

Universidade Federal da Paraíba
Departamento de Matemática
Cálculo II
Lista de Exercícios 4
Período 2012 - I

1. Descreva o domínio de cada uma das curvas abaixo:
a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$ b) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$
d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ e) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{xy}$
2. Descreva as curvas de níveis de cada função do exercício anterior.
3. Encontre a fronteira do domínio de cada das funções do Exercício 1. Decida se tais domínios são conjuntos abertos, fechados, nem abertos nem fechados, etc.
4. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, formado apenas pelos números naturais de 1 a 5. Verifique se esse conjunto é aberto, se é fechado ou nenhuma dessas opções.
5. Esboce o gráfico, no plano xy , dos seguintes conjuntos:
a) $\{(x, y); 100 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ b) $\{(x, y); y < 2x - 1, y \geq x^2\}$
c) $\{(x, y); x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$ d) $\{(x, y); y + x \leq 0, 2y \leq 3x + 12\}$
e) $\{(x, y); x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq 6\}$ f) $\{(x, y); xy < 1\}$
6. Quais, das regiões do exercício anterior, são **abertas**, **fechadas**, **nem abertas nem fechadas**? Justifique sua resposta.
7. Em cada item do Exercício 5, desenhe o conjunto dos pontos interiores, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação da região.
8. Determine as curvas de níveis das funções:
a) $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$ b) $z = x^2y$
9. Calcule:
a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$ b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}$ c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x + y}$
d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{1 + y^2}{x}\right) \operatorname{sen} x$
g) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 + x - y}{x^2 + y^2}$ h) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ Sug: Coordenadas polares.
10. Mostre que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = 1$.

11. Determine os pontos onde cada função $z = f(x, y)$ é descontínua.

a) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ b) $z = \frac{1}{(x - y)^2}$ c) $z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$

d) $z = \cos \frac{1}{xy}$

12. Verifique se a função,

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

é contínua.

13. Mostre que a função $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 2$ é contínua na origem.

14. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y$, se:

a) $f(x, y) = x^3y^2 + 2x - 3y + 7$ b) $z = x^y$ c) $z = \frac{x - y}{x + y}$

d) $f(x, y) = \ln \tan \frac{x}{y}$ e) $z = \arctan \frac{x}{y}$ f) $z = \frac{y}{x^2 + y}$

g) $z = y \sin(xy)$ h) $z = (e^{x+2y} - y^2)^{1/2}$

15. Seja $f(x, y) = \cos(xy) + x^3y^3$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

16. Seja $z = xy + xe^{\frac{x}{y}}$. Demonstre que,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

17.