Ambrosetti e Rabinowitz em [1]. As hipóteses **f₁)** e **f₂)** juntamente com o Lema de Concentração-Compacidade de Lions, possibilitam demonstrar que o funcional energia associado a (P_λ) satisfaz a condição de Palais-Smale abaixo de um certo nível, para λ suficientemente pequeno. As condições **f₃)** e **f₄)** fornecem a geometria necessária para aplicarmos a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Mostramos, ainda, que quando f não é ímpar na segunda variável e valem **f₁)**, **f₂)**, **f₄)** e **f₃)** com $\lambda_k = \lambda_1$, existe uma solução não-trivial não-negativa e uma solução não-trivial não-positiva. Além disso, provamos, através de um contra-exemplo, que esse último resultado não vale se f não verificar a hipótese **f₃)** com $\lambda_k = \lambda_1$.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo a *Introdução* e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os problemas, bem como, as hipóteses consideradas.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados relacionados à teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman e a teoria de medida.

1.1 A Categoria de Lusternik-Schnirelmann

Nesta seção, desenvolveremos, de forma sucinta, a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelmann necessária para demonstrarmos os teoremas de minimax que usaremos para provar o Teorema 2.1.5, resultado principal do Capítulo 2. Além das definições e proposições necessárias para as demonstrações dos teoremas da próxima seção, dispomos alguns exemplos e observações que ilustram o alcance dessa teoria, porém procuramos fazer isso de maneira breve e objetiva. Para um maior aprofundamento do tema, veja referências [10], [12], [20], [25].

Definição 1.1.1 Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico X é contrátil em X , se existe uma aplicação contínua $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ tal que

$$h(0, x) = x$$

e

$$p = h(1, x) = h(1, y), \text{ para todo } x, y \in A,$$

ou seja, existe uma homotopia entre a identidade de A e uma aplicação constante. Chamamos a aplicação h de deformação de A em X .

Observação 1.1.2 Todo conjunto contrátil X é conexo por caminhos. Com efeito, dado $x \in X$, defina o caminho $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$

$$\gamma_x(t) = h(t, x)$$

onde h é a homotopia entre a identidade de X e uma aplicação constante. Logo, γ_x é contínua, $\gamma_x(0) = h(0, x) = x$ e $\gamma_x(1) = h(1, x) = p \in X$.

Definição 1.1.3 Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $A \subset E$ é estrelado em relação a um ponto $p \in A$, quando para todo $x \in A$ o segmento unindo x a p está contido em A , isto é,

$$[x, p] \equiv \{(1-t)x + tp ; 0 \leq t \leq 1\} \subset A.$$

Observação 1.1.4 *Seja E um espaço vetorial. Se $A \subset E$ é estrelado em relação a um ponto p , então A é contrátil. É suficiente considerarmos a deformação de A em X dada por $h(t, x) = (1 - t)x + tp$.*

Como consequência da Observação 1.1.4, temos que se $A \subset E$, E um espaço vetorial, é convexo, então A é contrátil.

Observação 1.1.5 *Sejam X e $\bar{X}$ espaços topológicos e $\Phi : X \rightarrow \bar{X}$ um homeomorfismo. Se A é contrátil em X , então $\Phi(A)$ é contrátil em $\bar{X}$, porque sendo h a deformação de A em X , basta considerarmos*

$$\bar{h}(t, x) = \Phi(h(t, \Phi^{-1}(x))).$$

Vejam alguns exemplos de conjuntos contráteis.

Exemplo 1.1.6 $\overline{B(0, 1)} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ é contrátil em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.7 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ é contrátil em $\mathbb{R}^n$, visto que

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto x - tx. \end{aligned}$$

é uma deformação de S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.8 *Seja $A \subset X$, onde X é um espaço topológico. A categoria de A em X , que denotaremos por $cat_X(A)$, é o menor inteiro k tal que A pode ser coberto por k subconjuntos fechados e contráteis em X . Se não existir tal inteiro, dizemos que $cat_X(A) = +\infty$. Além disso, consideraremos $cat_X(\emptyset) = 0$ e representaremos $cat_X(X)$ por $cat(X)$.*

Os exemplos 1.1.6 e 1.1.7 mostram que $cat_{\mathbb{R}^n}(S^{n-1}) = cat_{\mathbb{R}^n}(\overline{B(0, 1)}) = 1$. Exemplos de conjuntos que tem categoria maior que 1 é a esfera n -dimensional S^n cuja $cat_{S^n}(S^n) = 2$ e o toro n -dimensional T^n cuja $cat_{T^n}(T^n) = n + 1$. Para a prova desses fatos ver [20].

Observação 1.1.9 *Sejam $A, Y \subset X$ fechados com $A \subset Y$. Se A é contrátil em Y , então A também é contrátil em X . E assim, $cat_X(Y) \leq cat_Y(Y)$. De fato, se $h : [0, 1] \times A \rightarrow Y$ é uma deformação, então $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ também o é.*

Na próxima proposição, listaremos e demonstraremos algumas propriedades de categoria.

Proposição 1.1.10 *Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X . A categoria satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) Se $A \subset B$ então $cat_X(A) \leq cat_X(B)$;
- ii) $cat_X(A \cup B) \leq cat_X(A) + cat_X(B)$;
- iii) Se $cat_X(B) < +\infty$ então $cat_X(A) - cat_X(B) \leq cat_X(A \setminus B)$;

- iv) Se $\eta : [0, 1] \times X \rightarrow X$ é uma deformação de X , isto é, η é contínua e $\eta(0, u) = u$, para todo $u \in X$, então $\text{cat}_X(\eta(1, A)) \geq \text{cat}_X(A)$;
- v) Sejam M uma variedade modelada em um espaço de Hilbert e K um subconjunto compacto de M . Então, $\text{cat}_M(K) < +\infty$ e existe uma vizinhança U de K tal que $\text{cat}_M(\overline{U}) = \text{cat}_M(K)$;
- vi) Sejam $X, \widehat{X}$ espaços topológicos e $\Phi : X \rightarrow \widehat{X}$ um homeomorfismo. Se A é um subconjunto fechado de X e $\widehat{A} = \Phi(A)$, então $\text{cat}_X(A) = \text{cat}_{\widehat{X}}(\widehat{A})$.
- vii) Se X é homotopicamente equivalente a Y , ou seja, existem aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ contínuas tais que $f \circ g$ é homotópica a aplicação identidade de Y e $g \circ f$ é homotópica a aplicação identidade de X , então $\text{cat}_X(X) = \text{cat}_Y(Y)$.

Demonstração: Observemos que se algum dos termos à direita nas desigualdades for infinito, não há o que demonstrar.

Prova de i) : Se $\text{cat}_X(B) = n$ então existem $B_1, \dots, B_n$ subconjuntos fechados e contráteis em X que cobrem B . Consequentemente, A também pode ser coberto por $B_1, \dots, B_n$. Daí, $\text{cat}_X(A) \leq n$.

Prova de ii) : Se $\text{cat}_X(A) = n$ e $\text{cat}_X(B) = k$, então existem $A_1, \dots, A_n$ e $B_1, \dots, B_k$ fechados e contráteis em X tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ e } B \subset \bigcup_{i=1}^k B_i.$$

Logo,

$$A \cup B \subset \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right),$$

donde $\text{cat}_X(A \cup B) \leq n + k$.

Prova de iii) : Como $A \subset (A \setminus B) \cup B$, pelo item ii) temos que

$$\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(A \setminus B) + \text{cat}_X(B)$$

e desde que $\text{cat}_X(B) < +\infty$, segue o resultado.

Prova de iv) : Seja $\Phi(u) = \eta(1, u)$ e suponha que $\text{cat}_X(\Phi(A)) = k$. Daí, existem $A_1, \dots, A_k$ fechados e contráteis em X tais que

$$\Phi(A) \subset \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Temos que $\Phi^{-1}(A_i)$ é contrátil em X , pois a identidade de $\Phi^{-1}(A_i)$ é homotópica a $\Phi(u)$ que, por sua vez, é homotópica a uma aplicação constante, já que A_i é contrátil. Desde que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k \Phi^{-1}(A_i),$$

temos o resultado.

Prova de v) : A demonstração deste item envolve conceitos que fogem ao objetivo deste texto. O leitor mais interessado pode encontrar a demonstração em [20].

Prova de vi) : Se $cat_X(A) = k$ então existem $A_1, \dots, A_k$ fechados e contráteis em X tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Pela Observação 1.1.5, $\Phi(A_i)$ são contráteis em $\widehat{X}$ e visto que

$$\widehat{A} \subset \bigcup_{i=1}^k \Phi(A_i),$$

segue que $cat_X(\widehat{A}) \leq cat_X(A)$. Repetindo o raciocínio com $\widehat{A}$ em lugar de A , obtemos o resultado.

Prova de vii) : Suponha que $cat(Y) = k$. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ funções contínuas tais que $g \circ f$ é homotopicamente equivalente à Id_X e $Y_1, \dots, Y_k$ fechados contráteis em Y tais que

$$Y = \bigcup_{i=1}^k Y_i.$$

Consideremos $X_i = f^{-1}(Y_i)$. Afirmamos que X_i é contrátil em X para $i = 1, \dots, k$. De fato, como Y_i é contrátil em Y , temos que $g|_{Y_i}$ é homotopicamente equivalente a uma função constante e portanto $g \circ f|_{X_i}$ é homotopicamente equivalente a uma função constante. Por outro lado, por hipótese, $g \circ f|_{X_i}$ é homotopicamente equivalente à $Id|_{X_i}$. Logo, $cat_X(X) \leq cat_Y(Y)$. Analogamente, temos $cat_Y(Y) \leq cat_X(X)$. ■

Definição 1.1.11 *Sejam A, B, Y subconjuntos fechados de um espaço topológico X . Dizemos que A deforma em B relativo a Y em X , e denotamos por $A \prec_Y B$ em X , se $Y \subset A \cap B$ e existe $h \in C([0, 1] \times A, X)$ tal que*

- i) $h(0, u) = u$, para todo $u \in A$;
- ii) $h(1, u) \in B$, para todo $u \in A$;
- iii) $h(t, Y) \subset Y$, para todo $t \in [0, 1]$.

Exemplo 1.1.12 *Sejam $A = ((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \times \mathbb{R}$ e $Y = \{(0, 0), (1, 0)\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Veja que $A \prec_Y Y$. Basta considerar a função $h : [0, 1] \times A \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde*

$$h(t, (x, y)) = \begin{cases} (1-t)(x, y), & \text{se } (x, y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \\ (1-t)(x, y) + t(1, 0), & \text{se } (x, y) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definição 1.1.13 *Sejam Y e A subconjuntos fechados de um espaço topológico X , onde $Y \subset A$. A categoria de A em X relativo a Y , que denotaremos por $cat_{X,Y}(A)$, é o menor inteiro k tal que existem $k+1$ subconjuntos fechados $A_0, A_1, \dots, A_k$ em X satisfazendo*

- i) $A = \bigcup_{i=0}^k A_i$;
- ii) $A_1, \dots, A_k$ são contráteis em X ;
- iii) $A_0 \prec_Y Y$ em X .

Se não existir um tal inteiro, dizemos que $\text{cat}_{X,Y}(A) = +\infty$.

Observação 1.1.14 Quando $Y = \emptyset$, $\text{cat}_{X,Y}(A) = \text{cat}_X(A)$.

Exemplo 1.1.15 Considere $X = \mathbb{R}^2$, $A = ((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \times \mathbb{R}$ e $Y = \{(0, 0), (1, 0)\}$. Temos que $\text{cat}_{\mathbb{R}^2,Y}(A) = 1$, pois, pelo Exemplo 1.1.12, temos que $A \prec_Y Y$. Além disso, $A \cup ([0, 1] \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ e $[0, 1] \times \mathbb{R}$ é contrátil em $\mathbb{R}^2$.

Na próxima proposição, listaremos e demonstraremos algumas propriedades de categoria relativa.

Proposição 1.1.16 Sejam A, B e Y subconjuntos fechados de um espaço topológico X , com $Y \subset A \cap B$. Então, temos

- i) $\text{cat}_{X,Y}(Y) = 0$;
- ii) $\text{cat}_{X,Y}(A \cup B) \leq \text{cat}_{X,Y}(A) + \text{cat}_X(B)$;
- iii) Se $A \prec_Y B$, então $\text{cat}_{X,Y}(A) \leq \text{cat}_{X,Y}(B)$;
- iv) $\text{cat}_{X,Y}(A) \leq \text{cat}_X(A)$.

Demonstração: Novamente, se algum dos termos à direita nas desigualdades for infinito, não há o que demonstrar.

Prova de i) : Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times X &\rightarrow X \\ (t, u) &\mapsto u, \end{aligned}$$

temos que $Y \prec_Y Y$ em X , demonstrando o item.

Prova de ii) : Sejam $\text{cat}_{X,Y}(A) = n$ e $\text{cat}_X(B) = m$. Logo, existem $A_0, A_1, \dots, A_n$ subconjuntos fechados de X tais que

$$A = \bigcup_{i=0}^n A_i,$$

$A_1, \dots, A_n$ são contráteis em X e $A_0 \prec_Y Y$ em X , como também existem $B_1, \dots, B_m$ fechados e contráteis em X tais que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^m B_i.$$

Portanto,

$$A \cup B = \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m (B_i \cap B) \right)$$

o que mostra o item.

Prova de iii) : Suponha que $cat_{X,Y}(B) = n$. Logo, existem $B_0, B_1, \dots, B_n$ fechados em X , onde $B_0 \prec_Y Y$, $B_1, \dots, B_n$ são contráteis em X e

$$B = \bigcup_{i=0}^n B_i.$$

Daí, existe $h_0 : [0, 1] \times B_0 \rightarrow X$ contínua satisfazendo

$$h_0(0, u) = u, h_0(1, u) \in Y, \text{ para todo } u \in B_0$$

e

$$h_0(t, Y) \subset Y, \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Também existem $h_i : [0, 1] \times B_i \rightarrow X$ contínuas tais que

$$h_i(0, u) = u \text{ e } h_i(1, u) = h_i(1, v), \text{ para todo } u, v \in B_i \text{ e para } i = 1, \dots, n.$$

Como $A \prec_Y B$, existe $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ contínua cumprindo

$$h(0, u) = u, h(1, u) \in Y, \text{ para todo } u \in B$$

e

$$h(t, Y) \subset Y, \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Agora, definamos $A_i = h^{-1}(B_i)$, $i = 0, \dots, n$. Assim, $A = \bigcup_{i=0}^n A_i$. Considerando as funções

$$\bar{h}_i(t, u) = h_i(t, h(t, u)), \quad i = 0, \dots, n,$$

segue que $A_0 \prec_Y Y$ e que A_i é contrátil para $i = 1, \dots, n$, o que prova o resultado.

Prova de iv) : Se $cat_X(A) = n$, basta considerar $A_0 = \emptyset$ e, portanto,

$$A = \bigcup_{i=0}^n A_i$$

onde $A_1, \dots, A_n$ são fechados contráteis em X . ■

1.2 Teoremas do Tipo Lusternik–Schnirelmann

A partir dos resultados da seção anterior estabeleceremos teoremas de minimax que serão essenciais para a demonstração do Teorema 2.1.5.

Para tanto, ao longo desta seção, considere $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $\psi \in C^2(X, \mathbb{R})$,

$$V = \{v \in X; \psi(v) = 1\} \text{ e } \psi'(v) \neq 0, \text{ para todo } v \in V,$$

isto é, 1 é um valor regular para ψ .

Definição 1.2.1 O espaço tangente a variedade V num ponto $v \in V$ é o núcleo do funcional $\psi'(v)$, ou seja,

$$T_v V = \left\{ y \in X; \langle \psi'(v), y \rangle = 0 \right\}.$$

Definição 1.2.2 Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. A norma da derivada de $\varphi|_V \equiv \varphi_V$ é definida por

$$\left\| \varphi'_V(u) \right\|_* = \sup \left\{ \langle \varphi'(u), y \rangle; y \in T_u V \text{ e } \|y\| = 1 \right\}.$$

A seguir faremos uma caracterização da norma dada na definição anterior. Para isso precisamos do seguinte lema

Lema 1.2.3 Sejam f e g funcionais lineares em um espaço vetorial V . Se $\ker f \subset \ker g$ então $g = kf$, onde k é uma constante real.

Demonstração: Se $f \equiv 0$ então $g \equiv 0$ e está provado a afirmação. Suponha $f \neq 0$ e tomemos $v \in V$ tal que $f(v) \neq 0$. Consideremos

$$k = \frac{g(v)}{f(v)}.$$

e o funcional linear $h(x) = g - kf$. Temos que $h(x) = 0$ para todo $x \in \ker f$, pois $\ker f \subset \ker g$, e que $h(v) = 0$. Assim, como $\ker f$ é um hiperplano de V , segue que $h \equiv 0$. ■

Proposição 1.2.4 $\left\| \varphi'_V(u) \right\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \varphi'(u) - \lambda \psi'(u) \right\|$.

Demonstração: Para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \varphi'_V(u) \right\|_* &= \sup \{ \langle \varphi'(u), y \rangle; y \in T_u V \text{ e } \|y\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \langle \varphi'(u) - \lambda \psi'(u), y \rangle; y \in T_u V \text{ e } \|y\| = 1 \} \\ &\leq \sup \{ \langle \varphi'(u) - \lambda \psi'(u), y \rangle; \|y\| = 1 \} \\ &= \left\| \varphi'(u) - \lambda \psi'(u) \right\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos, pelo teorema de Hahn-Banach, que existe um funcional linear contínuo Φ sobre X tal que

$$\Phi|_{T_u V} = \varphi'_V(u) \text{ e } \|\Phi\| = \left\| \varphi'_V(u) \right\|_*$$

onde $\varphi'_V(u) = \varphi'(u)|_{T_u V}$. Como $\ker \psi'(u) = T_u V \subset \ker (\varphi'(u) - \Phi)$, pelo lema anterior, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi'(u) - \Phi = \lambda_0 \psi'(u).$$

Logo,

$$\left\| \varphi'(u) - \lambda_0 \psi'(u) \right\| = \|\Phi\| = \left\| \varphi'_V(u) \right\|_*.$$

■

Observação 1.2.5 Como uma consequência da proposição anterior, $\varphi'_V(u) = 0$ se, e somente se, existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(u) = \lambda \psi'(u)$, que é um resultado do tipo multiplicadores de Lagrange.

Ao longo desta seção fixaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}\varphi^d &= \{u \in V; \varphi(u) \leq d\}; \\ K_c &= \{u \in V; \varphi(u) = c \text{ e } \|\varphi'(u)\|_* = 0\}; \\ S_\delta &= \{u \in X; \text{dist}(u, S) < \delta\}.\end{aligned}$$

Para demonstrarmos o primeiro teorema de minimax, utilizaremos o seguinte lema de deformação, cuja demonstração pode ser encontrada em [25] :

Lema 1.2.6 Sejam $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset V$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\left\| \varphi'_V(u) \right\|_* \geq \frac{8\epsilon}{\delta}, \text{ para todo } u \in \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}.$$

Então existe $\eta \in C([0, 1] \times V, V)$ satisfazendo

- i) $\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
- ii) $\eta(1, \varphi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\epsilon}$;
- iii) $\varphi(\eta(., u))$ é não crescente para todo $u \in V$.

Para os próximos quatro resultados consideremos:

- 1) $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$;
- 2) $Y \subset \varphi^d$ é um fechado, para $d \in \mathbb{R}$ fixado;
- 3) Para $j \in \mathbb{N}$, $A_j := \{A \subset \varphi^d; A \text{ é fechado, } Y \subset A \text{ e } \text{cat}_{\varphi^d, Y}(A) \geq j\}$;
- 4) $c_j := \inf_{A \in A_j} \sup_{u \in A} \varphi(u)$.

Teorema 1.2.7 Se $a := \sup_Y \varphi < c := c_k = \dots = c_{k+m} \leq d$, então para cada $\epsilon \in (0, \frac{c-a}{2})$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ e $B \subset \varphi^d$ fechado tais que $\sup_{u \in A} \varphi(u) \leq c + \epsilon$ e $\text{cat}_{\varphi^d}(B) \leq m$, existe $u \in V$ tal que

- i) $c - 2\epsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\epsilon$;
- ii) $\text{dist}(u, A \setminus \text{int} B) \leq 2\delta$;
- iii) $\|\varphi'(u)\|_* \leq \frac{8\epsilon}{\delta}$.

Demonstração: Suponhamos que o resultado seja falso. Logo, existem $\epsilon \in (0, \frac{c-a}{2})$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ e $B \subset \varphi^d$ fechado tais que

$$\sup_{u \in A} \varphi(u) \leq c + 2\epsilon \text{ e } \text{cat}_{\varphi^d}(B) \leq m$$

mas

$$\|\varphi'(u)\|_* > \frac{8\epsilon}{\delta}, \text{ para todo } u \in V, \text{ que satisfaz i) e ii)}.$$

No que segue, provaremos três informações que nos auxiliarão na demonstração:

Afirmção 1: $Y \subset \varphi^{c-\epsilon}$.

Seja $y \in Y$, portanto $\varphi(y) \leq a$ e como $\epsilon < c - a$ então $\varphi(y) \leq a < c - \epsilon$, o que significa que $y \in \varphi^{c-\epsilon}$.

Afirmção 2: $\text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^{c-\epsilon}) \leq k - 1$.

Se $\text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^{c-\epsilon}) \geq k$ então $\varphi^{c-\epsilon} \in \mathcal{A}_k$, de onde segue que

$$c = c_k \leq \sup_{u \in \varphi^{c-\epsilon}} \varphi(u) \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo e isto finaliza a demonstração.

Observe que, se temos $B \subset \varphi^d$ fechado, com $\text{cat}_{\varphi^d}(B) \leq m$ e $\text{dist}(u, A \setminus \text{int} B) \leq 2\delta$, então $B \cap \varphi_{c-\epsilon}^d \subset \varphi^d$ é fechado,

$$\text{cat}_{\varphi^d}(B \cap \varphi_{c-\epsilon}^d) \leq m \text{ e } \text{dist}(u, A \setminus \text{int}(B \cap \varphi_{c-\epsilon}^d)) \leq 2\delta.$$

Chamemos $\overline{B} = B \cap \varphi_{c-\epsilon}^d$.

Afirmção 3: $A \setminus \text{int} \overline{B} \prec_Y \varphi^{c-\epsilon}$.

Considere $S = A \setminus \text{int} \overline{B}$. Desde que para todo $u \in \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ temos $\|\varphi'(u)\|_* > \frac{8\epsilon}{\delta}$, então existe $\eta : [0, 1] \times V \rightarrow V$ contínua tal que

- i) $\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$;
- ii) $\eta(1, \varphi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\epsilon}$.

Daí, já que

$$S \subset A \subset \varphi^{c+\epsilon}$$

vemos que $\varphi^{c+\epsilon} \cap S = S$ e, portanto,

$$\eta(1, S) \subset \varphi^{c-\epsilon}.$$

Além disso, como $\epsilon < \frac{c-a}{2}$, segue que $a = \sup\{\varphi(u); u \in Y\} < c - 2\epsilon$, demonstrando que $y \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ para todo $y \in Y$ e, portanto,

$$\eta(t, y) = y, \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e para todo } y \in Y,$$

o que mostra a afirmação. Usando as propriedades de categoria obtidas nas Proposições 1.1.10, 1.1.16 e as Afirmções 2 e 3, temos

$$\begin{aligned} k + m &\leq \text{cat}_{\varphi^d, Y}(A) \\ &\leq \text{cat}_{\varphi^d, Y}((A \setminus \text{int} \overline{B}) \cup \overline{B}) \\ &\leq \text{cat}_{\varphi^d, Y}(A \setminus \text{int} \overline{B}) + \text{cat}_{\varphi^d}(\overline{B}) \\ &\leq \text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^{c-\epsilon}) + m \\ &\leq k - 1 + m. \end{aligned}$$

o que é um absurdo e o teorema está provado. ■

Definição 1.2.8 Dizemos que $\varphi|_V$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ (que denotaremos por $(PS)_c$) quando toda sequência $(u_n) \subset V$ tal que $\varphi(u_n) \rightarrow c$ e $\|\varphi'(u_n)\|_* \rightarrow 0$ possui uma subsequência convergente.

Como consequência do teorema anterior, apresentaremos três resultados que fornecerão informações sobre o número de pontos críticos para um funcional $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ restrito a variedade V .

Teorema 1.2.9 *Se $a := \sup_Y \varphi < c := c_k = \dots = c_{k+m} \leq d$ e o funcional $\varphi|_V$ satisfaz a condição $(PS)_c$, então $\text{cat}_{\varphi^d}(K_c) \geq m + 1$.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $\text{cat}_{\varphi^d}(K_c) \leq m$. Desde que K_c é compacto em V , então $K_c \cap \varphi^d$ é compacto em φ^d . Logo, pela Proposição 1.1.10 item v), existe uma vizinhança fechada B de K_c em φ^d tal que $\text{cat}_{\varphi^d}(K_c) = \text{cat}_{\varphi^d}(B)$. Pelo Teorema 1.2.7, existem seqüências $(u_n) \subset V$ e $(A_n) \subset \mathcal{A}_{k+m}$ tais que $\varphi(u_n) \rightarrow c$, $\text{dist}(u_n, A_n \setminus \text{int} B) \rightarrow 0$ e $\|\varphi'(u_n)\|_* \rightarrow 0$. Desde que $A_n \setminus \text{int} B \subset \varphi^d \setminus \text{int} B$, segue que $\text{dist}(u_n, \varphi^d \setminus \text{int} B) \rightarrow 0$. Além disso, pela condição $(PS)_c$, existe (u_{n_j}) tal que $u_{n_j} \rightarrow u$ e como $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos $u \in K_c$. Por outro lado, como

$$\text{dist}(u_n, \varphi^d \setminus \text{int} B) \rightarrow \text{dist}(u, \varphi^d \setminus \text{int} B)$$

segue que $\text{dist}(u, \varphi^d \setminus \text{int} B) = 0$. Assim, $u \in \varphi^d \setminus \text{int} B$ e portanto $u \notin \text{int} B$, o que é uma contradição, já que $u \in K_c$ e $K_c \subset \text{int} B$. ■

Teorema 1.2.10 *Se o funcional $\varphi|_V$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [c_1, d]$ e $\sup\{\varphi(u); u \in Y\} < c_1$, então $\varphi^{-1}([c_1, d])$ contém pelo menos $\text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^d)$ pontos críticos de $\varphi|_V$.*

Demonstração: Seja $n = \text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^d)$. Assim, teremos definidos $c_1, \dots, c_n$ e

$$\sup\{\varphi(u); u \in Y\} < c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq d.$$

Se um dos níveis c_i cumpre $c_i = c_{i+1} = \dots = c_{i+m}$ para algum $m \geq 0$, então pelo Teorema 1.2.9 segue que

$$\text{cat}_{\varphi^d}(K_{c_i}) \geq m + 1.$$

Logo, K_{c_i} tem pelo menos $m + 1$ elementos. ■

Teorema 1.2.11 *Suponhamos que $\varphi|_V$ seja limitado inferiormente e satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \in [\inf\{\varphi(u); u \in V\}, d]$. Então $\varphi|_V$ tem um mínimo e, além disso, φ^d contém pelo menos $\text{cat}_{\varphi^d}(\varphi^d)$ pontos críticos de $\varphi|_V$.*

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que se $Y = \emptyset$ então $c_1 = \inf\{\varphi(u); u \in V\}$. Como $Y = \emptyset$,

$$\mathcal{A}_1 = \{A \subset \varphi^d; A \text{ é fechado e } \text{cat}_{\varphi^d}(A) \geq 1\} = \{A \subset \varphi^d; A \neq \emptyset \text{ e } A \text{ é fechado}\}.$$

Uma vez que

$$c_1 \leq \sup\{\varphi(u); u \in A\}, \text{ para todo } A \in \mathcal{A}_1$$

e tomando $A = \{u\}, u \in \varphi^d$, teremos que

$$c_1 \leq \varphi(u), \text{ para todo } u \in \varphi^d.$$

Portanto $c_1 \leq \inf\{\varphi(u); u \in V\}$. Por outro lado,

$$\sup\{\varphi(u); u \in A\} \geq \inf\{\varphi(u); u \in V\}, \text{ para todo } A \in \mathcal{A}_1$$

donde $c_1 = \inf\{\sup\{\varphi(u); u \in A\}; A \in \mathcal{A}_1\} \geq \inf\{\varphi(u); u \in V\}$. Logo, $c_1 = \inf\{\varphi(u); u \in V\}$, o que mostra a nossa afirmação. Assim, pelo teorema anterior

$$\varphi^{-1}([\inf\{\varphi(u); u \in V\}, d]) = \varphi^d$$

contém pelo menos $\text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^d) = \text{cat}_{\varphi^d}(\varphi^d)$ pontos críticos. Além disso, pelo Teorema 1.2.9, temos que $\text{cat}_{\varphi^d}(K_{c_1}) \geq 1$, o que implica $K_{c_1} \neq \emptyset$ e portanto $\varphi|_V$ atinge um mínimo. ■

1.3 O Dual de $C_0(X)$

Nesta seção, nosso intuito é caracterizar o dual topológico do espaço vetorial $C_0(X)$, onde X será considerado um espaço de Hausdorff localmente compacto, a menos que se faça menção ao contrário. Para isso, definiremos um espaço vetorial $\mathcal{M}(X)$ no qual os elementos são medidas e mostraremos que $C_0(X)$ é isometricamente isomorfo a tal espaço. Em seguida, introduziremos um tipo de convergência em $\mathcal{M}(X)$ a fim de entendermos melhor as hipóteses do Lema de Concentração-Compacidade.

O texto, a seguir, foi baseado em [11]. As demonstrações dos resultados e as definições utilizadas que não forem apresentadas aqui, podem ser encontradas nessa referência.

Proposição 1.3.1 *Se X é um espaço Hausdorff localmente compacto, $C_0(X)$ é o fecho de $C_c(X)$ na métrica uniforme.*

Definição 1.3.2 *Sejam μ uma medida de Borel em X e E um subconjunto de Borel de X . μ é chamada regular exterior em E se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U); E \subset U, U \text{ aberto}\}$$

e é chamada regular interior em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Se μ é regular exterior e interior em todos os borelianos, μ é chamada regular.

Definição 1.3.3 *Uma medida de Radon em X é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, regular exterior em todos os borelianos e regular interior em todos os conjuntos abertos.*

Observação 1.3.4 *Denotaremos o espaço das medidas de Radon com sinal por $\mathcal{M}(X)$.*

A seguir, apresentamos resultados sobre medidas de Radon que nos auxiliarão na demonstração do principal resultado desta seção.

Teorema 1.3.5 *Se μ é uma medida com sinal, existem únicas medidas positivas μ^+ e μ^- tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e $\mu^+ \perp \mu^-$.*

As medidas μ^+ e μ^- são chamadas variação positiva e variação negativa de μ , respectivamente, e definimos a variação total de μ como sendo a medida dada por

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Proposição 1.3.6 *Se μ é uma medida de Borel, então μ é de Radon se, e somente se, $|\mu|$ é de Radon. Além disso, $\mathcal{M}(X)$ é um espaço vetorial e*

$$\mu \rightarrow \|\mu\| = |\mu|(X)$$

é uma norma nesse espaço.

Teorema 1.3.7 *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto em que todo conjunto aberto é σ -compacto. Então, toda medida de Borel em X que é finita em conjuntos compactos é regular e, portanto, de Radon.*

Teorema 1.3.8 *Seja I é um funcional linear positivo em $C_c(X)$, onde X é um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, existe uma única medida de Radon μ tal que para cada $f \in C_c(X)$, temos*

$$I(f) = \int f d\mu.$$

A fim de utilizarmos o teorema anterior, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 1.3.9 *Para cada funcional linear limitado F em $C_0(X)'$, existem dois funcionais lineares positivos F_+ e $F_- \in (C_0(X))'$ tais que $F = F_+ - F_-$.*

Demonstração: Considere $f \in C_0(X)$ não-negativa e defina

$$F_+(f) = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} F(\varphi).$$

Desde que

$$|F(\varphi)| \leq \|F\| \|\varphi\|_u \leq \|F\| \|f\|_u$$

para $0 \leq \varphi \leq f$ e $F(0) = 0$, então $0 \leq F_+(f) \leq \|F\| \|f\|_u$. Além disso, $F_+(f) \geq F(f)$ e pela propriedade do supremo temos que $F_+(cf) = cF_+(f)$ para $c \geq 0$.

Agora, vamos mostrar que dado f e $g \in C_0(X)$ não-negativas, então $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$. Para isso, considere $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 \leq \psi \leq g$. Logo, $0 \leq \varphi + \psi \leq f + g$ e, portanto,

$$F_+(f+g) \geq F(\varphi) + F(\psi).$$

Assim, considerando o supremo, para todo φ e ψ , obtemos

$$F_+(f+g) \geq F_+(f) + F_+(g).$$

Por outro lado, se $0 \leq \psi \leq f+g$ então $0 \leq \min\{\psi, f\} \leq f$ e $0 \leq \psi - \min\{\psi, f\} \leq g$, donde

$$\begin{aligned} F(\psi) &= F(\min\{\psi, f\}) + F(\psi - \min\{\psi, f\}) \\ &\leq F_+(f) + F_+(g). \end{aligned}$$

Tomando o supremo para todo ψ , temos

$$F_+(f+g) \leq F_+(f) + F_+(g)$$

e, portanto,

$$F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g).$$

Agora, se $f \in C_0(X)$ então f_+ e $f_- \in C_0(X)$. Daí, defina

$$F_+(f) = F_+(f_+) - F_+(f_-).$$

Se $f = g - h$ onde $g, h \geq 0$, então $g + f_- = h + f_+$. Portanto, $F_+(g) + F_+(f_-) = F_+(h) + F_+(f_+)$ o que implica que $F_+(f) = F_+(g) - F_+(h)$, ou seja, $F_+(f)$ independe da escolha de $g, h \geq 0$. Assim,

$$F_+(f) = F_+(g) - F_+(h).$$

Desta forma, definimos F_+ para todo $f \in C_0(X)$ e facilmente verifica-se que $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$ e $F_+(cf) = cF_+(f)$ para $c \geq 0$. Além disso, desde que

$$F_+(-f) + F_+(f) = F_+(0) = 0$$

temos $F_+(-f) = -F_+(f)$. Logo, F_+ é um funcional linear em $C_0(X)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} |F_+(f)| &\leq \max\{F_+(f_+), F_+(f_-)\} \\ &\leq \|F\| \max\{\|f_+\|_u, \|f_-\|_u\} = \|F\| \|f\|_u, \end{aligned}$$

donde $\|F_+\| \leq \|F\|$. Desde que $F_+(f) \geq 0$ e $F_+(f) \geq F(f)$ para $f \geq 0$, segue que F_+ e $F_- = F_+ - F$ são funcionais lineares positivos, limitados e $F = F_+ - F_-$. ■

No teorema a seguir caracterizaremos o dual do espaço $C_0(X)$. Essa caracterização motivará a definição de convergência fraca no sentido das medidas.

Teorema 1.3.10 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, para cada funcional linear limitado $F \in C_0(X)'$, existe uma única medida de Radon com sinal ν tal que*

$$F(f) = \int f d\nu$$

para cada $f \in C_0(X)$. Mais ainda, $\|F\| = |\nu|(X)$.

Demonstração: Seja $F = F_+ - F_-$ como na Proposição 1.3.9. Então, pelo Teorema 1.3.8, existem medidas μ_1 e μ_2 tais que

$$F_+(f) = \int f d\mu_1 \text{ e } F_-(f) = \int f d\mu_2.$$

Daí, considere $\nu = \mu_1 - \mu_2$. Logo, ν é uma medida de Radon com sinal e

$$F(f) = \int f d\nu.$$

Agora, mostraremos que $\|F\| = |\nu|(X)$. Para isto, observe que, usando o item b) da Proposição A.1.12, temos que

$$|F(f)| = \left| \int f d\nu \right| \leq \int |f| d|\nu| \leq \|f\|_u |\nu|(X).$$

Assim, $\|F\| \leq |\nu|(X)$. Por outro lado, se $h = \frac{d\nu}{d|\nu|}$ então, pelo item a) da Proposição A.1.12, $|h| = 1$ $|\nu|$ -q.s.. Daí, pelo Teorema de Lusin (ver Teorema A.1.9 no Apêndice A), dado $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ tal que $\|f\|_u \leq 1$ e $f = h$ exceto em um conjunto E com $|\nu|(E) < \frac{\epsilon}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} |\nu|(X) &\leq \int d|\nu| \\ &= \int h^2 d|\nu| \\ &\leq \left| \int f d\nu + \int (h - f) d\nu \right| \\ &= \left| \int f d\nu \right| + \left| \int_E (h - f) d\nu \right| \\ &\leq \left| \int f d\nu \right| + \int_E |h| d|\nu| + \int_E |f| d|\nu| \\ &\leq \left| \int f d\nu \right| + 2|\nu|(E) \\ &\leq \left| \int f d\nu \right| + \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\|F\| = |\nu|(X)$. ■

Corolário 1.3.11 *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, o dual de $C_0(X)$ é (isometricamente isomorfo a) o espaço de todas as medidas de Radon com sinal em X com a norma definida por $\|\nu\| = |\nu|(X)$.*

Definição 1.3.0.1 *Dizemos que $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(X)$ converge fracamente para μ no sentido das medidas se*

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu, \text{ para todo } f \in C_0(X).$$

Observação 1.3.12 *Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto que atende ao segundo axioma da enumerabilidade e μ uma medida de Radon positiva em X . Se $f \in L^1(X, \mu)$, a medida definida como*

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu$$

é uma medida finita e, portanto, pelo Teorema 1.3.7, é uma medida de Radon. Mais ainda,

$$\|\nu_f\| = \int d|\nu_f| = \int |f| d\mu = \|f\|_1.$$

Assim, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} T : L^1(X, \mu) & \longrightarrow & \mathcal{M}(X) \\ f & \longmapsto & v_f \end{array}$$

é uma imersão isométrica. Desta forma, podemos considerar $L^1(X, \mu)$ como um subespaço de $\mathcal{M}(X)$.

Lema 1.3.13 *Sejam $(u_n) \subset L^1(X, \mu)$, μ uma medida de Radon positiva e μ_n as medidas dadas por*

$$\mu_n(E) = \int_E |u_n| d\mu.$$

Se

$$\|\mu_n\| = \int |u_n| d\mu \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então a menos de subsequência, $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(X)$, onde μ é uma medida de Radon positiva.

Demonstração: Pelo Teorema da Representação de Riesz, temos que existem funcionais F_{μ_n} de $C_0(X)$ tais que

$$F_{\mu_n}(f) = \int f d\mu_n, \text{ para todo } f \in C_0(X)$$

e

$$\|F_{\mu_n}\| = \|\mu_n\| \leq C \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, a menos de subsequência, $F_{\mu_n} \xrightarrow{*} F$ onde $F \in (C_0(X))'$. Assim,

$$F_{\mu_n}(f) \rightarrow F(f) \text{ para todo } f \in C_0(X),$$

ou seja,

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu \text{ para todo } f \in C_0(X),$$

onde $\mu \in \mathcal{M}(X)$ está associada a F . ■

1.4 Lemas de Concentração-Compacidade

Nesta seção, temos como objetivo demonstrar um Lema de Concentração-Compacidade devido a Lions. Para isso, provaremos um resultado auxiliar.

Lema 1.4.1 *Sejam μ e $\nu \in \mathcal{M}^+(\overline{\Omega})$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, tais que*

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \text{ para todo } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

para alguma constante $C \geq 0$ e $1 \leq p < q < +\infty$. Então

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

e

$$\mu \geq C_0^{-p} \sum_{j \in J} \nu_j^{\frac{p}{q}} \delta_{x_j},$$

onde J é um conjunto enumerável, $(v_j)_{j \in J} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $(x_j)_{j \in J} \subset \overline{\Omega}$.

Demonstração: Por um argumento de densidade, pois as medidas são finitas, temos que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo } \varphi \text{ mensurável e limitada.} \quad (1.1)$$

Pelo Teorema da Decomposição de Lebesgue existem medidas $\widehat{\mu}$ e σ tais que

$$\mu = \widehat{\mu} + \sigma$$

onde $\widehat{\mu} \ll \nu$ e $\sigma \perp \nu$, isto é, existem A e $B \subset \overline{\Omega}$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \overline{\Omega}$ e $\sigma(A) = \nu(B) = 0$. Mais ainda, pelo Teorema de Radon-Nikodým, existe $f \in L^1(\nu)$, $f \geq 0$, tal que $\widehat{\mu} = f d\nu$.

Considere $\varphi = \mathcal{X}_A \psi$, onde ψ é mensurável e limitada. Por (1.1), vemos que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\psi|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} |\psi|^p d\widehat{\mu} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.2)$$

donde temos

$$\nu(E)^{\frac{1}{q}} \leq C \widehat{\mu}(E)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo boreliano } E \subset \overline{\Omega} \quad (1.3)$$

e $\nu \ll \widehat{\mu}$.

Defina $\nu_k = f^{\frac{q}{q-p}} \mathcal{X}_{f^k} d\nu$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, para toda função φ mensurável e limitada, por (1.2), segue que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} \left| f^{\frac{1}{q-p}} \mathcal{X}_{f^k} \varphi \right|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} \left| f^{\frac{1}{q-p}} \mathcal{X}_{f^k} \varphi \right|^p d\widehat{\mu} \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q d\nu_k \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} f^{\frac{p}{q-p}+1} \mathcal{X}_{f^k} |\varphi|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, portanto,

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q d\nu_k \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p d\nu_k \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, sendo $E \subset \overline{\Omega}$ um boreliano, temos que $\nu_k(E)^{\frac{1}{q}} \leq C \nu_k(E)^{\frac{1}{p}}$. Consequentemente, $\nu_k(E) \geq C^{\frac{pq}{p-q}} = C_1 > 0$. Como $\nu_k(\{x\}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu_k(B(x, \epsilon))$ para $x \in \overline{\Omega}$, segue que ou $\nu_k(\{x\}) \geq C_1$ ou existe $\epsilon(x) > 0$ tal que $\nu_k(B(x, \epsilon(x))) = 0$.

Seja $V_k = \{x \in \overline{\Omega}; \nu_k(\{x\}) \geq C_1\}$. V_k é um conjunto finito, pois, caso contrário, $\nu_k(\overline{\Omega}) = +\infty$. Considere $K \subset \overline{\Omega} \setminus V_k$ compacto. Logo, K pode ser coberto por um número finito de bolas $B(x, \epsilon(x))$, onde $x \in \overline{\Omega} \setminus V_k$ e $\nu_k(B(x, \epsilon(x))) = 0$ e assim $\nu_k(K) = 0$. Com isso, temos que $\nu_k(\overline{\Omega} \setminus V_k) = 0$.

Seja

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k.$$

Para $x \in V$, temos, para algum k_0 , que

$$\nu_{k_0}(\{x\}) = f^{\frac{q}{q-p}} \mathcal{X}_{f^{k_0}}(x) \nu(\{x\}) > 0$$

e, portanto, $\nu(\{x\}) > 0$ para todo $x \in V$.

Por outro lado, como $\nu_k(\overline{\Omega} \setminus V_k) = 0$, segue que

$$\int_{f^{k_0} \setminus V_{k_0}} f^{\frac{q}{q-p}} d\nu = \int_{\overline{\Omega} \setminus V_{k_0}} f^{\frac{q}{q-p}} \mathcal{X}_{f^{k_0}} d\nu = 0,$$

assim $f = 0$ $\nu - q.s.$ em $f^k \setminus V_k$, o que implica que $\widehat{\mu}(f^k \setminus V_k) = 0$. Logo, por (1.3), $\nu(f^k \setminus V_k) = 0$.

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \nu(\overline{\Omega} \setminus V) &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k \setminus V\right) + \nu(\{x \in \overline{\Omega}; f(x) = +\infty\} \setminus V) \\ &\leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k \setminus V_k\right) + \nu(\{x \in \overline{\Omega}; f(x) = +\infty\}) \leq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\nu(\overline{\Omega} \setminus V) = 0$ e por fim

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde J é enumerável e $\nu_j = \nu(x_j)$ para $x_j \in V$. Além disso, por (1.1), $\nu(\{x_j\})^{\frac{1}{q}} \leq C\mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}}$ para todo $j \in J$, donde segue que

$$\mu \geq C^{-p} \sum_{j \in J} \nu_j^{\frac{p}{q}} \delta_{x_j}.$$

■

Agora, demonstraremos o Lema de Concentração-Compacidade. Esse resultado será essencial para demonstrarmos que os funcionais, associados aos problemas do Capítulo 3, atendem a condição de Palais-Smale.

Lema 1.4.2 (Lema de concentração-compacidade) *Suponha $1 \leq p \leq N$ e seja*

$(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que,

(i) $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$ no sentido das medidas;

(iii) $|u_n|^{2^} dx \rightharpoonup \nu$ no sentido das medidas, onde μ e ν são medidas não-negativas e limitadas em $\overline{\Omega}$.*

Então existem um conjunto de índices J , no máximo enumerável, e uma família $\{x_j; j \in J\}$ de pontos em $\overline{\Omega}$ tal que

(1) $\nu = |u|^{2^} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$, onde $\{\nu_j; j \in J\}$ é um conjunto de números positivos;*

(2) $\mu \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$, onde $\{\mu_j; j \in J\}$ é um conjunto de números positivos.

Além disso, $S(\nu_j)^{\frac{p}{p^}} \leq \mu_j$ para todo $j \in J$. Em particular, $\sum_{j \in J} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} < +\infty$.*

Demonstração: Primeiramente, considere $u = 0$. Assim, para $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ temos, pela imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$, que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^{p^*} |u_n|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\overline{\Omega}} |\nabla(\varphi u_n)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\overline{\Omega}} |\nabla \varphi|^p |u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Assim, fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (1.4), temos que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^{p^*} d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq S^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí,

$$S(\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} = S\nu(\{x_j\})^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu(\{x_j\}) = \mu_j.$$

e, além disso, pelo Lema 1.4.1,

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \text{ e } \mu \geq \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

Agora, para $u \neq 0$, façamos $w_n = u_n - u$. Logo, $w_n \rightarrow 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $w_n(x) \rightarrow 0$ q.s. em $\overline{\Omega}$ e

$$\begin{cases} |\nabla w_n|^p \rightharpoonup \mu' \\ |w_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu' \end{cases}.$$

Para todo $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, pelo Lema de Brézis-Lieb (ver Lema A.1.3 no Apêndice A), temos que

$$\int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u_n|^{p^*} dx - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |w_n|^{p^*} dx \rightarrow \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u|^{p^*} dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u_n|^{p^*} dx - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |w_n|^{p^*} dx \rightarrow \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu',$$

donde

$$\int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu' = \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u|^{p^*} dx.$$

Logo,

$$\nu = |u|^{2^*} dx + \nu' = |u|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}.$$

Por (1.4),

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^{p^*} d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\overline{\Omega}} |\nabla \varphi|^p |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ para todo } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(0) = 1$ e $\text{supp}\varphi = B(0, 1)$. Aplicando a desigualdade anterior para $\varphi\left(\frac{x-x_j}{\epsilon}\right)$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $j \in J$, obtemos

$$\nu_j^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \mu(B(x_j, \epsilon))^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} \left| \nabla \varphi \left(\frac{x-x_j}{\epsilon} \right) \right|^p |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando a Desigualdade de Hölder e o Teorema da Mudança de Variável temos que

$$\begin{aligned} \nu_j^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} &\leq \mu(B(x_j, \epsilon))^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \mu(B(x_j, \epsilon))^{\frac{1}{p}} + C \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ na desigualdade acima, segue que $\mu_j = \mu(\{x_j\}) \geq S \nu_j^{\frac{p}{p^*}}$.

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e a função $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Psi(u) = \int \varphi |\nabla u|^p dx, \text{ com } \varphi \in C(\overline{\Omega}),$$

é convexa e contínua, segue, pela Proposição A.1.11, que

$$\int \varphi |\nabla u|^p dx \leq \liminf \int \varphi |\nabla u_n|^p dx = \int \varphi d\mu$$

Logo, $\mu \geq |\nabla u|^p dx$. Além disso, $|\nabla u|^p dx \perp \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$ e, portanto,

$$\mu \geq |\nabla u|^p dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

■

Outro Lema de Concentração-Compacidade que usaremos neste trabalho é o seguinte:

Lema 1.4.3 (Lema de concentração-compacidade) *Seja $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que;*

- (i) $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$;
- (ii) $|\nabla u_n - \nabla u| \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$;
- (iii) $|u_n - u| \rightharpoonup \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$;
- (iv) $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Definindo

$$\mu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |\nabla u_n|^2 dx \quad e \quad \nu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |u_n|^{2^*} dx$$

então, tem-se que

- (1) $\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \|\mu\|$ e $\nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \mu_\infty$;
- (2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\nabla u_n|_2^2 = |\nabla u|_2^2 + \|\mu\| + \mu_\infty$;
- (3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\nabla u_n|_{2^*}^{2^*} = |u|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| + \nu_\infty$.

Além disso, se $u = 0$ e $\|\nu\|^{\frac{2}{2^}} = S^{-1} \|\mu\|$, então ν e μ são concentradas em um único ponto.*

Para uma demonstração deste resultado, veja [24, pág. 27, Lema 1.40].

Capítulo 2

Multiplicidade de Soluções para um Problema Crítico via Teoremas do Tipo Lusternik–Schnirelmann

2.1 O Problema

Neste capítulo, nosso objetivo é estabelecer multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon u = |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \quad u \geq 0, \end{cases} \quad (\text{P}_\varepsilon)$$

em que $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > -\lambda_1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 4$) é um domínio limitado.

Uma solução para o problema (P_ε) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \geq 0$, que satisfaz

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \varepsilon uv) dx - \int_{\Omega} u^{2^*-1} v dx = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Observação 2.1.1 *Ao longo desse trabalho, consideramos em $H_0^1(\Omega)$ a norma do gradiente*

$$||u|| = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

a qual, pela desigualdade de Poincaré, é equivalente a norma usual do $H_0^1(\Omega)$.

Primeiramente, demonstraremos algumas estimativas a priori sobre o problema (P_ε) .

Proposição 2.1.2 *Se (P_ε) tem solução não-trivial, então $\varepsilon > -\lambda_1$.*

Demonstração: Dado $u \geq 0$, $u \neq 0$ solução de (P_ε) , temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \varepsilon \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} u^{2^*-1} v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $v = \varphi_1$, onde $\varphi_1 > 0$ em Ω é uma autofunção associada a λ_1 , e usando que

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \nabla u dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 u dx$$

obtemos

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 dx + \varepsilon \int_{\Omega} u \varphi_1 dx = \int_{\Omega} u^{2^*-1} \varphi_1 dx > 0,$$

o que implica que $\lambda_1 > -\varepsilon$. ■

Além disso, se Ω for estrelado temos:

Proposição 2.1.3 *Se Ω é um domínio estrelado, limitado, com fronteira suave e o problema (P_ε) tem solução não-trivial, então $\varepsilon < 0$.*

Demonstração: Seja $u \neq 0$ uma solução de (P_ε) . Considerando

$$f(u) = u^{2^*-1} - \varepsilon u$$

temos que

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds = \frac{1}{2^*} u^{2^*} - \frac{\varepsilon}{2} u^2 \in L^1(\Omega).$$

Assim, pela Identidade de Pohozaev (ver Teorema A.1.2 no Apêndice A), segue que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu \cdot \sigma d\sigma = \frac{N}{2^*} \int_{\Omega} u^{2^*} dx - \frac{\varepsilon N}{2} \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Logo,

$$\frac{N-2}{2} \left(\int_{\Omega} u^{2^*} dx - \varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx \right) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu \cdot \sigma d\sigma = \frac{N}{2^*} \int_{\Omega} u^{2^*} dx - \frac{\varepsilon N}{2} \int_{\Omega} u^2 dx,$$

ou seja

$$\varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu \cdot \sigma d\sigma = 0.$$

Portanto,

$$\varepsilon = \frac{-\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu \cdot \sigma d\sigma}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Como Ω é estrelado, então $\nu \cdot \sigma > 0$ sobre $\partial\Omega$ e assim $\varepsilon \leq 0$. Agora, iremos mostrar que $\varepsilon < 0$. Para isso, suponha que $\varepsilon = 0$. Dessa forma,

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu \cdot \sigma d\sigma = 0,$$

o que implica que $\nabla u = 0$ sobre $\partial\Omega$ e, por conseguinte,

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \chi_{\Omega} dx = 0.$$

Logo,

$$0 = - \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} u^{2^*-1} dx$$

donde $u = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\varepsilon < 0$. ■

Observação 2.1.4 Brézis e Nirenberg em [4] provaram que o problema (P_ε) possui uma solução não-trivial se $-\lambda_1 < \varepsilon < 0$.

Neste capítulo, nosso intuito é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.1.5 Se Ω é um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 4$), então existe $\varepsilon^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, para $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$, o problema (P_ε) possui pelo menos $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.

Para alcançarmos nosso objetivo, consideremos

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2) dx, u \in H_0^1(\Omega),$$

restrito a

$$V := \left\{ u \in H_0^1(\Omega); \psi(u) = \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx = 1 \right\}.$$

Observe que $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, $\psi \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e que $c = 1$ é valor regular de ψ . Logo, V é uma subvariedade mergulhada de codimensão 1 em $H_0^1(\Omega)$.

2.2 A Condição de Palais-Smale

Lema 2.2.1 Toda sequência $(u_n) \subset V$ tal que $\varphi(u_n) \rightarrow c < S$ e $\|\varphi'(u_n)\|_* \rightarrow 0$ possui uma subsequência convergente.

Demonstração: Consideremos $\varphi(u_n) = \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + \varepsilon u_n^2) dx = \|u_n\|_{\varphi}^2$. Para melhor organizarmos a demonstração, a dividiremos em afirmações.

Afirmação 1: $\|u\|_{\varphi}$ é uma norma equivalente a $\|u\|$.

Desde que $\varepsilon < 0$ temos que $\varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx \geq \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$. Logo,

$$\|u\|_{\varphi}^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2) dx \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

de onde segue a afirmação.

Pela afirmação anterior, segue que $c \geq 0$. Se $c = 0$ então $\varphi(u_n) \rightarrow 0$, o que implica que $\|u_n\| \rightarrow 0$ e, portanto, $u_n \rightarrow 0$, o que finaliza a demonstração neste caso.

Suponhamos, agora, $c > 0$. Pela Proposição 1.2.4, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\rho_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\varphi'(u_n)\|_* = \left\| \varphi'(u_n) - \rho_n \psi'(u_n) \right\|_{H^{-1}},$$

ou seja,

$$\varphi'(u_n) - \rho_n \psi'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Como, pela Afirmação 1, (u_n) é limitada e, além disso,

$$\langle \varphi'(u_n), u_n \rangle = 2 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + 2\varepsilon \int_{\Omega} u_n^2 dx = 2\varphi(u_n)$$

e

$$\left\langle \psi'(u_n), u_n \right\rangle = 2^* \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx = 2^*,$$

segue que

$$\begin{aligned} 2 \left(\varphi(u_n) - \frac{2^*}{2} \rho_n \right) &= 2\varphi(u_n) - 2^* \rho_n \\ &= \langle \varphi'(u_n), (u_n) \rangle - \rho_n \left\langle \psi'(u_n), (u_n) \right\rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Chamando $\mu_n = \frac{2^*}{2} \rho_n$, temos que $\mu_n \rightarrow c$. Assim, podemos supor que $\mu_n > 0$ para todo n . Consideremos agora

$$v_n := \mu_n^{\frac{N-2}{4}} u_n.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 + \varepsilon v_n^2) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mu_n^{\frac{N-2}{2}} |\nabla u_n|^2 + \varepsilon \mu_n^{\frac{N-2}{2}} u_n^2 \right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*} \left(\mu_n^{\frac{N-2}{4}} \right)^{2^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{2} \mu_n^{\frac{N-2}{2}} \varphi(u_n) - \frac{1}{2^*} \mu_n^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \mu_n^{\frac{N-2}{2}} (\varphi(u_n) - \mu_n) + \frac{1}{N} \mu_n^{\frac{N}{2}} \longrightarrow \frac{c^{\frac{N}{2}}}{N}. \end{aligned}$$

Definindo $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx$$

segue que

$$\Phi(v_n) \rightarrow d = \frac{c^{\frac{N}{2}}}{N} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi'(v_n), v \right\rangle &= \int_{\Omega} (\nabla v_n \nabla v + \varepsilon v_n v) dx - \int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*-1} v dx \\ &= \mu_n^{\frac{N-2}{4}} \int_{\Omega} (\nabla u_n \nabla v + \varepsilon u_n v) dx - \mu_n^{\frac{N+2}{4}} \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*-1} v dx \\ &= \frac{\mu_n^{\frac{N-2}{4}}}{2} \langle \varphi'(u_n), v \rangle - \frac{\mu_n^{\frac{N+2}{4}}}{2^*} \left\langle \psi'(u_n), v \right\rangle \\ &= \frac{\mu_n^{\frac{N-2}{4}}}{2} \left(\langle \varphi'(u_n), v \rangle - \rho_n \left\langle \psi'(u_n), v \right\rangle \right), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|\Phi'(v_n)\|_{H^{-1}} = \frac{\mu_n^{\frac{N-2}{4}}}{2} \left\| \varphi'(u_n) - \rho_n \psi'(u_n) \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0.$$

Assim, (v_n) é uma sequência $(PS)_d$ para o funcional Φ .

Afirmção 2: (v_n) é uma sequência limitada.

Para n grande, temos que

$$\begin{aligned} d + 1 + \|v_n\| &\geq \Phi(v_n) - \frac{1}{2^*} \langle \Phi'(v_n), v_n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \varphi(v_n) - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx - \frac{1}{2^*} \varphi(v_n) + \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \varphi(v_n) \geq C \|v_n\|^2, \end{aligned}$$

donde

$$d + 1 + \|v_n\| \geq C \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \|v_n\|^2,$$

o que implica que (v_n) é limitada.

Usando a Afirmção 2, segue que

$$\int_{\Omega} \nabla v_n \nabla h dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla h dx \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega),$$

pois $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, pela imersão de Sobolev, temos que $v_n \rightarrow v$ em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < 2^*$, o que implica que $v_n \rightarrow v$ q.s. em Ω e que

$$\varepsilon \int_{\Omega} v_n h dx \rightarrow \varepsilon \int_{\Omega} v h dx \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, usando que $v_n \rightarrow v$ em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < 2^*$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*-1} h dx \rightarrow \int_{\Omega} (v^+)^{2^*-1} h dx \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega).$$

Desde que

$$\langle \Phi'(v_n), h \rangle = \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla h dx + \varepsilon \int_{\Omega} v_n h dx - \int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*-1} h dx, \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega),$$

obtemos que

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla h dx + \varepsilon \int_{\Omega} v h dx - \int_{\Omega} (v^+)^{2^*-1} h dx = 0, \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega). \quad (2.1)$$

Tomando $h = v$ em (2.1), segue que

$$\Phi(v) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx.$$

Considerando $z_n = v_n - v$ e usando o Lema de Brézis-Lieb, temos

$$\int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*} dx - \int_{\Omega} (z_n^+)^{2^*} dx \rightarrow \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx. \quad (2.2)$$

Desde que

$$\begin{aligned}\Phi(z_n) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v_n - \nabla v|^2 + \varepsilon (v_n - v)^2) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (z_n^+)^{2^*} dx \\ &= \Phi(v_n) + \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx + \Phi(v) + \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (z_n^+)^{2^*} dx - \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla v dx - \varepsilon \int_{\Omega} v_n v dx\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(z_n) &\rightarrow d + \Phi(v) + \frac{2}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} v^2 dx \\ &= d + \Phi(v) + 2 \left(\frac{1}{2^*} \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2) dx \right) \\ &= d - \Phi(v) \leq d.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|z_n\|^2 &= \langle \Phi'(v_n), v_n \rangle - \varepsilon \int_{\Omega} v_n^2 dx + \int_{\Omega} (v_n^+)^{2^*} dx - \int_{\Omega} (z_n^+)^{2^*} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (z_n^+)^{2^*} dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla v dx.\end{aligned}$$

Como (v_n) é limitada e uma sequência $(PS)_d$ para o funcional Φ , segue que $\langle \Phi'(v_n), v_n \rangle \rightarrow 0$. Assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} v^2 dx = \int_{\Omega} (v^+)^{2^*} dx.$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla v dx \rightarrow - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx,$$

já que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Usando a imersão de Sobolev, também temos

$$-\varepsilon \int_{\Omega} v_n^2 dx \rightarrow -\varepsilon \int_{\Omega} v^2 dx.$$

Tomando $h = v$ em (2.1), temos

$$\lim \|z_n\|^2 = \lim \int_{\Omega} (z_n^+)^{2^*} dx = b \geq 0$$

implicando que

$$\Phi(z_n) \rightarrow \frac{b}{N} \leq d. \quad (2.3)$$

Ademais,

$$\int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 \geq S \left(\int_{\Omega} |z_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}$$

donde

$$b \geq Sb^{\frac{2}{2^*}}. \quad (2.4)$$

Afirmção 3: $b = 0$.

Suponha, por contradição, que $b > 0$. Então, usando (2.4), temos

$$b \geq S^{\frac{N}{2}}.$$

Daí, por (2.3)

$$\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \leq \frac{b}{N} \leq d < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

o que é um absurdo, provando a afirmação. Logo, devemos ter

$$\|z_n\| \rightarrow 0,$$

isto é, $v_n \rightarrow v$ e portanto $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. ■

Corolário 2.2.2 *O funcional Φ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo $d < c^* = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$.*

Observação 2.2.3 *Note que um ponto crítico não-trivial do funcional Φ é uma solução para o problema (P_ε) .*

2.3 Multiplicidade de Soluções

Para demonstrarmos o Teorema 2.1.5, necessitamos de alguns lemas.

Lema 2.3.1 *Suponha $N \geq 4$. Se $\varepsilon \in (-\lambda_1, 0)$, então $m(\varepsilon, \Omega) := \inf\{\varphi(u); u \in V\} < S$ e o ínfimo é assumido.*

Demonstração: Pelo Lema A.1.4 do Apêndice A, existe $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$ e $v \geq 0$ tal que

$$\varphi\left(\frac{v}{\|v\|_{2^*}}\right) < S$$

o que implica que $m(\varepsilon, \Omega) < S$. Além disso, $\varphi \geq 0$ e satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [\inf\{\varphi(u); u \in V\}, S - \epsilon]$. Então, pelo Teorema 1.2.11, φ assume o ínfimo. ■

Consideremos agora a função centro de massa $\beta : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$\beta(u) = \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} x dx$$

onde

$$\int_{\Omega} (u^+)^{2^*} x dx = \left(\int_{\Omega} (u^+)^{2^*} x_1 dx, \dots, \int_{\Omega} (u^+)^{2^*} x_n dx \right).$$

Vejamos algumas propriedades desta aplicação.

Lema 2.3.2 *Seja $(u_n) \subset V$ tal que $\|u_n\|^2 \rightarrow S$. Então, $\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) \rightarrow 0$.*

Demonstração: Como, por hipótese, $\|u_n\|^2 \rightarrow S$, segue que $\|u_n^+\|^2 \rightarrow S$, pois

$$\|u_n\|^2 \geq \|u_n^+\|^2 = \frac{\|u_n^+\|^2}{\|u_n^+\|_{2^*}^2} \geq S.$$

Assim (u_n^+) é limitada e, portanto,

$$u_n^+ \rightharpoonup u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } u_n^+ \rightarrow u \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, usando o Lema 1.3.13 tem-se

$$|\nabla u_n^+ - \nabla u|^2 \rightharpoonup \mu \text{ em } M(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|u_n^+ - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } M(\mathbb{R}^N). \quad (2.5)$$

Mostraremos que ν está concentrada em um ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Pelo Lema de Concentração-Compacidade 1.4.3 e usando que $u_n \in V$, temos que

$$\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1} \|\mu\|, \quad (2.6)$$

$$\overline{\lim} \|\nabla u_n^+\|_2^2 = S = \|\nabla u\|_2^2 + \|\mu\| + \mu_\infty \quad (2.7)$$

e

$$1 = \lim \|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| + \nu_\infty. \quad (2.8)$$

Como $u_n^+ = 0$ em $(B_R(0))^C$, para R suficientemente grande, temos que

$$\nu_\infty = 0 \text{ e } \mu_\infty = 0.$$

Daí, por (2.7),

$$S = \|\nabla u\|_2^2 + \|\mu\| \quad (2.9)$$

e por (2.8) segue que

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| = 1. \quad (2.10)$$

Temos também que

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq S^{-1} \|\nabla u\|_2^2. \quad (2.11)$$

Assim, usando (2.6), (2.9) e (2.11), obtemos

$$S \geq S \|u\|_{2^*}^2 + S \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}}$$

e, portanto,

$$1 \geq \left(\|u\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}}. \quad (2.12)$$

Vamos supor, por absurdo, que

$$0 < \|u\|_{2^*}^{2^*}, \|\nu\| < 1.$$

Logo, usando (2.10) e (2.12), segue que

$$1 = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| < \left(\|u\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \leq 1,$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} = 1 \text{ e } \|\nu\| = 0 \text{ ou } \|u\|_{2^*}^{2^*} = 0 \text{ e } \|\nu\| = 1. \quad (2.13)$$

Note que a primeira opção em (2.13) não pode ocorrer, já que, por (2.9), $S \geq \|\nabla u\|_2^2$ o que implicaria que

$$S = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2},$$

o que contradiz o Proposição A.1.6. Sendo assim, por (2.6) e (2.9) temos $\|\mu\| = S$ o que mostra que

$$\|v\|^{\frac{2}{2^*}} = S^{-1} \|\mu\|.$$

Pelo Lema de Concentração de Compacidade 1.4.3, segue que ν está concentrada em um ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Afirmamos que $y \in \overline{\Omega}$, pois caso contrário $\nu(\overline{\Omega}) = 0$ e, por (2.5) e (2.13), temos que

$$(u_n^+)^{2^*} dx \rightharpoonup v \text{ em } M(\mathbb{R}^N),$$

o que significa que

$$\int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx \rightarrow 0,$$

o que é uma contradição, pois

$$\int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*} dx = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí, devemos ter

$$\frac{\int_{\Omega} (u^+)^{2^*} x dx}{\int_{\Omega} (u^+)^{2^*} dx} \rightarrow \frac{\int_{\Omega} x d\nu}{\int_{\Omega} d\nu} = y,$$

ou seja, $\beta(u_n) \rightarrow y \in \overline{\Omega}$, e o lema está provado. ■

Consideremos os seguintes conjuntos

$$\Omega_r^+ := \{x \in \mathbb{R}^N; \text{dist}(x, \Omega) < r\}$$

e

$$\Omega_r^- := \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$$

onde $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Proposição 2.3.3 *Para $r > 0$ suficientemente pequeno Ω_r^+ e Ω_r^- são homotopicamente equivalentes a Ω .*

Demonstração: Como Ω é limitado e suave segue que $\partial\Omega$ é uma variedade diferenciável compacta. Assim, existe um $\epsilon > 0$ tal que sempre que $x, y \in \partial\Omega$, os segmentos das retas normais de comprimento 2ϵ , centrados em x e y , são disjuntos, isto é, $\partial\Omega$ tem uma vizinhança tubular. Considerando $0 < r < \epsilon$ temos que cada ponto $p \in \Omega_r^+$ está associado

a uma única direção normal a $\partial\Omega$. Denotaremos o vetor unitário na direção dessa normal por $\eta(p)$. Dessa forma, a projeção $\pi : \Omega \rightarrow \overline{\Omega_r^-}$ e a função $f : \Omega_r^+ \rightarrow \Omega$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - r\eta(x), & \text{se } x \in \Omega_r^+ \setminus \Omega \\ \pi(x), & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

estão bem definidas. Além disso, $f \circ \pi$ é homotópico à Id_Ω e $\pi \circ f$ é homotópico à $Id_{\Omega_r^+}$. Logo, Ω_r^+ é homotopicamente equivalente a Ω . Analogamente mostra-se que Ω_r^- é homotopicamente equivalente a Ω . ■

Tomemos um $r > 0$ suficientemente pequeno tal que Ω_r^+ e Ω_r^- sejam homotopicamente equivalentes a Ω e que $B(0, r) \subset \Omega$. Definamos

$$\begin{aligned} m(\varepsilon) &= m(\varepsilon, B(0, r)) \\ &= \inf \left\{ \int_{B(0, r)} (|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2) ; u \in H_0^1(B(0, r)) \text{ e } \int_{B(0, r)} (u^+)^{2^*} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Da mesma forma como no Lema 2.3.1, temos que $m(\varepsilon) < S$. Além disso, encarando $H_0^1(B(0, r)) \subset H_0^1(\Omega)$, estendendo as funções como sendo zero fora de $B(0, r)$, segue que $m(\varepsilon, \Omega) \leq m(\varepsilon)$.

Lema 2.3.4 *Existe $\varepsilon^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que para $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$, temos que se $u \in \varphi^{m(\varepsilon)}$ então $\beta(u) \in \Omega_r^+$.*

Demonstração: Para cada $u \in V$, temos pela Desigualdade de Hölder que

$$\|u^+\|_2^2 = \int_\Omega |u^+|^2 \leq \left(\int_\Omega |u^+|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} |\Omega|^{\frac{2}{N}} = |\Omega|^{\frac{2}{N}}.$$

Pelo Lema 2.3.2, existe $\epsilon > 0$ tal que se $u \in V$ e $S \leq \|u\|^2 \leq S + \epsilon$, então $\beta(u) \in \Omega_r^+$. A partir daí, escolha $\varepsilon^* = \frac{-\epsilon}{|\Omega|^{\frac{2}{N}}}$. Agora, se $\varepsilon^* < \varepsilon < 0$ e $u \in \varphi^{m(\varepsilon)}$ então

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq m(\varepsilon) - \varepsilon \|u\|_2^2 \\ &\leq S - \varepsilon \|u^+\|_2^2 \\ &\leq S - \varepsilon^* |\Omega|^{\frac{2}{N}} \\ &= S + \epsilon \end{aligned}$$

e, portanto, $\beta(u) \in \Omega_r^+$. ■

Lema 2.3.5 *Se $N \geq 4$ e $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$ então $\text{cat}_{\varphi^{m(\varepsilon)}}(\varphi^{m(\varepsilon)}) \geq \text{cat}_\Omega(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{B(0, r)} (v^+)^{2^*} dx = 1 \text{ e } \int_{B(0, r)} (|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2) dx = m(\varepsilon).$$

Observe que v é solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon u = \theta(u^+)^{2^*-1}, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema A.1.8 e pela Proposição A.1.7 do Apêndice A, podemos considerar v radial. Assim, defina

$$\begin{aligned} \gamma : \Omega_r^- &\longrightarrow \varphi^{m(\varepsilon)} \\ y &\longrightarrow \gamma(y) \end{aligned}$$

em que

$$\gamma(y)(x) = \begin{cases} v(x-y), & \text{se } x \in B(y, r) \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus B(y, r). \end{cases}$$

Como $v \in C^2(\Omega)$ temos que γ é contínua. Além disso, $\gamma(y) \in \varphi^{m(\varepsilon)}$ pois

$$\int_{\Omega} (\gamma(y)^+)^{2^*} dx = \int_{B(y, r)} (v^+(x-y))^{2^*} dx = \int_{B(0, r)} (v^+)^{2^*} dx = 1$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma(y)) &= \int_{\Omega} (|\nabla \gamma(y)|^2 + \varepsilon \gamma(y)^2) dx = \int_{B(y, r)} (|\nabla v(x-y)|^2 + \varepsilon v(x-y)^2) dx \\ &= \int_{B(0, r)} (|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2) dx = m(\varepsilon), \end{aligned}$$

e $\beta \circ \gamma = id$, visto que se $y \in \Omega_r^-$ então, para $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\gamma(y)^+)^{2^*} x_i dx &= \int_{B(y, r)} (v(x-y)^+)^{2^*} x_i dx \\ &= \int_{B(0, r)} (v(z)^+)^{2^*} (z_i + y_i) dz \\ &= y_i + \int_{B(0, r)} (v(z)^+)^{2^*} z_i dz \\ &= y_i. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que

$$\varphi^{m(\varepsilon)} = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

onde os A_i 's, são fechados contráteis em $\varphi^{m(\varepsilon)}$, isto é, existem $h_i \in C([0, 1] \times A_i, \varphi^{m(\varepsilon)})$ tais que

$$h_i(0, u) = u \text{ e } h_i(1, u) = \text{cte}, \text{ para todo } u \in A_i.$$

Considerando $B_i = \gamma^{-1}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Temos que os B_i 's são fechados e que

$$\Omega_r^- = \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Defina

$$\begin{aligned} g_i : [0, 1] \times B_i &\longrightarrow \Omega_r^+ \\ (t, y) &\longmapsto \beta(h_i(t, \gamma(y))). \end{aligned}$$

Como $h_i(t, \gamma(t)) \in \varphi^{m(\varepsilon)}$, temos, pelo Lema 2.3.4, que g_i está bem definida. Além disso, como $\beta \circ \gamma = id$, temos que $g_i(0, y) = \beta(\gamma(y)) = y$ e, ademais, $g_i(1, y) = \beta(h_i(1, \gamma(y))) = y$. Logo, os B_i 's são contráteis em Ω_r^+ , o que implica que

$$cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = cat_{\varphi^{m(\varepsilon)}}(\varphi^{m(\varepsilon)}).$$

Usando que Ω_r^+ e Ω_r^- são homotopicamente equivalentes a Ω segue que

$$cat_{\Omega}(\Omega) = cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-)$$

completando a demonstração. ■

Demonstração do Teorema 2.1.5: Temos que $m(\varepsilon, \Omega) \leq m(\varepsilon) < S$. Pelo Lema 2.2.1, φ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [m(\varepsilon, \Omega), m(\varepsilon)]$. Daí, pelo Teorema 1.2.11, $\varphi^{m(\varepsilon)}$ possui, pelo menos, $cat_{\varphi^{m(\varepsilon)}}(\varphi^{m(\varepsilon)})$ pontos críticos de $\varphi|_V$. Portanto, pelo Lema 2.3.5, se $n = cat_{\Omega}(\Omega)$, então existem, pelo menos, $u_1, \dots, u_n \in V$ e $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 = \left\| \varphi'(u_i) \right\|_* = \left\| \varphi'(u_i) - \rho_i \psi'(u_i) \right\|_{H^{-1}}, i = 1, \dots, n.$$

Considere

$$\mu_i = \frac{2}{2^*} \rho_i \text{ e } v_i = \mu_i^{\frac{N-2}{4}} u_i.$$

Logo,

$$\left\| \Phi'(v_i) \right\|_{H^{-1}} = \frac{\mu_i^{\frac{N-2}{4}}}{2} \left\| \varphi'(u_i) - \rho_i \psi'(u_i) \right\|_{H^{-1}} = 0, i = 1, \dots, n$$

implicando que $\Phi'(v_i) = 0$ e portanto

$$\int_{\Omega} \nabla v_i \nabla v dx + \varepsilon \int_{\Omega} v_i v dx = \int_{\Omega} (v_i^+)^{2^*-1} v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $v = v_i^-$, temos que

$$-\varphi(v_i^-) = - \left(\int_{\Omega} |\nabla v_i^-|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |v_i^-|^2 dx \right) = 0,$$

donde $v^- = 0$. Assim, $v = v^+ \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, são soluções não triviais do Problema (P_{ε}) . ■

Capítulo 3

Multiplicidade de Solução para um Problema Crítico via Teorema do Passo da Montanha

3.1 O Problema

Neste capítulo estamos interessados em estudar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

onde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 3$, λ é uma constante positiva, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e ímpar na segunda variável. Além disso, consideramos as seguintes condições sobre f :

f₀) $\sup\{|f(x, s)|; \text{ tal que } x \in \Omega, |s| \leq M\} < +\infty$, para cada $M > 0$;

f₁) $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$, uniformemente q.s. em Ω ;

f₂) Existem $\sigma \in [0, 2)$ e $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2} f(x, s) s - F(x, s) \geq -a_1 - a_2 |s|^\sigma, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega,$$

onde $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.

f₃) Existe uma constante $B \geq 0$ tal que

$$F(x, s) \geq \lambda_k \frac{|s|^2}{2} - B, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega,$$

onde λ_k é o k -ésimo autovalor de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Dirichlet.

f₄) $\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{2F(x, s)}{s^2} = a(x) \leq \lambda_j$, uniformemente q.s. em Ω , onde $\lambda_j \leq \lambda_k$ e λ_j é o j -ésimo autovalor de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Dirichlet.

Uma típica função satisfazendo as condições acima é $f(x, s) = \varepsilon s^3$ com $\varepsilon \geq 2\lambda_k$, quando $N = 3$.

Uma solução para o problema (P_λ) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{2^*-1} v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que uma solução do problema (P_λ) é um ponto crítico do funcional

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Usando argumentos padrões, veja por exemplo [8], mostra-se que sob a condição (f_1) , o funcional I_λ é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$.

3.2 A Condição de Palais-Smale

Nesta seção, mostraremos que o funcional energia I_λ satisfaz a condição de Palais-Smale, mostrando, dessa forma, uma hipótese da versão do Teorema do Passo da Montanha que usaremos para garantirmos a existência e multiplicidade de soluções para o problema (P_λ) .

Definição 3.2.1 *Dado E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, e denotamos por $(PS)_c$, se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que*

$$I(u_n) \rightarrow c$$

e

$$I'(u_n) \rightarrow 0,$$

possui uma subsequência convergente.

Mostraremos que o funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$ para um nível c adequado, quando λ é suficientemente pequeno.

Lema 3.2.2 *Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, existe duas medidas não negativas e limitadas em $\overline{\Omega}$, μ e ν , e existe uma subsequência de (u_n) , também denotada por (u_n) , tal que $|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$, $|u_n|^{2^*} dx \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido das medidas.*

Demonstração: Segue do Lema 1.3.13, considerando que $(u_n^{2^*})$ é limitada em $L^1(\Omega)$ e $(|\nabla u_n|^2)$ é limitada em $L^1(\Omega)$. ■

Desde que $\sup\{|f(x, s)|; x \in \Omega, |s| \leq M\} < +\infty$ para cada $M > 0$ e (f_1) vale, obtemos que dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x, s)s| \leq C_\epsilon + \epsilon |s|^{2^*} \tag{3.1}$$

e

$$|F(x, s)| \leq C_\epsilon + \epsilon |s|^{2^*}. \tag{3.2}$$

Lema 3.2.3 *Suponha que f satisfaz a condição (f_1) . Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,*

$$\int_{\Omega} |f(x, u_n) u_n - f(x, u) u| dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (3.3)$$

Demonstração: Temos que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u_n \rightarrow u \text{ q.s. em } \Omega.$$

Como f é uma função de Carathéodory, então

$$f(x, u_n) u_n \rightarrow f(x, u) u \text{ q.s. em } \Omega$$

e pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} \leq C \text{ e } \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, dado $\delta > 0$, tomemos $0 < \epsilon < \frac{\delta}{4C}$. Pelo Teorema de Egorov (ver A.1.10 do Apêndice), existe $\widehat{\Omega} \subset \Omega$ tal que

$$f(x, u_n) u_n \rightarrow f(x, u) u \text{ uniformemente em } \widehat{\Omega} \text{ e } |\Omega \setminus \widehat{\Omega}| < \frac{\delta}{4C_\epsilon}. \quad (3.4)$$

Usando (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \widehat{\Omega}} |f(x, u_n) u_n - f(x, u) u| dx &\leq \int_{\Omega \setminus \widehat{\Omega}} |f(x, u_n) u_n| dx + \int_{\Omega \setminus \widehat{\Omega}} |f(x, u) u| dx \\ &\leq \delta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Daí,

$$\int_{\Omega} |f(x, u_n) u_n - f(x, u) u| dx \leq \int_{\widehat{\Omega}} |f(x, u_n) u_n - f(x, u) u| dx + \delta \quad (3.6)$$

e, portanto fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (3.6), temos, por (3.4) e (3.5), que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f(x, u_n) u_n - f(x, u) u| dx \leq \delta.$$

Como δ é arbitrário segue o resultado. ■

Por um argumento análogo ao da prova do lema acima, podemos demonstrar que se (u_n) é uma sequência limitada, então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência,

$$\int_{\Omega} f(x, u_n) v dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x, u) v dx \text{ quando } n \rightarrow +\infty \quad (3.7)$$

e

$$\int_{\Omega} |u_n|^{2^*-2} u_n v dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^{2^*-2} u v dx \text{ quando } n \rightarrow +\infty, \quad (3.8)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Lema 3.2.4 *Suponha que f satisfaz (f_1) . Seja (u_n) uma sequência limitada satisfazendo $I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então considerando ν_j , $j \in J$, dado no Lema de Concentração-Compacidade 1.4.2, temos $\nu_j \geq \left(\frac{S}{\mu}\right)^{\frac{N}{2}}$ ou $\nu_j = 0$.*

Demonstração: Usando o Lema de Concentração-Compacidade 1.4.2, temos que

$$\mu(\{x_j\}) \geq \mu_j \geq S(\nu_j)^{\frac{2}{2^*}}. \quad (3.9)$$

Considere $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e

i) $\psi(x) = 1$, se $x \in B(0, 1)$;
 ii) $\psi(x) = 0$, se $x \in B(0, 2)^c$.

Agora, dado $\epsilon > 0$ seja

$$\psi_\epsilon(x) := \psi\left(\frac{x - x_j}{\epsilon}\right), \quad x \in \Omega.$$

Logo, a sequência $(\psi_\epsilon u_n)$ está em $H_0^1(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} & \langle I'(u_n), \psi_\epsilon u_n \rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla (\psi_\epsilon u_n) dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-1} (\psi_\epsilon u_n) dx - \int_\Omega f(x, u_n) (\psi_\epsilon u_n) dx \\ &\geq \int_\Omega \nabla u_n \nabla (\psi_\epsilon u_n) dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*} \psi_\epsilon dx - \int_\Omega f(x, u_n) (\psi_\epsilon u_n) dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \psi_\epsilon dx + \int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon u_n dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*} \psi_\epsilon dx - \int_\Omega f(x, u_n) (\psi_\epsilon u_n) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pelo Lema de Concetração-Compacidade 1.4.2, temos que

$$\lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*} \psi_\epsilon dx \rightarrow \lambda \int_\Omega \psi_\epsilon d\nu$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \psi_\epsilon dx \rightarrow \int_\Omega \psi_\epsilon d\mu$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, temos também que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Logo, pelo Teorema A.1.5 do Apêndice A, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq h$ q.s. em Ω . Usando a desigualdade de Hölder e que (u_n) é limitada, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \psi_\epsilon u_n dx \right| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \psi_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1 \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \psi_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1 \left(\int_\Omega h^2 |\nabla \psi_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Além disso,

$$\nabla \psi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \nabla \psi \left(\frac{x - x_j}{\epsilon} \right)$$

donde $\nabla \psi_\epsilon = 0$, se $|x - x_j| < \epsilon$ e $\nabla \psi_\epsilon = 0$, se $|x - x_j| > 2\epsilon$. Logo, de (3.11) e usando o Teorema da Mudança de Variável, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \psi_\epsilon u_n dx \right| &\leq K_1 \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\epsilon < |x - x_j| < 2\epsilon} h(x)^2 \left| \nabla \psi \left(\frac{x - x_j}{\epsilon} \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1 \epsilon^{\frac{N}{2}-1} \left(\int_{1 < |y| < 2} h(\epsilon y + x_j)^2 |\nabla \psi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1 \epsilon^{\frac{N}{2}-1} \|\nabla \psi\|_{\infty} \left(\int_{1 < |y| < 2} h(\epsilon y + x_j)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1 \epsilon^{\frac{N}{2}-1} \|\nabla \psi\|_{\infty} \left(\int_{\Omega} h(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim de (3.10), temos

$$\begin{aligned} &\left\langle I'_\lambda(u_n), \psi_\epsilon u_n \right\rangle \\ &\geq -K_1 \epsilon^{\frac{N}{2}-1} \|\nabla \psi\|_{\infty} \left(\int_{\Omega} h(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \psi_\epsilon dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} \psi_\epsilon dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) (\psi_\epsilon u_n) dx. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, temos

$$-K_1 \epsilon^{\frac{N}{2}-1} \|\nabla \psi\|_{\infty} \left(\int_{\Omega} h(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_{\Omega} \psi_\epsilon d\mu \leq \lambda \int_{\Omega} \psi_\epsilon d\nu + \int_{\Omega} f(x, u) (\psi_\epsilon u) dx. \quad (3.12)$$

De (3.1), segue que

$$\int_{\Omega} f(x, u) (\psi_\epsilon u) dx \leq \int_{\Omega} C_{\epsilon_1} \psi_\epsilon dx + \epsilon_1 \int_{\Omega} |u|^{2^*} \psi_\epsilon dx \quad (3.13)$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} C_{\epsilon_1} \psi_\epsilon dx = 0 \text{ e } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u|^{2^*} \psi_\epsilon dx = 0.$$

Assim, usando (3.13) em (3.12) e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\mu_j = \mu(\{x_j\}) \leq \lambda \nu(\{x_j\}) = \lambda \nu_j,$$

e, por (3.9), chegamos à

$$S(\nu_j)^{\frac{2}{2^*}} \leq \lambda \nu_j.$$

■

Lema 3.2.5 *Suponha f satisfazendo (f_1) . Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então, a menos de subsequência,*

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ em } [L^2(\Omega)]^N.$$

Demonstração: Note que existe um $M > 0$ tal que $\int_{\Omega} |f(x, u_n)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \leq M$, pois, por (f_1) , temos que dado $\epsilon > 0$ existe $C_{\epsilon} > 0$ tal que

$$|f(x, u_n)| \leq C_{\epsilon} + \epsilon |u_n|^{2^*-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, u_n)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx &\leq \int_{\Omega} \left(C_{\epsilon} + \epsilon |u_n|^{2^*-1} \right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(|C_{\epsilon}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} + \epsilon |u_n|^{2^*} \right) dx \\ &\leq M. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Agora, mostraremos algumas afirmações que nos auxiliarão na prova do lema.

Afirmação 1: Seja $K \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ um conjunto compacto. Então, $u_n \rightarrow u$ em $L^{2^*}(K)$.

Desde que $\{x_j; j \in J\}$ é finito e $K \cap \{x_j; j \in J\} = \emptyset$, então

$$d(K, \{x_j; j \in J\}) = \delta > 0.$$

Daí, considere $0 < \epsilon < \delta$ e defina

$$A_{\epsilon} = \{x \in \Omega; d(x, K) < \epsilon\}.$$

Seja $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, cumprindo $0 \leq \varphi \leq 1$ e

i) $\varphi = 1$ em $A_{\frac{\epsilon}{2}}$;

ii) $\varphi = 0$ em $\Omega \setminus A_{\epsilon}$.

Assim, temos que

$$\int_K |u_n|^{2^*} dx \leq \int_{A_{\epsilon}} |u_n|^{2^*} \varphi dx = \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} \varphi dx$$

e como $A_{\epsilon} \cap \{x_j; j \in J\} = \emptyset$, pelos Lemas 3.2.2 e 1.4.2, segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_K |u_n|^{2^*} dx &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi d\nu \\ &= \int_{\Omega} |u|^{2^*} \varphi dx \\ &= \int_{A_{\epsilon}} |u|^{2^*} \varphi dx \leq \int_{A_{\epsilon}} |u|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_K |u_n|^{2^*} dx \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{A_{\epsilon}} |u|^{2^*} dx = \int_K |u|^{2^*} dx \tag{3.15}$$

já que, $\chi_{A_{\epsilon}} |u|^{2^*} \rightarrow |u|^{2^*}$ q.s. em Ω quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $\chi_{A_{\epsilon}} |u|^{2^*} \leq |u|^{2^*}$ q.s. em Ω .

Desse modo, por (3.15), $L^{2^*}(K)$ ser uniformemente convexo e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(K)$, temos, pelo Teorema A.1.5 do Apêndice A, que $u_n \rightarrow u$ em $L^{2^*}(K)$.

Afirmção 2: Seja $K \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ um conjunto compacto. Então $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ em $(L^2(K))^N$.

Defina $\varphi \in C_0^\infty \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ em K . Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \varphi dx \\ &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) \varphi dx - \int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u) \varphi dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como (φu_n) é limitada,

$$\langle I'_\lambda(u_n), (u_n - u) \varphi \rangle \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) \varphi dx + \int_\Omega \nabla u_n (u_n - u) \nabla \varphi dx \\ &- \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx - \int_\Omega f(x, u_n) (u_n - u) \varphi dx \\ &= o(1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim, substituindo (3.17) em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_K |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \nabla u_n (u - u_n) \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx \\ &+ \int_\Omega f(x, u_n) (u_n - u) \varphi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla (u - u_n) \varphi dx + o(1). \end{aligned}$$

Agora, para finalizarmos a prova da Afirmção 2, resta mostrar que todas as integrais do lado direito da desigualdade acima convergem para zero quando $n \rightarrow +\infty$. Para a primeira integral, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega \nabla u_n (u - u_n) \nabla \varphi dx \leq \|\nabla \varphi\|_\infty \|u_n\| \cdot \|u_n - u\|_2 \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow +\infty$, já que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Para a segunda integral, usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx &= \lambda \int_{\text{supp}(\varphi)} |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx \\ &\leq \lambda \left(\|u_n\|_{L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|u_n - u\|_{L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$, pois (u_n) é limitado em $L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))$ e, pela Afirmação 1, $u_n \rightarrow u$ em $L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))$. Para a terceira integral, e novamente pela desigualdade de Hölder e por (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, u_n)(u_n - u)\varphi| dx &\leq \int_{\text{supp}(\varphi)} |f(x, u_n)(u_n - u)| dx \\ &\leq M^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|u_n - u\|_{L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$, pois, pela Afirmação 1, $u_n \rightarrow u$ em $L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))$. Para a quarta integral, observemos que

$$T(v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \varphi dx$$

é linear e contínua, e como $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (u - u_n) \varphi dx \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow +\infty$ o que demonstra a afirmação.

Seja

$$K_j = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j} \text{ e } d(x, \{x_j; j \in J\}) \geq \frac{1}{j}\}$$

Como, pela Afirmação 2, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ em $(L^2(K_1))^N$ temos que existe (u_n^1) subsequência de (u_n) tal que $\nabla u_n^1 \rightarrow \nabla u$ q.s. em K_1 . Considere

$$u_{n_1} := u_1^1$$

Novamente, pela Afirmação 2, temos que $\nabla u_{n_1}^1 \rightarrow \nabla u$ em $(L^2(K_2))^N$. Logo existe $(u_{n_1}^2)$ subsequência de $(u_{n_1}^1)$ tal que $\nabla u_{n_1}^2 \rightarrow \nabla u$ q.s. em K_2 . Como antes, seja

$$u_{n_2} = u_{n_1}^2.$$

Procedendo desta forma, temos $\nabla u_{n_j}^{j-1} \rightarrow \nabla u$ em $(L^2(K_j))^N$, donde existe $(u_{n_j}^j)$ subsequência de $(u_{n_j}^{j-1})$ tal que $\nabla u_{n_j}^j \rightarrow \nabla u$ q.s. em K_j para $j \in \mathbb{N}$. Considerando

$$u_{n_j} = u_{n_j}^j,$$

obtemos (u_{n_j}) subsequência de (u_n) tal que a partir do j -ésimo termo

$$\nabla u_{n_j} \rightarrow \nabla u \text{ q.s. em } K_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}$$

e como

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$$

segue que

$$\nabla u_{n_j} \rightarrow \nabla u \text{ q.s. em } \Omega.$$

■

Proposição 3.2.6 *Suponha f satisfazendo (f_1) e (f_2) . Então, dado $M > 0$, existe $\lambda_* > 0$ tal que I_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < M$ e $0 < \lambda < \lambda_*$.*

Demonstração: Dado $M > 0$, considere

$$\lambda_* = \min \left\{ S, \left[\frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{N}{2}-\frac{1}{\alpha}}} \right\} \quad (3.18)$$

onde $A = a_1 |\Omega| + a_2 |\Omega|^\alpha$, $\alpha = (2^* - \sigma)/2^*$ e σ, a_1, a_2 são dadas na condição (f_2) . Desde que $\sigma < 2$, segue que $\frac{1}{\alpha} < \frac{N}{2}$ e considerando $\lambda \in (0, \lambda_*)$, temos que

$$\left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{2}} > 1 \quad (3.19)$$

e como

$$\frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\alpha}}},$$

obtemos

$$\left[\frac{(N(M+A))}{\lambda} \right]^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{2}}. \quad (3.20)$$

Tomando $c < M$, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

i) $I_\lambda(u_n) \rightarrow c$;

ii) $I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Primeiramente, mostraremos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De i) e ii) segue que

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle \leq c + 1 + \|u_n\| \quad (3.21)$$

para n grande. Por outro lado, usando (f_2) segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle &= \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2^*} \right) \int_\Omega |u_n|^{2^*} dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx \\ &\geq \frac{\lambda}{N} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} - a_1 |\Omega| - a_2 \int_\Omega |u_n|^{2^*(1-\alpha)} dx \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*(1-\alpha)} dx \leq |\Omega|^\alpha \|u_n\|_{2^*}^{2^*(1-\alpha)}.$$

Portanto,

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle \geq \frac{\lambda}{N} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} - a_1 |\Omega| - a_2 |\Omega|^\alpha \|u_n\|_{2^*}^{2^*(1-\alpha)}. \quad (3.22)$$

Considerando

$$a = \left(\frac{1-\alpha}{\delta} \right)^{1-\alpha} \|u_n\|_{2^*}^{2^*(1-\alpha)}, \quad b = \left(\frac{\delta}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{1-\alpha},$$

temos, pela desigualdade de Young, que

$$\|u_n\|_{2^*}^{2^*(1-\alpha)} \leq \delta \|u_n\|_{2^*}^{2^*} + C_\delta, \quad (3.23)$$

em que

$$\delta = \frac{\lambda}{2Na_2|\Omega|^\alpha} \text{ e } C_\delta = \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Logo, por (3.21), (3.22), (3.23), segue que

$$\|u_n\| + c + 1 \geq \frac{\lambda}{N} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} - a_1 |\Omega| - a_2 |\Omega|^\alpha \left(\delta \|u_n\|_{2^*}^{2^*} + C_\delta \right)$$

e, portanto, existe $C > 0$ tal que

$$C \|u_n\| + C \geq \|u_n\|_{2^*}^{2^*}. \quad (3.24)$$

Por i),

$$I_\lambda(u_n) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\mu}{2^*} \int_\Omega |u_n|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x, u_n) dx < 1 + c$$

para n grande. Assim, usando (3.2), obtemos

$$\frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{2^*} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} - C_\epsilon |\Omega| - \frac{\epsilon}{2^*} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} < 1 + c.$$

Daí, empregando (3.24), segue que

$$\|u_n\|^2 < C' + C' \|u_n\|,$$

provando que (u_n) é limitado. Assim, a menos de subsequência, (u_n) converge fraco para $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, (u_n) satisfaz (3.3), (3.7) e (3.8), e dos Lemas 3.2.2, 1.4.2 e 3.2.5 temos que

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ em } [L^2(\Omega)]^N \quad (3.25)$$

e

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \quad (3.26)$$

onde δ_{x_j} é a massa de Dirac, ν é uma medida finita e positiva em $\bar{\Omega}$, J é finito, $\{x_j; j \in J\} \subset \bar{\Omega}$ e $\{\nu_j; j \in J\}$ é uma família de números positivos. Observe que

$$\int_\Omega d\nu < \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{p}}, \quad (3.27)$$

pois se $\int_\Omega d\nu \leq 1$, o resultado segue de (3.19). Agora, se $\int_\Omega d\nu > 1$, fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (3.22), tem-se

$$c \geq \frac{\lambda}{N} \int_\Omega d\nu - a_1 |\Omega| - a_2 |\Omega|^\alpha \left(\int_\Omega d\nu \right)^{1-\alpha}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{N} \int_{\Omega} d\nu &\leq c + a_1 |\Omega| + a_2 |\Omega|^{\alpha} \left(\int_{\Omega} d\nu \right)^{1-\alpha} \\ &\leq (M + a_1 |\Omega| + a_2 |\Omega|^{\alpha}) \left(\int_{\Omega} d\nu \right)^{1-\alpha} \\ &\leq (M + A) \left(\int_{\Omega} d\nu \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

e assim, por (3.20),

$$\int_{\Omega} d\nu \leq \left(\frac{(M + A) N}{\mu} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{S}{\mu} \right)^{\frac{N}{p}}.$$

A partir daí e usando (3.27) obtemos que

$$\nu_j = \int_{\{x_j\}} d\nu \leq \int_{\Omega} d\nu < \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{p}}.$$

Logo, pelo Lema 3.2.4, $\nu_j = 0$ para todo $j \in J$. Desse modo, por (3.26),

$$\int_{\Omega} |u_n|^{2^*} dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \quad (3.28)$$

Como

$$\langle I'_{\lambda}(u_n), u_n \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx$$

e sendo (u_n) limitada, segue por *ii*), (3.28) e (3.3), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + \int_{\Omega} f(x, u) u dx \quad (3.29)$$

Por outro lado, temos que

$$\langle I'_{\lambda}(u_n), u \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2^*-2} u_n u dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) u dx \quad (3.30)$$

e tendo em vista que $u_n \rightarrow u$ em $L^{2^*-1}(\Omega)$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{2^*-2} u_n u dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx.$$

Daí, fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (3.30) obtemos, por *ii*), (3.25) e (3.7), que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + \int_{\Omega} f(x, u) u dx.$$

Disto e de (3.29), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Assim, como $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue, da Proposição A.1.1 do Apêndice A, que $u_n \rightarrow u$, o que finaliza a prova. ■

3.3 Multiplicidade de Soluções

Nesta seção, vamos obter a multiplicidade de soluções para o problema (P_λ) quando λ é suficientemente pequeno. Para tanto utilizaremos a seguinte versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, cuja prova pode ser encontrada em [1]:

Teorema 3.3.1 *Seja $E = V \oplus X$, onde E é um espaço de Banach real e V tem dimensão finita. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional par que satisfaz $I(0) = 0$ e*
(I₁) existe uma constante $\rho > 0$, tal que, $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq 0$;
(I₂) existe um subespaço W de E com $\dim V < \dim W < +\infty$ e existe um $M > 0$, tal que, $\max_{u \in W} I(u) < M$;
(I₃) considerando $M > 0$ dado em (I₂), I satisfazendo $(PS)_c$ para $0 \leq c \leq M$.
Então I possui ao menos $\dim W - \dim V$ pares de pontos críticos não triviais.

Sejam $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$ a sequência de autovalores de $-\Delta$ em Ω com as condições de fronteira de Dirichlet e φ_i as autofunções correspondentes com $\|\varphi_i\| = 1$. Considerando $\lambda_j \leq \lambda_k$, dado em (f_3) e (f_4) , tomemos

$$V = \{0\}, \text{ se } j = 1,$$

$$V = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}\}, \text{ se } j > 1$$

e

$$W = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}.$$

Para verificarmos as hipóteses do Teorema 3.3.1, ao longo desta seção consideraremos a decomposição

$$H_0^1 = V \oplus V^\perp.$$

Nos lemas a seguir, mostraremos que as demais hipóteses do Teorema 3.3.1 são atendidas e começaremos verificando que a hipótese (I_2) vale no subespaço W .

Lema 3.3.2 *Suponha que f satisfaz (f_3) . Então existe M_k , independente de λ tal que $\max_{u \in W} I_\lambda(u) < M_k$.*

Demonstração: Temos, por (f_3) , que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx + B|\Omega| - \frac{\lambda_k}{2} \int_\Omega |u|^2 dx$$

e como

$$\lambda_k \geq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |v|^2 dx}, \text{ para todo } v \in W$$

segue que

$$I_\lambda(u) \leq -\frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx + B|\Omega| \leq B|\Omega|.$$

■

Lema 3.3.3 *Seja $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $a \leq \neq \lambda_j$. Então, existe $\beta > 0$ tal que, para todo $u \in H_0^1 \cap V^\perp$,*

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a^+ u^2) dx \geq \beta \int_{\Omega} u^2 dx,$$

onde $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Demonstração: Consideremos o conjunto

$$A = \left\{ u \in V^\perp; \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \right\}$$

e defina

$$\beta = \inf_{u \in A} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a^+ u^2) dx.$$

Observe que para demonstrarmos o lema basta provar que $\beta > 0$. Temos que $\beta \geq 0$, pois para $u \in V^\perp$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_j \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Afirmamos que β é assumido. Para mostrarmos isso, tomemos $(u_n) \subset A$ tal que

$$\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - a^+ u_n^2) dx.$$

Como $\int_{\Omega} a^+ u^2 \leq \|a\|_\infty$, temos, para n suficientemente grande, que

$$\|u_n\|^2 \leq \beta + 1 + \|a\|_\infty.$$

Assim $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e, pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, $u_n \rightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$. Daí, pelo Teorema A.1.5, a menos de subsequência $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ e $|u_n(x)| \leq h(x)$ q.s. em Ω , onde $h \in L^2(\Omega)$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos que

$$1 = \int_{\Omega} u_n^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} u_0^2 dx \text{ e } \int_{\Omega} a^+ u_n^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} a^+ u_0^2 dx$$

Logo $u_0 \in A$ e

$$\|u_0\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - a^+ u_n^2) dx + \int_{\Omega} a^+ u_n^2 dx \right] = \beta + \int_{\Omega} a^+ u_0^2 dx,$$

mostrando que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - a^+ u_0^2) dx = \beta.$$

e, portanto, β é assumido. Agora, suponha, por contradição, que $\beta = 0$. Sendo $V^\perp = \langle \varphi_j, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots \rangle$ considere $E_m = \langle \varphi_j, \dots, \varphi_m \rangle$, onde $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_m < \lambda_{m+1}$. Tomemos a seguinte decomposição $V^\perp = E_m \oplus V_{m+1}^\perp$, portanto existem $u_1 \in E_m$ e $u_2 \in V_{m+1}^\perp$ tais que $u_0 = u_1 + u_2$. Dessa forma,

$$\beta = \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - a^+ u_0^2) dx \geq \int_{\Omega} (|\nabla u_2|^2 - \lambda_j u_2^2) dx.$$

Desde que $\lambda_{m+1} \int_{\Omega} u_2^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_2|^2 dx$ temos que

$$\beta \geq \frac{(\lambda_{m+1} - \lambda_j)}{\lambda_{m+1}} \int_{\Omega} |\nabla u_2|^2 dx \geq 0,$$

implicando que $u_2 = 0$. Desse modo, obtemos que $u_0 = u_1$ e portanto u_0 é um autofunção associada a λ_j . Daí, segue que

$$0 = \beta = \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - a^+ u_0^2) dx = \int_{\Omega} (\lambda_j - a^+) u_0^2 dx.$$

Assim $u_0 = 0$ em um conjunto de medida positiva e portanto, pela propriedade da continuação única das autofunções do laplaciano (ver [9]), $u_0 = 0$ em Ω . O que é uma contradição, já que $\|u_0\|_2 = 1$. ■

No próximo resultado, provaremos que a hipótese (I_1) é satisfeita.

Lema 3.3.4 *Suponha que f satisfaz (f_1) e (f_4) . Então, existem constantes $\rho, \alpha > 0$, tais que, $I_{\lambda}|_{\partial B_{\rho} \cap V^{\perp}} \geq \alpha$.*

Demonstração: De (f_4) temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|s| < \delta$, então

$$F(x, s) \leq \frac{(a(x) + \epsilon) |s|^2}{2}. \quad (3.31)$$

Por outro lado, segue, de (3.2) e para $|s| \geq \delta$, que

$$F(x, s) \leq \frac{C_{\epsilon} 2^* |s|^{2^*}}{\delta^{2^*}} + \frac{\epsilon |s|^{2^*}}{2^*}. \quad (3.32)$$

Daí, por (3.31) e (3.32), temos que

$$F(x, s) \leq K_{\epsilon} \frac{|s|^{2^*}}{2^*} + \frac{(a(x) + \epsilon) |s|^2}{2}, \forall s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega. \quad (3.33)$$

Agora considerando β do Lema 3.3.3, tomemos $\epsilon' > 0$ tal que $\beta - \epsilon' \lambda_j > 0$. Assim, usando o Lema (3.3.3) e que $a^+(x) \leq \lambda_j$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a(x) |u|^2) dx &\geq \frac{1}{1 + \epsilon'} \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a^+(x) |u|^2) dx + \epsilon' \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a^+(x) |u|^2) dx \right) \\ &\geq \frac{1}{1 + \epsilon'} \left(\beta \int_{\Omega} |u|^2 dx - \epsilon' \int_{\Omega} a^+(x) |u|^2 dx + \epsilon' \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \\ &\geq \frac{1}{1 + \epsilon'} \left(\int_{\Omega} (\beta - \epsilon' \lambda_j) |u|^2 dx + \epsilon' \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \\ &\geq \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Logo, por (3.33), (3.34) e pela imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
 I_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x, u) dx \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - a(x) |u|^2) dx - \left(\frac{\lambda}{2^*} + \frac{K_\epsilon}{2^*} \right) \int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega \frac{\epsilon |u|^2}{2} dx \\
 &\geq \frac{1}{2} \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - C \|u\|^{2^*} - \frac{\epsilon}{2} C_1 \|u\|^2 \\
 &\geq \left(\frac{1}{2} \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'} - \frac{\epsilon}{2} C_1 \right) \|u\|^2 - C \|u\|^{2^*}
 \end{aligned}$$

e portanto, para $\epsilon > 0$ pequeno, resulta que

$$I_\lambda(u) \geq K \|u\|^2 - C \|u\|^{2^*},$$

onde $K > 0$. Por conseguinte, tomando $\rho > 0$ adequado, decorre que

$$K\rho^2 - C\rho^{2^*} > 0$$

e por isso

$$I_\lambda(u) \geq \alpha, \text{ para } u \in \partial B_\rho(0) \cap V^\perp.$$

■

Agora, estamos em condições de demonstrar nosso resultado principal que é o seguinte,

Teorema 3.3.5 *Suponha que $f(x, s)$ é ímpar em s e satisfaz (f_1) , (f_2) , (f_3) e (f_4) . Então existe $\mu_k \in (0, \infty]$ tal que (P_λ) possui ao menos $k - j + 1$ pares de soluções não triviais para todo $\lambda \in (0, \mu_k)$.*

Demonstração: Pelos Lemas 3.3.4 e 3.3.2 temos que I_λ satisfaz (I_1) e (I_2) . Além disso, pela Proposição 3.2.6, existe $\mu_k > 0$ tal que I_λ satisfaz (I_3) para todo $\lambda \in (0, \mu_k)$. Desde que $I_\lambda(0) = 0$ e I_λ é par, concluímos do Teorema 3.3.1 que (P_λ) possui no mínimo $k - j + 1$ pares de soluções não triviais para todo $\lambda \in (0, \mu_k)$. ■

3.4 Existência de Solução Não-Negativa e de Solução Não-Positiva

Nesta seção, vamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1 *Suponha que f satisfaz $f(x, 0) = 0$, (f_1) , (f_2) , (f_3) com $\lambda_k = \lambda_1$ e (f_4) com $\lambda_j = \lambda_1$. Então existe $\mu_1 > 0$ tal que (P_λ) possui uma solução não-trivial não-negativa e uma solução não-trivial não-positiva para todo $\lambda \in (0, \mu_1)$.*

Este resultado garante a existência de uma solução não-trivial não-negativa e de uma solução não-trivial não-positiva para o problema (P_λ) . Observe que no Teorema 3.4.1, ao contrário do Teorema 3.3.5, não exigimos que f seja ímpar na segunda variável. Para provarmos o Teorema 3.4.1, faremos uso da seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha (veja [21]):

Teorema 3.4.2 *Seja E um espaço de Banach. Suponha $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz $I(0) = 0$ e as seguintes condições:*

- (I₁) *Existe uma constante $\rho > 0$, tal que, $I|_{\partial B_\rho} \geq 0$;*
 - (I₂) *Existe $v_1 \in \partial B_\rho(0)$ e $M > 0$, tal que, $\sup_{t \geq 0} \tilde{I}_\mu(tv_1) \leq M$ e*
 - (I₃) *considerando $M > 0$ dado em (I₂), I satisfaz $(PS)_c$ para $0 < c < M$.*
- Então I possui um ponto crítico não-trivial.*

Primeiro, mostraremos que (P_λ) possui uma solução não-trivial não-negativa. Note que, para mostrarmos o resultado desejado, basta provarmos que o problema (3.35) tem uma solução não-trivial. Considere o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + \tilde{f}(x, u) & , x \in \Omega \\ u \geq 0 & , x \in \Omega \\ u = 0 & , x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.35)$$

onde

$$\tilde{f}(x, s) = \begin{cases} f(x, s), & \text{se } s > 0 \\ 0 & , \text{se } s \leq 0. \end{cases}$$

O funcional energia $\tilde{I}_\lambda$ associado a (3.35) é dado por

$$\tilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx - \int_\Omega \tilde{F}(x, u) dx$$

onde

$$\tilde{F}(x, s) = \int_0^s \tilde{f}(x, t) dt.$$

Por argumentos padrões, verifica-se facilmente que $\tilde{I}_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$

Observação 3.4.3 *Chamemos a atenção para os seguintes fatos:*

i) $\tilde{f}$ satisfaz (f_1) :

Com efeito, temos que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(x, s)}{|s|^{p^*-1}} = 0$$

pois se $s \rightarrow -\infty$, então $\tilde{f} = 0$ e se $s \rightarrow +\infty$, então $\tilde{f} = f$.

ii) $\tilde{f}$ satisfaz (f_4) com $\lambda_j = \lambda_1$:

De fato, tem-se $\tilde{F}(x, s) = \int_0^s \tilde{f}(x, t) dt = \int_0^s f(x, t) dt = F(x, s)$, se $s > 0$ e $\tilde{F}(x, s) = \int_0^s \tilde{f}(x, t) dt = 0$, se $s \leq 0$, então, segue que

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{2\tilde{F}(x, s)}{|s|^2} = a(x) \leq \lambda_1, \text{ uniformemente q.s. em } \Omega.$$

Nos próximos resultados provaremos que o funcional energia $\tilde{I}_\lambda$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.4.2.

Lema 3.4.4 *Suponha que $\tilde{f}$ satisfaz (f_1) e (f_4) com $\lambda_j = \lambda_1$. Dado $\mu > 0$, existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\tilde{I}_\lambda|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$.*

Demonstração: Considerando $j = 1$ no Lema 3.3.3, temos que existe $\beta > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a^+(x) |u|^2) dx \geq \beta \int_{\Omega} |u|^2 dx, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a^+(x) |u^+|^2) dx &\geq \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - a^+(x) |u|^2) dx \\ &\geq \beta \int_{\Omega} |u|^2 dx \end{aligned}$$

e daí, basta repetir a demonstração do Lema 3.3.4 com $\lambda_j = \lambda_1$. ■

No próximo resultado, verificaremos a condição (I_2) .

Lema 3.4.5 *Existem $v_1 \in \partial B_1(0)$ e $M > 0$ tais que $\sup_{t \geq 0} \tilde{I}_{\lambda}(tv_1) \leq M$.*

Demonstração: Considere $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a λ_1 , com $\|\varphi_1\| = 1$. Usando (f_3) , para todo $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\lambda}(t\varphi_1) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla t\varphi_1|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_{\Omega} (t\varphi_1)^{2^*} dx - \int_{\Omega} \tilde{F}(x, t\varphi_1) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2 dx - \int_{\Omega} \tilde{F}(x, t\varphi_1) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2 dx + B|\Omega| - \frac{\lambda_1 t^2}{2} \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx \\ &= B|\Omega|, \end{aligned}$$

onde usamos que $\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi_1^2 dx}$. ■

Em seguida, mostremos que $\tilde{I}_{\lambda}$ satisfaz a (I_3) .

Lema 3.4.6 *Seja $M > 0$ dado no Lema 3.4.5, $\tilde{I}_{\lambda}$ satisfaz $(PS)_c$ para $0 < c < M$.*

Demonstração: Considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\tilde{I}_{\lambda}(u_n) \rightarrow c$ e $\tilde{I}'_{\lambda}(u_n) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$. Com um raciocínio análogo ao da Proposição 3.2.6, obtemos que (u_n^-) é limitado em $H_0^1(\Omega)$. A partir daí mostraremos que $u_n^- \rightarrow 0$. Para isso basta observar que

$$\langle \tilde{I}'_{\lambda}(u_n), -u_n^- \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (-u_n^-) dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{2^*-1} (-u_n^-) dx - \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u_n) (-u_n^-) dx = \|u_n^-\|^2.$$

Além disso,

$$\langle \tilde{I}'_{\lambda}(u_n), -u_n^- \rangle \leq \left\| \tilde{I}'_{\lambda}(u_n) \right\|_{H^{-1}} \| -u_n^- \| = \left\| \tilde{I}'_{\lambda}(u_n) \right\|_{H^{-1}} \|u_n^-\|$$

e como

$$\left\| \tilde{I}'_{\lambda}(u_n) \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0,$$

concluimos o que queríamos mostrar.

Agora, usando a imersão de Sobolev obtemos que $\|u_n^-\|_{2^*} \rightarrow 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}\tilde{I}_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} dx - \int_\Omega \tilde{F}(x, u_n) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} dx - \int_\Omega F(x, u_n^+) dx \\ &= I_\lambda(u_n^+) - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim, como $\|u_n^-\| \rightarrow 0$, segue que

$$I_\lambda(u_n^+) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx + \tilde{I}_\lambda(u_n) \rightarrow c. \quad (3.36)$$

Temos também que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{I}'_\lambda(u_n), v \rangle &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v dx - \int_\Omega \tilde{f}(x, u_n) v dx \\ &= \int_\Omega \nabla u_n^+ \nabla v dx - \int_\Omega \nabla u_n^- \nabla v dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v dx - \int_\Omega f(x, u_n^+) v dx \\ &= \langle I'_\lambda(u_n^+), v \rangle + \langle \tilde{I}'_\lambda(-u_n^-), v \rangle,\end{aligned}$$

donde

$$\langle I'_\lambda(u_n^+), v \rangle = \langle \tilde{I}'_\lambda(u_n), v \rangle - \langle \tilde{I}'_\lambda(-u_n^-), v \rangle \rightarrow 0 \quad (3.37)$$

e assim, segue de (3.36), (3.37) e da Proposição 3.2.6 que

$$u_n^+ \rightarrow u_0 \in H_0^1(\Omega)$$

e, portanto, $u_n \rightarrow u_0$ pois $u_n^- \rightarrow 0$. ■

Demonstração do Teorema 3.4.1: Pelos Lemas 3.4.4, 3.4.5, 3.4.6 temos que $\tilde{I}_\lambda$ satisfaz as condições (I_1) , (I_2) , (I_3) do Teorema 3.4.2. Além disso, $\tilde{I}_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $\tilde{I}_\lambda(0) = 0$. Logo pelo Teorema 3.4.2 $\tilde{I}_\lambda$ possui um ponto crítico não-trivial. Agora, para finalizar a demonstração, basta mostrar que tal ponto crítico é não negativo. Seja u um ponto crítico de $\tilde{I}_\lambda$. Logo,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v dx + \int_\Omega \tilde{f}(x, u) v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, considerando $v = -u^-$, obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx = \int_\Omega \nabla u \nabla (-u^-) dx = 0$$

provando que se u é ponto crítico de $\tilde{I}_\lambda$, então $u \geq 0$.

Para garantirmos a existência de uma solução não-trivial não-positiva basta, de maneira análoga a demonstração da existência de solução do problema (3.35), resolvermos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + \bar{f}(x, u), & x \in \Omega \\ u \leq 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.38)$$

onde

$$\bar{f}(x, s) = \begin{cases} f(x, s), & \text{se } s < 0 \\ 0, & \text{se } s \geq 0, \end{cases}$$

e o funcional energia $\bar{I}_\lambda$ associado a (3.38) é dado por

$$\bar{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_{\Omega} (u^-)^{2^*} dx - \int_{\Omega} \bar{F}(x, u) dx$$

em que

$$\bar{F}(x, s) = \int_0^s \bar{f}(x, t) dt.$$

■

Observemos que o resultado do Teorema 3.4.1 não é verdade sem a hipótese (f_3) . Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.4.7 No problema (P_λ) , seja $N = 3$, $f(x, s) = \beta s$ com $\beta < \frac{\lambda_1}{4}$, e $\Omega = B(0, r)$ é uma bola em $\mathbb{R}^N$, isto é, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^5 + \beta u, & x \in B(0, r) \\ u = 0, & x \in \partial B(0, r). \end{cases} \quad (3.39)$$

Observe que as hipóteses (f_1) , (f_2) e (f_4) são satisfeitas por f , porém

$$\begin{aligned} F(x, s) &= \int_0^s \beta t dt = \frac{\beta s^2}{2} \\ &< \frac{\lambda_1 s^2}{2}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } B(0, r), \end{aligned}$$

ou seja, f não satisfaz a hipótese (f_3) .

Vamos supor, por contradição, que o Teorema 3.4.1 seja verdade. Assim, existe $\mu_1 > 0$ tal que (3.39) possui uma solução $u \geq 0$ para todo $\lambda \in (0, \mu_1)$. Tomemos $\lambda < \mu_1$. Daí $v = \lambda^{\frac{1}{4}} u$ resolve o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = v^5 + \beta v, & x \in B(0, r) \\ v > 0, & x \in B(0, r) \\ v = 0, & x \in \partial B(0, r), \end{cases}$$

para $\beta < \frac{\lambda_1}{4}$ o que contradiz o Teorema 1.2 de [4].

Apêndice A

Neste apêndice, listamos alguns resultados importantes que são utilizados no decorrer de nosso trabalho.

A.1 Resultados Auxiliares

Proposição A.1.1 *Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja (x_n) uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então,

$$x_n \rightarrow x.$$

Demonstração: Veja [3, pág. 52, Prop. III.30]. ■

Teorema A.1.2 (Identidade de Pohozaev) *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (**)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e suave com $N \geq 3$.
Seja $u \in H_{loc}^2(\overline{\Omega})$ uma solução de $(**)$ tal que

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds \in L^1(\Omega).$$

Então, u satisfaz

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \sigma \cdot \nu d\sigma = N \int_{\Omega} F(u) dx$$

onde ν é a normal unitária exterior a $\partial\Omega$.

Demonstração: Veja [15, pág. 253, Prop. 2.1]. ■

Lema A.1.3 (Brézis-Lieb) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Se

a) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$;

b) $u_n \rightarrow u$ q.s. em Ω ,

então $u \in L^p(\Omega)$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p \right) = \|u\|_p^p.$$

Demonstração: Veja [24, pág. 21, Lema 1.32]. ■

Lema A.1.4 Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$. Se $-\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$, então existe uma função não-negativa $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\frac{\|v\|^2 + \lambda \|v\|_2^2}{\|v\|_{2^*}^2} < S,$$

onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω com as condições de fronteira de Dirichlet e S é a melhor constante da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$.

Demonstração: Veja [24, pág. 35, Lema 1.46]. ■

Teorema A.1.5 Seja (u_n) uma sequência em L^p e $u \in L^p$ tais que $\|u_n - u\|_{L^p} \rightarrow 0$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que

a) $u_{n_k} \rightarrow u$ q.s. em Ω ,

b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$ e q.s. em Ω , com $h \in L^p$.

Demonstração: Veja [3, pág.58, Teorema IV.9]. ■

Proposição A.1.6 Para todo subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$,

$$S \equiv S(\Omega) := \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{2^*} = 1}} \|\nabla u\|_2^2$$

e $S(\Omega)$ nunca é atingido exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Demonstração: Veja [24, pág. 32, Prop. 1.43]. ■

Proposição A.1.7 Sejam u uma função mensurável, u^* sua simetrização de Schwarz e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Borel mensurável tal que ou $F \geq 0$ ou $F(u) \in L^1(\Omega)$. Então,

$$\int_{B(0,r)} F(u^*(x)) dx = \int_{B(0,r)} F(u(x)) dx.$$

Demonstração: Veja [16, pág. 14]. ■

Teorema A.1.8 (Pólya-Szegö) Seja $1 \leq p < +\infty$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \geq 0$. Então,

$$\int_{B(0,r)} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_{B(0,r)} |\nabla u|^p dx.$$

Em particular $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Veja [16, pág. 35, Teorema 2.3.1]. ■

Teorema A.1.9 (Teorema de Lusin) *Sejam X um espaço topológico localmente Hausdorff compacto, μ é uma medida de Radon em X e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função mensurável tal que $\mu(E) < +\infty$ onde $E = \{x; f(x) \neq 0\}$. Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in C_c(X)$ tal que $\mu(\{x; f(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon$. Se f é limitada, φ pode ser tomado satisfazendo $\|\varphi\|_u \leq \|f\|_u$.*

Demonstração: Veja [11, pág. 211, Teorema 7.10]. ■

Teorema A.1.10 (Teorema de Egoroff) *Sejam $\mu(X) < +\infty$, e f_n e f funções complexas mensuráveis em X tais que $f_n \rightarrow f$ q.s.. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \epsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em E^c .*

Demonstração: Veja [11, pág. 60, Teorema 2.33]. ■

Proposição A.1.11 *Sejam E um espaço de Banach e $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ semicontínua inferiormente (para a topologia forte). Então, φ é semicontínua inferiormente para a topologia fraca. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ então*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Demonstração: Veja [3, pág. 38, Corolário III.8]. ■

Proposição A.1.12 *Sejam ν e μ medidas em um espaço de medida. Então,*

- a) $\nu \ll |\nu|$ e $\frac{d\nu}{d|\nu|} = 1$ $|\nu|$ -q.s.;
- b) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$, e se $f \in L^1(\nu)$, então $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$;
- c) $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ para todo E pertencente a σ -álgebra;

Demonstração: Veja [11, pág. 89, Prop.3.13]. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349–381.
- [2] Ambrosetti A.; Struwe M., *A note on the problem $-\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2}$* , Manuscripta Math. 54 (1986) 373–379.
- [3] Brézis, H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1987.
- [4] Brézis, H.; Nirenberg, Louis, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 4, 437–477.
- [5] Capozzi, A.; Fortunato D.; Palmieri G., *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire 2 (6) (1985) 463–470.
- [6] Cerami, G.; Fortunato, D.; Struwe, M., *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire 1 (1984) 341–350.
- [7] Costa, D.G. ; Silva, E. A. B., *A note on problems involving critical Sobolev exponents*, Differential and Integral Equations 8 (3) (1995) 673–679.
- [8] de Figueiredo, D. G., *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [9] de Figueiredo, D. G.; Gossez, J.P., *Strict Monotonicity of Eigenvalues and Unique Continuation*, Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 1-2, 339–346.
- [10] do Ó, J. M., *Teoria de Pontos Críticos de Lusternik-Schnirelmann e aplicações as Equações Diferenciais Parciais*, Minicurso do I EBED, IMECC UNICAMP, 2003.
- [11] Folland, G. B., *Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [12] Fox, R. H., *On the Lusternik-Schnirelmann Category*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 42, No. 2 (Apr., 1941), pp. 333-370.
- [13] Garcia A. J.; Peral, A. I., *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans.Amer. Math. Soc. 323 (2) (1991) 877–895.

- [14] Gazzola, F.; Ruf, B., *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Advances in Differential Equations 2 (4) (1997) 555–572.
- [15] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [16] Kesavan, S., *Symmetrization & Applications, Series in Analysis Vol.3*, World Scientific, New Jersey, 2006.
- [17] Lazzo, M., Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev, C. R. Acad. Sci. Paris 314 (1992) 161-164.
- [18] Lions, P.L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1, 2*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985) 145–201, pp. 45–121.
- [19] Rey, O., *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness*. Nonlinear Anal. 13 (1989), no. 10, 1241–1249.
- [20] Schwartz, Jacob T., *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon and Breach Science, New York, 1969.
- [21] Silva, E. A. B., *Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonlinear Anal. TMA 16 (1991) 445-477.
- [22] Silva, E. A. B.; Xavier, Magda S., *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003), no. 2, 341–358.
- [23] Silva, E. A. B.; Xavier, Magda S., *Quasilinear Dirichlet problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Nonlinear Anal. TMA 43 (2001) 1–20.
- [24] Wei, Z.; Wu, X.A. , *Multiplicity result for quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. TMA 18 (6) (1992) 559–567.
- [25] Willem, M., *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.