

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Introdução a Álgebra Linear- Lista de Exercícios - 1

Período 2013 - II

1. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de V .
a) $W_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; b = c = 0\}$ b) $W_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; b = c = 1\}$
c) $W_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; b = a + c\}$ c) $W_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; b = a + c + 1\}$
Em cada caso justifique suas respostas
2. Seja $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Determine quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de V .
a) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + d = 0 \right\}$. b) $V_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; A = A^t \right\}$
c) $V_3 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \det(A) = 0 \right\}$.
Em cada caso justifique sua resposta
3. Seja $\mathcal{F}$ o espaço vetorial de todas as funções. Determine quais dos subconjuntos abaixo, são subespaços de $\mathcal{F}$.
a) $F_1 = \{f \in \mathcal{F}, f(0) = 0\}$ b) $F_2 = \{f \in \mathcal{F}, f(0) = 2\}$
c) $F_3 = \{f \in \mathcal{F}, f(x) \leq 0, \forall x\}$ d) $\mathcal{F}_i$, conjunto das funções ímpares.
4. Quais, dentre os vetores abaixo, são combinações lineares de $u = (1, -1, 3)$ e $(2, 4, 0)$?
a) $(3, 3, 3)$ b) $(4, 2, 6)$ c) $(1, 5, 6)$ d) $(0, 0, 0)$
5. Expressar cada um dos vetores abaixo como combinação linear de $u = (2, 1, 4)$, $v = (1, -1, 3)$ e $w = (3, 2, 5)$:
a) $(5, 9, 5)$ b) $(2, 0, 6)$ c) $(0, 0, 0)$ d) $(2, 2, 3)$
6. Expressar os polinômios abaixo, como combinação linear de $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x + 3x^2$ e $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$:
a) $5 + 9x + 5x^2$ b) $2 + 6x^2$ c) 0 d) $2 + 2x + 3x^2$
7. Verificar, em cada caso, se os vetores,
a) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 0, 0)$
b) $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (4, 1, 2), v_3 = (8, -1, 8)$
c) $v_1 = (3, 1, 4), v_2 = (2, -3, 5), v_3 = (5, -9, 2), v_4 = (1, 4, -1)$,
geram o $\mathbb{R}^3$.
8. Verifique se os vetores são LI ou LD, nos respectivos espaços:
a) $u = (1, 2), v = (-3, -6)$ no $\mathbb{R}^2$
b) $u = (2, 3), v = (-5, 8), w = (6, 1)$ no $\mathbb{R}^2$
c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

9. Verificar se os vetores abaixo, são LI ou LD, nos respectivos espaços:
- a) $(2, -1, 4), (3, 6, 2), (2, 10, -4)$ b) $(3, 1, 1), (2, -1, 5), (4, 0, -3)$
c) $(6, 0, 1), (1, 1, 4)$ d) $(1, 2, 1, -2), (0, -2, -2, 0), (0, 2, 3, 1), (3, 0, -3, 6)$
e) $(4, 4, 0, 0), (0, 0, 6), (-5, 0, 5, 5)$
10. Verificar se, em $\mathcal{P}_2$, os polinômios abaixo, são LI ou LD:
- a) $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2$ b) $6 - x^2, 1 + x + 4x^2$
11. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases do $\mathbb{R}^3$?
- a) $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)$ b) $(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)$
c) $(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)$ d) $(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)$
12. Sejam A , uma matriz com m linhas e n colunas. Seja $W = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; AX^t = 0\}$. Mostre que W é um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Aqui X^t denota o transposto do vetor X .
Este subespaço é chamado espaço solução do sistema $AX^t = 0$.
13. Encontre uma base para o espaço solução do sistema:
- $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 0x_4 - x_5 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$
14. Resolver cada um dos sistemas abaixo:
- a) $\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
15. Escreva o vetor $(0, -1, 5, 6)$ como combinação linear dos vetores $(1, 2, 0, 2), (3, 6, 0, 6), (-2, -5, 5, 0), (0, -2, 10, 8), (2, 4, 0, 4), (0, -3, 15, 18)$
- 16.
17. Determine quais, dentre as afirmações a seguir, são verdadeiras e quais são falsas. Justifique.
- a) Todo espaço vetorial tem um elemento neutro aditivo.
b) Todo subconjunto de um espaço vetorial é, também, um espaço vetorial.
c) Um subconjunto de um espaço vetorial, V , pode ser fechado para a operação de adição e não ser um subespaço de V .
d) Quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^2$ são L.I.
e) Quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^2$ são L.D.
f) Todo subconjunto de um conjunto de vetores L.I. é L.I.

g) Todo subconjunto de um conjunto de vetores L.D. é L.D.