

Universidade Federal da Paraíba
Departamento de Matemática
Cálculo II
Lista de Exercícios 5
Período 2012 - I

1. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, em cada uma das funções a seguir:
 - (a) $f(x, y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3$
 - (b) $f(x, y) = e^x(\cos y - \operatorname{sen} y)$
 - (c) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$
 - (d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
 - (e) $f(x, y) = x^y$
 - (f) $f(x, y) = \arctan(xy)$
 - (g) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 - (h) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
 - (i) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$
 - (j) $f(x, y, z) = e^{xyz}$
 - (k) $f(x, y, z) = x^2 e^y \ln z$
 - (l) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$
 - (m) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$
2. Em cada item, a seguir, verifique se $z_{xy} = z_{yx}$
 - (a) $z = x^2 - 4xy + 3y^2$
 - (c) $z = \ln(x + y)$
 - (b) $z = x^2 e^{-y^2}$
 - (d) $z = e^{-3x} \cos y$
3. Determine o gradiente de cada função, dada a seguir, no ponto indicado.
 - (a) $f(x, y) = y - x, P = (2, 1)$
 - (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), P = (1, 1)$
 - (c) $f(x, y) = y - x^2, P = (-1, 0)$
 - (d) $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, P = (\sqrt{2}, 1)$
4. Determine o gradiente de cada função, dada a seguir, no ponto indicado.
 - (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z \ln x, P = (1, 1, 1)$
 - (b) $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + \arctan(xz), P = (1, 1, 1)$
 - (c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \ln(xyz), P = (-1, 2, -2)$
 - (d) $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z + (y + 1) \arcsin x, P = (0, 0, \pi/6)$
5. Nos exercícios, a seguir, encontre uma equação para o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$, no ponto P , indicado.
 - (a) $z = x^2 + y^2; P = (3, 4, 25)$
 - (b) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}; P = (4, -3, 0)$

- (c) $z = \operatorname{sen} \frac{\pi xy}{2}; P = (3, 5, -1)$
- (d) $z = \frac{4}{\pi} \arctan(xy); P = (1, 1, 1)$
- (e) $z = x^3 - y^3; P = (3, 2, 19)$
- (f) $z = 3x + 4y; P = (1, 1, 7)$
- (g) $z = xy; P = (1, -1, -1)$
- (h) $z = e^{-x^2-y^2}; P = (0, 0, 1)$
6. Mostre que a função,
- $$u(x, t) = e^{-n^2 kt} \operatorname{sen}(nx), \quad n \text{ e } k \text{ constantes},$$
- satisfaz a equação
- $$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \text{(Equação Unidimensional do Calor)}$$
7. Usando a regra da cadeia, calcule $\frac{dw}{dt}$ e, em seguida, $\frac{dw}{dt}$ no ponto t dado.
- (a) $w = x^2 + y^2, x = \cos t, y = \operatorname{sen} t; t = \pi. \quad (\text{R. } \frac{dw}{dt}(\pi) = 0)$
- (b) $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}, x = \cos^2 t, y = \operatorname{sen}^2 t, z = \frac{1}{t}; t = 3. \quad (\text{R. } \frac{dw}{dt}(3) = 1)$
- (c) $w = 2ye^x - \ln z, x = \ln(t^2 + 1), y = \arctan t, z = e^t; t = 1. \quad (\text{R. } \frac{dw}{dt}(1) = 4 \arctan 1 + 1)$
- (d) $w = e^{-x^2-y^2}, x = t, y = \sqrt{t}.$
- (e) $w = \operatorname{sen}(xyz), x = t, y = t^2, z = t^3$
- (f) $w = \ln(u + v + z), u = \cos^2 t, v = \operatorname{sen}^2 t, z = t^2$
8. Usando a regra da cadeia, calcule $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$. Em seguida calcule $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ no ponto indicado.
- (a) $z = 4e^x \ln y, x = \ln(u \cos v), y = u \operatorname{sen} v; (u, v) = (2, \pi/4)$
- (b) $z = \arctan(\frac{x}{y}), x = u \cos v, y = u \operatorname{sen} v; (u, v) = (\frac{13}{10}, \frac{\pi}{6})$
9. Por derivação implícita, calcule $\frac{dy}{dx}$, no ponto indicado.
- (a) $x^3 - 2y^2 + xy = 0; (1, 1) \quad (\text{R. } \frac{4}{3})$
- (b) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0; (-1, 1)$
- (c) $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0; (1, 2) \quad (\text{R. } -\frac{4}{5})$
- (d) $xe^y + \operatorname{sen}(xy) = y - \ln 2 = 0; (0, \ln 2)$