

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Introdução a Álgebra Linear- Lista de Exercícios - 2

Período 2013 - II

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (x + y, x)$. Mostre que F é linear. F é isomorfismo?
2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$. Mostre que T é linear.
3. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$. Verifique se F é linear.
4. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = xy$. Verifique se F é linear.
5. Construa, com os detalhes pertinentes, transformações lineares a partir das matrizes:
a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ c) Calcule o valor das transformações encontradas, em $(5, 10, -3)$ e $(3, -9)$
6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Verifique se F é linear e, em caso afirmativo encontre o $Nu(F)$.
7. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$.
a) Encontre uma base e a dimensão para $Im(F)$.
b) Encontre uma base e a dimensão para $Nu(F)$.
8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$.
a) Mostre que T é linear.
b) Encontre uma base, e a dimensão, de $Im(T)$.
c) Encontre uma base, e a dimensão, de $Nu(T)$.
9. Encontre $T(a, b)$, sabendo-se que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é linear e $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ e $T(0, 1) = (2, 1, -1)$.
10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear tal que $T(1, 1, 1) = 3, T(0, 1, -2) = 1$ e $T(0, 0, 1) = -2$. Encontre $T(a, b, c)$.
11. Dada a matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

encontre:

- a) a transformação linear, F , gerada por essa matriz;
- b) uma base e a dimensão de $Im(F)$;
- c) uma base e a dimensão de $Nu(F)$.

12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$. Mostre que T é linear e encontre $[T]$.
13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$. Considere a base $\beta = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Mostre que T é linear e encontre $[T]_\beta$.
14. Suponha $v_1, v_2, \dots, v_n, n$ vetores L.I. de um espaço vetorial V . Se $T : V \rightarrow V$ é linear injetiva, mostre que $Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n$ são L.I.
15. Seja V um espaço vetorial com base $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, isto é, $\dim(V) = n$. Considere a função $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n, Tv = [v]_e$. T é linear? T é isomorfismo?
16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$. Seja $f = \{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\}$.
 - (a) Mostre que T é linear.
 - (b) Encontre $[T]$ e $[T]_f$.
 - (c) Verifique a relação $[T]_f[v]_f = [T(v)]_f$.
 - (d) Encontre uma base para $Nu(T)$.
 - (e) Encontre uma base para $Im(T)$.
 - (f) T é isomorfismo? Justifique.