Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Fibra Especial de Ideais

Tarciana Maria Santos da Silva

João Pessoa
2010

Sobre a Fibra Especial de Ideais [1]

por

Tarciana Maria Santos da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPB, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

sob orientação do

Prof. Dr. Roberto Bedregal

João Pessoa
2010

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPQ.

S586s Silva, Tarciana Maria Santos da.
Sobre a fibra especial de ideais / Tarciana Maria Santos da Silva. - - João Pessoa: [s.n.], 2010.
44 f. .
Orientador: Roberto Bedregal.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.

1.Matemática. 2.Multiplicidade mista. 3.Fibra especial. 4.Número de redução.

UFPB/BC CDU: 51 (043)

Sobre a Fibra Especial de Ideais

por

Tarciana Maria Santos da Silva

Dissertação apresentada ao corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Aron Simis - UFPE

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Robson e Roseani,
aos meus irmãos Luciana, Mariana e Bruno
e a toda minha família por apoiar minhas decisões
e sempre acreditar em mim!

Tarciana.

Agradecimentos

Eu não conseguiria agradecer à altura, ainda que houvesse espaço suficiente, ainda que conseguisse encontrar as palavras mais preciosas, porque todos que me cercaram nessa jornada me trouxeram o melhor! Porém tentarei o fazer mesmo assim.

Começo, então, por agradecer ao meu orientador Roberto Bedregal, pela paciência, apoio, disponibilidade e dedicação, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

À todos os professores do programa de pós-graduação em matemática da UFPB, em especial a Fernando Xavier, Pedro Hinojosa, Jacqueline Rojas, João Marcos e Flávia Gerônimo pela oportunidade de crescimento, aprendizado, realização profissional e pessoal e pela confiança em mim depositada.

Aos professores Aron Simis e Cleto Brasileiro por aceitarem participar da Banca de defesa desta dissertação, proporcionando sugestões que servirão para o meu crescimento e aprendizado.

À todos os meus amigos e amigas que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação, em especial a Laudelino e Manassés que caminharam juntos comigo num percurso de quase três anos, sempre me fazendo seguir adiante.

Em especial também aos meninos que me receberam super bem e se tornaram grandes amigos, Ailton, Disson, Elano, Felipe, Gerson, José Francisco, Marcos Aurélio e Paulo. Agradeço imensamente a Luis por toda sua ajuda e paciência nas nossas discussões durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Quero agradecer também à Juanice, Oldineia e Viviane que sempre serão a minha família de João Pessoa, obrigada pelo incentivo, preocupação, dedicação, pelos conselhos, e momentos felizes e de descontração que vivemos juntas, vocês moram no meu coração!

Aos meus amigos do Dmat-Ufpe pelo apoio e incentivo, em especial a André, Anete, Karla, Nicole, Ricardo e Will.

Por fim, agradeço aos meus familiares que sempre me deram amor e força.

Resumo

Neste trabalho estudamos a Cohen-Macaulicidade e a Gorensteincidade da fibra especial de um ideal em um anel local $(R, \mathfrak{m})$ de Cohen-Macaulay com dimensão d. Também obtemos uma fórmula para a multiplicidade da fibra especial de um ideal $\mathfrak{m}$-primário I em termos da multiplicidade mista $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ e elementos superficiais. Como consequência dessa fómula, temos que a Cohen-Macaulicidade da fibra especial de I, quando I tem multiplicidade mista minimal e quase minimal, é caracterizada em termos do número de redução de I.

Palavras-chave:

Fibra especial, multiplicidade mista, número de redução.

Abstract

In this dissertation, we study Cohen-Macaulay and Gorenstein properties of the fiber cone of an ideal I of d-dimensional Cohen-Macaulay local ring $(R, \mathfrak{m})$.We also obtain a formula to express the multiplicity of the fiber cone of a $\mathfrak{m}$-primary ideal I in terms of mixed multiplicity $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ and superficial elements. As a consequence, we have that the Cohen-Macaulay properties of the fiber cone of I, with minimal mixed multiplicity and almost minimal, is characterized by the reduction number of I.

Keywords:

Fiber cone, mixed multiplicity, reduction number.

Sumário

1 Preliminares **4**

1.1 Anéis de Cohen-Macaulay 4

1.2 Anéis de Gorenstein 6

1.3 Função de Hilbert 7

1.4 A Fibra Especial 9

1.5 Reduções 10

1.6 Sequências Especiais 12

1.7 Reduções em Família e Multiplicidades Mistas 13

1.8 Fórmulas de Multiplicidade para Fibras Especiais 15

2 Fibras Especiais de Cohen-Macaulay e de Gorenstein **22**

2.1 Fibras Especiais de Cohen-Macaulay 22

2.2 Fibras Especiais de Gorenstein 26

3 Ideais de Multiplicidade Mista Minimal e Quase Minimal **32**

3.1 Ideais de Multiplicidade Mista Minimal 34

3.2 Ideais de Multiplicidade Mista Quase Minimal 37

Referências **42**

Introdução

Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano com dimensão $d > 0$ e corpo residual infinito, e I um ideal de R. A álgebra de Rees $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n$, o anel graduado associado $\mathcal{G}_I(R) = \mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(I)$ e a fibra especial $F(I) = \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ de I desempenham um papel importante no processo de explosão da variedade $\mathrm{Spec}(R)$ ao longo da subvariedade $V(I)$. Por esse motivo estes objetos são frequentemente referidos como álgebras de explosão de I. Além disso, eles também são extensivamente usados para examinar diversas propriedades de I. Portanto, muita atenção tem-se prestado no passado para encontrar sob que circunstâncias essas álgebras tem uma boa estrutura algébrica.

Nesta dissertação focamos na fibra especial $F(I)$, pois existe uma falta de conhecimento sobre suas propriedades, em comparação com o restante das álgebras de explosão. Do ponto de vista algébrico, $F(I)$ produz informações sobre o ideal I. Por exemplo, a sua função de Hilbert é a função numérica que mede o crescimento do número mínimo de geradores $\mu(I^n)$ das potências de I. Para n suficientemente grande esta função é um polinômio em n de grau $\dim F(I) - 1$, cujo coeficiente líder $f_0 = f_0(I)$ é chamado de multiplicidade da fibra especial $F(I)$. Outro dado significativo atribuído a $F(I)$ é a sua dimensão de Krull, chamado de dispersão analítica $\ell(I)$ de I. Tal dispersão é limitada inferiormente pela altura de I e limitada superiormente pela dimensão de R. Ela coincide com o número mínimo de geradores de uma redução minimal de I. Uma redução minimal - uma noção que tem sido fundamental no estudo da álgebra de Rees de um ideal, pois ele carrega a maior parte das informações sobre o ideal original, em geral, com menos geradores - surge a partir da normalização de Noether de $F(I)$. De uma perspectiva mais geométrica, $\mathrm{Proj}(F(I))$ corresponde à fibra sobre o ponto fechado da explosão do $\mathrm{Spec}(R)$ ao longo de $V(I)$. Portanto, desempenha um papel importante na resolução de singularidades de variedades algébricas. Hironaka, no seu artigo [16] sobre resolução de singularidades, introduziu o conceito de permissibilidade de I como centro de explosão. Lembrando que I é permissível em R se R/I é regular e $\mathcal{G}(I)$ é R/I-plano. Considerando a série de Hilbert de $\mathcal{G}(\mathfrak{m})$ e de $F(I)$

$$HS(\mathcal{G}(\mathfrak{m}), t) = \sum_{n=0}^{\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}\right) t^n \quad \text{e} \quad HS(F(I), t) = \sum_{n=0}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) t^n.$$

Seja e a dimensão de imersão de R/I. Em 1976, B. Singh em [31], demonstrou que I é um centro permissível de explosão se, e somente se, as séries de Hilbert de $\mathcal{G}(\mathfrak{m})$ e $F(I)$ estão relacionadas pela equação

$$HS(\mathcal{G}(\mathfrak{m}), t)(1-t)^e = HS(F(I), t).$$

Agora vamos destacar alguns resultados da literatura que indicam a importância de um estudo sistemático da fibra especial. No que diz respeito às propriedades aritméticas da fibra especial, um dos primeiros resultados conhecidos foi dado por Huneke e Sally [21], que provaram que, se R é de Cohen-Macaulay, a fibra especial de qualquer ideal $\mathfrak{m}$-primário cujo número de redução é um é de Cohen-Macaulay. Este resultado foi posteriormente estendido por K. Shah [29, 30] para os ideais equimúltiplos de número de redução igual a um, dando também algumas condições de Cohen-Macaulicidade da fibra especial de ideais equimúltiplos de número de redução dois. Resultados subsequentes de Cortadellas e Zarzuela [7, 8], D'Cruz, Raghavan e Verma [11], e D'Cruz e Verma [9] completam os resultados de Shah para famílias de ideais mais gerais. Além disso, a fibra especial de um ideal de definição de uma curva monomial em $\mathbb{P}^3$ situada em uma quádrica foi provado ser de Cohen-Macaulay por Morales e Simis [26]. Esse resultado foi mais tarde estendido por P. Gimenez [13] e Barile e Morales [2] para o ideal de definição de uma variedade projetiva monomial de codimensão dois.

Por outro lado, motivados pelo trabalho de R. Hübl [17], Hübl e Huneke [18] estudaram a Cohen-Macaulicidade da fibra especial de ideais especial em conexão com a teoria da evolução introduzida por Eisenbud e Mazur [12], que está relacionada aos trabalhos de A. Wiles sobre o Último Teorema Fermat. Hübl e Swanson [19] também têm feito alguns cálculos sobre a fibra especial neste contexto. Os trabalhos mais recentes sobre as propriedades da fibra especial (multiplicidade, função de Hilbert, Cohen-Macaulicidade, Gorensteincidade, profundidade,...) tem sido feito por Corso, Ghezzi, Polini e Ulrich [4], Corso, Polini e Vasconcelos [5], T. Cortadellas [6] D'Cruz e Puthenpurakal [10], Heinzer e Kim [14], Heinzer, Kim e Ulrich [15], Jayanthan e Verma [22, 23], Jayanthan, Puthenpurakal e Verma [24], ou D. Q. Viêt [34] e outros.

O caso de ideais com redução um ideal principal também tem sido considerada em alguns detalhes por vários autores. S. Huckaba [20] estudou o número de redução e observou que, para uma ideal regular de dispersão analítica um, o número de redução não depende da redução minimal.

Neste trabalho, desenvolvemos em detalhes a teoria e resultados obtidos em [24, 11]. Mais precisamente, estudamos a Cohen-Macaulicidade e a Gorensteincidade da fibra especial de um ideal em um anel local $(R, \mathfrak{m})$ de Cohen-Macaulay com dimensão d. Também obtemos uma fórmula para a multiplicidade da fibra especial de um ideal $\mathfrak{m}$-primário I em termos da multiplicidade mista $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ e elementos superficiais. Como consequência dessa fómula, temos que a Cohen-Macaulicidade da fibra especial de I, quando I tem multiplicidade mista minimal e quase minimal, é caracterizada em termos do número de redução de I.

Capítulo 1

Preliminares

O principal objetivo deste capítulo é definir a fibra especial de um ideal $\mathfrak{m}$-primário num anel local $(R, \mathfrak{m})$ e determinar uma fórmula para sua multiplicidade. Esta fórmula envolve as noções de multiplicidades mistas e sequências superficiais.

1.1 Anéis de Cohen-Macaulay

Nesta seção, citaremos alguns resultados básicos envolvendo sequências regulares, sistemas de parâmetros e o fato do anel ser de Cohen-Macaulay. Para as demostrações, consulte [25].

Sejam R um anel e M um R-módulo. Dizemos que $a \in R$ é um elemento M-*regular* se $az = 0$ para $z \in M$ implica $z = 0$, em outras palavras, se a é um não divisor de zero em M. Uma sequência regular é composta de sucessivos elementos regulares:

Definição 1.1. Sejam M um R-módulo e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma sequência de elementos de R. Esta sequência é chamada de *sequência regular* (ou M-*sequência*) quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. $M/(x_1, \ldots, x_n)M \neq 0$

2. x_{i+1} é um elemento $M/(x_1, \ldots, x_i)M$-regular, para $i = 1, \ldots, n-1$

Estamos interessados que os comprimentos das M-sequências a elementos de I sejam finitos. Por isso, definimos sequências regulares maximais:

A M-sequência que não admite inserção própria de novos elementos é chamada de *M-sequência máxima.*

Proposição 1.2. *Se R é um anel Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que $IM \neq M$ então duas M-sequências máximas em I admitem o mesmo número de elementos.*

Definição 1.3. Sejam R um anel Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que $IM \neq M$. Então o comprimento comum das M-sequências maximais em I é chamado de *profundidade* de I em M, denotado por $\operatorname{depth}(I, M)$.

Em particular, para um anel local Noetheriano $(R, \mathfrak{m})$, dizemos que a profundidade de M, denotada por $\operatorname{depth}(M)$, é $\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, M)$.

Agora estamos aptos a definir um anel de Cohen-Macaulay:

Definição 1.4. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Um R-módulo finitamente gerado $M \neq 0$ é um *módulo de Cohen-Macaulay* se $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$. Se R é um R-módulo de Cohen-Macaulay, então R é chamado de um *anel de Cohen-Macaulay.*

Em geral, se R é um anel Noetheriano arbitrário, então M é um módulo de Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{m}}$ é um módulo de Cohen-Macaulay para todos os ideias maximais $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M$. Um anel R é dito ser de Cohen-Macaulay se $R_{\mathfrak{m}}$ é um anel local de Cohen-Macaulay para todos os ideais maximais $\mathfrak{m}$ de R.

Proposição 1.5. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se M é um módulo de Cohen-Macaulay, então M_P é um módulo de Cohen-Macaulay sobre R_P para todo $P \in SpecR$.*

Outra caracterização de anéis de Cohen-Macaulay que será utilizada nesta dissertação requer a noção do invariante $\delta(M)$ e de sistemas de parâmetros:

Definição 1.6. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado, definimos o invariante $\delta(M)$ como sendo o menor inteiro $s \in \mathbb{N}$ tal que existem $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{m}$ de forma que

$$l\left(\frac{M}{x_1M + \ldots + x_sM}\right) < \infty$$

Agora, podemos enunciar um importante resultado da teoria de dimensão:

Teorema 1.7. (**Chevalley-Krull**) *Sejam R um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado, então $dim(M) = \delta(M)$*

Definição 1.8. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado de dimensão n. Uma sequência $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{m}$ é um sistema de parâmetros de M se $\dim M/(x_1, \ldots, x_n)M = 0$.

Uma consequência do teorema acima, que será utilizada mais adiante, é: Se M é módulo de Cohen-Macaulay então, todo sistema de parâmetros de M é uma sequência regular em M.

1.2 Anéis de Gorenstein

Nesta seção admitiremos que o leitor esteja familiarizado com o Funtor Ext. As demontrações podem ser encontradas em [3]. Durante toda a seção $(R, \mathfrak{m})$ denotará um anel local com único ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$.

Consideremos M um R-módulo finitamente gerado e $n = $depth$(M)$, onde depth$(M)$ é o comprimento das sequências M-regulares maximais em $\mathfrak{m}$. O número n é bem determinado por

$$\mathrm{Ext}^n(k, M) \neq 0 \text{ e } \mathrm{Ext}^i(k, M) = 0 \text{ para } i < n$$

Definimos o *Tipo* de M como sendo a dimensão de $\mathrm{Ext}^n(k, M)$ sobre k, e denotamos por $\mathrm{Tipo}(M) = \dim_k \mathrm{Ext}^n(k, M)$.

Agora podemos definir um anel de Gorenstein:

Definição 1.9. Um anel local $(R, \mathfrak{m})$ é dito ser de *Gorenstein* se

$$\mathrm{Sup}\{i/\mathrm{Ext}^i(k, R) \neq 0\} < \infty.$$

O conjunto $\mathrm{Sup}\{i/\mathrm{Ext}^i(k, R) \neq 0\}$ é também chamado de *dimensão injetiva* de R e é denotado por inj dim(R).

Observação 1. Note que $n =$ depht (M) $\leq$ inj dim(R).

Para saber quando um anel é ou não de Gorenstein temos o resultado seguinte que faz relação com os anéis de Cohen-Macaulay facilitando tal caracterização.

Teorema 1.10. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local. Então R é um anel de Gorenstein se, e somente se, R é um anel de Cohen-Macaulay e Tipo(R)=1.*

Definição 1.11. Seja M um R-módulo finitamente gerado sobre $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Então

$$\text{Socle}(M) = (o :_M \mathfrak{m}) \cong \text{Hom}(k, M)$$

é chamado *o socle* de M.

Proposição 1.12. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano, onde $k = R/\mathfrak{m}$, M é um R-módulo finitamente gerado e $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ é uma sequência M-regular maximal em $\mathfrak{m}$. Então*

$$\textit{Tipo}(M) = \dim_k \textit{Socle}\left(\frac{M}{\underline{x}M}\right).$$

Definiremos o que venha a ser uma hipersuperfície para que possamos enunciar o resultado no qual faz relação com os anéis de Gorenstein.

Para isso, consideremos $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado, onde A é uma k-álgebra finitamente gerada, logo, existe um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : k[x_1, \ldots, x_s] \longrightarrow A$. Assim, dizemos que A é uma *hipersuperfície* se, e somente se, $ker\varphi$ for um ideal principal.

Corolário 1.13. *Se R é uma hipersuperfície, então R é um anel de Gorenstein.*

1.3 Função de Hilbert

Consideremos $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ uma álgebra graduada standard e $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ um A-módulo graduado. Suponhamos que R é Artiniano.

Definimos a função, o polinômio e a série de Hilbert para um módulo graduado M. Para cada A-módulo graduado M as componentes homogêneas M_n de M são R-módulos finitamentes gerados e portanto tem comprimento finito.

Definição 1.14. Seja M um R-módulo graduado finitamente gerado. A função $HF(M, \ .\ ) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $HF(M, n) = l(M_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é a *função de Hilbert* de M, onde l denota a função comprimento.

Definição 1.15. A *série de Hilbert* é definida por

$$HS(M, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} HF(M, n) t^n$$

Teorema 1.16. (**Hilbert**) *Seja M um R-módulo finitamente gerado de dimensão d. Então existe um polinômio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grau $d-1$ tal que $HF(M,n) = p(n)$ para todo n suficientemente grande.*

Lema 1.17. *Seja $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinômio de grau $d \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *$p(n) \in \mathbb{N}$ para todo n suficientemente grande*

2. *Existem únicos inteiros $a_0, \ldots, a_d$ tais que $a_d > 0$ e*

$$p(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i \begin{pmatrix} t+i \\ i \end{pmatrix}$$

Estes resultados garantem que existe um único polinômio que coincide com a função de Hilbert $HF(M,n)$ quando n é suficientemente grande. Este polinômio é chamado de *polinômio de Hilbert* de M e escrito da seguinte forma:

$$HP(M,n) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \begin{pmatrix} n+i \\ i \end{pmatrix}$$

O *grau* de M é o número e_0.
Observemos que para a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$, portanto $grau \Delta f = grau f - 1$.

Proposição 1.18. *Seja $M \neq 0$ um R-módulo graduado finitamente gerado de dimensão d. Então existe um único $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ com $h(1) \neq 0$ tal que*

$$HS(M,t) = \frac{h(t)}{(1-t)^d}$$

e $e_i = h^{(i)}(1)/i!$ para $i = 0, \ldots, d-1$, onde $h^{(i)}$ é a i-ésima derivada de $h(t)$ em relação a t. Em particular, $e_0 = h(1)$.

Se o polinômio $h(t)$ é dado por $h(t) = h_0 + h_1 t + \ldots + h_s t^s$, chamamos $(h_0, \ldots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$ de h-vector de R. Com isso temos o seguinte resultado:

Teorema 1.19. *Se R é um anel de Gorenstein, então $h(t)$ for um polinômio simétrico.*

Todas as demonstrações dos resultados enuciados acima podem ser encontradas em [3].

1.4 A Fibra Especial

Esta seção traz algumas definições sobre o objeto que motiva a dissertação: A fibra especial.

Definição 1.20. Sejam R um anel, I um ideal de R e t uma variável sobre R. *A álgebra de Rees* de I é o subanel de $R[t]$ dado por

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n$$

Definição 1.21. Sejam R um anel, I um ideal de R e t uma variável sobre R. *O anel graduado associado* de I é

$$\mathcal{G}_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}} = \frac{\mathcal{R}(I)}{I\mathcal{R}(I)}$$

Depois dessas definições, podemos definir o que venha a ser uma fibra especial.

Definição 1.22. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local, *a fibra especial* de I é

$$F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} = \frac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)}$$

Sua dimensão de Krull é chamada de *dispersão analítica* de I e é denotada por $\ell(I)$.

Como nosso interesse é estudar as fibras especiais de ideais $\mathfrak{m}$-primários de um anel local de Cohen-Macaulay. Acrescentamos as definições de funções e polinômios de Hilbert que envolvem esta teoria. Além disso, enuciaremos alguns resultados sobre multiplicidade bastante utilizados ao longo de toda a dissertação.

A *função de Hilbert* $HF(F(I), n)$ da fibra especial $F(I)$ de um anel local $(R, \mathfrak{m})$ com dimensão d é dada por

$$HF(F(I), n) = l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right)$$

A função $HF(F(I), n)$ é um polinômio $HP(F(I), n)$ em n de grau $\ell(I) - 1$ para n suficientemente grande. Escrevemos este polinômio por

$$HP(F(I), n) = f_o(I)\begin{pmatrix} n + \ell - 1 \\ \ell - 1 \end{pmatrix} - f_1(I)\begin{pmatrix} n + \ell - 2 \\ \ell - 2 \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{\ell-1} f_{\ell-1}(I)$$

para certos inteiros $f_0(I), f_1(I), ..., f_{\ell-1}(I)$, onde $l = \ell(I)$.

Observamos que se I é $\mathfrak{m}$-primário então $\ell(I) = d$ e portanto o grau de $HP(F(I), \mathfrak{m})$ é $d - 1$.

Definição 1.23. A *multiplicidade* de $F(I)$ é o número $f_0(I)$.

Para um ideal $\mathfrak{m}$-primário I em um anel Noetheriano local de dimensão d, defina

$$HF(I,n) = l\left(\frac{R}{I^n}\right)$$

como sendo a *função de Hilbert-Samuel de I*. Sabe-se que esta função coincide com o polinômio $HP(I,n)$ de grau d para n suficientemente grande. Escrevemos tal polinômio como segue

$$HP(I,n) = e_o(I)\begin{pmatrix} n+d-1 \\ d \end{pmatrix} - e_1(I)\begin{pmatrix} n+d-2 \\ d-1 \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^d e_d(I)$$

Definição 1.24. O coeficiente $e_0(I)$, denotado por $e(I)$, é chamado de *multiplicidade* de I.

1.5 Reduções

Nesta seção trataremos de alguns resultados básicos sobre reduções e suas relações com a dimensão da fibra especial e com as multiplicidades, além disso enunciaremos o famoso teorema de Rees, o qual caracteriza a noção de redução via multiplicidade de Hilbert-Samuel.

Um ideal $J \subseteq I$ é chamado uma *redução de I* se existe um número inteiro não negativo n tal que

$$JI^n = I^{n+1}.$$

O menor inteiro n tal que $JI^n = I^{n+1}$ é chamado de *número de redução* de I com relação a J, e será denotado por $r_J(I)$.

Se J é minimal com respeito a inclusão entre as reduções de I, então dizemos que J é uma *redução minimal de I*.

A proposição seguinte envolve reduções minimais e será bastante utilizada, sua demonstração pode ser vista em [32].

O número de redução $r(I)$ de I é o ínfimo dos $r_J(I)$, onde J varia sobre todas as reduções minimais de I.

Proposição 1.25. *Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e J uma redução minimal I. Então $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$.*

O resultado importante que faz conexão entre reduções minimais e fibras especiais é

Teorema 1.26. *Se $R/\mathfrak{m}$ for infinito, então todas as reduções minimais de I são minimamente geradas por $\ell(I)$ elementos.*

Este resultado é uma consequência do teorema de Normalização de Noether e sua demonstração pode ser encontrada em [32]. Nesta mesma referência podemos encontrar a seguinte proposição:

Proposição 1.27. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e I um ideal de R. Então,*

$$alt(I) \leq \ell(I) \leq dim R \quad e \quad \ell(I) \leq \mu(I)$$

Observação 2. Dados um anel local $(R, \mathfrak{m})$ de dimensão d e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. A fibra especial deste ideal possui mesma dimensão do anel. Pois $\text{alt}(I) = \text{alt}(\mathfrak{m}) = \dim R$ e da Proposição 1.27 temos, $\text{alt}(I) \leq \dim F(I) \leq \dim R$, portanto, $\dim F(I) = \dim R$.

Como foi dito no início da seção, faremos um breve comentário sobre as conexões entre reduções e multiplicidades:

Proposição 1.28. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão d e $I = (x_1, \ldots, x_d)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então, $e(I) = l\left(\dfrac{R}{I}\right)$*

Teorema 1.29. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Se J é uma redução de I, então $e(I) = e(J)$.*

A recíproca deste Teorema é conhecida como Teorema de Rees, e é válida para anéis com completude equidimensional, isto é, todos os ideias primos associados tem a mesma dimensão do anel, ou ainda o anel não possui ideais primos imersos. O Teorema de Rees caracteriza completamente a noção de redução através da noção de multiplicidade de Hilbert-Samuel.

Teorema 1.30. (**Rees**)*Seja $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local Noetheriano com completude equidimensional. Então J é uma redução de I se, e somente se, $e(I) = e(J)$.*

Uma consequência do Teorema 1.29 e Proposição 1.28 é

Proposição 1.31. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Se J é uma redução minimal qualquer de I, então $e(I) = l\left(\dfrac{R}{J}\right)$.*

1.6 Sequências Especiais

Começamos com uma discussão sobre sequências superficiais e suas relevâncias para reduções em família, continuamos com as sequências Rees-superficiais e as relações entre estes dois tipos de sequências.

O nosso interesse é trabalhar em anéis locais e em ideais $\mathfrak{m}$-primários, por isso, $(R, \mathfrak{m})$ sempre denotará um anel local e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário.

Definição 1.32. Seja $(R, \mathfrak{m})$ anel local. Sejam $I_1, ..., I_r$ R- ideais $\mathfrak{m}$-primários. Um elemento $a \in I_1$ é chamado *superficial* para os ideais $I_1, ..., I_r$ se

$$dim\left(\frac{R}{(a)}\right) = dim(R) - 1$$

e para algum c inteiro não negativo e para todos $n_1 > c, n_2, ..., n_r \geq 0$

$$(I_1^{n_1}...I_r^{n_r} : a) \cap I_1^c I_2^{n_2}...I_r^{n_r} = I_1^{n_1-1} I_2^{n_2}...I_r^{n_r}.$$

Definição 1.33. Uma sequência $a_1, ..., a_r$ de elementos em R é chamada uma *sequência superficial* para os ideais $I_1, ..., I_r$ se $a_i \in I_i$ e a imagem de a_i em $R_{i-1} = \frac{R}{(a_1,...,a_{i-1})}$ é supercial para as imagens dos ideais $I_i, I_{i+1}, ..., I_r$ em R_{i-1} para $i = 1, ..., r$.

Inspirado por Rees na construção de Redução em família em seu artigo sobre reduções em família e multiplicidades mistas [27], Jayanthan, Puthenpurakal e Verma introduziram a seguinte:

Definição 1.34. Um elemento $a \in I_1$ é chamado *Rees-superficial* para ideais $\mathfrak{m}$-primários $I_1, ..., I_r$ se para todo n_1 suficientemente grande e para todo inteiro não negativo $n_2, ..., n_r$

$$(a) \cap I_1^{n_1}...I_r^{n_r} = (a) I_1^{n_1-1} I_2^{n_2}...I_r^{n_r}$$

Definição 1.35. Uma sequência $a_1, ..., a_r$ de elementos em R é chamada uma *sequência Rees-superficial* para os ideais $I_1, ..., I_r$ se as imagens de a_i em $R_{i-1} = \frac{R}{(a_1,...,a_{i-1})}$ for Rees-supercial para as imagens dos ideais $I_i, I_{i+1}, ..., I_r$ em R_{i-1} para $i = 1, ..., r$.

No mesmo artigo [27], Generalizações de reduções e multiplicidades mistas, Rees mostrou o seguinte Lema:

Lema 1.36. (**Lema Básico de Rees**) *Sejam $I_1, ..., I_r$ ideais de R, onde o corpo residual $R/\mathfrak{m}$ é infinito. Seja P um conjunto finito de ideais primos de R tal que nenhum ideal primo em P contém o produto $I_1...I_r$. Então existe um elemento Rees-superficial $a \in I_1$ para os ideais $I_1, ..., I_r$ tal que a não está em qualquer ideal primo em P.*

Com isso, podemos mostrar a relação entre as sequências superficiais e as sequências Rees-superficiais. E com a ajuda do Lema Básico de Rees, a existência das sequências Rees-superficiais maximais para um conjunto de ideais $\mathfrak{m}$- primário.

Observação 3. Se um elemento $a \in I_1$ é Rees-superficial para um conjunto de ideais $(I_1, ..., I_r)$ e não divisor de zero em $\frac{I_1}{I_1^2}$, então a é superficial para $(I_1, ..., I_r)$. De fato, consideremos $b \in I_1^{n_1-1}I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r}$, como $c \leq n_1 - 1$ temos que $b \in I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r}$. Por outro lado, $b \in I_1^{n_1-1}I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r}$ implica que $ab \in I_1^{n_1}I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r}$, pois $a \in I_1$, daí $b \in I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r} : a$ e portanto, $b \in I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r} : a \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r}$. Reciprocamente, dado $b \in (I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r} : a) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r}$ temos que $b \in (I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r} : a)$, e assim, $ab \in (I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r}) \cap (a)$, como a é Rees-superficial, $ab \in (a)(I_1^{n_1-1}I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r})$, além disso a é não divisor de zero e portanto, $b \in (I_1^{n_1-1}I_2^{n_2} \cdots I_r^{n_r})$. Consequentemente, se $(a_1, \ldots, a_d)$ é uma sequência Rees-superficial para $(I_1, \ldots, I_d)$, ideais $\mathfrak{m}$-primários, a qual é uma sequência regular de R então $(a_1, \ldots, a_d)$ é uma sequência superficial para $(I_1, \ldots, I_d)$. Além disso, em um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito, as sequências Rees-superficiais maximais que também são sequências regulares existem para o conjunto de ideais $\mathfrak{m}$-primários, pelo lema básico de Rees.

1.7 Reduções em Família e Multiplicidades Mistas

Nesta seção introduzimos as propriedades básicas e as conexões entre reduções em família e multiplicidades mistas. Foi Rees quem primeiro introduziu o conceito de reduções em família de ideais o qual ajuda em cálculos de multiplicidades mistas.

Definimos, antes de tudo, o que vem a ser multiplicidades mistas:

Sejam $I_1, ..., I_r$ ideais $\mathfrak{m}$-primários. A função de Bhattacharya de $I_1, ..., I_r$ é a função numérica $BF : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ definida por

$$BF(n_1, ..., n_r) = l\left(\frac{R}{I_1^{n_1}, ..., I_r^{n_r}}\right)$$

Bhattacharya provou (veja [33]) que para todo $n_1, ..., n_r$ suficientemente grande, a função é dada pelo polinômio $BP(n_1, ..., n_r)$ de grau total d em $n_1, ..., n_r$. Para $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_r$ definimos $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_r$. Escrevemos o polinômio Bhattacharya na forma

$$BP(n_1, ..., n_r) = \sum_{|\alpha| \leq d} e_\alpha \begin{pmatrix} n_1 + \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} n_r + \alpha_r \\ \alpha_r \end{pmatrix}$$

onde e_α são inteiros.

Sejam $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ e $|\alpha| = d$. Um *conjunto* consistindo de α_1 cópias de I_1, α_2 cópias de I_2, ..., α_r cópias de I_r, será denotado por

$$(I_1^{[\alpha_1]} | I_2^{[\alpha_2]} | ... | I_r^{[\alpha_r]})$$

No caso $|\alpha| = d$, escrevemos

$$e_\alpha = e(I_1^{[\alpha_1]} | I_2^{[\alpha_2]} | ... | I_r^{[\alpha_r]}).$$

Estes inteiros são não negativos e são chamados de *multiplicidades mistas* dos ideais $I_1, ..., I_r$. Quando $r = 2$ e $i + j = d$ adotamos uma notação simplificada

$$e(I^{[i]}, J^{[j]}) = e_j(I|J).$$

Rees mostrou, em [28], que $e_0(I|J) = e(I)$ e $e_d(I|J) = e(J)$. Onde $e(.)$ denota a multiplicidade de Hibert-Samuel.

Outros resultados de Rees são bem importantes na teoria de multiplicidades mistas, para tal fez-se necessário introduzir a noção de redução em família.

Definição 1.37. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel local de dimensão d e $I_1, ..., I_d$ ideais $\mathfrak{m}$- primários. Dizemos que $a_1 \in I_1$, ..., $a_d \in I_d$ é uma *redução em família* de $I_1, ..., I_d$ se $a_1 I_2 ... I_d + a_2 I_1 I_3 ... I_d + ... + a_d I_1 ... I_{d-1}$ é uma redução de $I_1.I_2...I_d$.

Primeiro a existência de reduções em família:

Teorema 1.38. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de dimensão d. Se o corpo residual $R/\mathfrak{m}$ for infinito, então existem reduções em família.*

Teorema 1.39. (Teorema de Rees para Multiplicidades Mistas). *Se $(a_1, ..., a_d)$ é uma redução em família do conjunto de ideiais $(I_1^{[\alpha_1]}, I_2^{[\alpha_2]}, ..., I_r^{[\alpha_r]})$, onde I_i é repetido α_i vezes e $|\alpha| = d$. Então*

$$e((a_1, ..., a_d)) = e((I_1^{[\alpha_1]} | I_2^{[\alpha_2]} | ... | I_r^{[\alpha_r]})).$$

O próximo teorema nos permite relacionar multiplicidades mistas e reduções em família. Este é uma generalização da Proposição 1.31 para reduções em família:

Teorema 1.40. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay. Se $(a_1, ..., a_d)$ é uma redução em família do conjunto de ideiais $(I_1^{[\alpha_1]}, I_2^{[\alpha_2]}, ..., I_r^{[\alpha_r]})$ onde I_i é repetido α_i vezes e $|\alpha| = d$. Então*

$$e((I_1^{[\alpha_1]}|I_2^{[\alpha_2]}|...|I_r^{[\alpha_r]})) = l\left(\frac{R}{(a_1, ..., a_d)}\right).$$

Temos também uma relação entre elementos superficiais e reduções em família dada no seguinte Teorema:

Teorema 1.41. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano de dimensão d com corpo residual $R/\mathfrak{m}$ infinito. Então existe elemento superficial. Além disso, se $\underline{a} = a_1, \ldots, a_d$ é uma sequência superficial para os ideais $\mathfrak{m}-$primários $\underline{I} = I_1, \ldots, I_d$ então, $\underline{a}$ é uma redução em família de $\underline{I}$.*

1.8 Fórmulas de Multiplicidade para Fibras Especiais

Nesta seção deduzimos duas fórmulas para a multiplicidade da fibra especial de um ideal $\mathfrak{m}$-primário I de R em termos da multiplicidade $e(I)$, da multiplicidade mista $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ e das sequênciais superficiais. Isto foi feito por Jayanthan, Puthenpurakal e Verma em [24].

Proposição 1.42. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Seja a um não divisor de zero em R o qual é Rees-superficial para I e $\mathfrak{m}$. Considere a classe residual $\overline{R} = \frac{R}{aR}$. Então, para n suficientemente grande,*

$$HF(F(\overline{I}), n) = \Delta HF(F(I), n).$$

Demonstração. Consideremos a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} \xrightarrow{\mu_a} \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}} \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$$

onde

$$K_n = \frac{(\mathfrak{m}I^{n+1} : a) \cap I^n}{\mathfrak{m}I^n}, \quad C_n = \frac{I^{n+1}}{aI^n + \mathfrak{m}I^{n+1}} \text{ e } \mu_a(x + \mathfrak{m}I^n) = ax + \mathfrak{m}I^{n+1}.$$

A sequência dada acima é exata pois, $\ker\mu_a = K_n$ e $\operatorname{coker}\mu_a = C_n$.

Pelas propriedades da função comprimento em sequências exatas temos

$$l(K_n) - l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}}\right) - l(C_n) = 0$$

Por hipótese, a é Rees-superficial para $\mathfrak{m}$ e I e não divisor de zero em R, logo a é superficial para $\mathfrak{m}$ e I, pela Observação 3, $(\mathfrak{m}I^{n+1} : a) \cap I^n = \mathfrak{m}I^n$ para todo n suficientemente grande, portanto, $K_n = 0$ para todo n suficientemente grande, consequentemente $l(K_n) = 0$ para todo $n \gg 0$. Assim,

$$l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}}\right) - l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) = l(C_n) \tag{1.1}$$

para todo $n \gg 0$. E $\Delta HF(F(I), n+1) = l(C_n)$ para todo n suficientemente grande.

Além disso,

$$HF(F(\overline{I}), n+1) = l\left(\frac{\overline{I}^{n+1}}{\mathfrak{m}\overline{I}^{n+1}}\right) = l\left(\frac{\frac{I^{n+1}+aR}{aR}}{\frac{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR}{aR}}\right) = l\left(\frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR}\right)$$

para todo n suficientemente grande.

Mostraremos as seguintes igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR}\right) &= l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR\cap I^{n+1}}\right) && (1.2)\\ &= l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aI^n}\right) && (1.3)\\ &= \Delta HF(F(I), n+1) && (1.4) \end{aligned}$$

Para a primeira igualdade (1.2), vamos mostrar que

$$\frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR} = \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR\cap I^{n+1}}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR} &= \frac{I^{n+1}+aR+\mathfrak{m}I^{n+1}}{aR+\mathfrak{m}I^{n+1}}\\ &= \frac{I^{n+1}}{I^{n+1}\cap(aR+\mathfrak{m}I^{n+1})}\\ &= \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR\cap I^{n+1}} \end{aligned}$$

Concluindo a igualdade (1.2).

A segunda igualdade (1.3), é obtida a partir da definição de a ser Rees-superficial $aR \cap I^{n+1} = aI^n$. Portanto,

$$\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1} + aR \cap I^{n+1}} = \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1} + aI^n}$$

Pela equação (1.1) temos que $\Delta HF(F(I), n+1) = l(C_n)$ para todo n suficientemente grande. Portanto, segue a igualdade (1.4). Logo

$$HF(F(\overline{I}), n+1) = \Delta HF(F(I), n+1)$$

□

O próximo teorema dá-nos fórmulas para a multiplicidade da fibra especial.

Teorema 1.43. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão positiva d. Considere I um ideal $\mathfrak{m}$-primário.*

1. *Sejam $a_1, ..., a_{d-1} \in I$ e $x \in \mathfrak{m}$ uma sequência regular em R o qual é Rees-superficial para o conjunto $(I^{[d-1]}|\mathfrak{m}^{[1]})$. Então*

$$f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

2. *Se $a_1, ..., a_d \in I$ é uma sequência regular em R o qual é Rees-superficial para o conjunto $(I^{[d-1]}|\mathfrak{m}^{[1]})$. Então*

$$f_0(I) = e(I) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{a_dI^n + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Demonstração. 1. Utilizaremos indução sobre d.

Para $d = 1$ precisamos mostrar que

$$f_0(I) = e(\mathfrak{m}) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right)$$

Usamos o Teorema 1.39 para garantir que $e(\mathfrak{m}) = e_0(\mathfrak{m}|I)$. Além disso, temos as seguintes sequências exatas:

$$0 \longrightarrow \frac{xR}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{xR} \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}I^n} \longrightarrow 0$$

Daí segue,

$$l\left(\frac{R}{xI^n}\right) = l\left(\frac{xR}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{xR}\right)$$

e

$$l\left(\frac{R}{xI^n}\right) = l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right)$$

Assim,

$$l\left(\frac{xR}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{xR}\right) = l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{R}{xR}\right) &= l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) - l\left(\frac{xR}{xI^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \\ &= l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) - l\left(\frac{R}{I^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \qquad (1.5) \\ &= l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \\ &= \mu(I^n) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \end{aligned}$$

(1.5) resulta do fato de x ser um não divisor de zero em R. Sendo $x \in \mathfrak{m}$ superficial para $\mathfrak{m}$, pelo Teorema 1.41, xR é uma redução minimal de $\mathfrak{m}$, e como R é um anel de Cohen-Macaulay segue da Proposição 1.31 que $l\left(\frac{R}{xR}\right) = e(\mathfrak{m})$. Assim,

$$e(\mathfrak{m}) = \mu(I^n) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right)$$

e portanto,

$$\mu(I^n) = e(\mathfrak{m}) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right)$$

Tomando o limite em ambos os lados, temos

$$f_0(I) = e(\mathfrak{m}) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right)$$

Isto conclui o caso $d = 1$.

Agora suponhamos que $d = 2$. Seja (a, x) uma sequência regular o qual é Rees-superficial para $I, \mathfrak{m}$. Pelo Teorema 1.41, (a, x) é uma redução em família de

$(I, \mathfrak{m})$. Do Teorema 1.39, $e_1(\mathfrak{m}|I) = e(a, x)$, e juntamente com o fato de R ser Cohen-Macaulay temos pelo Teorema 1.40 que

$$e_1(\mathfrak{m}|I) = l\left(\frac{R}{(a, x)}\right) \tag{1.6}$$

Consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)} \xrightarrow{\psi} \frac{R}{I^n} \oplus \frac{R}{\mathfrak{m}I^{n-1}} \xrightarrow{\phi} \frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}} \longrightarrow 0,$$

onde, $\psi(t') = ((-ta)', (tx)')$ e $\phi(r', s') = (rx + sa)'$ e $(\ \ )'$ denota a classe de equivalência.

Pelas propriedades da função comprimento l, temos:

$$l\left(\frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{R}{I^n}\right) - l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) = 0$$

Substituindo $l\left(\frac{R}{I^n}\right)$ e $l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$:

$$l\left(\frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right)$$
$$-l\left(\frac{I^{n-1}}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{R}{I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) = 0$$

Logo,

$$l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) - l\left(\frac{I^{n-1}}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{R}{I^{n-1}}\right)$$
$$-l\left(\frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Somando e subtraindo $l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$ do lado direito da igualdade acima, temos

$$HF(F(I), n) - HF(F(I), n-1) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{R}{I^{n-1}}\right)$$

$$-l\left(\frac{R}{(I^n : a)\cap(\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{(x,a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Daí

$$\Delta HF(F(I),n) = l\left(\frac{R}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{(I^n : a)\cap(\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}{I^{n-1}}\right)$$

$$-l\left(\frac{(x,a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Ou seja,

$$\Delta HF(F(I),n) = l\left(\frac{R}{(x,a)}\right) + l\left(\frac{(I^n : a)\cap(\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}{I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Logo, por (1.6)

$$\Delta HF(F(I),n) = e_1(\mathfrak{m}|I) + l\left(\frac{(I^n : a)\cap(\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}{I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \quad (1.7)$$

Sendo (a,x) superficial para $(I,\mathfrak{m})$, a é superficial para I e para $\mathfrak{m}$, e regular em R. Temos que $I^n : a = I^{n-1}$ para n suficientemente grande. De fato, dado $b \in I^n : a$, temos que $ba \in I^n \cap (a)$, mas $I^n \cap (a) = (a)I^{n-1}$, pois a é superficial para I e para $\mathfrak{m}$, logo, $ba \in (a)I^{n-1}$, e pelo fato de a ser regular em R, podemos concluir que $b \in I^{n-1}$. Claramente a recíproca é verdadeira. Com isso, o segundo termo do lado esquerdo de (1.7) é anulado. Desde que $HP(F(I),n)$ tem grau polinomial 1, $\Delta HS(F(I),n) = f_0(I)$ para n suficientemente grande.

Desta forma,

$$f_0(I) = e_1(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Suponhamos, agora, que $d \geq 3$. Chamando $\overline{R} = \frac{R}{(a_1)}$ e $L = (a_2, a_3, ..., a_{d-1})$.

Por hipótese de indução e pela Proposição 1.42 temos,

$$\begin{aligned}
f_0(I) &= f_0(\overline{I}) \\
&= e_{d-2}(\overline{\mathfrak{m}}|\overline{I}) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n + a_1R}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + a_1R}\right) \\
&= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n + a_1R}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + a_1R}\right) \qquad (1.8) \\
&= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n \cap a_1R}\right) \qquad (1.9) \\
&= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + (a_1)\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \qquad (1.10) \\
&= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1,\ldots,a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

(1.8) resulta do fato de a_1 ser superficial para $\mathfrak{m}$ e I e aplicando o Teorema 17.4.6 de [32], temos que $e_{d-2}(\overline{\mathfrak{m}}|\overline{I}) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$. E (1.9) resulta de

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{m}I^n + a_1R}{L\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + a_1R} &= \frac{\mathfrak{m}I^n}{\mathfrak{m}I^n \cap (xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + a_1R)} \\
&= \frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n \cap a_1R}
\end{aligned}$$

(1.10) segue de a_1 ser Rees-superficial para I e portanto, $\mathfrak{m}I^n \cap a_1R = (a_1)\mathfrak{m}I^{n-1}$. E (1.11) diretamente de $L\mathfrak{m}I^{n-1} + (a_1)\mathfrak{m}I^{n-1} = (a_1,\ldots,a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}$.

Isto conclui o primeiro item.

2. Basta substituir x por a_d na demonstração do item 1.

□

Capítulo 2

Fibras Especiais de Cohen-Macaulay e de Gorenstein

O objetivo deste capítulo é estudar as propriedades de Cohen-Macaulay e de Gorenstein da Fibra Especial
$$F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m} I^n}$$
de um ideal em um anel local de Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$. Estes são alguns dos problemas centrais da dissertação.

2.1 Fibras Especiais de Cohen-Macaulay

Nesta seção estudamos um dos problemas centrais da dissertação: A caracterização da Cohen-Macaulicidade da fibra especial. Isso é feito via série de Hilbert e multiplicidade da fibra especial. Antes, precisamos mostrar o seguinte lema:

Lema 2.1. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel Artiniano, $G = \bigoplus_{n \geq 0} G_n$ uma álgebra graduada finitamente gerada, $G_0 = R$ e $a \in G_1$ um elemento não divisor de zero de G. Então,*
$$HS(G,t) = \frac{1}{(1-t)} HS\left(\frac{G}{aG}, t\right)$$

Demonstração. De fato, consideremos a seguinte sequência exata:
$$0 \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{\times a} G_n \longrightarrow \frac{G_n}{aG_{n-1}} \longrightarrow 0$$

Pelas propriedades da função comprimento,

$$l\left(\frac{G_n}{aG_{n-1}}\right) = l(G_n) - l(G_{n-1})$$

Como

$$HS\left(\frac{G}{aG}, t\right) = \sum_{n\leq 0} l\left(\frac{G_n}{aG_{n-1}}\right) t^n$$

Temos que

$$\begin{aligned}
HS\left(\frac{G}{aG}, t\right) &= \sum_{n\leq 0}[l(G_n) - l(G_{n-1})]t^n \\
&= \sum_{n\leq 0} l(G_n)t^n - \sum_{n\leq 0} l(G_{n-1})t^n \\
&= \sum_{n\leq 0} l(G_n)t^n - \sum_{n\leq 0} l(G_{n-1})t^{n-1}\cdot t \\
&= HS(G,t) - HS(G,t)\cdot t \\
&= HS(G,t)(1-t).
\end{aligned}$$

□

Feito isso, mostraremos um dos resultados principais deste trabalho: As condições necessárias e suficientes para que a fibra especial seja de Cohen-Macaulay.

Teorema 2.2. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e I um ideal qualquer de R. Considere J uma redução minimal de I. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$F(I)$ é de Cohen-Macaulay*
2. *$HS(F(I),t) = \frac{1}{(1-t)^{\ell}}\sum_{i=0}^{r} l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1}+\mathfrak{m}I^i}\right)t^i$, onde $r = r_J(I)$ e $\ell = \ell(I)$ é a dispersão analítica de I*
3. *$f_0(I) = \sum_{n=0}^{r} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1}+\mathfrak{m}I^n}\right)$*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Notemos que $\frac{F(I)}{JF(I)} = \bigoplus_{n\geq 0}\frac{I^n}{JI^{n-1}+\mathfrak{m}I^n}$. Como J é redução minimal de I, temos que $JI^{n-1} = I^n$, para todo $n \geq r+1$, logo $\frac{I^n}{JI^{n-1}+\mathfrak{m}I^n} = 0$ a partir de $n = r+1$. Assim, $\frac{F(I)}{JF(I)}$ é finito e portanto é soma direta de uma família finita de módulos de comprimento finito, ou seja, $l\left(\dfrac{F(I)}{JF(I)}\right) < \infty$, daí $\dim\left(\dfrac{F(I)}{JF(I)}\right) = 0$. Logo, $JF(I)$ é gerado por um sistema de parâmetros homegêneos. E como $F(I)$ é de Cohen-Macaulay, segue que $JF(I)$ é gerado por uma sequência regular. Além disso, J é uma sequência regular gerada por ℓ elementos em $F(I)$, segue do Lema 2.1 que

$$HS(F(I),t) = \frac{1}{(1-t)^{\ell}} HS\left(\frac{F(I)}{JF(I)}, t\right). \tag{2.1}$$

Por outro lado, vimos que

$$\frac{F(I)}{JF(I)} = \bigoplus_{i=0}^{r} \frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i},$$

aplicando a funçao comprimento em ambos os lados temos,

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = \sum_{i=0}^{r} l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right).$$

Logo, $HS\left(\dfrac{F(I)}{JF(I)}, t\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right) t^i$. E portanto,

$$HS(F(I),t) = \frac{1}{(1-t)^{\ell}} \sum_{i=0}^{r} l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right) t^i$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Pela definição de multiplicidade de Hilbert-Samuel dada da seguinte forma: $HS(M,t) = \frac{h(t)}{(1-t)^d}$, com $h(1) \neq 0$, temos que a multiplicidade é exatamente colocar $t = 1$ no numerador, ou seja,

$$h(1) = f_0(I) = \sum_{i=0}^{r} l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right)$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Observamos que $M = F_+(I) = \displaystyle\bigoplus_{n\geq 1} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$ é o ideal homogêneo maximal de $F(I)$, pois

$$\frac{F(I)}{F_+(I)} = \frac{R}{\mathfrak{m}} = k.$$

Sabemos que $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $F(I)_M$ é de Cohen-Macaulay.

Sendo $F(I)$ um anel graduado homogêneo, o anel graduado associado é dado por,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(MF(I)_M, F(I)_M) &\simeq \bigoplus_{n\geq 0} \frac{(MF(I)_M)^n}{(MF(I)_M)^{n+1}} \\ &\simeq \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} \\ &\simeq F(I).\end{aligned}$$

Assim, $l\left(\dfrac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) = l\left(\dfrac{(MF(I)_M)^n}{(MF(I)_M)^{n+1}}\right)$, logo as multiplicidades de $F(I)$ e $F(I)_M$ coincidem. Além disso,

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = l\left(\frac{F(I)_M}{JF(I)_M}\right)$$

Por hipótese,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) &= f_0(I) \\ &= e(MF(I)_M, F(I)_M)\end{aligned}$$

Isto resulta que

$$l\left(\frac{F(I)_M}{JF(I)_M}\right) = e(MF(I)_M, F(I)_M)$$

Portanto se $JF(I)_M$ for redução minimal de $MF(I)_M$ temos que $F(I)_M$ é de Cohen-Macaulay.

Assim, falta mostrar que $JF(I)_M$ é redução minimal de $MF(I)_M$. Vejamos que $JF(I)$ é uma redução de M. Para isso, precisamos mostrar que $(JF(I))M^r = M^{r+1}$. De fato, sendo

$$JF(I) = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \frac{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}{\mathfrak{m}I^i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=r+1}^{\infty} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i}\right)$$

e

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=r+1}^{\infty} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i} \right)$$

daí,

$$M^r = \bigoplus_{i=r+1}^{\infty} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i}$$

observe que o primeiro termo de $(JF(I))M^r$ é $\left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \right) \cdot \left(\frac{I^r}{\mathfrak{m}I^r} \right) = \left(\frac{I^{r+1}}{\mathfrak{m}I^{r+1}} \right)$.

Desenvolvendo é possível mostrar que $(JF(I))M^r = M^{r+1}$. Assim, $JF(I)_M$ é redução minimal de $MF(I)_M$. E portanto, $F(I)_M$ é de Cohen-Macaulay, que por sua vez implica que $F(I)$ é de Cohen-Macaulay concluindo a demonstração do Teorema. □

2.2 Fibras Especiais de Gorenstein

Esta seção é dedicada ao estudo de um outro problema central deste trabalho: A caracterização da fibra especial segundo a propriedade de Gorenstein. Esta caracterização será feita de acordo com o número de redução do ideal. Durante toda a seção assumiremos que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão d com corpo residual infinito e $F(I)$ de Cohen-Macaulay. Denotaremos $\ell(I)$ por ℓ.

Se $r(I) = 0$, então $F(I)$ é um anel de polinômios em $\ell(I)$ variáveis com coeficientes em $k = R/\mathfrak{m}$. Assim, podemos começar com o caso em que $r(I) = 1$. Neste caso $F(I)$ é de Cohen-Macaulay, por [29, Teorema 1].

Proposição 2.3. *Assuma que $r(I) = 1$. Se $F(I)$ é Gorenstein, então $\mu(I) = \ell + 1$.*

Demonstração. Escolhendo J uma redução minimal de I, tal que $r_J(I) = 1$. Como $F(I)$ é de Cohen-Macaulay, temos pelo Teorema 2.2,

$$HS(F(I), t) = \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^{r} l \left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i} \right) t^i$$

como $r(I) = 1$ temos que,

$$\begin{aligned} HS(F(I),t) &= \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^{1} l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1}+\mathfrak{m}I^i}\right) t^i \\ &= \frac{1}{(1-t)^\ell}\left[l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right) + l\left(\frac{I}{J+\mathfrak{m}I}\right)t\right] \\ &= \frac{1}{(1-t)^\ell}\left[1 + \left(l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right) - l\left(\frac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right)\right)t\right] \\ &= \frac{1}{(1-t)^\ell}\left[1 + \left(\mu(I) - l\left(\frac{J}{J\cap\mathfrak{m}I}\right)\right)t\right] \\ &= \frac{1}{(1-t)^\ell}[1 + (\mu(I)-\mu(J))t] \\ &= \frac{1+(\mu(I)-\ell)t}{(1-t)^\ell} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por outro lado,

$$HS(F(I),t) = \frac{h(t)}{(1-t)^\ell} \tag{2.3}$$

(2.2) e (2.3) nos diz que

$$\frac{1+(\mu(I)-\ell)t}{(1-t)^\ell} = \frac{h(t)}{(1-t)^\ell} \tag{2.4}$$

Portanto, $1 + (\mu(I) - \ell)t = h(t)$. Como $F(I)$ é Gorenstein, temos que $h(t)$ é um polinômio simétrico e assim $\mu(I) - \ell = 1$. □

A recíproca desta proposição é válida, se $\mu(I) = \ell + 1$ então $F(I)$ é um anel de Gorenstein. Porém é possível mostrar um resultado ainda mais geral, se $\mu(I) = \ell+1$ então $F(I)$ é uma hipersuperfície, já que sendo $F(I)$ uma hipersuperfície, segue que $F(I)$ é de Gorenstein.

Seja $J = (x_1, \ldots, x_a)$ uma redução minimal de I. Sendo $F(I)$ de Cohen-Macaulay, sabemos a forma da sua série de Hilbert pelo Teorema 2.2, daí podemos concluir que o número de redução de I com relação a J é o grau do polinômio $h(t)$ de $F(I)$.

Proposição 2.4. *Sejam J uma redução minimal de I e $r = r_J(I)$. Então*

$$Socle\frac{F(I)}{JF(I)} \cong \bigoplus_{n=1}^{r-1} \frac{(I^{n+1}\mathfrak{m} + JI^n : I)\cap I^n}{I^n\mathfrak{m} + JI^{n-1}} \bigoplus \frac{I^r}{\mathfrak{m}I^r + JI^{r-1}}$$

Demonstração. Consideremos

$$S = \frac{F(I)}{JF(I)} = \bigoplus_{n=0}^{r} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n + JI^{n-1}}.$$

Sabemos que $S = \bigoplus_{n=0}^{r} S_n$ é uma k-álgebra graduada standard, onde $k = S_0$ é um corpo. Assim,

$$\mathrm{Socle}S = (0 :_S S_+),$$

onde $S_+ = \bigoplus_{n=1}^{r} S_n$ é o ideal maximal de S. Além disso, $(0 :_S S_+) = (0 :_S S_1)$, pois S é uma k-álgebra graduada standard.

Por outro lado, $(0 :_S S_1) = \bigoplus_{n=0}^{r}(0 :_{S_n} S_1) = (0 :_{R/\mathfrak{m}} S_1) \oplus \bigoplus_{n=1}^{r}(0 :_{S_n} S_1)$, como $R/\mathfrak{m}$ é k-espaço vetorial segue que $(0 :_{R/\mathfrak{m}} S_1) = 0$. E portanto,

$$(0 :_S S_1) = \bigoplus_{n=1}^{r}(0 :_{S_n} S_1)$$

Como $(0 :_{S_n} S_1) = \frac{(I^{n+1}\mathfrak{m}+JI^n:I)\cap I^n}{I^n\mathfrak{m}+JI^{n-1}}$, assim concluímos que

$$(0 :_S S_1) = \ \mathrm{Socle}\frac{F(I)}{JF(I)} \cong \bigoplus_{n=1}^{r-1} \frac{(I^{n+1}\mathfrak{m} + JI^n : I) \cap I^n}{I^n\mathfrak{m} + JI^{n-1}} \bigoplus \frac{I^r}{\mathfrak{m}I^r + JI^{r-1}}$$

□

Quando $r(I) = 2$ temos uma condição para buscar a propriedade de Gorenstein de $F(I)$ dada pelo corolário seguinte:

Corolário 2.5. *Seja $r(I) = 2$ e seja J redução minimal de I, tal que $r_J(I) = 2$. Então $F(I)$ é Gorenstein se, e somente se, $(I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I = \mathfrak{m}I + J$ e $l\left(\dfrac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 1$.*

Demonstração. Escrevamos $J = (x_1, \ldots, x_a)$. Denotemos por x° a classe de $x \in I$ em $I/\mathfrak{m}I$. Sabemos que $F(I)$ é Gorenstein se, e somente se, $F(I)$ é de Cohen-Macaulay e Tipo $F(I) = 1$. Sendo $({x_1}^{\mathrm{o}}, \ldots, {x_a}^{\mathrm{o}})$ uma sequência regular para $F(I)$ no qual estamos considerando de Cohen-Macaulay, temos que,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } \dim_k \left(\mathrm{Socle}\frac{F(I)}{({x_1}^{\mathrm{o}}, \ldots, {x_a}^{\mathrm{o}})F(I)}\right) = 1.$$

Como $(x_1{}^{\text{o}}, \ldots, x_a{}^{\text{o}})$ é uma sequência regular para $F(I)$ temos,

$$\text{Socle}\frac{F(I)}{JF(I)} \cong \text{Socle}\frac{F(I)}{(x_1{}^{\text{o}}, \ldots, x_a{}^{\text{o}})F(I)}$$

Assim,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } \dim_k\left(\text{Socle}\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = 1.$$

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } l\left(\text{Socle}\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = 1.$$

Como $r(I) = 2$ e J é uma redução minimal de I, pela Proposição 2.4 $\text{Socle}\frac{F(I)}{JF(I)} = \frac{(I^2\mathfrak{m}+JI:I)\cap I}{I\mathfrak{m}+J} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2+JI}$. Logo,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } l\left(\frac{(I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I}{I\mathfrak{m} + J}\right) + l\left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI}\right) = 1.$$

Portanto,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } l\left(\frac{(I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I}{I\mathfrak{m} + J}\right) = 0 \text{ e } l\left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI}\right) = 1.$$

Caso contrário, $l\left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI}\right) = 0$ teríamos que $I^2 = \mathfrak{m}I^2 + JI$, pelo Lema de Nakayama, $I^2 = JI$ contradizendo o fato de $r(I) = 2$. Com isso concluímos o corolário.

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } (I^2\mathfrak{m}+JI : I)\cap I = I\mathfrak{m}+J \text{ e } l\left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI}\right) = 1.$$

$\square$

Agora, veremos uma consequência de $F(I)$ ser de Gorenstein quando o número de redução $r(I) \geq 3$.

Proposição 2.6. *Sejam J uma redução minimal de I e $r = r_J(I) \geq 3$. Se $F(I)$ é Gorenstein, então*

$$\mu(I) = \ell + l\left(\frac{I^{r-1}}{\mathfrak{m}I^{r-1} + JI^{r-2}}\right).$$

Demonstração. Sabemos que $S = \frac{F(I)}{JF(I)}$ é um anel graduado standard de Gorenstein de dimensão zero e consideremos

$$S_i = \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i + JI^{i-1}},\ i = 0, ..., r$$

Como

$$\begin{aligned} HS(F(I),t) &= \frac{1}{(1-t)^{\ell}}\sum_{i=0}^{r} l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1}+\mathfrak{m}I^i}\right)t^i \\ &= \frac{1}{(1-t)^{\ell}}\sum_{i=0}^{r} l\left(S_i\right)t^i \\ &= \frac{l(S_0)+l(S_1)t+l(S_2)t^2+\ldots+l(S_r)t^r}{(1-t)^{\ell}} \end{aligned}$$

Por hipótese $F(I)$ é anel de Gorenstein, portanto $h(t)$ é um polinômio simétrico, além disso $h(t)$ é o termo da série de Hilbert dada pela função $HS(F(I),t)=\frac{h(t)}{(1-t)^{\ell}}$. Também por hipótese, $r\geq 3$ isto implica em $l(S_1)=l(S_{r-1})$. Observamos que,

$$\begin{aligned} l(S_1) &= l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I+J}\right) \\ &= l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right)-l\left(\frac{\mathfrak{m}I+J}{\mathfrak{m}I}\right) \\ &= \mu(I)-l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I\cap J}\right) \\ &= \mu(I)-l\left(\frac{J}{\mathfrak{m}J}\right) \\ &= \mu(I)-\mu(J) \\ &= \mu(I)-\ell \end{aligned}$$

Ou seja, $l(S_{r-1})=\mu(I)-\ell$ e portanto $\mu(I)=\ell+l\left(\frac{I^{r-1}}{\mathfrak{m}I^{r-1}+JI^{r-2}}\right)$. □

Definiremos o que venha a ser um ideal de Sally para concluir essa seção caracterizando a propriedade de Gorenstein de $F(I)$ para ideais desse tipo.

Definição 2.7. Um ideal I $\mathfrak{m}$-primário de um anel de Cohen Macaulay satisfazendo a condição $l(\frac{I^2}{JI})=1$ para qualquer redução minimal J é chamado *ideal de Sally.*

Corolário 2.8. *Seja I ideal de Sally com $r(I)\geq 3$. Se $F(I)$ é anel de Gorenstein, então $\mu(I)=\ell+1$.*

Demonstração. Se J for uma redução de I, então $I^2\neq JI$, pois $r(I)\geq 3$.

Sendo I ideal de Sally temos $l\left(\dfrac{I^{n+1}}{JI^n}\right) \leq 1$, para todo $n \geq 1$, segue que $\mathfrak{m}I^{n+1} \subseteq JI^n$ para todo $n \geq 1$ e $l\left(\dfrac{I^{n+1}}{JI^n}\right) = 1$ para todo $n = 2, \ldots, r$ Assim podemos escrever

$$\frac{I^{I^{r-1}}}{JI^{r-2}} = \frac{I^{r-1}}{\mathfrak{m}I^{r-1} + JI^{r-2}}$$

e portanto,

$$1 = l\left(\frac{I^{r-1}}{JI^{r-2}}\right) = l\left(\frac{I^{r-1}}{\mathfrak{m}I^{r-2} + JI^{r-2}}\right)$$

Pela Proposição 2.6,

$$\mu(I) = \ell + l\left(\frac{I^{r-1}}{\mathfrak{m}I^{r-1} + JI^{r-2}}\right) = \ell + 1.$$

$\square$

Capítulo 3

Ideais de Multiplicidade Mista Minimal e Quase Minimal

Neste último capítulo continuamos estudando as propriedades de Cohen-Macaulay da Fibra Especial

$$F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$$

porém, em ideais $\mathfrak{m}$-primários com multiplicidade mista minimal e quase minimal em um anel local de Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$ com dimensão d.

Assim, começamos com um resultado geral. Para um anel local de Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$ de dimensão d, Abhyankar mostrou em [1] que $e(\mathfrak{m}) \geq \mu(\mathfrak{m}) - d + 1$. D'Cruz, Raghavan e Verma em [11] estenderam este resultado para os ideais $\mathfrak{m}$-primários:

Teorema 3.1. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay com dimensão d e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então*

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) \geq \mu(I) - d + 1$$

Demonstração. Passando para o anel $R(X) = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ podemos assumir que o corpo residual $R/\mathfrak{m}$ é infinito. Tomando $x, a_1, \ldots, a_{d-1}$ uma redução em família de $\mathfrak{m}, I, \ldots, I$, onde I é repetido $d-1$ vezes. A seguinte aplicação:

$$f : \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{d-1} \longrightarrow \frac{(x, a_1, \ldots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \ldots, a_{d-1})\mathfrak{m}},$$

é definida por $f(a', b'_1, \ldots, b'_{d-1}) = (xa + a_1b_1 + \ldots + a_{d-1}b_{d-1})'$, onde $(\ )'$ é a classe de equivalência e $K = kernel f$. Consequentemente a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{d-1} \xrightarrow{f} \frac{(x, a_1, ..., a_{d-1})}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}} \longrightarrow 0.$$

Pelas propriedades da função comprimento, segue que

$$l(K) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{(x, a_1, ..., a_{d-1})}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) = 0$$

Como

$$l\left(\frac{(x, a_1, ..., a_{d-1})}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) = l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{(x, a_1, ..., a_{d-1})}\right)$$

temos

$$l(K) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{(x, a_1, ..., a_{d-1})}\right) = 0$$

Sabemos, pelo Teorema 1.40, que sendo R um anel de Cohen-Macaulay $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = l\left(\frac{R}{(x, a_1, \ldots, a_{d-1})}\right)$, assim

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = l(K) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)$$

Somando e subraindo $l\left(\frac{R}{I\mathfrak{m}}\right)$ do lado direito da equação acima, temos:

$$\begin{aligned} e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) &= l(K) + l\left(\frac{R}{I\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I\mathfrak{m}}\right) \\ &= l(K) + l\left(\frac{I}{I\mathfrak{m}}\right) - (d-1) + l\left(\frac{I\mathfrak{m}}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) \\ &= l(K) + \mu(I) - d + 1 + l\left(\frac{I\mathfrak{m}}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) \geq \mu(I) - d + 1$$

□

Como consequência temos o resultado de Abhyankar mencionado no início deste capítulo:

Corolário 3.2. *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local de Cohen-Macaulay com dimensão d. Então,*

$$e(m) \geq \mu(\mathfrak{m}) - d + 1$$

Demonstração. Colocando $I = \mathfrak{m}$ e usando o fato de $e_i(\mathfrak{m}|\mathfrak{m}) = e(\mathfrak{m})$ para todo i. □

3.1 Ideais de Multiplicidade Mista Minimal

Nesta seção caracterizaremos numericamente quando a fibra especial de um ideal $\mathfrak{m}$-primário, de um anel local $(R, \mathfrak{m})$, de multiplicidade mista minimal é de Cohen-Macaulay. Esta caracterização foi feita por Jayanhtan, Puthenpurakal e Verma em [24] utilizando a Proposição 3.4 mostrada por D'Cruz, Raghavan e Verma no artigo: Fibra especial de Cohen-Macaulay, [11].

Antes de mostrar ambos os resultados, definimos multiplicidade mista minimal.

Definição 3.3. Um ideal $\mathfrak{m}$-primário I de um anel local de Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$ é dito ter *multiplicidade mista minimal* se $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 1$.

Proposição 3.4. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local de Cohen-Macaulay d-dimensional,* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário com multiplicidade mista minimal e* $a_1, \ldots, a_{d-1} \in I$, $x \in \mathfrak{m}$ *formam uma sequência regular. Então,*

$$\mathfrak{m}I^n = xI^n + (a_1, \ldots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}.$$

Demonstração. Basta provar que $\mathfrak{m}I = xI + (a_1, \ldots, a_{d-1})\mathfrak{m}$, pois

$$\mathfrak{m}I \cdot I^{n-1} = xI \cdot I^{n-1} + (a_1, \ldots, a_{d-1}) \cdot I^{n-1}\mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m}I^n = xI^n + (a_1, \ldots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}.$$

Definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} f \quad : \quad \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{d-1} &\longrightarrow \frac{(x, a_1, \ldots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \ldots, a_{d-1})\mathfrak{m}} \\ (\overline{y}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_{d-1}}) &\longrightarrow xy + \sum_i a_i z_i \end{aligned}$$

Aplicando a função comprimento, temos:

$$
\begin{aligned}
l\left(\frac{R}{I}\right)+d-1 &= l\left(\frac{(x,a_1,...,a_{d-1})}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)+l(K)\\
&= l\left(\frac{R}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)-l\left(\frac{R}{(x,a_1,...,a_{d-1})}\right)+l(K)
\end{aligned}
$$

$$
d-1+l\left(\frac{R}{(x,a_1,...,a_{d-1})}\right) = l\left(\frac{R}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)-l\left(\frac{R}{I}\right)+l(K).
$$

Como R é um anel de Cohen-Macaulay e I tem multiplicidade mista minimal, segue que $l\left(\dfrac{R}{(x,a_1,...,a_{d-1})}\right)=e(\mathfrak{m}|I^{[d-1]})=e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)=\mu(I)-d+1$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
d-1+\mu(I)-d+1 &= l\left(\frac{R}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)-l\left(\frac{R}{I}\right)+l(K)\\
&= l\left(\frac{R}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)-\left[l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right)-l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right)\right]+l(K)\\
&= l\left(\frac{R}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)-l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right)+\mu(I)+l(K)\\
&= l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)+\mu(I)+l(K)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)+l(K)=0
$$

Portanto, $\mathfrak{m}I=xI+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}$, como queríamos. $\square$

Este resultado que acabamos de mostrar será importante na caracterização da fibra especial em termos da multiplicidade mista minimal, o qual será visto no próximo teorema:

Teorema 3.5. *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão d e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de multiplicidade mista minimal. Então, $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I)\leq 1$.*

Demonstração. Tomamos J como sendo qualquer redução minimal de I. Então, pelo Teorema 2.2, $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $f_0(I)=l\left(\dfrac{F(I)}{JF(I)}\right)$. Sendo

$$
\frac{F(I)}{JF(I)}=\frac{R}{\mathfrak{m}}\oplus\frac{I}{J+\mathfrak{m}I}\oplus\left(\bigoplus_{n=2}^{\infty}\frac{I^n}{JI^{n-1}+\mathfrak{m}I^n}\right)
$$

temos que,

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right)=l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)+l\left(\frac{I}{J+\mathfrak{m}I}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1}+\mathfrak{m}I^n}\right) \tag{3.1}$$

Sabemos que,

$$l\left(\frac{I}{J+\mathfrak{m}I}\right)=l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right)-l\left(\frac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right)$$

E que $alt(I)\leq \dim(F(I))\leq \dim R$, porém $alt(I)=alt(\mathfrak{m})=\dim R=d$, logo $\dim(F(I))=d$.

Além disso, como J é uma redução minimal de I segue da Proposição 1.25 e do Teorema 1.26, que $J\cap \mathfrak{m}I=\mathfrak{m}J$ e $\mu(J)=d$. Assim,

$$l\left(\frac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right)=l\left(\frac{J}{J\cap\mathfrak{m}I}\right)=l\left(\frac{J}{\mathfrak{m}J}\right)=d$$

Portanto,

$$l\left(\frac{I}{J+\mathfrak{m}I}\right)=\mu(I)-d$$

Substituindo em (3.1), temos que

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right)=1+\mu(I)-d+\sum_{n=2}^{\infty}l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1}+\mathfrak{m}I^n}\right) \tag{3.2}$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.43, para qualquer sequência Rees-superficial $(a_1,a_2,\ldots,a_{d-1},x)$, onde $a_1,a_2,\ldots,a_{d-1}\in I$ e $x\in\mathfrak{m}$ temos

$$f_0(I)=e_{d-1}(m|I)-\lim_{n\to\infty}l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n+(a_1,...,a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Como foi dito no início da demonstração, $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $f_0(I)=l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right)$. Por (3.2), $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$\begin{aligned} f_0(I) &= 1+\mu(I)-d+\sum_{n=2}^{\infty}l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1}+mI^n}\right)\\ &= e_{d-1}(m|I)-\lim_{n\to\infty}l\left(\frac{mI^n}{xI^n+(a_1,...,a_{d-1})mI^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.4, I tem multiplicidade mista minimal se, e somente se, $I^n\mathfrak{m} = xI^n + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Isso nos oferece,

$$\lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) = 0.$$

Assim, $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right)$$

Novamente usando o fato de I ter multiplicidade mista minimal, concluímos que $\sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) = 0$, pois $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 1$. Segue que, $l\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 0$, isto implica em $I^2 = JI + \mathfrak{m}I^2$, pelo lema de Nakayama, concluímos que $I^2 = JI$, ou seja, $r(I) \leq 1$. □

3.2 Ideais de Multiplicidade Mista Quase Minimal

Nesta seção caracterizaremos numericamente quando a fibra especial de um ideal $\mathfrak{m}$-primário, de um anel local $(R, \mathfrak{m})$, de multiplicidade mista quase minimal é de Cohen-Macaulay. Tal caracterização foi feita em [24] por Jayanhtan, Puthenpurakal e Verma.

Definição 3.6. Um ideal I $\mathfrak{m}$-primário de um anel local de Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$ é dito ter *multiplicidade mista quase minimal* se $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 2$.

Para caracterizar as propriedades das fibras especiais em termos das multiplicidades mistas quase minimal precisaremos dos dois resultados seguintes, mostrados por D'Cruz e Verma em [9]:

Lema 3.7. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito. Suponha que I é um ideal $\mathfrak{m}$-primário com multiplicidade mista quase minimal. Então para qualquer redução em família $(x, a_1, ..., a_{d-1})$ de $(\mathfrak{m}|I^{d-1})$ tem-se*

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) \leq 1.$$

Demonstração. Tomamos $(a_1, ..., a_{d-1})$ uma redução em família de $(\mathfrak{m}|I^{d-1})$. E consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{d-1} \xrightarrow{f} \frac{(x, a_1, ..., a_{d-1})}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}} \longrightarrow 0,$$

onde f é definida por $f(\overline{y}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_{d-1}}) = xy + \sum_i a_i z_i$ e $K = \ker f$. Aplicando a função comprimento temos:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{R}{I}\right) + d - 1 &= l\left(\frac{(x, a_1, ..., a_{d-1})}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + l(K) \\ &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{(x, a_1, ..., a_{d-1})}\right) + l(K) \end{aligned}$$

$$d - 1 + l\left(\frac{R}{(x, a_1, ..., a_{d-1})}\right) = l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) + l(K)$$

Como R é um anel de Cohen-Macaulay e I tem mulitplicidade mista quase minimal segue que $l\left(\frac{R}{(x, a_1, ..., a_{d-1})}\right) = e(\mathfrak{m}|I^{[d-1]}) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} d - 1 + \mu(I) - d + 2 &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) + l(K) \\ &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - \left[l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right) - l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right)\right] + l(K) \\ &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right) + \mu(I) + l(K) \\ &= l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + \mu(I) + l(K) \end{aligned}$$

Assim,

$$1 = l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + l(K)$$

ou seja,

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) \leq 1$$

□

Proposição 3.8. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$ e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R com multiplicidade mista quase minimal. Então, para qualquer redução em família $(x, a_1, ..., a_{d-1})$ de $(\mathfrak{m}|I^{d-1})$ tem-se para cada $n \geq 1$*

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, ..., a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \leq 1.$$

Demonstração. Consideramos $J = (a_1, ..., a_{d-1})$. Sendo I com multiplicidade mista quase minimal, temos pelo Lema 3.7 que

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + J\mathfrak{m}}\right) \leq 1$$

Se $l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + J\mathfrak{m}}\right) = 0$, então $\mathfrak{m}I = xI + \mathfrak{m}J$ isto implica que $\mathfrak{m}I^n = xI^n + \mathfrak{m}JI^{n-1}$, daí

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + \mathfrak{m}JI^{n-1}}\right) = 0$$

ou seja,

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + \mathfrak{m}JI^{n-1}}\right) \leq 1$$

Se $l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + J\mathfrak{m}}\right) = 1$, logo existe $y \in \mathfrak{m}$ e $b \in I$ tal que $\mathfrak{m}I = xI + \mathfrak{m}J + (yb)$ e $\mathfrak{m}yb \subset J\mathfrak{m} + xI$.

Afirmação 3.9. *Para cada $n \geq 1$ tem-se $\mathfrak{m}I^n = J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + (yb^n)$*

De fato, o caso $n = 1$ resulta do Lema 3.7. Se $n > 1$, então pela hipótese indutiva temos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}I^n = (\mathfrak{m}I^{n-1})I &= (J\mathfrak{m}I^{n-2} + xI^{n-1} + (yb^{n-1}))I \\ &= J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + (yb^{n-1})I. \end{aligned}$$

Para concluírmos a afirmação basta mostrar que $(yb^{n-1})I \subseteq J\mathfrak{m}In - 1 + xI^n + (yb^n)$, pois $(yb^n) \subseteq yb^{n-1}I$.

Observe que $(yb^{n-1})I \subseteq b\mathfrak{m}I^{n-1} = b(J\mathfrak{m}I^{n-2} + xI^{n-1} + (yb^{n-1})) \subseteq J\mathfrak{m}In - 1 + xI^n + (yb^n)$. Isto conclui a afirmação.

Sendo $m(yb) \subseteq J\mathfrak{m} + xI$, temos

$$\mathfrak{m}(yb^n) = \mathfrak{m}(yb)(b^{n-1}) \subseteq (Jm + xI)(b^{n-1}) \subseteq (J\mathfrak{m} + xI)I^{n-1} \subseteq J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n$$

ou seja,

$$\mathfrak{m}(yb^n) \subseteq J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n$$

Portanto,

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + J\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \leq 1$$

□

Agora vamos caracterizar quando a fibra especial é de Cohen-Macaulay de um ideal $\mathfrak{m}$-primário com multiplicidade mista quase minimal.

Teorema 3.10. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de multiplicidade mista quase minimal. Então,*

1. *Ou $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ ou $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - 1$*
2. *Seja $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$. Então, $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I) = 2$ e $l\left(\dfrac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 1$.*
3. *Seja $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - 1$. Então $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I) \leq 1$.*

Demonstração. 1. Consideremos $a_1, \ldots, a_{d-1} \in I, x \in \mathfrak{m}$ uma sequência regular em R que é Rees-superficial para $(I^{[d-1]}, \mathfrak{m}^{[1]})$, $L = (a_1, \ldots, a_{d-1})$ e $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} l\left(\dfrac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$. Como I tem multiplicidade mista quase minimal, pela Proposição 3.8, segue que para qualquer valor de n

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \leq 1$$

Portanto, $\alpha = 0$ ou 1.

Pelo Teorema 1.43, $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \alpha$ assim, $f_0(I) = e_{d-1}(m|I)$ ou $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - 1$. Isto conclui a demonstração do primeiro item.

O fato seguinte será utilizado para demonstrar os itens restantes.

Parte da demonstração do Teorema 3.5 nos garante que $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$f_0(I) = 1 + \mu(I) - d + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right)$$

Novamente a partir do Teorema 1.43 e do fato de I possuir multiplicidade mista quase minimal segue que $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \alpha = \mu(I) - d + 2 - \alpha$. Assim,

$$\mu(I) - d + 2 - \alpha = 1 + \mu(I) - d + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right)$$

Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) = 1 - \alpha$$

ou seja,

$$F(I) \text{ é Cohen-Macaulay se, e somente se, } \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) = 1 - \alpha \quad (3.3)$$

De posse deste resultado, podemos provar os próximos itens.

2. Por hipótese $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$. Então, pelo item 1 segue que $\alpha = 0$. Assim por (3.3), $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$\sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) = 1.$$

Mas, isto acontece se, e somente se, $l\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 1$ e $l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) = 0$, para todo $n \geq 3$. Portanto, $I^3 = \mathfrak{m}I^3 + JI^2$, isto é, $I^3 = JI^2$. Logo $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I) = 2$ e $l\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 1$.

3. Por hipótese $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - 1$. Então pelo item 1 $\alpha = 1$.

Por (3.3),

$$F(I) \text{ é Cohen-Macaulay se, e somente se, } \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) = 0$$

$$\text{se, e somente se, } l\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 0 \text{ se, e somente se, } I^2 = \mathfrak{m}I^2 + JI$$

$$\text{se, e somente se, } I^2 = JI \text{ se, e somente se, } r(I) \leq 1.$$

□

Referências Bibliográficas

[1] Abhyankar, S. *Local rings of high embedding dimension*, Amer. J. Math. **89**, (1967), 1073-1077.

[2] Barile, M. e Morales, M., *On certain algebras of reduction number one*, Journal Algebra **206** No 1, (1998), 113-128.

[3] Bruns, W. e Herzog, J., *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. **39**, Cambridge University Press, (1996).

[4] Corso, A., Guezzi, L., Polini, C., Ulrich, B. *Cohen-Macaulayness fiber cone rings*, In: Special Issue in Honor of Steven L. Kleiman, Commutative Algebra **31** No 8, (2003), 3713-3734.

[5] Corso A., Polini, C. e Vasconcelos, W., *Multiplicity of the special fiber of blowups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **140** No2, (2006), 207-219.

[6] Cortadellas, T., *Fiber cones with almost maximal depth*, Comm. Algebra **33** No 3, (2005), 953-963.

[7] Cortadellas, T. e Zarzuela, S., *On The Depth of the Fiber Cone of Filtrations*, Journal of Algebra. **198** No 2, (1997), 428-445.

[8] Cortadellas, T. e Zarzuela, S., *On the Cohen-Macaulay property of the fiber cone of ideals with reduction number at most one*, In: Commutative Algebra, Algebraic Geometry, and Computacional Methods, Hanoi, (1996), Springer-Verlag, Singapore, (1999), 215-222.

[9] D'Cruz, C. e Verma, J. K., *Hilbert Series of Fiber Cones of Ideals with Almost Minimal Mixed Multiplicity*, Journal of Algebra. **251** (2002), 98-109.

[10] D'Cruz C. e Puthenpurakal, T., *The Hilbert Coefficients of the Fiber Cone and the a-Invariant of the Associated Graded Ring*, preprint, arXiv: math.AC/0601510, (2006).

[11] D'Cruz, C., Raghavan, K. N. e Verma, J. K., *Cohen-Macaulay Fiber Cones*, Commutative Algebra, Algebraic Geometry and Computational Methods. Springer-Verlag, Singapore, (1999), 233-246.

[12] Eisenbud e D., Mazur, B., *Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals*, J. Reine Angew. Math. **488**, (1997), 189- 201.

[13] Gimenez, P., *Étude de la fibre spéciale de l'éclament d'une varieté monomiale en codimension deux*, Dissertation, Univ. of Grenoble, (1993).

[14] Heinzer, W. e Kim, M., *Properties of the Fiber Cone of Ideals in Local Rings*, Comm. Algebra **31** No 7, (2003), 3529-3546.

[15] Heinzer,W., Kim, M. e Ulrich, B., *The Gorenstein and complete intersection properties of associated graded rings*, J. Pure Appl. Algebra **201** 1-3, (2005), 264-283.

[16] Hironaka, H., *Resolution of singularities*, Ann. of Math. **79**, (1964), 109-326.

[17] Hübl, R., *Evolutions and valuations associated to an ideal*, J. Reine Angew. Math. **517**, (1999), 81-101.

[18] Hübl, R. e Huneke, C., *Fiber cones and the integral closure of ideals*, Collect. Math. **52** No1, (2001), 85-100.

[19] Hübl, R. e Swanson, I., *Normal cones of monomial primes*, Math. Comp. **72** (241), (2003), 459-475, (electronic).

[20] Huckaba, S., *Reduction numbers for ideals of analytic spread one*, Journal Algebra **108** No 2, (1987), 503-512.

[21] Huneke, C., e Sally, J., *Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals*, Journal of Algebra. **115** No 2, (1998), 481-500.

[22] Jayanthan, A. V. e Verma, J. K., *Hilbert Coefficients and Depth of Fiber Cones*, Journal of Pure and Applied Algebra. **201** (2005), 97-115.

[23] Jayanthan, A.V. e Verma, J.K. *Fiber cones of ideals with almost minimal multiplicity*, Nagoya Math. J. **177**, (2005), 155-179.

[24] Jayanthan, A. V., Puthenpurakal, T. J. e Verma, J. K., *On Fiber Cones of $\mathfrak{m}$-Primary Ideals*, Canadian Journal of Mathematics. **59** No 1 (2007), 109-126.

[25] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (1986).

[26] Morales, M. e Simis, A., *Symbolic of monomial curves in P^3 lying on a quadric surface*, Commutative Algebra. **20** No 4, (1992), 1109-1121.

[27] Rees, D. *Generalizations of reductions and mixed multiplicities*, J. London Math. Soc. (2)**29** No 3, (1984), 397-414.

[28] Rees, D. *a-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals*, Proc. Cambridge Philos Soc. **57**, (1961), 8-17.

[29] Shah, K., *On the Cohen-Macaulayness of the fiber cone of an ideal*, Journal Algebra. **143** No 1, (1991), 156-172.

[30] Shah, K., *On equimultiple ideals*, Math. Z. **215** No 1, (1994), 13-24.

[31] Singh, B., *A numerical criterion for the permissibility of a blowing-up*, Compositio Math. **33**, (1976), 15-28.

[32] Swanson, I. e Huneke, C., *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, Cambridge University Press, (2006).

[33] Teissier, B., *Cicle évanescent, sections planes, et conditions de Whitney*, Soc. Math. France,Paris. In: Singularitiés á Cargése, Astérisque **7-8** (1973), 285-362.

[34] Viêt, D.Q., *On the Cohen-Macaulayness of fiber cones*, Proc Amer. Math. Soc. **136** No 12 (2008), 4185-4195.