

Equações Diferenciais Ordinárias

Adriano A. Medeiros¹ e Milton de L. Oliveira²

¹Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba. E-mail:
adriano@mat.ufpb.br

²Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba. E-mail:
milton@mat.ufpb.br

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Equações Diferenciais | 2 |
| 1.1 | Introdução | 2 |
| 1.2 | Teoria das Equações Diferenciais Lineares | 3 |
| 1.3 | Equação Homogênea | 3 |
| 2 | Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem | 5 |
| 2.1 | Equações de Primeira Ordem | 5 |
| 2.2 | Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem | 6 |
| 2.3 | Equações Separáveis | 7 |
| 2.4 | Equações Exatas | 9 |
| 2.4.1 | Fator Integrante | 11 |
| 2.5 | Equações não lineares de primeira ordem redutíveis a lineares | 13 |
| 2.5.1 | Equações de Bernoulli | 13 |
| 2.5.2 | Equações de Riccati | 14 |
| 2.6 | Noções de Estabilidade | 14 |
| 2.7 | Aplicações | 16 |
| 2.7.1 | Crescimento Populacional - Verhulst | 16 |
| 2.7.2 | Resfriamento de um corpo | 17 |
| 2.8 | Famílias de curvas planas | 19 |
| 2.8.1 | Envoltória de uma família de curvas | 21 |
| 2.8.2 | Trajetórias Ortogonais | 22 |
| 3 | Existência e Unicidade de Soluções de EDO | 24 |
| 3.1 | Teoremas de Existência e Unicidade | 24 |
| 4 | Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem | 32 |
| 4.1 | Equações lineares de segunda ordem | 32 |
| 4.2 | Equações Homogêneas | 33 |
| 4.2.1 | Equações lineares com coeficientes constantes | 36 |
| 4.3 | Equações não homogêneas | 39 |
| 4.3.1 | Método de Variação dos Parâmetros | 39 |
| 4.3.2 | Redução de ordem | 41 |
| 4.3.3 | Método dos coeficientes a determinar | 42 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.3.4 | Equações de Euler-Cauchy | 44 |
| 4.4 | Aplicações | 45 |
| 4.4.1 | Queda Livre de Corpos | 45 |
| 4.4.2 | Energia Cinética e Potencial | 46 |
| 4.4.3 | O Oscilador Harmônico Simples | 46 |
| 4.4.4 | Oscilador Harmônico Amortecido | 47 |
| 5 | Sistemas de Equações Diferenciais | 51 |
| 5.1 | Equações Diferenciais | 51 |
| 5.2 | Cálculo com funções matriciais | 52 |
| 5.3 | Equação diferencial | 55 |
| 5.4 | O problema de calcular e^{tA} | 57 |
| 5.4.1 | Teorema de Cayley-Hamilton | 58 |
| 5.4.2 | O método de Putzer para calcular e^{tA} | 60 |
| 5.4.3 | Outros métodos para calcular e^{tA} | 63 |
| 5.4.4 | Casos 3×3 | 65 |
| 5.5 | Sistemas Lineares com coeficientes constantes | 66 |
| 5.6 | Sistema linear geral | 68 |
| 5.7 | Resolução por séries de potências | 71 |
| 5.8 | Método das aproximações sucessivas | 72 |
| 5.9 | Aproximações sucessivas para sistemas não lineares | 75 |
| 6 | Sistemas Autônomos | 78 |
| 6.1 | Trajetórias e o Fluxo | 79 |
| 6.2 | Pontos de Equilíbrio ou Singularidades | 82 |
| 6.2.1 | O Sistema Linear | 84 |
| 6.2.2 | O Sistema Não Linear | 90 |
| 6.3 | Retrato de Fase | 91 |
| 6.4 | Fluxo Tubular | 92 |
| 7 | Estabilidade em EDO | 97 |
| 7.1 | Estabilidade para Sistemas de EDO | 97 |
| 7.2 | Estabilidade de Sistemas Lineares | 98 |
| 7.3 | Estabilidade para sistemas não lineares | 101 |
| 7.3.1 | Sistemas quase lineares | 101 |
| 7.3.2 | Critério de Liapunov | 103 |
| 7.4 | Construção de funções de Liapunov | 105 |
| 8 | O Teorema de Poincaré-Bendixson | 111 |
| 8.1 | Conjuntos Limites | 111 |
| 8.2 | Os Teoremas de Poincaré e Bendixson | 114 |
| 8.2.1 | Aplicações do Teorema de Poincaré-Bendixson | 117 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A | Preliminares | 122 |
| A.1 | Linguagem básica da topologia | 122 |
| A.1.1 | Conjuntos abertos | 122 |
| A.1.2 | Conjuntos fechados | 123 |
| A.1.3 | Conjuntos compactos | 125 |
| A.1.4 | Conjuntos conexos | 126 |
| A.2 | Espaços Métricos | 127 |
| A.2.1 | Espaços Métricos Completos | 128 |
| A.3 | Campos Vetoriais | 131 |

Capítulo 1

Equações Diferenciais

1.1 Introdução

Uma equação da forma

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

onde x é a incógnita e função de uma variável, chama-se *equação diferencial ordinária*.

Aplica-se tais equações às leis gerais da Física, Biologia, Economia. Também inúmeras questões da própria Matemática são formuladas por equações diferenciais ordinárias, como por exemplo, questões de Topologia, Geometria Diferencial e Cálculo Variacional.

O estudo das equações diferenciais ordinárias iniciou-se com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvidos por Newton e Leibniz no final do século XVII. Esses métodos conduziram à consolidação das Equações Diferenciais como um novo ramo da Matemática, que se transformou em disciplina independente no início do século XVIII.

No fim do século XVIII a Teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das disciplinas matemáticas mais importantes e o método mais efetivo para a pesquisa científica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros expandiram de maneira notável o conhecimento dentro dos cálculos das Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica dos Flúidos, etc.

No século XIX passou-se a considerar como questão prévia em cada problema a existência e unicidade de soluções satisfazendo dados iniciais. Este é conhecido como o Problema de Cauchy.

Em 1881, Poincaré publica um trabalho em que são lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Esse trabalho dá a base para o estudo da Estabilidade das soluções de um sistema de EDO.

1.2 Teoria das Equações Diferenciais Lineares

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma

$$P_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x) y = G(x). \quad (1.1)$$

Podemos admitir, por simplicidade, que as funções P_0, \dots, P_n e G sejam funções reais e contínuas num intervalo $I : \alpha < x < \beta$, e que P_0 não tenha nenhum zero neste intervalo. Então podemos reescrever a equação (1.1) do seguinte modo

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = g(x) \quad (1.2)$$

Se definimos um operador L na forma:

$$L[y] := \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y$$

então L é dito um operador linear de ordem n e a equação (1.2) é dada na seguinte maneira

$$L[y] = g(x) \quad (1.3)$$

Consideremos a equação diferencial linear (1.3) com as condições iniciais

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (1.4)$$

onde $x_0 \in I$ e y_0, y_1, \dots, y_{n-1} é um conjunto de constantes dadas.

Teorema 1 *Se as funções p_1, p_2, \dots, p_n e g forem contínuas no intervalo aberto I , então existe somente uma solução $y = \phi(x)$ da equação diferencial (1.2) que obedece às condições iniciais (1.4). Esta solução existe sobre todo o intervalo I .*

1.3 Equação Homogênea

Considere a equação homogênea

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0 \quad (1.5)$$

se $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ forem soluções da equação (1.5) temos que

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \quad (1.6)$$

é também uma solução da equação (1.5), com c_1, \dots, c_n constantes arbitrárias.

Fazemos a seguinte questão: Toda solução de (1.5) pode ser escrita na forma (1.6)?

Isto é verdade se independente das condições iniciais (1.4) for possível escolher constantes c_1, \dots, c_n de modo que (1.6) obedeça tais condições, ou seja, devemos ter

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{1.7}$$

As equações (1.7) podem ser resolvidas univocamente nas constantes c_1, \dots, c_n se o determinante dos coeficientes for não nulo. Desse modo, uma condição necessária e suficiente para a existência de solução para as equações (1.7), com valores arbitrários y_0, y_1, \dots, y_{n-1} é a de que o Wronskiano

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

não seja nulo em $x = x_0$. Uma vez que x_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I , é necessário e suficiente que $W(y_1, \dots, y_n)$ não seja nulo em todo ponto do intervalo. Pode-se mostrar que se $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ forem soluções da equação diferencial (1.5), então $W(y_1, \dots, y_n)$ ou é nulo para todo x no intervalo I , ou nunca se anula nesse intervalo.

Teorema 2 *Se as funções p_1, \dots, p_n forem contínuas no intervalo I , e se as funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ forem soluções da equação (1.5) e se $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ para pelo menos um ponto de I , então qualquer solução da equação (1.5) pode ser expressa como combinação linear das soluções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.*

Um conjunto de soluções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ da equação (1.5) cujo wronskiano não é nulo é um *conjunto fundamental de soluções*.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

2.1 Equações de Primeira Ordem

Neste capítulo iremos introduzir os conceitos de equações diferenciais de primeira ordem e algumas aplicações.

A forma geral das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é:

$$x' = f(t, x), \quad (2.1)$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, está definida em cada ponto (t, x) de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N+1}$.

No estudo da equação (2.1) encontramos dois problemas básicos:

- (i) Obter sua solução geral;
- (ii) Obter solução do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \quad (2.2)$$

Este problema é conhecido como *Problema de Cauchy*.

Definição 1 Uma função diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ chama-se solução do (PVI) (2.2) quando:

- (i) $(t, \phi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$;
- (ii) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, para todo $t \in I$;
- (iii) $\phi(t_0) = x_0$.

Para melhor compreender esses problemas é importante ver o significado geométrico da equação diferencial.

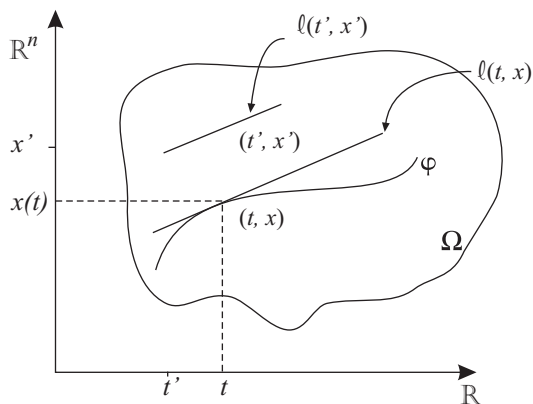


figura 5.1

A função f define em Ω um campo de direções, quando associa a cada ponto (t, x) a reta:

$$l(t, x) : \xi - x = f(t, x)(\tau - t)$$

de “declividade” $f(t, x)$ que passa por (t, x) . A equação (2.1) coloca o problema de encontrar (quando existem) as curvas passando por (t_0, x_0) cujas retas tangentes em cada ponto coincidem com as dadas pelo campo de direções.

Trataremos a seguir de alguns tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e algumas aplicações.

2.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A forma geral das equações diferenciais lineares de primeira ordem é:

$$\dot{x}(t) = p(t)x + q(t), \tag{2.3}$$

onde $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Consideremos o seguinte (PVI):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{2.4}$$

Mostraremos como encontrar a solução do (PVI) (2.4). Para isto, utilizamos o auxílio de um fator integrante $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é dado por

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

Assim, temos

$$e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}(\dot{x} - p(t)x) = q(t)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}(xe^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}) = q(t)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

Integrando, obtemos

$$xe^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} - x_0 = \int_{t_0}^t q(s)e^{-\int_{t_0}^s p(y)dy} ds.$$

Logo,

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} + \int_{t_0}^t q(s) e^{\int_s^t p(y)dy} ds. \quad (2.5)$$

Fazendo $q(t) \equiv 0$ em (2.3) a solução do (PVI) é dada por:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(s)ds},$$

e, neste caso, denominamos *Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem Homogênea*.

Observação 1 Note que, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções de (2.3), então $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é solução da equação homogênea associada.

Como consequência da observação anterior temos que, todas as soluções da equação não homogênea (2.3) são obtidas somando uma solução particular dessa equação com a solução geral da equação homogênea associada.

2.3 Equações Separáveis

As equações diferenciais ordinárias a variáveis separadas possuem a seguinte forma:

$$\dot{x} = \frac{f(t)}{g(x)}, g(x) \neq 0, \quad (2.6)$$

onde $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.

Este tipo de equação recebe a nomenclatura de separável devido sua forma diferencial:

$$g(x)dx = f(t)dt$$

Definição 2 Diremos que uma função $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é uma solução de (2.6) se $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, $x((\alpha, \beta)) \subset (c, d)$ $g(x(t)) \neq 0$ e satisfizer (2.6) para todo $x \in (\alpha, \beta)$.

Observe que a equação (2.6) não é linear, por isso, as soluções não estão necessariamente definidas para todo t onde o segundo membro está definido.

Exemplo 1 Consideremos a seguinte equação:

$$\dot{x} = \frac{t}{x}$$

Sua solução é da seguinte forma: $x^2 = t^2 + C$, tomando $C = 1$ temos quatro soluções:

1. $x_1(t) = \sqrt{t^2 - 1}, t > 1$
2. $x_2(t) = -\sqrt{t^2 - 1}, t < 1$
3. $x_3(t) = \sqrt{t^2 - 1}, t < -1$
4. $x_4(t) = -\sqrt{t^2 - 1}, t < -1$.

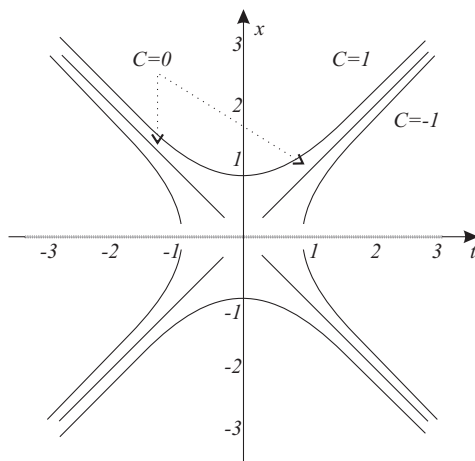


figura 5.2

Neste exemplo $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ e há casos em que $(\alpha, \beta) = (-\infty, -1), (1, +\infty)$, etc.

Vejam agora como encontrar a solução geral da equação (2.6). Temos que

$$\dot{x} = \frac{f(t)}{g(x)},$$

transformando em sua forma diferencial

$$g(x)dx = f(t)dt,$$

e integrando, obtemos

$$\int_{x_0}^{x(t)} g(x)dx = \int_{t_0}^t f(t)dt,$$

onde $t_0 \in (\alpha, \beta)$ e $x(t_0) = x_0 \in (c, d)$.

Esta seria a relação para encontrarmos a solução da equação (2.12), ficando atento ao fato de que nem sempre conseguiremos explicitar a solução $x(t)$.

2.4 Equações Exatas

Nesta secção trataremos das equações que possuem a seguinte forma:

$$N(t, x)x' + M(t, x) = 0, \quad (2.7)$$

onde $M, N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções definidas num aberto simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do plano (x, y) . Outra forma de escrevermos a equação (2.7) é utilizando sua forma diferencial:

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0. \quad (2.8)$$

Definição 3 Diremos que a equação (2.8) é exata quando existir uma função $F = F(t, x)$ cuja diferencial exata $dF = F_t dt + F_x dx$ coincide com $M(t, x)dt + N(t, x)dx$, isto é:

$$dF = M(t, x)dt + N(t, x)dx.$$

Vamos estabelecer o seguinte teorema que nos dará um critério para identificar se uma equação é exata ou não.

Teorema 3 Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Então uma condição necessária e suficiente para que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Seja um diferencial exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Prova. Prova da condição necessária. Para simplificarmos vamos supor $M(x, y)$ e $N(x, y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em \mathbb{R}^2 . Agora se supomos que a expressão $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é exata, então existe alguma função f tal que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

para todo (x, y) em R . Logo,

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

As derivadas parciais mistas são iguais por causa da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de $M(x, y)$ e $N(x, y)$. A suficiência nos dá o método de resolução da equação.

Método de Resolução:

Para resolver uma EDO da forma $M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$, devemos verificar se esta EDO é exata e, em caso positivo, garantir que existe uma função $F = F(t, x)$ tal que

$$F_t = M(t, x) \quad e \quad F_x = N(t, x).$$

Na sequência, tomamos a relação $F_t = M(t, x)$ e integramos em relação a variável t para obter

$$F(t, x) = \int M(t, x)dt + g(x). \quad (2.9)$$

Agora, derivamos parcialmente esta última função $F = F(t, x)$ em relação a variável x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x)dt + g'(x)$$

e identificamos esta derivada com a função $N = N(t, x)$. Desse modo, obtemos

$$g'(x) = N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x)dt \quad (2.10)$$

e integramos (2.10) em relação a x e substituímos o resultado em (2.9). A solução da EDO exata será dada por

$$F(t, x) = C.$$

A expressão em (2.10) implica que a expressão no lado direito da igualdade independe de t , pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x)dt \right] &= \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int M(t, x)dt \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2 1. A forma diferencial $3t^2x^2dt + 2t^3xdx = 0$ é exata;

2. A equação $t dt + x dx = 0$ é exata;

3. A forma diferencial $M(t)dt + N(x)dx = 0$ é exata;

4. A equação $x dt - t dx = 0$ não é exata.

Exemplo 3 Resolva

$$(e^{2y} - y \cos xy)dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)dy = 0.$$

Solução: A equação não é separável nem homogênea, mas exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xy \operatorname{sen} xy - \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Logo existe uma função $f(x, y)$ tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Vamos supor que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$; isto é

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x \cos xy + 2y$$

desse modo

$$f(x, y) = 2x \int e^{2y} dy - x \int \cos xy dy + 2 \int y dy.$$

Segue que

$$f(x, y) = xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + h(x)$$

derivando f em relação a x obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y \cos xy + h'(x) = e^{2y} - y \cos xy,$$

assim

$$h'(x) = 0 \quad \text{e, portanto} \quad h(x) = c.$$

Logo, a solução será dada implicitamente por

$$xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + c = 0.$$

Exemplo 4 Resolver o problema de valor inicial

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0, \quad Y(0) = 2.$$

2.4.1 Fator Integrante

Considere uma equação da forma

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0.$$

Se esta equação já não é exata tentaremos escolher uma função μ que pode depender de t e x de modo que a equação

$$\mu(Mdt + Ndx) = 0 \tag{2.11}$$

seja exata. A função μ é chamada de fator integrante. A equação (2.11) pode então ser resolvida pelo método visto anteriormente, e suas soluções também devem satisfazer a equação original (2.8). Temos que, a equação (2.11) é exata se, e somente se,

$$(\mu M)_x = (\mu N)_t.$$

Como M e N são funções dadas, o fator integrante μ deve satisfazer a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$M\mu_x - N\mu_t + (M_x - N_t)\mu = 0.$$

As duas situações mais importantes, nas quais se pode encontrar fatores integrantes simples, ocorrem quando μ é uma função de apenas uma das variáveis t , x , em lugar de ambas. Determinemos as condições necessárias a M e N de modo que, $Mdt + Ndx = 0$ tenha um fator integrante que dependa de t somente.

Considerando que $\mu = \mu(t)$, temos

$$(\mu M)_x = \mu M_x, \quad (\mu N)_t = \mu N_t + N \frac{d\mu}{dx}.$$

Assim, para que $(\mu M)_x$ seja igual a $(\mu N)_t$, é necessário que

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{M_x - N_t}{N} \mu. \quad (2.12)$$

Se $(M_x - N_t)/N$ é uma função apenas de t , então existe um fator integrante μ que também depende apenas de t ; além disso, $\mu(t)$ pode ser encontrado resolvendo-se a equação linear de primeira ordem (2.12).

De maneira análoga podemos determinar a condição em que $\mu = \mu(x)$.

Exemplo 5 *Resolva*

$$(x + y)dx + x \ln x dy = 0, \quad \text{usando } \mu(x, y) = \frac{1}{x} \text{ em } (0, \infty).$$

Solução: Sejam $M(x, y) = x + y$ e $N(x, y) = x \ln x$. Temos que $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, e

$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \ln x$. A equação não é exata. Porém, se multiplicamos a equação por $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$, obtemos

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right) dx + \ln x dy = 0.$$

Segue daí que

$$M(x, y) = 1 + \frac{y}{x}, \quad N(x, y) = \ln x,$$

desse modo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Portanto, a equação se tornou exata. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x} = M(x, y)$$

segue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y \ln x + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 + \ln x + h'(y) = \ln x \end{aligned}$$

assim

$$h'(y) = 0 \quad \text{e} \quad g(y) = c$$

portanto, $f(x, y) = x + y \ln x + c$. Temos então que

$$x + y \ln x + c = 0$$

é a solução para a equação em $(0, \infty)$.

2.5 Equações não lineares de primeira ordem redutíveis a lineares

Em geral, resolver equação diferencial não é um problema fácil, mas existem algumas delas que mesmo sendo não lineares, podem ser transformadas em equações lineares. Os principais tipos de tais equações são:

2.5.1 Equações de Bernoulli

As equações de Bernoulli possuem a seguinte forma:

$$x' + p(t)x = q(t)x^n, \tag{2.13}$$

onde $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Neste caso, a idéia é realizar uma substituição na equação acima, de modo a transformá-la em uma EDO linear.

Primeiramente, dividimos ambos os membros da equação (2.13) por x^n , para obter:

$$x^{-n}x' + p(t)x^{1-n} = q(t) \tag{2.14}$$

Multiplicamos agora a equação (2.14) por $(1 - n)$, para obter

$$(1 - n)x^{-n}x' + (1 - n)p(t)x^{1-n} = (1 - n)q(t) \tag{2.15}$$

Tomando $z = x^{1-n}$ e derivando em relação a t , obtemos:

$$z' = (1 - n)x^{-n}x'$$

Substituindo as expressões de z e z' em (2.15), obtemos:

$$z' + (1 - n)p(t)z = (1 - n)q(t)$$

que é uma EDO linear da forma

$$z' + \varphi(t)z = \psi(t),$$

onde $\varphi(t) = (1 - n)p(t)$ e $\psi(t) = (1 - n)q(t)$.

A solução dessa EDO será escrita como

$$z(t) = e^{-\int_0^t p(u)du} \left(\int q(t)e^{\int_0^t p(u)du} dt + K \right)$$

Ao final, devemos voltar à variável original, com $x = z^{\frac{1}{1-n}}$.

2.5.2 Equações de Riccati

As equações de Riccati possuem a seguinte forma:

$$x' = p(t) + q(t)x + r(x)x^2 \tag{2.16}$$

que é uma EDO não linear. Um fato grave aqui é que, não será possível resolver tal equação se não pudermos apresentar uma solução particular para a mesma.

Consideremos $x_p = x_p(t)$ uma solução particular de (2.16). Assim, vamos construir uma nova função $z = z(t)$ definida por

$$z = \frac{1}{x - x_p}.$$

Com alguns cálculos simples, obtemos:

$$z' + [q(t) + 2x_p r(t)]z = r(t)$$

que é uma equação linear na variável z . Após resolvida esta última, voltamos a variável original $x = x(t)$ através da relação

$$x = x_p + \frac{1}{z}.$$

2.6 Noções de Estabilidade

Nesta secção introduziremos os conceitos de estabilidade e instabilidade, os quais nos darão um embasamento para posteriormente fazermos um estudo qualitativo das equações.

Definição 4 Diremos que uma equação é autônoma quando for escrita da seguinte forma

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.17)$$

Uma propriedade importante desse tipo de equação é que, se $x(t)$ é solução de (2.17), então $y(t) = x(t + c)$, onde c é uma constante, também será. Conseqüentemente, supondo que temos existência e unicidade de solução para o (PVI)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Podemos afirmar que $x(t)$ é solução de (2.18) se, e somente se, $y(t) = x(t + c)$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}. \quad (2.19)$$

Portanto, para equações autônomas, podemos considerar somente condições iniciais onde $t_0 = 0$.

Definição 5 Se \bar{x} é um zero de f , isto é, $f(\bar{x}) = 0$, então $x(t) \equiv \bar{x}$ é solução de (2.17) e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto \bar{x} é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.

Definição 6 Um ponto de equilíbrio \bar{x} é estável, se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; |x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x(t) - \bar{x}| < \epsilon, \forall t \geq 0$, onde $x(t)$ é solução do P.V.I. (2.19).

Definição 7 Um ponto de equilíbrio \bar{x} é assintoticamente estável, se for estável e se $\exists \eta > 0; |x_0 - \bar{x}| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.

Um ponto de equilíbrio que não é estável é chamado *instável*.

Teorema 1 Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio de (2.17) com f de classe C^1 . Então, $f'(\bar{x}) < 0$ implica que \bar{x} é assintoticamente estável, e $f'(\bar{x}) > 0$ implica que \bar{x} é instável.

Prova. A idéia é analisar a variação de $x(t) - \bar{x}$:

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \bar{x})^2 = 2(x(t) - \bar{x})\dot{x} = 2(x(t) - \bar{x})f(x(t))$$

que, usando-se o Teorema do Valor Médio, é igual a:

$$2(x(t) - \bar{x})[f(x(t)) - f(\bar{x})] = 2(x(t) - \bar{x})f'(\xi(t)),$$

onde $\xi(t)$ é um valor entre $x(t)$ e \bar{x} . Agora se $f'(\bar{x}) < 0$, então, pela continuidade de f' existem $\eta > 0$ e $\delta > 0$ tais que $f'(x) < -\eta < 0$ para $|x - \bar{x}| < \delta$.

Logo, se para algum t_0 , a solução $x(t)$ de (1.6) é tal que $|x(t_0) - \bar{x}| < \delta$, segue-se que $\alpha(t) := (x(t) - \bar{x})^2$ é decrescente para $t \geq t_0$. Além disso, temos

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) \leq -\eta\alpha(t) \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Logo $\alpha(t) \leq ce^{-\eta t}$, o que implica que $x(t)$ tende a \bar{x} quando $t \rightarrow \infty$. Quando $f'(\bar{x}) > 0$, faz-se um raciocínio análogo. ■

2.7 Aplicações

2.7.1 Crescimento Populacional - Verhulst

O modelo proposto por Verhulst consiste em supor que a taxa de crescimento decresce linearmente com a população. Daí, temos que, o modelo de Verhulst trata-se de uma equação diferencial separável

$$\dot{p} = (a - bp)p, \quad (2.20)$$

onde a e b são constantes positivas.

Note que a equação (2.20) pode ser classificada como uma equação de Bernoulli. Então, fazendo-se uma mudança de variável podemos linearizar a equação, façamos $p = \frac{1}{y}$, daí

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2 dt} = \frac{a}{p} - b \Rightarrow \frac{-y^2 dy}{y^2 dt} = ay - b,$$

integrando, obtemos

$$-\frac{1}{a} \ln |ay - b| = t + C,$$

voltando a variável p , ficamos com

$$|p| = e^{|a-bp|+at+aC} \Rightarrow |p| = |a - bp|e^{at}e^{aC}.$$

Se, $p(t_0) = p_0$,

$$|p_0| = |a - bp_0|e^{at_0}e^{aC}.$$

Se $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq \frac{a}{b}$, obteremos

$$\frac{|p|}{|p_0|} = \frac{|a - bp|}{|a - bp_0|}e^{t-t_0}. \quad (2.21)$$

Observando que as soluções de (2.20), com valores iniciais $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq \frac{a}{b}$ não podem cortar as retas $p = 0$ e $p = \frac{a}{b}$.

Então, para $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq \frac{a}{b}$, podemos tirar o valor absoluto e explicitar p :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{a - bp}{a - bp_0}e^{t-t_0} \Rightarrow p(a - bp_0) = (a - bp)p_0e^{a(t-t_0)},$$

fazendo alguns algebrismos chegamos a

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

Análise da Solução:

Observe que a equação (2.20) é autônoma, onde $f(p) = ap - bp^2$. Logo, seus pontos de equilíbrio são $\bar{p} = 0$ e $\bar{p} = \frac{a}{b}$. Então, pelo Teorema 1, temos que $\bar{p} = 0$ é um ponto de equilíbrio instável, e $\bar{p} = \frac{a}{b}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Note que, dependendo da condição inicial podemos nos deparar com dois casos:

1. Se $p_0 > \frac{a}{b}$, a população $p(t)$ decresce exponencialmente tendendo para $\frac{a}{b}$.
2. Se $0 < p_0 < \frac{a}{b}$, neste caso, $p(t)$ está entre as retas $p = 0$ e $p = \frac{a}{b}$, tendo a forma de um S e a curva é chamada de logística.

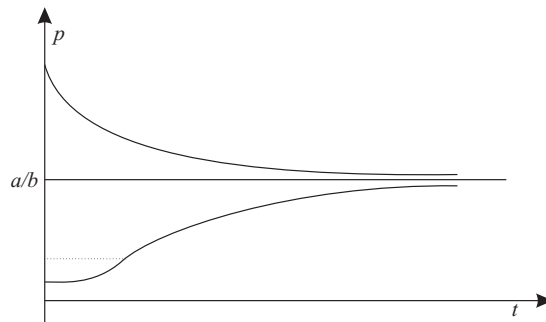


figura 5.4

2.7.2 Resfriamento de um corpo

Consideraremos um modelo simplificado para o fenômeno da variação de temperatura num corpo por perda de calor para o meio ambiente, fazendo as seguintes hipóteses:

1. A temperatura T é a mesma e em todo o corpo e depende apenas do tempo t ;
2. A temperatura T_a do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;
3. (Lei do resfriamento de Newton) O fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por $\frac{dT}{dt}$, é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad (2.22)$$

onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo. O sinal negativo de (2.22) se explica pelo fato que o calor flui da fonte quente para a fonte fria.

Então, consideremos o seguinte (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Observe que a equação (2.22) é uma EDO linear. Assim, usando o método da seção 2.2, obtemos

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a. \quad (2.24)$$

Algumas considerações qualitativas:

1. Analizando a equação (2.22) vemos que:
 - (a) Se $T > T_a$, então $T(t)$ decresce monotonicamente com o tempo;
 - (b) Se $T < T_a$, então $T(t)$ cresce monotonicamente;
 - (c) se $T = T_a$, então $T(t)$ é constante.
2. Observando a expressão (2.24) da solução, isso é confirmado e se conclui ainda mais que $T(t)$ tende monotonicamente para T_a quando $t \rightarrow \infty$. A temperatura T_a é chamada de temperatura de equilíbrio.

Consideraremos as mesmas hipóteses do problema anterior, porém, levando em consideração que a temperatura T_a do meio ambiente varia com o tempo ao receber (ou ceder) calor do corpo. Para deduzirmos a equação necessitamos de mais uma lei da calorimetria, a conservação da quantidade de calor.

Sejam m e m_a , respectivamente, as massas do corpo e do meio ambiente. Designemos por c e c_a os calores específicos do corpo e do meio ambiente, respectivamente.

Definição 8 *O calor específico de um corpo é a quantidade de calor necessária para elevar em 1°C a massa de 1g do corpo.*

A lei da conservação da quantidade de calor pode ser expressa por

$$mc(T_0 - T) = m_a c_a (T_a - T_a, 0), \quad (2.25)$$

onde $T(t)$ e $T_a(t)$ designam as temperaturas do corpo e do meio ambiente, respectivamente, e $T_0 = T(0)$, $T_{a,0} = T_a(0)$. Usando em (2.22) a expressão de T_a retirada de (2.25) obtemos:

$$\frac{dT}{dt} + k(1 + A)T = k(T_{a,0} + AT_0), \quad (2.26)$$

onde $A = \frac{mc}{m_a c_a}$.

Então consideremos o seguinte (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} + k(1+A)T = k(T_{a,0} + AT_0) \\ T(0) = T_0 \end{cases} . \quad (2.27)$$

Note que a equação (2.26) também é uma EDO linear, assim

$$T(t) = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A} + \frac{T_0 - T_{a,0}}{1+A} e^{-k(1+A)t}. \quad (2.28)$$

Algumas considerações qualitativas:

1. Olhando a expressão (2.28) vemos que:
 - (a) Se $T_0 > T_{a,0}$, então $T(t)$ decresce monotonicamente;
 - (b) Se $T_0 < T_{a,0}$, então $T(t)$ cresce monotonicamente;
 - (c) Se $T_0 = T_{a,0}$, então $T(t)$ permanece constante.
2. Observe que a equação (2.26) é autônoma, onde

$$f(T) = k(T_{a,0} + AT_0) - k(1+A)T.$$

Então, pelo Teorema 1, temos que $\bar{T} = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

2.8 Famílias de curvas planas

As soluções x das equações exatas

$$N(t, x)x' + M(t, x) = 0 \quad (2.29)$$

foram obtidas na forma implícita

$$V(t, x) = C, \quad (2.30)$$

onde C é uma constante arbitrária. Para cada valor de C temos uma curva no plano.

Definição 9 *Uma família de curvas a um parâmetro é definida por*

$$f(t, x, \lambda) = 0, \quad (2.31)$$

onde $f : \Omega \times \zeta \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, Ω é um aberto do plano (t, x) e ζ é um intervalo da reta.

A questão abordada nesta seção é, se dada uma família de curvas (2.31) a um parâmetro, existe uma equação diferencial para qual essa família represente suas soluções?

Método para encontrarmos equações diferenciais a partir de uma família de curvas:

Dada uma família de curvas (2.31), derivamos f com relação a t , e formamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} f(t, x, \lambda) = 0 \\ f_t(t, x, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

de onde eliminamos λ . Utilizando o Teorema da Função Implícita, vê-se que a condição

$$f_\lambda(t, x, \lambda) \neq 0 \quad (2.33)$$

possibilita explicitar λ em (2.31) na forma $\lambda = \Phi(t, x)$; substituindo essa expressão de λ em (2.32) obtemos a equação diferencial procurada.

Exemplo 6 (*Família de Parábolas*) *Seja*

$$f(x, y, \lambda) \equiv y - 2\lambda x^2 - \lambda = 0, x, y, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.34)$$

derivando com relação a x obtemos

$$y' - 4\lambda x = 0. \quad (2.35)$$

Sabemos de (2.34), que

$$\lambda = \frac{y}{1 + 2x^2}.$$

Substituindo em (2.35), obtemos:

$$(2x^2 + 1) y' - 4xy = 0$$

que é a equação cuja solução foi dada por (2.34).

Exemplo 7 (*Família de Círculos*) *Seja*

$$f(t, x, \lambda) \equiv (t - 2\lambda)^2 + x^2 - \lambda^2 = 0. \quad (2.36)$$

Derivando com relação a t obtemos:

$$2(t - 2\lambda) + 2xx' = 0. \quad (2.37)$$

Eliminando λ entre (2.36) e (2.37) temos

$$3x^2(x')^2 - 2txx' + 4x^2 - t^2 = 0. \quad (2.38)$$

Como antes, as curvas (2.36) são soluções de (2.38), bem como a envoltória da família (2.36) dada por $x^2 = \frac{1}{3}t^2$.

2.8.1 Envoltória de uma família de curvas

Seja dada uma família de curvas C_λ dada por (2.33), supomos que, para cada λ , a curva correspondente tem tangente, o que quer dizer que o vetor normal

$$(f_t(t, x, \lambda), f_x(t, x, \lambda)) \neq 0 \quad (2.39)$$

para todos (t, x, λ) , tais que $f(t, x, \lambda) = 0$.

Definição 10 *Definimos uma envoltória da família (2.33) como sendo uma curva em coordenadas paramétricas $(t(\lambda), x(\lambda))$ tal que:*

$$f(t(\lambda), x(\lambda), \lambda) = 0 \quad e \quad (2.40)$$

$$\dot{t}(\lambda)f_t(t(\lambda), x(\lambda), \lambda) + \dot{x}(\lambda)f_x(t(\lambda), x(\lambda), \lambda) = 0, \quad (2.41)$$

onde $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}$.

A condição (2.40) diz que para cada λ , o ponto $(t(\lambda), x(\lambda))$ pertence à C_λ da família $f(t, x, \lambda) = 0$. A condição (2.41) diz que naquele ponto a envoltória e a curva C_λ têm a mesma reta tangente.

A seguinte condição é suficiente para a existência de uma envoltória da família $f(t, x, \lambda) = 0$

$$f_t f_{\lambda x} - f_x f_{\lambda t} \neq 0. \quad (2.42)$$

De fato, considere o sistema

$$\begin{cases} f(t, x, \lambda) = 0 \\ f_\lambda(t, x, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

A condição (2.42) nos garante, através do Teorema das Funções Implícitas, que existe uma solução $(x(\lambda), y(\lambda))$ desse sistema. Logo, esses $t(\lambda)$ e $x(\lambda)$ satisfazem a relação (2.40) que derivada com relação a λ produz:

$$\dot{t}(\lambda)f_t(t(\lambda), x(\lambda), \lambda) + \dot{x}(\lambda)f_x(t(\lambda), x(\lambda), \lambda) + f_\lambda(t(\lambda), x(\lambda), \lambda) = 0. \quad (2.44)$$

Em virtude de (2.43) o último termo de (2.44) é zero e, portanto, (2.44) implica (2.38), o que mostra que $(t(\lambda), x(\lambda))$ é uma envoltória da família C_λ .

Exemplo 8 *Envoltórias da família de círculos de raio 1 centrados no eixo-x.*

$$f(x, y, \lambda) \equiv (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0, \quad (2.45)$$

derivando com relação a λ obtemos:

$$f_\lambda(x, y, \lambda) = -2(x - \lambda) = 0$$

eliminando λ , temos:

$$\lambda = x.$$

Então, substituindo em (2.45) chegamos as seguintes envoltórias:

$$y(x) \equiv 1 \quad e \quad y(x) \equiv -1.$$

Exemplo 9 Família de círculos

$$f(t, x, \lambda) \equiv (t - 2\lambda)^2 + x^2 - \lambda^2 = 0$$

$$f_\lambda(t, x, \lambda) \equiv -4(t - 2\lambda) - 2\lambda = 0.$$

Eliminando λ no sistema acima obtemos $x^2 = \frac{1}{3}t^2$. Logo, as retas $x = t/\sqrt{3}$ e $x = -t\sqrt{3}$ são envoltórias.

2.8.2 Trajetórias Ortogonais

Definição 11 Duas curvas dadas por $x = \Phi(t)$ e $x = \Psi(t)$ que se interceptam no ponto (t_0, x_0) são ortogonais se suas retas tangentes naquele ponto são perpendiculares, isto é,

$$\Phi'(t_0) \cdot \Psi'(t_0) = -1, \quad (2.46)$$

onde supomos que Φ' e Ψ' não se anulam.

Definição 12 Duas famílias de curvas $f(t, x, \lambda) = 0$ e $g(t, x, \mu) = 0$ são mutuamente ortogonais se cada λ -curva é ortogonal a toda μ -curva que ela intersecciona.

Dada uma família de curvas

$$f(t, x, \lambda) = 0,$$

um modo de encontrar uma outra família a ela ortogonal é o seguinte. Pelos métodos anteriores, obtenha facilmente a equação diferencial para qual essas curvas são soluções:

$$F(t, x, x') = 0.$$

A seguir, defina a função:

$$G(t, x, p) = F\left(t, x, -\frac{1}{p}\right),$$

e obtenha as soluções da equação diferencial:

$$G(t, x, x') = 0.$$

Essas soluções constituem uma família de curvas

$$g(t, x, \mu) = 0.$$

Afirmação: $g(t, x, \mu)$ é ortogonal a f .

De fato, se $y = \Phi(t)$ é uma μ -curva, então

$$F\left(t, \Phi(t), -\frac{1}{\Phi'(t)}\right) = 0,$$

o que quer dizer que, se $x = \Psi(t)$ é a λ -curva que passa pelo ponto $(t, \Phi(t))$, então

$$\Psi'(t) = -\frac{1}{\Phi'(t)},$$

ou seja, (2.46) está satisfeita.

Exemplo 10 *Família de Círculos*

$$t^2 + x^2 - \lambda^2 = 0, \quad (2.47)$$

derivando com relação a t obtemos:

$$xx' + t = 0$$

que é a equação diferencial cuja solução é (2.47). Agora encontrando a família ortogonal a (2.47).

Considere a equação:

$$G(t, x, x') = F\left(t, x, -\frac{1}{x'}\right) = -x\frac{1}{x'} + t = 0 \quad (2.48)$$

para obter a família ortogonal.

Então, a solução de (2.48) constitui a família de curvas que é ortogonal à família de círculos (2.47).

Exemplo 11 *Considere a família das Parábolas*

$$x - 2\lambda t^2 - \lambda = 0, \quad (2.49)$$

derivando com relação a t obtemos:

$$x' - 4\lambda x = 0. \quad (2.50)$$

De (2.49) temos:

$$\lambda = \frac{x}{1 + 2t^2}$$

substituindo em (2.50) obteremos:

$$(2t^2 + 1)x' - 4xt = 0.$$

Agora encontrando a família ortogonal a equação (2.49) chegaremos a:

$$G(t, x, x') = F\left(t, x, \frac{1}{x'}\right) = (2t^2 + 1)\frac{1}{x'} - 4xt = 0.$$

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções de EDO

3.1 Teoremas de Existência e Unicidade

Neste capítulo iremos tratar de alguns resultados importantes no estudo das equações diferenciais ordinárias, onde o principal resultado é o Teorema de Existência e Unicidade para o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \quad (3.1)$$

A seguir iremos mostrar um lema que transfere o problema de valor inicial (3.1) para um problema de resolução de uma equação integral.

Lema 1 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua. Então, uma função diferenciável $\phi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma solução do (PVI) (3.1) se, e somente se, for uma solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I_\alpha. \quad (3.2)$$

Prova. \Rightarrow) Se ϕ é uma solução do (PVI) (3.1), então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é solução da equação integral (3.2).

\Leftarrow) Reciprocamente, se $\phi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função contínua que é solução da equação integral (3.2), então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é diferenciável e é também solução do (PVI) (3.1). ■

Teorema 2 *(Teorema de Picard) Seja f contínua e lipschitziana com relação a segunda variável, isto é, existe uma constante K tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K \|x - y\|,$$

para todo $(t, x), (t, y) \in \Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x - x_0\| \leq b\}$. Se $\|f\| \leq M$ em Ω , existe uma única função diferenciável $\phi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$, que é solução do (PVI) (3.1).

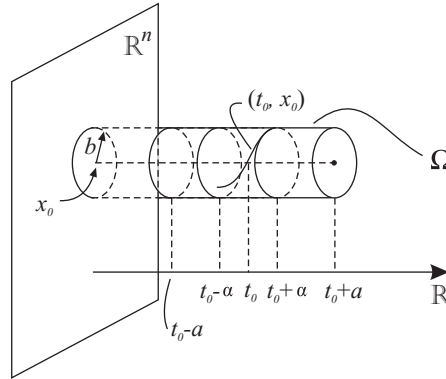


figura 6.1

Prova. Usando o Lema anterior, concentremo-nos na resolução da equação integral (3.2). Seja $X = C(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $g : I_\alpha \rightarrow B_b$, com a métrica da convergência uniforme

$$d(g_1, g_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |g_1(t) - g_2(t)|.$$

Para $g \in X$, seja $\Phi(g) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por:

$$\Phi(g)(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Note que $\Phi(X) \subseteq X$. De fato, para todo $t \in I_\alpha$

$$\begin{aligned} \|\Phi(g)(t) - g(t_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\| ds \leq \\ &\leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b. \end{aligned}$$

Assim, a equação integral (3.2) pode ser escrita na forma funcional

$$x = \Phi(x).$$

Portanto, a solução de (3.2) são os pontos fixos de Φ . A idéia agora é usar o teorema do Ponto Fixo de Banach. Então, para finalizarmos a demonstração precisamos mostrar que Φ é uma contração.

$$\begin{aligned} \|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f_x(\xi)\| \|g_1(s) - g_2(s)\| ds, \end{aligned}$$

onde ξ está entre g_1 e g_2 . Então

$$\|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)\| \leq K|t - t_0|d(g_1, g_2),$$

onde K é a constante de lipschitz de f , e daí

$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq K\alpha d(g_1, g_2).$$

Concluimos que Φ é uma contração se $K\alpha < 1$. Logo, basta tomar $\alpha < 1/K$. ■

Exemplo 12 *Consideremos o seguinte (PVI)*

$$\begin{cases} x' = -2t^2 \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 t \\ x(0) = 0 \end{cases} . \quad (3.3)$$

Note que α depende da função f e da distância do ponto (t_0, x_0) à fronteira $\partial\Omega$ de Ω , o seguinte resultado é de grande importância:

Lema 2 *Se $K \subset \Omega$ é compacto, então um mesmo α pode ser escolhido de modo a servir para todas as condições iniciais $(t_0, x_0) \in K$.*

Prova. Considere uma δ -vizinhança K_δ de K tal que

$$K \subset K_\delta \subset \overline{K}_\delta \subset \Omega,$$

então podemos escolher a e b tais que o retângulo $B(a, b, t_0, x_0) = B(a, b) = \{(t, x); t \in I_a, x \in B_b\}$ esteja contido em \overline{K}_δ para todos os pontos $(t_0, x_0) \in K$. Portanto, basta tomar

$$M = \max \{|f(t, x)|; (t, x) \in \overline{K}_\delta\}$$

e α satisfazendo

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}.$$

■

Exemplo 13 *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = |x|^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases} .$$

A função $x(t) \equiv 0$ é solução do problema de valor inicial. Porém, encontramos outra solução usando o método das equações separáveis e considerando os casos $x > 0$ e $x < 0$; essa outra solução é:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, t \neq 0 \\ -\frac{1}{4}t^2, t \leq 0 \end{cases} .$$

Este fato, porém, não contradiz o Teorema de Picard, pois temos que a função $f(t, x) = |x|^{1/2}$ não é lipschitziana. Portanto, a solução existe mas não é única.

Tendo em vista o exemplo anterior, veremos um resultado que nos garante que, se retirarmos a hipótese de f ser lipschitziana, perdemos a unicidade, mas ainda temos existência de soluções.

Teorema 3 (Teorema de Peano) *Seja $f : \Omega = I_a \times B_b \rightarrow \mathbb{R}^N$ contínua. Se $\|f\| \leq M$ em Ω , (3.1) tem pelo menos uma solução em I_α , onde $\alpha = \min \{a, b/M\}$.*

Prova. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência f_n de funções, cujas componentes são polinômios, que convergem para f , uniformemente em Ω . Para n grande, f_n satisfaz as hipóteses do Teorema 2. Seja ϕ_n solução de

$$\begin{cases} x' = f_n(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \text{ em } I_\alpha,$$

cuja existência e unicidade decorrem do Teorema 2. A família $\{\phi_n\}$ é equicontínua e uniformemente limitada, pois:

$$\|\phi_n(t) - \phi_n(t')\| = \left\| \int_t^{t'} f_n(s, \phi_n(s)) ds \right\| \leq M|t - t'|$$

e $\|\phi_n - x_0\| \leq b$, para todo n suficientemente grande. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequência, que denotaremos também por ϕ_n , tal que ϕ_n converge uniformemente em I_a para uma função ϕ .

Afirmção: $f_n(s, \phi_n(s))$ converge uniformemente em I_α para $f(s, \phi(s))$. De fato,

$$\begin{aligned} \|f_n(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi(s))\| &\leq \|f_n(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi_n(s))\| + \\ &+ \|f(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi(s))\| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \quad \forall s. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$ em ambos os membros de $\phi_n(t) = \int_{t_0}^t f_n(s, \phi_n(s)) ds$,

temos, para todo $t \in I_\alpha$, $\phi(t) = \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$. ■

Observe que, nos resultados anteriores garantimos a existência de solução local. Então, mostraremos que esta solução pode ser estendida a um intervalo maximal.

Lema 3 *Sejam $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\phi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluções do (PVI) (3.1). Então ϕ_1 e ϕ_2 coincidem em $I_1 \cap I_2$.*

Prova. Temos que $\tilde{I} := I_1 \cap I_2$ é um intervalo aberto. O subconjunto J de \tilde{I} definido por

$$J = \left\{ t \in \tilde{I}; \phi_1(t) = \phi_2(t) \right\}$$

é fechado, pois, é igual a $(\phi_1 - \phi_2)^{-1}(0)$ e também não vazio, pois $t_0 \in J$. Além disso, J é aberto em \tilde{I} , pela aplicação do Teorema 3.1. Logo, $J = \tilde{I}$, onde usamos o fato de um intervalo ser um conjunto conexo. ■

Teorema 4 *Mesmas hipóteses do Teorema 2. Toda solução do (PVI) (3.1) pode ser estendida a um intervalo maximal, o qual é aberto.*

Prova. Considere o conjunto de todas as soluções $\phi_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ do (PVI) (3.1), onde I_i são intervalos abertos. A seguir, seja $I = \cup I_i$ e defina uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ do seguinte modo: dado $t \in I$, como $t \in I_i$ para algum i , defina

$$\phi(t) = \phi_i(t)$$

A função está bem definida em virtude do Lema (3). Além disso, ϕ é solução do (PVI) (3.1), porque ϕ_i o é, e I é aberto. Usaremos a notação $I = (w_-, w_+)$. Afirmamos que I é maximal, isto é, não existe um intervalo contendo propriamente I onde o (PVI) (3.1) tenha solução $\tilde{\phi}$. De fato, se houvesse um tal intervalo, este conteria uma das extremidades, digamos w_+ . Então, pelo Teorema 2, a solução de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(w_+) = \tilde{\phi}(w_+) \end{cases}$$

existiria um intervalo $(w_+ - \alpha, w_+ + \alpha)$. Observe que, o fato de $\tilde{\phi}$ ser solução definida em w_+ implica que o ponto $(w_+, \phi(w_+))$ pertence ao aberto Ω . Daí podemos aplicar o Teorema 2. Concluimos que a função $\hat{\phi}$ definida no intervalo $\hat{I} = (w_-, w_+ + \alpha)$ por

$$\hat{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{para } t \in (w_-, w_+) \\ \tilde{\phi}(t) & \text{para } t \in [w_+, w_+ + \alpha) \end{cases}$$

é solução do (PVI) (3.1). Isso é, porém, impossível pois, I foi a união de todos os intervalos abertos contendo x_0 , onde o (PVI) (3.1) tem solução, e \hat{I} contém I propriamente. ■

Teorema 5 *Se $\phi(t)$ é solução do P.V.I. (3.1) com intervalo maximal $I = (w_-, w_+)$, então $(t, \phi(t)) \rightarrow \partial\Omega$ quando $t \rightarrow w_+$ (o mesmo vale para $t \rightarrow w_-$), isto é, dado $K \subset \Omega$ compacto, existe $\tau < w_+$ tal que $(t, \phi(t)) \notin K$ para $t \in (\tau, w_+)$.*

Prova.

1. Se $w_+ = +\infty$, dado K compacto em Ω , tome

$$\tau = \sup_{(t,x) \in K} t$$

e, portanto, $(t, \phi(t)) \notin K$ se $t > \tau$.

2. Se $w_+ < +\infty$, dado $K \subset \Omega$ temos pelo Lema(2) que o raio α pode ser escolhido o mesmo para todas as condições iniciais em K . Se $(t_1, \phi(t_1)) \in K$, então ϕ está definida em $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$. Tome $\tau = w_+ - \alpha$, temos que $(t, \phi(t)) \notin K$ se $t \in (\tau, w_+)$, porque se $t_1 \in (\tau, w_+)$ e $(t_1, \phi(t_1)) \in K$, temos que $\phi(t)$ estaria definida em $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$. E como

$$t_1 + \alpha > \tau + \alpha = w_+$$

teríamos uma contradição ao fato de I ser maximal.

■

Observação 2 Este teorema é importante para determinar se as soluções de uma determinada equação são globalmente definidas, isto é, $w_+ = +\infty$. Quando Ω contém o semiplano $t \geq t_0$ e $w_+ < +\infty$, temos que o Teorema (5) implica que $\|\phi(t)\| \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow w_+$. Dizemos, nesse caso, que temos um "blow up" para t finito. Conseqüentemente, se conseguirmos mostrar que $\|\phi(t)\|$ fica limitado, então temos obrigatoriamente que ϕ é globalmente definida. A observação importante nesse sentido é: se $\phi'(t)$ é limitada, então $\|\phi(t)\|$ não pode tender a infinito para t em intervalos finitos.

Lema 4 (Lema de Gronwall) Sejam $f, g, h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas não negativas tais que,

$$f(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds \quad (3.4)$$

Então:

$$f(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^x g(s)h(s)e^{\int_s^x g(u)du} ds \quad (3.5)$$

Em particular, se $h(x) = K = cte$, temos

$$f(x) \leq Ke^{\int_{x_0}^x g(s)ds}. \quad (3.6)$$

Prova. Seja

$$w(x) = \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds,$$

então $w'(x) = g(x)f(x)$. E daí, usando (3.4), obtemos

$$w'(x) \leq g(x)h(x) + g(x)w(x)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx} [w(x)e^{-\int_{x_0}^x g(s)ds}] \leq g(x)h(x)e^{-\int_{x_0}^x g(s)ds},$$

integrando, obtemos

$$w(x)e^{-\int_{x_0}^x g(s)ds} \leq \int_{x_0}^x g(s)h(s)e^{-\int_{x_0}^s g(u)du} ds.$$

Daí, temos que

$$f(x) - h(x) \leq w(x) \leq e^{\int_{x_0}^x g(s)ds} \int_{x_0}^x g(s)h(s)e^{\int_s^{x_0} g(u)du} ds,$$

e, finalmente,

$$f(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^x g(s)h(s)e^{\int_s^x g(u)du} ds.$$

A verificação de (3.6) é imediata utilizando

$$g(s)e^{\int_s^x g(u)du} = -\frac{d}{ds} \left(e^{\int_s^x g(u)du} \right).$$

■

O seguinte resultado é de muita utilidade nas aplicações, pois conseguimos soluções no mesmo domínio de definição da função $f(t, x)$.

Teorema 6 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ contínua e lipschitziana, onde $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; a < t < b\}$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução do (PVI)(3.1) em $I = (a, b)$.*

Prova. Basta mostrar que, para todo $\epsilon > 0$ dado, a solução do problema de valor inicial (3.1) está definida em $a + \epsilon, b - \epsilon$. Sejam $K_1 = \max \{\|f(t, x_0)\|; a + \epsilon \leq t \leq b - \epsilon\}$ e $K_2 = \sup \{\|f_x(t, x)\|; (t, x) \in \Omega\}$. Então, pelo teorema do valor médio,

$$\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x_0)\| + \|f(t, x) - f(t, x_0)\| \leq K_1 + K_2\|x - x_0\|$$

e daí, usando (3.2), obtemos

$$\|x(t) - x_0\| \leq K_3 + K_2 \int_{t_0}^t \|x(s) - x_0\| ds, \text{ onde } K_3 = \int_{t_0}^t K_1.$$

Isso implica, pelo Lema de Gronwall,

$$\|x(t) - x_0\| \leq K_3 e^{K_2(t-t_0)} \leq K_4 = \text{const.}$$

O que mostra que $x(t)$ não tende a infinito. Logo, o intervalo de definição da solução de (3.1) é $(a + \epsilon, b - \epsilon)$. Como ϵ é arbitrário obtemos o resultado. ■

Corolário 1 *Se $f(t, x) = p(t)x + q(t)$, onde $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então as soluções de $x' = f(t, x)$ estão definidas em todo intervalo (a, b) .*

Além da questão de existência e unicidade de solução do (PVI) (3.1), para que a teoria tenha sentido fisicamente, é preciso mostrar que as soluções dependem continuamente da condição inicial. Vamos estabelecer essa propriedade de modo preciso no próximo teorema.

Teorema 7 *(Dependência Contínua). Mesmas hipóteses do Teorema 2. Se ϕ_1 e ϕ_2 são soluções de $x' = f(t, x)$ definidas em $[x_0, x_1]$, então existe $K > 0$ tal que*

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| \leq \|\phi_1(t_0) - \phi_2(t_0)\| e^{K(t-t_0)}, \quad \forall t \in [x_0, x_1].$$

Prova. Dadas as soluções $\phi_1, \phi_2 : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ de $x' = f(t, x)$, podemos definir $\Omega_0 \subset \bar{\Omega} \subset \Omega$ limitado, tal que $\delta \leq \text{dist}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$, e de modo que Ω_0 contenha os gráficos de ϕ_1 e ϕ_2 . Seja K a constante de lipschitz.

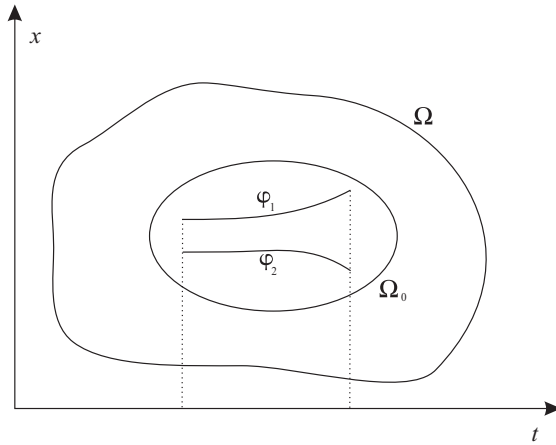


figura 6.2

Como

$$\phi_1'(t) - \phi_2'(t) = f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))$$

segue-se, por integração, que:

$$\phi_1(t) - \phi_2(t) = \phi_1(t_0) - \phi_2(t_0) + \int_{t_0}^t [f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))] ds.$$

Portanto, usando o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| \leq \|\phi_1(t_0) - \phi_2(t_0)\| + \int_{t_0}^t K \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| ds,$$

de onde, usando a desigualdade de Gronwall, obtém-se:

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| \leq \|\phi_1(t_0) - \phi_2(t_0)\| e^{K(t-t_0)}.$$

■

Capítulo 4

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

4.1 Equações lineares de segunda ordem

Definição 13 Diremos que uma equação diferencial é linear de segunda ordem quando apresentar a seguinte forma:

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (4.1)$$

onde $p, q, f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ são funções contínuas.

Nesta secção iremos estudar as questões relativas à solução geral de (4.1) e à solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + p(t)x'(t) + q(t)x = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} . \quad (4.2)$$

Inicialmente, temos o seguinte resultado de existência e unicidade.

Teorema 8 Se $p, q, f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ são funções contínuas, então existe uma única função diferenciável $\phi : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ que é solução do problema de valor inicial (4.2).

Prova. A idéia é transformar a equação num sistema pela introdução das variáveis

$$x_1(t) = x(t) \quad e \quad x_2(t) = x'(t).$$

Logo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f - qx_1 - px_2 \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = v_0. \end{cases}$$

Portanto, usando o Teorema de Picard, concluímos a demonstração. ■

4.2 Equações Homogêneas

Concentremos, agora, nossa atenção na equação homogênea

$$x'' + px' + qx = 0 \quad (4.3)$$

Consideremos os seguintes problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} x'' + px' + qx = 0 \\ x(t_0) = 1 \\ x'(t_0) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} x'' + px' + qx = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = 1 \end{cases}, \quad (4.5)$$

onde $t_0 \in (a, b)$. Então, pelo teorema anterior, os problemas de valor inicial (4.4) e (4.5) possuem solução única. Seja $\phi_1 : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ a solução do (PVI) (4.4) e seja $\phi_2 : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ a solução do (PVI) (4.5). É fácil ver que qualquer função da forma

$$\phi(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t), \quad (4.6)$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias, é solução da equação diferencial (4.3); isso é precisamente a linearidade da equação (4.3) implicando que, qualquer combinação linear de suas soluções é também sua solução, propriedade essa conhecida como o *princípio da superposição*.

Veremos na proposição a seguir que a recíproca é verdadeira.

Proposição 1 *Qualquer solução de (4.3) é da forma (4.6) para α_1 e α_2 escolhidos convenientemente.*

Proposição 1 *Seja ϕ uma solução de (4.3), e tome $\alpha_1 = \phi(t_0)$ e $\alpha_2 = \phi'(t_0)$. Então, é fácil verificar que a função $\psi = \phi - \alpha_1 \phi_1 - \alpha_2 \phi_2$ é solução de (4.3) e $\psi(t_0) = 0$ e $\psi'(t_0) = 0$. Logo, pelo Teorema 8 acima $\psi(t) \equiv 0$, o que demonstra a nossa proposição.*

Portanto, (4.6) é uma solução geral de (4.3), no entanto, podem existir soluções em outra forma. Para estudar esta questão, vamos introduzir a noção de independência linear.

Definição 14 i) *Duas funções $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ são linearmente dependentes LD se existir uma constante k tal que $\phi_2(t) = k\phi_1(t), \forall t \in (a, b)$;*

ii) *Duas funções (ϕ_1 e ϕ_2) são linearmente independentes LI se*

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \forall t \in (a, b).$$

Exemplo 14 As funções $\sin x$ e $\cos x$ são LI.

Exemplo 15 As funções e^{ax} e e^{bx} , $a \neq b$ são LI.

As noções de dependência (ou independência) para funções diferenciáveis pode ser ligada com o determinante Wronskiano.

Definição 15 Dadas duas funções diferenciáveis $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ o determinante

$$W[\phi_1, \phi_2] = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

é chamado de Wronskiano das funções ϕ_1 e ϕ_2 .

Proposição 2 Sejam $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ duas funções diferenciáveis, cujo Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in (a, b)$. Então, ϕ_1 e ϕ_2 são LI.

Prova. Suponhamos, por contradição, que ϕ_1 e ϕ_2 sejam LD. Então, existem constantes α_1 e α_2 , onde ao menos uma delas é diferente de zero, tais que

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t) = 0, \forall t \in (a, b)$$

Daí, derivando, obtemos

$$\alpha_1 \phi_1'(t) + \alpha_2 \phi_2'(t) = 0, \forall t \in (a, b)$$

Em particular, para $t = t_0$ temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 \phi_1(t_0) + \alpha_2 \phi_2(t_0) = 0 \\ \alpha_1 \phi_1'(t_0) + \alpha_2 \phi_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

cujo determinante é precisamente $W[\phi_1, \phi_2](t_0) \neq 0$, por hipótese. Consequentemente $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o que é uma contradição. ■

A recíproca da Proposição 2 não é verdadeira, para comprovarmos este fato verifiquemos o exemplo a seguir.

Exemplo 16 As funções $\phi_1(t) = t^3$ e $\phi_2(t) = |t|^3$ são LI, no entanto, seu Wronskiano é zero.

Entretanto, a recíproca é válida se nos restringirmos à classe das soluções da equação (4.3). Temos o seguinte resultado.

Teorema 9 Sejam ϕ_1 e ϕ_2 soluções de (4.3). Então, elas são LI se, e somente se, seu Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in (a, b)$. Além disso, se o Wronskiano for diferente de zero em um ponto t_0 , então ele é diferente de zero em todos os demais pontos de (a, b) .

Prova. Em virtude da Proposição 2, resta provar que se ϕ_1 e ϕ_2 são soluções LI de (4.3), então o Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in (a, b)$. Vamos provar um pouco mais: que o Wronskiano é diferente de zero em todos os pontos de (a, b) . Fixe $t_0 \in (a, b)$ e provemos que $W[\phi_1, \phi_2](t_0) \neq 0$. Supondo, por contradição, que isso não ocorra, concluímos que o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1\phi_1(t_0) + \alpha_2\phi_2(t_0) = 0 \\ \alpha_1\phi_1'(t_0) + \alpha_2\phi_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

tem solução (α_1, α_2) não trivial. Formemos a função $\phi(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t)$ a qual é solução de (4.3), e, como $\phi(t_0) = \phi'(t_0) = 0$, o Teorema 8 implica que $\phi(t) \equiv 0$ para todo $t \in (a, b)$. Isso acarreta que ϕ_1 e ϕ_2 sejam LD, o que é uma contradição.

■

A última parte do Teorema 9 provaremos usando a *fórmula de Abel-Liouville*, dada no Teorema 10 abaixo.

Teorema 10 *Sejam $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ duas soluções de (4.3). Então*

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \quad (4.8)$$

onde $t_0 \in (a, b)$, e estamos usando a notação $W(t) = W[\phi_1, \phi_2](t)$.

Prova. Pelo fato de ϕ_1 e ϕ_2 serem solução de (4.3) temos

$$\begin{cases} \phi_1'' + p\phi_1' + q\phi_1 = 0 \\ \phi_2'' + p\phi_2' + q\phi_2 = 0, \end{cases}$$

multiplicando a primeira equação por $-\phi_2$, a segunda por ϕ_1 , e somando, temos

$$(\phi_1\phi_2'' - \phi_1''\phi_2) + p(\phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2) = 0.$$

note que

$$W = \phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2, \text{ e } W' = \phi_1\phi_2'' - \phi_1''\phi_2.$$

Assim, W satisfaz a equação de primeira ordem

$$W' + pW = 0.$$

Conseqüentemente, usando o método da secção 2.2, obtemos

$$W(t) = ce^{-\int_{t_0}^t p(s)ds},$$

onde c é uma constante. Fazendo $t = t_0$, temos que

$$W(t_0) = c.$$

Logo,

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

■

A fórmula (4.8) diz diretamente que uma das alternativas ocorre:

- (i) $W(t) \equiv 0$;
- (ii) $W(t) \neq 0$, para todo $t \in (a, b)$.

Vejam agora o que é que o conceito de independência linear pode fazer pela questão da solução geral. Temos o seguinte resultado.

Teorema 11 *Sejam $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ duas soluções LI de (4.3). Então, qualquer solução ϕ de (4.3) é da forma*

$$\phi = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \tag{4.9}$$

com α_1 e α_2 constantes escolhidas convenientemente.

Prova. Fixe $t_0 \in (a, b)$ e considere o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 \phi_1(t_0) + \alpha_2 \phi_2(t_0) = \phi(t_0) \\ \alpha_1 \phi_1'(t_0) + \alpha_2 \phi_2'(t_0) = \phi'(t_0). \end{cases}$$

Como o determinante desse sistema é o Wronskiano de ϕ_1 e ϕ_2 em t_0 , o qual é diferente de zero, concluímos que α_1 e α_2 estão univocamente determinados. Agora considere a função

$$\psi(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t),$$

a qual é solução de (4.3) e como $\psi(t_0) = \phi(t_0)$ e $\psi'(t_0) = \phi'(t_0)$, o teorema de existência e unicidade nos diz que $\psi = \phi$. ■

O Teorema 11 é muito importante, pois, se determinarmos um par qualquer ϕ_1 e ϕ_2 , de soluções LI de (4.3) então a solução geral de (4.3) está obtida e é dada por (4.9).

Consideremos agora a equação não homogênea (4.1). Note que, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções de (4.1), então $x_1(t) - x_2(t)$ é solução de (4.3). Isso nos permite afirmar que, se conhecermos uma solução particular, $x_p(t)$, de (4.1) então a solução geral de (4.1) é dada por

$$x(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t) + x_p(t),$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias e ϕ_1, ϕ_2 é um par de soluções LI de (4.3).

4.2.1 Equações lineares com coeficientes constantes

No exemplo anterior mostramos a solução da equação homogênea associada, agora, iremos ver como chegar até ela.

Consideremos a equação

$$x'' + px' + qx = 0. \quad p, q = \text{constantes.} \tag{4.10}$$

Segue-se do Teorema 8 que as soluções de (4.10) são funções definidas em toda reta. O método consiste em buscar soluções de (4.10) na forma

$$x(t) = e^{\lambda t}, \tag{4.11}$$

onde λ é um parâmetro a determinar. Substituindo (4.11) na equação (4.10):

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (4.12)$$

que é conhecida como a *equação característica* ou *equação auxiliar* da equação (4.10).

Há três casos a considerar, dependendo do sinal do discriminante:

$$\Delta = p^2 - 4q.$$

Caso I: $\Delta > 0$. Neste caso, (4.12) tem duas raízes reais e distintas:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

e, conseqüentemente,

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \quad (4.13)$$

são soluções de (4.10). Observe que $W[x_1, x_2](t) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$. Portanto, as soluções x_1 e x_2 dadas em (4.13) são LI.

Caso II: $\Delta = 0$. Neste caso, (4.12) nos dá apenas um valor de λ :

$$\lambda = -\frac{p}{2}$$

e, assim, obtemos apenas uma solução

$$x_1(t) = e^{-pt/2} \quad (4.14)$$

através desse processo. Usaremos o método de redução da ordem da equação para encontrarmos uma solução x_2 , tal que x_1, x_2 sejam LI. O método consiste em: conhecida uma solução $x_1(t)$ de (4.10), busca-se outra solução na forma

$$x(t) = u(t)x_1(t).$$

Substituindo esse x na equação (4.10) obtemos

$$u[x_1'' + px_1' + qx_1] + u''x_1 + u'(px_1 + 2x_1') = 0$$

de onde se segue, fazendo $u' = v$, que

$$v' + \left(p + 2\frac{x_1'}{x_1}\right)v = 0.$$

Note que o termo do parêntesis é zero. Logo,

$$v' = 0 \Rightarrow v = c \Rightarrow u = ct + c'.$$

Portanto, qualquer função da forma $(ct + c')x_1(t)$, onde c e c' são constantes, é solução de (4.10). Tomando $c = 1$, $c' = 0$, obtemos uma segunda solução para (4.10):

$$x_2(t) = te^{-pt/2}. \quad (4.15)$$

O Wronskiano das soluções x_1 e x_2 , dadas em (4.14) e (4.15) respectivamente é igual a e^{-pt} , e conseqüentemente essas soluções são LI.

Caso III: $\Delta < 0$. Neste caso, (4.12) tem duas raízes complexas conjugadas:

$$\lambda_1 = -\mu + i\nu, \text{ onde } \mu = p/2, \nu = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}.$$

Logo, pela observação abaixo

$$x_1(t) = e^{-\mu t} e^{i\nu t} \text{ e } x_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\nu t}$$

são soluções LI de (4.10), pois seu Wronskiano é igual a $2i\nu e^{-2\nu t} \neq 0$. Em virtude da linearidade da equação (4.10), temos que

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = e^{-\nu t \cos \nu t} \quad (4.16)$$

e

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2i}[x_1(t) - x_2(t)] = e^{-\nu t \sin \nu t} \quad (4.17)$$

são também soluções da equação (4.10). Para escrever os últimos termos das expressões (4.16) e (4.17) usamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

O Wronskiano das duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 dadas em (4.16) e (4.17), respectivamente, é igual a $\nu e^{-2\nu t} \neq 0$, o que implica serem ϕ_1 e ϕ_2 LI.

Exemplo 17

$$x'' - 4x = 0.$$

Fazendo $x = e^{\lambda t}$, obtemos $\lambda^2 - 4 = 0$, e daí $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Logo, $x_1(t) = e^{2t}$ e $x_2(t) = e^{-2t}$ são soluções da equação. Seu Wronskiano é igual a -4 , e logo x_1 e x_2 são soluções LI.

Exemplo 18

$$x'' + 2x' + x = 0.$$

Temos, $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, como equação característica, então, resolvendo a equação temos que: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Portanto,

$$x_1(t) = e^{-t} \text{ e } x_2(t) = te^{-t}$$

são soluções LI da equação acima, pois $W(x_1, x_2)(t) = e^{-2t} \neq 0$.

Exemplo 19

$$x'' - 2x' + 5x = 0.$$

Sabendo que uma solução para equação dada é da forma $x(t) = e^{\lambda t}$, temos que

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

é a equação característica associada a equação dada. Logo,

$$\lambda_1 = 1 + 2i \text{ e } \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Portanto, usando a fórmula de Euler, chegaremos às seguintes soluções LI

$$x_1(t) = e^t \cos 2t \text{ e } x_2(t) = e^t \sin 2t.$$

4.3 Equações não homogêneas

Nesta secção iremos estudar alguns métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

4.3.1 Método de Variação dos Parâmetros

Consideremos, então, a equação (4.1)

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t)$$

O método inicia-se supondo conhecidas duas soluções LI ϕ_1 e ϕ_2 da EDO homogênea associada. Em seguida, uma solução particular x_p é suposta da forma:

$$x_p(t) = u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t),$$

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são funções a determinar, satisfazendo a condição lateral:

$$u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 = 0 \tag{4.18}$$

condição esta que vem justificar o nome do método. Derivando a suposta solução $x_p(t)$ e usando a condição lateral (4.18), obtemos:

$$x_p'(t) = u_1(t)\phi_1'(t) + u_2(t)\phi_2'(t)$$

e daí resulta:

$$x_p''(t) = u_1'(t)\phi_1'(t) + u_1(t)\phi_1''(t) + u_2'(t)\phi_2'(t) + u_2(t)\phi_2''(t).$$

Substituindo $x_p(t)$, $x_p'(t)$ e $x_p''(t)$ na EDO e efetuando algumas simplificações, obtemos:

$$u_1[\phi_1'' + p\phi_1' + q\phi_1] + u_2[\phi_2'' + p\phi_2' + q\phi_2] + u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = f$$

e como ϕ_1 e ϕ_2 são soluções da EDO homogênea, as expressões entre colchetes na última igualdade são iguais a zero e, portanto:

$$u_1' \phi_1 + u_2' \phi_2 = f \quad (4.19)$$

Combinando (4.18) e (4.19), temos o sistema linear nas variáveis u_1' e u_2' :

$$\begin{cases} u_1' \phi_1 + u_2' \phi_2 = 0 \\ u_1' \phi_1' + u_2' \phi_2' = f, \end{cases}$$

e usando a Regra de Cramer deduzimos que:

$$u_1'(t) = \frac{-f(t)\phi_2(t)}{W(t)} \quad \text{e} \quad u_2'(t) = \frac{f(t)\phi_1(t)}{W(t)}. \quad (4.20)$$

Podemos determinar duas funções u_1 e u_2 a partir de (4.20) por integração, fixando $t_0 \in (a, b)$ e considerando:

$$u_1(t) = - \int_{t_0}^t \frac{f(s)\phi_2(s)}{W(s)} ds \quad \text{e} \quad u_2(t) = \int_{t_0}^t \frac{f(s)\phi_1(s)}{W(s)} ds. \quad (4.21)$$

Exemplo 20 Consideremos a EDO de segunda ordem:

$$y'' + y = tgx.$$

As funções $\phi_1(x) = \cos x$ e $\phi_2(x) = \text{sen}x$ são soluções LI da EDO homogênea associada, com Wronskiano $W(x) \equiv 1$, de modo que a solução $y_h(x)$ é:

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \text{sen}x.$$

Para determinarmos os parâmetros u_1 e u_2 , tomamos $x_0 = 0$ nas fórmulas (4.20) e obtemos:

$$u_1(x) = - \int_0^x \text{sen}(s)tg(s)ds = \text{sen}x - \ln |\sec x + tgx|$$

$$u_2(x) = \int_0^x \cos(s)tg(s)ds = -\cos x$$

e, assim, uma solução particular $t_p(x)$ é dada por:

$$y_p(x) = -\cos x (\ln |\sec x + tgx|).$$

4.3.2 Redução de ordem

Dada uma solução $\phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ da equação diferencial

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad (4.22)$$

onde $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, o método de redução consiste em buscar uma segunda solução na forma

$$\phi_2(t) = u(t)\phi_1(t), \quad (4.23)$$

onde $u(t)$ é uma função a determinar. Substituindo ϕ_2 em (4.22) obtemos, com $\nu = u'$,

$$\nu' + \left(p + 2\frac{\phi_1'}{\phi_1} \right) \nu = 0 \quad (4.24)$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem do tipo estudado na secção 2.2, onde estamos supondo que $\phi_1(t) \neq 0$; caso não o seja, teremos que quebrar a equação em várias. Resolvendo (4.24) obtemos:

$$\nu(t) = \frac{c}{\phi_1^2} e^{-P(t)}, \quad c = \text{constante},$$

onde $P(t)$ é uma primitiva de $p(t)$. Como $u' = \nu$, temos

$$u(t) = c \int \frac{1}{\phi_1^2(t)} e^{-P(t)} dt,$$

e assim uma segunda solução seria

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int \frac{1}{\phi_1^2(t)} e^{-P(t)} dt. \quad (4.25)$$

Exemplo 21 A equação

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + \lambda(\lambda + 1)x = 0, \quad -1 < t < 1,$$

é conhecida como equação de Legendre, onde λ é um parâmetro; para cada valor fixado de λ se tem uma equação diferente. Consideremos a equação para $\lambda = 1$:

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0, \quad -1 < t < 1. \quad (4.26)$$

A função $\phi_1(t)$ é solução de (4.26). Determinemos uma outra solução na forma $\phi_2(t) = ut$. Substituindo ϕ_2 em (4.26) e fazendo $\nu = u'$, obtemos:

$$\nu' + \left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{1 - t^2} \right) \nu = 0. \quad (4.27)$$

Como a equação (4.27) não faz sentido para $t = 0$, vamos considerá-la separadamente para $-1 < t < 0$ e $0 < t < 1$. Obtemos de (4.27) que

$$\nu(t) = \frac{c}{t^2(1-t^2)}.$$

Daí:

$$u(t) = \int \frac{c}{t^2(1-t^2)} dt = c \int \left[\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right] dt,$$

ou seja,

$$u(t) = c \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \right].$$

Logo uma segunda solução de (4.26) seria

$$\phi_2(t) = -1 + \frac{t}{2} \ln \frac{1+t}{1-t},$$

função que está bem definida em todo o intervalo aberto $(-1, 1)$.

4.3.3 Método dos coeficientes a determinar

Este método é aplicado apenas para equações lineares com coeficientes constantes

$$x'' + px' + qx = f(t), \quad p, q = \text{constantes}, \quad (4.28)$$

e ainda para certos tipos de funções $f(t)$. A vantagem desse método é não envolver integrações. O método consiste em determinar a solução particular $x_p(t)$ de (4.28), a partir do tipo da função $f(t)$, com coeficientes b_j a serem determinados, conforme veremos abaixo:

1. Quando a função $f(t)$ é do tipo:

$$f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n,$$

admitiremos como solução particular a função:

$$x_p(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n.$$

2. Quando a função $f(t)$ é do tipo:

$$f(t) = e^{\alpha t},$$

admitiremos como solução particular a função:

$$x_p(t) = be^{\alpha t}.$$

3. Quando a função $f(t)$ é do tipo:

$$f(t) = \cos \beta t \text{ ou } \operatorname{sen} \beta t,$$

admitiremos como solução particular a função:

$$b_1 \cos \beta t + b_2 \operatorname{sen} \beta t.$$

4. Quando a função $f(t)$ é do tipo:

$$f(t) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) e^{\alpha t} \cos \beta t \text{ ou}$$

$$f(t) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t,$$

admitiremos como solução particular a função:

$$x_p(t) = (b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n) e^{\alpha t} \cos \beta t + (c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t.$$

Quando algum termo da solução particular $x_p(t)$, sem considerar as constantes multiplicativas, coincidir com algum termo da solução geral $x_h(t)$ da EDO homogênea associada, a solução $x_p(t)$ deve ser modificada, multiplicando-a pelo termo x^m , de modo que elimine a coincidência.

Observação 3 *Os tipos de funções $f(t)$ aos quais o método se aplica pode ser aumentado como consequência do seguinte fato: se x_p e \tilde{x}_p são soluções particulares, respectivamente, das equações*

$$x'' + px' + qx = f_1(t) \text{ e } x'' + px' + qx = f_2(t)$$

então $c_1 x_p + c_2 \tilde{x}_p$ é solução particular de

$$x'' + px' + qx = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t).$$

A aplicação do método consiste em substituir $x_p(t)$ em (4.28), para identificarmos os coeficientes.

Exemplo 22 *Considere a equação*

$$x'' + x' = \cos t.$$

Como a solução da equação homogênea associada é dada por:

$$x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

O método sugere a solução particular da forma:

$$x_p(t) = b_1 t \cos t + b_2 t \operatorname{sen} t.$$

Substituindo $x_p(t)$ na equação obtemos:

$$-2b_1 \operatorname{sen} t + 2b_2 \cos t = \cos t$$

logo, $b_1 = 0, b_2 = 1/2$ e a solução particular é

$$x_p(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t.$$

4.3.4 Equações de Euler-Cauchy

As equações de Euler-Cauchy de segunda ordem assumem a forma:

$$Ax^2y'' + Bxy' + Cy = f(x), \quad \text{com } A \neq 0. \quad (4.29)$$

No ponto $x = 0$, o termo Ax^2y'' da equação (4.29) se anula e por essa razão dizemos que $x = 0$ é um *ponto singular* para a equação de Euler-Cauchy. Qualquer solução de (4.29) estará definida para $x > 0$, ou para $x < 0$.

O método para resolver a equação de Euler-Cauchy tem como princípio a mudança de variável $x = e^t$ (ou $x = -e^t$, se $x < 0$), que transforma a equação em uma EDO linear com coeficientes constantes nas variáveis y e t . Denotaremos $\dot{t} = \frac{dy}{dt}$ e para $x = e^t$ temos da Regra da Cadeia:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \dot{y}. \quad (4.30)$$

Usando a Regra da Cadeia mais uma vez, obtemos de (4.30):

$$y'' = -\frac{1}{x^2} \dot{y} + \frac{1}{x^2} \ddot{y}. \quad (4.31)$$

De (4.30) e (4.31) deduzimos as relações

$$xy' = \dot{y} \text{ e } x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y},$$

que substituídas em (4.29) temos:

$$A\ddot{y} + (B - A)\dot{y} + Cy = b(e^t).$$

Exemplo 23 A mudança de variável $x = e^t$ transforma a EDO de Euler-Cauchy:

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 4 \ln x, \quad x > 0$$

na EDO com coeficientes constantes:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 4t, \quad (4.32)$$

cuja EDO homogênea associada tem solução geral $t_h(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$ e uma solução particular $y_p(t)$ é suposta da forma $y_p(t) = At + B$, que levada a EDO (4.32) fornece $A = 4/3$ e $B = -16/9$ e a solução geral será:

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t} + \frac{4t}{3} - \frac{16}{9}.$$

4.4 Aplicações

4.4.1 Queda Livre de Corpos

Consideremos o problema do movimento vertical de um corpo sob a ação da gravidade, com as seguintes hipóteses:

- (i) Considera o corpo uma partícula de massa m ;
- (ii) despreza a resistência do ar;
- (iii) supõe que o movimento é regido pela segunda Lei de Newton e que a única força atuante é a da gravidade.

A posição da partícula será referida a um eixo- x com origem no solo e orientado para cima:

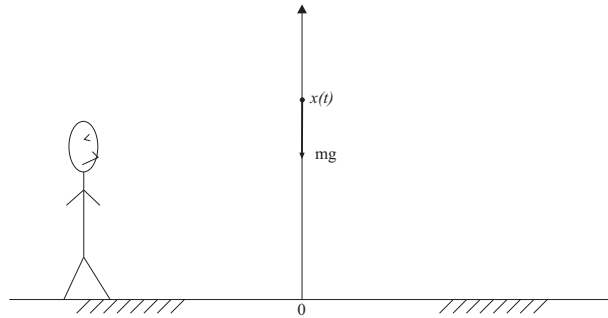


figura 7.1

num instante t digamos que a posição da partícula seja $x(t)$. Pela 2ª Lei de Newton temos

$$mx'' = -mg. \quad (4.33)$$

Integrando (4.33), obtemos

$$x'(t) = -gt + c, \quad (4.34)$$

onde a constante c pode ser determinada fazendo-se $t = 0$: $c = x'(0)$, ou seja, c é a velocidade inicial, que designaremos por v_0 . Assim, (4.34) nos dá

$$x'(t) = -gt + v_0. \quad (4.35)$$

Integrando, mais uma vez, obtemos

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_1,$$

onde a constante c_1 pode ser determinada fazendo-se $t = 0$; se designarmos a posição inicial da partícula por x_0 , obteremos

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0. \quad (4.36)$$

Com o auxílio das expressões (4.35) e (4.36) poderemos resolver uma série de problemas populares nos cursos de mecânica.

4.4.2 Energia Cinética e Potencial

Na secção A.3 definimos campos de forças e introduzimos a noção de trabalho de um campo ao longo de um caminho, bem como a noção de campo conservativo. Suponhamos agora que uma partícula de massa m se movimentava sob a ação de um campo de força $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido em um aberto Ω de \mathbb{R}^3 . Seja $X(t)$ o vetor posição da partícula num instante t . Definimos a *energia cinética* da partícula no instante t como sendo

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = |\dot{X}|, \quad (4.37)$$

onde v designa a velocidade escalar da partícula.

Derivando (4.37) com relação a t obtemos

$$\dot{E}_c = m \langle \dot{X}, \ddot{X} \rangle = \langle \dot{X}, F \rangle, \quad (4.38)$$

onde utilizamos a Segunda Lei de Newton para escrever a última relação, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o produto escalar em \mathbb{R}^3 . Integrando (4.38) com relação a t do tempo inicial t_0 até t_1 , obtemos

$$E_c(t_1) - E_c(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \langle F, \dot{X} \rangle dt. \quad (4.39)$$

A expressão no segundo membro de (4.39) é o trabalho ao longo do campo, ao longo da trajetória da partícula do instante t_0 ao instante t_1 . A relação (4.39) diz então que a variação da energia cinética em um certo intervalo de tempo é igual ao trabalho da força durante esse tempo. Esse fato é conhecido como a *equivalência da energia cinética e do trabalho*.

Suponhamos agora que o campo de forças F seja conservativo. Então, segue-se de (4.39) que

$$E_c(t_1) - E_c(t_0) = V(X(t_1)) - V(X(t_0)), \quad (4.40)$$

onde V é um potencial de F . Agora definimos a *energia potencial* do campo F como

$$U(X) = -V(X). \quad (4.41)$$

Logo, de (4.40) e (4.41), obtemos:

$$E_c(t_1) + U(X(t_1)) = E_c(t_0) + U(X(t_0))$$

e daí se segue que a energia total definida por $E(t) = E_c(t) + U(X(t))$ é constante. Esse é o *Princípio da Conservação da Energia*, o qual diz que a energia total da partícula é constante num campo conservativo.

4.4.3 O Oscilador Harmônico Simples

O oscilador harmônico é o modelo matemático para o movimento retilíneo de uma partícula sujeita a uma força atratora para a origem e com magnitude igual a um múltiplo de k (constante positiva) da distância à origem:

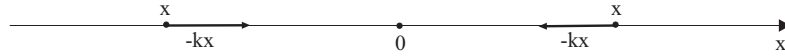


figura 7.2

Designando por m a massa da partícula, a segunda lei de Newton nos dá

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (4.42)$$

que é a equação do *oscilador harmônico simples*, podemos escrever a equação (4.42) na forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.43)$$

onde $\omega^2 = k/m$. A solução geral da equação (4.43) é dada por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen} \omega t. \quad (4.44)$$

Usando as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$$

encontramos $c_1 = x_0$ e $c_2 = v_0/\omega$, assim

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \text{sen} \omega t. \quad (4.45)$$

Agora definimos as constantes A e ϕ pelas expressões

$$A = +\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \cos \phi = \frac{x_0}{A} \text{ e } \text{sen} \phi = \frac{v_0}{A\omega} \quad (4.46)$$

com a restrição $0 \leq \phi < 2\pi$. Usando (4.46) em (4.45), obtemos

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi). \quad (4.47)$$

Portanto, temos um movimento oscilatório em torno da posição central $x = 0$. O afastamento máximo da posição central, A , chama-se *amplitude*. O período da função co-seno em (4.47), $T = 2\pi/\omega$, é o *período* do movimento, o qual significa o tempo necessário para uma oscilação completa. O inverso do período é a *freqüência* $f = \omega/2\pi$, que significa o número de oscilações por segundo. O ângulo ϕ é chamado o *ângulo de fase*.

4.4.4 Oscilador Harmônico Amortecido

Se no oscilador houver a presença de uma força resistiva proporcional a velocidade, a segunda lei de Newton nos dá $m\ddot{x} = -\mu\dot{x} - kx$, onde μ é uma constante positiva, ou seja,

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0, \quad (4.48)$$

que é a equação do oscilador harmônico amortecido.

Escrevemos a equação (4.48) na forma

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega x = 0, \quad (4.49)$$

onde $2\nu = \mu/m$ e $\omega^2 = k/m$. Como vimos na secção 4.2.1, as soluções de (4.49) apresentam comportamentos diversos dependendo das raízes da equação característica $\lambda^2 + 2\nu\lambda + \omega^2 = 0$, ou seja, do sinal do discriminante

$$\Delta = 4\nu^2 - 4\omega^2 = \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{\mu^2 - 4km}{m^2}.$$

i. Amortecimento forte: $\mu^2 > 4km$, ou seja, $\nu > \omega$. Neste caso a solução geral de (4.49) é:

$$x(t) = e^{-\nu t}[c_1 e^{lt} + c_2 e^{-lt}], \quad l = +\sqrt{\nu^2 - \omega^2}, \quad (4.50)$$

onde as constantes c_1 e c_2 podem ser determinadas em termos da velocidade inicial e da posição inicial. Como $\nu > l$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

A velocidade em um instante t é dada por $v(t) = \dot{x}(t)$ e daí

$$v(t) = e^{-\nu t}[c_1(l - \nu)e^{lt} - c_2(l + \nu)e^{-lt}],$$

mostrando que ela se anula, no máximo, em um único valor de t , o qual é dado pela solução de

$$e^{2lt} = \frac{c_2(l + \nu)}{c_1(l - \nu)}.$$

Isso implica que $\dot{x}(t)$ se anula, no máximo, em um valor de t . Assim, temos a possibilidade dos três gráficos abaixo. O movimento se chama *aperiódico*.

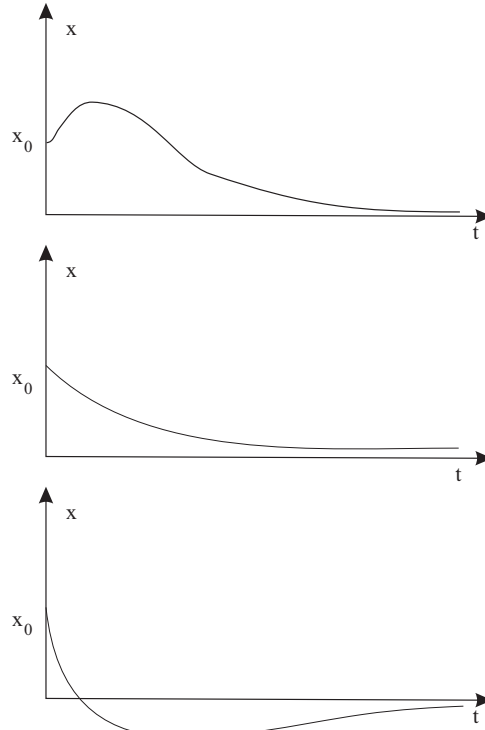


figura 7.3

ii. Amortecimento crítico: $\mu^2 = 4km$, ou seja $\nu = \omega$. Neste caso a solução geral de (4.49) é

$$x(t) = e^{-\nu t}(c_1 + c_2 t). \quad (4.51)$$

Neste caso, $c_1 = x_0$ e $c_2 = v_0 + \nu x_0$. Aqui também temos que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. A expressão (4.51) nos diz que x pode se anular para, no máximo, um valor de t . A velocidade num instante t é dada por

$$v(t) = e^{-\nu t}[(c_2 - \nu c_1) - c_2 \nu t],$$

e, como no caso anterior, ela pode se anular em, no máximo, um ponto. Logo, os gráficos para $x(t)$ têm o mesmo aspecto do caso anterior.

iii. Amortecimento oscilatório: $\mu^2 < 4km$, ou seja, $\nu < \omega$. Neste caso, a solução geral de (4.49) é

$$x(t) = e^{-\nu t}[c_1 \cos lt + c_2 \text{sen} lt], \quad l = +\sqrt{\omega^2 - \nu^2}. \quad (4.52)$$

Definimos as constantes A e ϕ da mesma forma que em (4.46), assim

$$x(t) = Ae^{-\nu t} \cos(lt - \phi). \quad (4.53)$$

As constantes A e ϕ podem ser determinadas em termos da posição x_0 e da velocidade inicial v_0 . Temos, também, que $x(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, entretanto, o movimento é oscilatório, mas a amplitude ($Ae^{-\nu t}$) de suas oscilações decresce exponencialmente. Vê-se que $x(t)$ se anula nos pontos t_k , tais que $lt_k - \phi = (2k-1)\frac{\pi}{2}$.

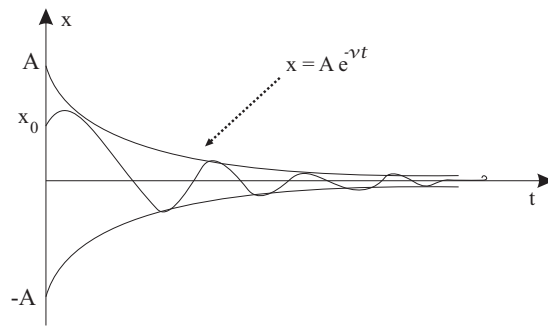


figura 7.4

Capítulo 5

Sistemas de Equações Diferenciais

5.1 Equações Diferenciais

Note que a equação de segunda ordem

$$y'' + 2ty' - y = e^t \quad (5.1)$$

pode transformar-se num sistema de duas equações de primeira ordem, basta fazer a transformação

$$y_1 = y, \quad y_2 = y_1' \quad (5.2)$$

Temos então que $y_2' = y_1'' = y''$, assim podemos escrever (5.1) na seguinte forma

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2ty_2 + e^t. \end{aligned}$$

Neste capítulo consideraremos sistemas que constam de n equações diferenciais lineares de primeira ordem com n incógnitas y_1, \dots, y_n . Ou seja, estudaremos sistemas da forma

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \dots + p_{1n}(t)y_n + q_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \dots + p_{nn}(t)y_n + q_n(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

As funções p_{ik} e q_i que aparecem em (5.3) são funções dadas definidas num certo intervalo I . As funções y_1, \dots, y_n são as funções que devemos determinar. Sistemas desse tipo se chamam *sistemas lineares de primeira ordem*. Uma equação diferencial de ordem n sempre pode transformar-se num sistema. Suponhamos que temos

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = R(t)$$

onde a_i são funções dadas. Ponhamos

$$y_1 = y, \quad y_2 = y_1', \quad y_3 = y_2', \quad \dots, \quad y_n = y_{n-1}'$$

e escrevemos

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \cdots - a_1 y_n + R(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Considere o sistema (15) e introduza a notação vetorial $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, e uma função matricial $P = [p_{ij}]$. Consideremos os vetores como matrizes colunas $n \times 1$ e escrevamos o sistema (5.3) na forma

$$Y' = P(t)Y + Q(t). \tag{5.5}$$

Por exemplo, no sistema (5.5) temos

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

no sistema (2.2), temos

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R(t) \end{bmatrix}.$$

Um problema de valor inicial para o sistema (5.5) é o de encontrar uma função vetorial Y que satisfaça (5.5) e também uma condição inicial da forma $Y(a) = B$, onde $a \in I$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$ é um vetor n -dimensional dado. No caso $n = 1$, sabemos que se P e Q são contínuas em I , todas as soluções de (5.5) vem dada por

$$Y(t) = e^{A(t)}Y(a) + e^{A(t)} \int_a^t e^{-A(\tau)}Q(\tau)d\tau,$$

onde $A(t) = \int_a^t P(\tau)d\tau$, e a é um ponto qualquer de I .

5.2 Cálculo com funções matriciais

Se $P(t) = [p_{ij}(t)]$, definimos a *integral* de P de a a b por

$$\int_a^b P(t)dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t)dt \right].$$

Dizemos que uma função matricial $P = [p_{ij}]$ é *contínua* em t se cada elemento p_{ij} é contínuo em t . A derivada P' se define por

$$P'(t) = [p'_{ij}(t)].$$

Valem as regras

$$(P + Q)' = P' + Q',$$

$$(PQ)' = PQ' + P'Q.$$

Vale também a regra da cadeia, se $F(t) = P(g(t))$ onde P é uma função matricial e g é uma função escalar derivável, então $F'(t) = g'(t)P'(g(t))$. Seja $A = [a_{ij}]$ uma $n \times n$ matriz de elementos reais ou complexos. Queremos definir a exponencial e^A de modo que seja satisfeita as seguintes propriedades

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}, \quad \forall s \text{ e } t. \quad (5.6)$$

$$e^0 = I \quad (5.7)$$

onde 0 e I são as matrizes, $n \times n$, nula e identidade, respectivamente. Definimos

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (5.8)$$

DEFINIÇÃO DE SÉRIE CONVERGENTE DE MATRIZES. Dada uma sucessão $\{C_k\}$ de matrizes $m \times n$ cujos elementos são números reais ou complexos, designamos o elemento ij de C_k por $c_{ij}^{(k)}$. Se todas as mn séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

são convergentes, dizemos que a série de matrizes $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ é convergente, e sua soma está definida como a matriz $m \times n$ cujo elemento ij é a série (5.9). **DEFINIÇÃO DE NORMA DE UMA MATRIZ.** Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$ de elementos reais ou complexos, a norma de A , designada por $\|A\|$, se define como o número

$$\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (5.10)$$

Teorema 4 *Sejam A e B matrizes retangulares e c um escalar real ou complexo temos*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|cA\| = |c| \|A\|.$$

Prova. Dem.: Vamos provar para $\|AB\|$, $A = [a_{ik}]_{m \times n}$, $B = [b_{kj}]_{n \times p}$. Temos $AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]_{m \times p}$. Assim

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^p |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\| = \|A\| \|B\|.$$

Observação 1 Se $B = A$ obtemos $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Por indução,

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

■

Teorema 5 Se $\{C_k\}$ é uma sucessão de matrizes $m \times n$ tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ converge, então a série de matrizes $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ também converge.

Prova. $C_k = [c_{ij}^{(k)}]$. $|c_{ij}^{(k)}| \leq \|C_k\|$. Se $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ converge então $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ converge absolutamente. Logo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ converge. ■ Pelo teorema 2 seção anterior segue que a série matricial

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{5.11}$$

converge para qualquer matriz quadrada A com elementos reais ou complexos. Pois,

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}, \quad (A^0 = I).$$

A lei de expoentes $e^A e^B = e^{B+A}$ nem sempre é válida para matrizes exponenciais. Por isso, temos o seguinte resultado importante.

Teorema 6 Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ permutáveis, $AB = BA$. Então vale a seguinte relação

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Prova. Da equação $AB = BA$ deduzimos que

$$A^2 B = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2$$

de modo que B é permutável com A^2 . Por indução B é permutável com qualquer potência de A . Escrevendo e^{tA} em série de potências encontramos que B é permutável com e^{tA} para todo t real. Defina agora a função F por

$$F(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA} e^{tB}.$$

Derivando $F(t)$ e levando em conta que B é permutável com e^{tA} encontramos

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} \\ &= (A+B)e^{t(A+B)} - (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F(t) \end{aligned}$$

Pelo teorema de unicidade temos

$$F(t) = e^{t(A+B)} F(0).$$

Mas, $F(0) = 0$, assim, $F(t) = 0$, para todo t . Logo,

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB},$$

quando $t = 1$, obtemos o resultado. ■

Exemplo 1 As matrizes sA e tA são permutáveis para todos os escalares s e t . Logo,

$$e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A}.$$

5.3 Equação diferencial

Seja t um número real, A uma matriz $n \times n$ e $E(t)$ a matriz $n \times n$ dada por

$$E(t) = e^{tA}.$$

Teorema 7 Para todo t real a função matricial $E(t) = e^{tA}$ satisfaz à equação diferencial matricial

$$E'(t) = E(t)A = AE(t).$$

Prova. Da definição da exponencial de uma matriz temos

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Designemos por $C_{ij}^{(k)}$ o elemento ij de A^k . Então o elemento ij de $t^k A^k/k!$ é $t^k C_{ij}^{(k)}/k!$. Logo

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k C_{ij}^{(k)}}{k!} \right]$$

Derive $E(t)$, obtemos

$$E'(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k t^{k-1} C_{ij}^{(k)}}{k!} \right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k C_{ij}^{(k+1)}}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!}$$

ou seja,

$$E'(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) A = E(t)A$$

Na última expressão utilizamos a propriedade $A^{K+1} = A^k A$. Posto que A é permutável com A^k poderíamos também escrever $A^{k+1} = A A^k$ para obter a relação $E'(t) = AE(t)$. ■

Teorema 8 (Não singularidade de e^{tA}). Qualquer que seja a matriz A , $n \times n$, e o escalar t temos

$$e^{tA} e^{-tA} = I.$$

Logo e^{tA} é não-singular, e sua inversa é e^{-tA} .

Prova. Seja F a função matricial definida por

$$F(t) = e^{tA} e^{-tA}.$$

Derivando F , obtemos

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{tA} (e^{-tA})' + (e^{tA})' e^{-tA} = e^{tA} (-Ae^{-tA}) + Ae^{tA} e^{-tA} \\ &= -Ae^{tA} e^{-tA} + Ae^{tA} e^{-tA} = 0 \end{aligned}$$

já que A é permutável com e^{tA} . Logo, F é uma matriz constante. Mas $F(0) = e^{0A} e^{0A} = I$, o que implica $F(t) = I$, para todo t . ■

Teorema 9 UNICIDADE. *Sejam A e B duas matrizes constantes $n \times n$ dadas. A única função matricial F , $n \times n$, que satisfaz o problema de valor inicial*

$$F'(t) = AF(t), \quad F(0) = B, \quad -\infty < t < \infty$$

é

$$F(t) = e^{tA}B.$$

Prova. Note que $e^{tA}B$ é uma solução. seja F uma solução qualquer e consideremos a função matricial

$$G(t) = e^{-tA}F(t).$$

Derivando este produto obtemos

$$G'(t) = e^{-tA}F'(t) - Ae^{-tA}F(t) = e^{-tA}AF(t) - e^{-tA}AF(t) = 0.$$

Logo, $G(t)$ é uma matriz constante,

$$G(t) = G(0) = F(0) = B,$$

ou seja, $e^{-tA}F(t) = B$. Multiplicando por e^{tA} e aplicando o teorema 4 obtemos o resultado. ■

Observação 2 *O mesmo tipo de demonstração faz ver que $F(t) = Be^{tA}$ é a única solução do problema de valor inicial*

$$F'(t) = F(t)A, \quad F(0) = B.$$

Teorema 10 *Seja A uma matriz constante $n \times n$ dada e B um vetor n -dimensional. O problema de valor inicial*

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = B,$$

tem uma única solução no intervalo $-\infty < t < \infty$, dada por

$$Y(t) = e^{tA}B.$$

Mais geralmente, a única solução do problema de valor inicial

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(a) = B$$

é $Y(t) = e^{(t-a)A}B$.

Prova. Temos que

$$Y'(t) = Ae^{tA}B = AY(t), \quad Y(0) = B.$$

Seja Z uma outra solução. Defina $F(t) = e^{-tA}Z(t)$ o que implica em $F'(t) = 0$, logo $F(t) = F(0) = Z(0) = B$, portanto, $Z(t) = e^{tA}B$. ■

5.4 O problema de calcular e^{tA}

Se A é uma matriz diagonal

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

também toda potência de A é uma matriz diagonal, pois

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Por conseguinte, neste caso, e^{tA} é uma matriz diagonal dada por

$$e^{tA} = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_n^k \right) = \text{diag} (e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Outro caso fácil de manejar é quando A é uma matriz diagonalizável. Por exemplo, se existe uma matriz não-singular C tal que $C^{-1}AC$ é uma matriz diagonal, seja $C^{-1}AC = D$, então temos $A = CDC^{-1}$, a partir da qual encontramos

$$A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1},$$

e, mais geral,

$$A^k = CD^kC^{-1}.$$

Portanto, neste caso, temos

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} CD^kC^{-1} = C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} \right) C^{-1} = Ce^{tD}C^{-1}.$$

A dificuldade, neste caso, se resume em determinar C e sua inversa.

Exemplo 2 Calcular e^{tA} para a matriz 2×2 , $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: Esta matriz tem autovalores distintos $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$, desse modo existe uma matriz não-singular $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $CAC^{-1} = D$, donde

$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Para determinar C podemos escrever $AC = CD$,
ou

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} 5a + 4c & 5b + 4d \\ a + 2c & b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a & b \\ 6c & d \end{bmatrix}$$

daí segue que

$$a = 4c \quad \text{e} \quad b = -d$$

tomando $c = d = 1$, obtemos

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= C e^{tD} C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{6t} \\ -e^t & 4e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^t & 4e^{6t} - 4e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 3 Resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2, & y_1(0) &= 2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2, & y_2(0) &= 3. \end{aligned}$$

Solução: Na forma matricial o sistema se escreve na seguinte forma

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

segundo o teorema 7 a solução é $Y(t) = e^{tA}Y(0)$. Usando a matriz do exemplo 1, encontramos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^t & 4e^{6t} - 4e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

obtemos então

$$y_1 = 4e^{6t} - 2e^t, \quad y_2 = e^{6t} + 2e^t.$$

5.4.1 Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 11 (Cayley-Hamilton). *Sejam A uma matriz $n \times n$ e*

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

seu polinômio característico. Então $f(A) = 0$. Ou seja, A satisfaz à equação

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I = 0.$$

Prova. Demonstração: Sabemos que

$$A(\text{cof } A)^t = (\det A)I$$

temos que

$$(\lambda I - A) \{ \text{cof}(\lambda I - A) \}^t = f(\lambda) I, \quad (\text{pois } f(\lambda) = \det(\lambda I - A)). \quad (5.12)$$

A idéia é ver que a equação (5.12) é válida para $\lambda = A$ também. Exceto para o número ± 1 , cada um dos cofatores é o determinante de uma matriz menor de $\lambda I - A$ de ordem $n - 1$. Portanto, cada elemento de $\text{cof}(\lambda I - A)$, e portanto, de $\{ \text{cof}(\lambda I - A) \}^t$, é um polinômio em λ de grau menor ou igual a $n - 1$. Por conseguinte

$$\{ \text{cof}(\lambda I - A) \}^t = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k,$$

onde cada coeficiente B_k é uma matriz $n \times n$ com elementos escalares. Aplicando isto em (5.12) obtemos a relação

$$(\lambda I - A) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k = f(\lambda) I$$

que se pode escrever na forma

$$\lambda^n B_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (B_{k-1} - AB_k) - AB_0 = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k C_k I + C_0 I. \quad (5.13)$$

Igualando os coeficientes de potências semelhantes de λ em (5.13) obtemos as equações

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= C_{n-1} I \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= C_1 I \\ -AB_0 &= C_0 I. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Multiplicando as equações (5.14) sucessivamente por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$ e somemos os resultados. Os termos do primeiro membro desaparecem e obtemos

$$0 = A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I$$

o que demonstra o Teorema de Cayley-Hamilton. ■

Exemplo 4 A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ tem como polinômio característico

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 6) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 20\lambda - 12.$$

O Teorema de Cayley-Hamilton estabelece que A satisfaz à equação

$$A^3 - 9A^2 + 20A - 12I = 0 \quad (5.15)$$

Daí

$$A^3 = 9A^2 - 20A + 12I$$

$$\begin{aligned} A^4 &= 9A^3 - 20A^2 + 12A = 9(9A^2 - 20A + 12I) - 20A^2 + 12A \\ &= 61A^2 - 168A + 108I \end{aligned}$$

Também podemos expressar A^{-1} como um polinômio em A . De (5.14) resulta $A(A^2 - 9A + 20I) = 12I$ e obtemos

$$A^{-1} = \frac{1}{12} (A^2 - 9A + 20I).$$

5.4.2 O método de Putzer para calcular e^{tA}

O Teorema de Cayley-Hamilton demonstra que a potência n -ésima de qualquer matriz A , $n \times n$, pode expressar-se como combinação linear das potências inferiores $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Disso resulta que todas as potências superiores A^{n+1}, A^{n+2}, \dots , também podem expressar-se como combinação linear de I, A, \dots, A^{n-1} . Portanto, na série que define e^{tA} , cada termo $\frac{t^k A^k}{k!}$ com $k \geq n$ é uma combinação linear de $t^k I, t^k A, t^k A^2, \dots, t^k A^{n-1}$. Logo, podemos escrever e^{tA} como um polinômio em A da forma

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) A^k \quad (5.16)$$

onde os coeficientes escalares $q_k(t)$ dependem de t . Putzer desenvolveu dois métodos úteis para expressar e^{tA} como um polinômio em A .

Teorema 12 *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de uma matriz A , $n \times n$, e definimos uma sucessão de polinômios em A como segue*

$$P_0(A) = I, \quad P_k(A) = \prod_{m=1}^k (A - \lambda_m I), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.17)$$

Temos então

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A), \quad (5.18)$$

onde os coeficientes escalares $r_1(t), \dots, r_n(t)$ se determinam por recorrência a partir do sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= \lambda_1 r_1(t), \quad r_1(0) = 1, \\ r_{k+1}'(t) &= \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), \quad r_{k+1}(0) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Prova. Sejam $r_1(t), \dots, r_n(t)$ as funções escalares determinadas por (5.19) e defina uma matricial F por indução

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A); \quad (5.20)$$

observe que $F(0) = r_1(0)P_0(A) = I$. Vamos demonstrar que $F(t) = e^{tA}$, provando que F satisfaz a mesma equação diferencial que e^{tA} , ou seja, $F'(t) = AF(t)$. Derivando (5.20), temos

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r'_{k+1}(t) P_k(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \{\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t)\} P_k(A),$$

onde $r_0(t)$ é por definição 0. Escrevemos esta fórmula na forma

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_{k+1}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(A)$$

somando e subtraindo o termo $\lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t) P_k(A)$ na fórmula acima obtemos

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) \{P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A)\} \quad (5.21)$$

Mas de (5.17) vemos que $P_{k+1}(A) = (A - \lambda_{k+1}I) P_k(A)$, logo

$$\begin{aligned} P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) &= (A - \lambda_{k+1}I) P_k(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I) P_k(A) \end{aligned}$$

Logo, a equação (5.21) se converte em

$$\begin{aligned} F'(t) - \lambda_n F(t) &= (A - \lambda_n I) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I) \{F(t) - r_n(t) P_{n-1}(A)\} \\ &= (A - \lambda_n I) F(t) - r_n(t) P_n(A) \end{aligned}$$

Do teorema de Cayley-Hamilton, $P_n(A) = 0$, logo a última equação se torna

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I) F(t)$$

o que resulta $F'(t) = AF(t)$. Posto que $F(0) = I$, o teorema de unicidade demonstra que $F(t) = e^{tA}$. ■

Exemplo 5 Expressar e^{tA} como combinação linear de I e de A , se A é uma matriz 2×2 com seus autovalores iguais a λ .

Solução: Pondo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, temos de resolver o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= \lambda r_1(t), & r_1(0) &= 1 \\ r_2'(t) &= \lambda r_2(t) + r_1(t), & r_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações de primeira ordem na forma sucessiva encontramos

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \quad r_2(t) = te^{\lambda t}.$$

Posto que $P_0(A) = I$ e $P_1(A) = A - \lambda I$, a fórmula pedida para e^{tA} é

$$e^{tA} = e^{\lambda t}I + te^{\lambda t}(A - \lambda I) = e^{\lambda t}(1 - \lambda t)I + te^{2t}A.$$

Exemplo 6 Resolver o exemplo 1 se os autovalores de A são λ e μ , tais que $\lambda \neq \mu$.

Solução: Neste caso,

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= \lambda r_1(t), & r_1(0) &= 1 \\ r_2'(t) &= \mu r_2(t) + r_1(t), & r_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \quad r_2(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}$$

já que $P_0(A) = I$ e $P_1(A) = A - \lambda I$ então a fórmula para e^{tA} é

$$e^{tA} = e^{\lambda t}I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}(A - \lambda I) = \frac{\lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}A. \quad (5.22)$$

Se os autovalores λ e μ são complexos, as exponenciais $e^{\lambda t}$ e $e^{\mu t}$ também serão. Mas se λ e μ são complexos conjugados as expressões que multiplicam I e A em (5.22) são reais. Por exemplo, suponha

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \mu = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

Então $\lambda - \mu = 2i\beta$. A equação (5.22) se transforma em

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{(\alpha+i\beta)t}I + \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i\beta}(A - (\alpha + i\beta)I) \\ &= e^{\alpha t} \left\{ e^{i\beta t}I + \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i\beta}(A - \alpha I - i\beta I) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \left\{ (\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)I + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}(A - \alpha I - i\beta I) \right\} \end{aligned}$$

daí chegamos a

$$e^{tA} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \{ (\beta \cos \beta t - \alpha \operatorname{sen} \beta t)I + (\operatorname{sen} \beta t)A \}.$$

5.4.3 Outros métodos para calcular e^{tA}

Teorema 13 *Se A é uma matriz $n \times n$ com todos os seus autovalores iguais a λ , então*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k.$$

Prova. Já que as matrizes λtI e $t(A - \lambda I)$ são permutáveis, temos

$$e^{tA} = e^{\lambda tI} e^{t(A-\lambda I)} = e^{\lambda tI} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k.$$

O teorema de Cayley-Hamilton implica que $(A - \lambda I)^k = 0$, para todo $k \geq n$, o que demonstra o teorema. ■

Teorema 14 *Se A é uma matriz $n \times n$ com n autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ então*

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} L_k(A)$$

onde $L_k(A)$ é um polinômio de grau $n - 1$ dado pela fórmula

$$L_k(A) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Observação 3 $L_k(A)$ são os coeficientes de Interpolação de Lagrange.

Prova. Definamos uma função matricial F pela equação

$$F(t) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} L_k(A) \tag{5.23}$$

e comprovemos que F satisfaz a equação diferencial $F'(t) = AF(t)$ e a condição inicial $F(0) = I$. De (5.23) vemos que

$$AF(t) - F'(t) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} (A - \lambda_k I) L_k(A).$$

Segundo o teorema de Cayley-Hamilton temos que $(A - \lambda_k I) L_k(A) = 0$ para cada k , de modo que F satisfaz a equação diferencial $F'(t) = AF(t)$. Vamos mostrar agora que

$$\sum_{k=1}^n L_k(A) = I.$$

De fato, defina

$$L_k(\lambda) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j},$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são n escalares distintos. a)

$$L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda_i \neq \lambda_k, \\ 1 & \text{se } \lambda_i = \lambda_k. \end{cases}$$

b) Sejam y_1, \dots, y_n , n escalares arbitrários, e seja

$$p(\lambda) = \sum_{k=1}^n y_k L_k(\lambda).$$

Então $p(\lambda)$ é o único polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$ que satisfaz as n equações

$$p(\lambda_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

■ De fato, o polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$

$$h(\lambda) = p(\lambda) - \sum y_k L_k(\lambda)$$

é tal que

$$h(\lambda_1) = \dots = h(\lambda_n) = 0$$

segue que $h(\lambda) = 0$. **Prova.** c) Como $p(\lambda) = 1$, satisfaz $p(\lambda_1) = \dots = p(\lambda_n) = 1$ segue que $\sum_{k=1}^n L_k(\lambda) = 1$, para todo λ . Daí, deduzimos que

$$\sum_{k=1}^n L_k(A) = I$$

onde I é a matriz identidade. ■

Teorema 15 *Seja A uma matriz $n \times n$ ($n \geq 3$) com dois autovalores distintos λ e μ , tais que λ tem multiplicidade $n - 1$ e μ tem multiplicidade 1. Temos então que*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + \left\{ \frac{e^{\mu t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} t^k (\mu - \lambda)^k \right\} (A - \lambda I)^{n-1}.$$

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + e^{\lambda t} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + e^{\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!} (A - \lambda I)^{n-1+r} \end{aligned}$$

Posto que

$$A - \mu I = A - \lambda I - (\mu - \lambda) I$$

então

$$(A - \lambda I)^{n-1} (A - \mu I) = (A - \lambda I)^n - (\mu - \lambda) (A - \lambda I)^{n-1}.$$

O primeiro membro é 0 em virtude do teorema de Cayley-Hamilton, desse modo

$$(A - \lambda I)^n = (\mu - \lambda) (A - \lambda I)^{n-1}$$

usando isto, temos

$$(A - \lambda I)^{n-1+r} = (\mu - \lambda)^r (A - \lambda I)^{n-1} \quad (\text{por indução})$$

segue que

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!} (\mu - \lambda)^r (A - \lambda I)^{n-1} &= \frac{1}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k (A - \lambda I)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \left\{ e^{t(\mu - \lambda)} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k \right\} (A - \lambda I)^{n-1} \end{aligned}$$

o que mostra o teorema. ■

5.4.4 Casos 3×3

Caso I. Se uma matriz A , 3×3 , tem autovalores $\lambda, \lambda, \lambda$ então

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left\{ I + t(A - \lambda I) + \frac{1}{2} t^2 (A - \lambda I)^2 \right\}.$$

Caso II. Se uma matriz A , 3×3 , tem autovalores λ, μ, ν então

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \frac{(A - \mu I)(A - \nu I)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + e^{\mu t} \frac{(A - \lambda I)(A - \nu I)}{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)} + e^{\nu t} \frac{(A - \lambda I)(A - \mu I)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}.$$

Caso III. Se uma matriz A , 3×3 , tem autovalores λ, λ, μ sendo $\lambda \neq \mu$,

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \{ I + t(A - \lambda I) \} + \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^2} - \frac{te^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)} (A - \lambda I)^2.$$

Exemplo 7 Calcular e^{tA} quando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução: Os autovalores de A são 1, 1, 2, logo, pelo caso III, temos

$$e^{tA} = e^t \{I + t(A - I)\} + (e^{2t} - e^t)(A - I)^2 - te^t(A - I)^2. \quad (5.24)$$

Daí

$$e^{tA} = (-2te^t + e^{2t})I + \{(3t + 2)e^t - 2e^{2t}\}A - \{(t + 1)e^t - e^{2t}\}A^2 \quad (5.25)$$

basta calcular $(A - I)^2$ ou A^2 e efetuar as operações indicadas em (5.24) ou (5.25) para obter

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & (3t + 2)e^t - 2e^{2t} & -(t + 1)e^t + e^{2t} \\ -2(t + 1)e^t + 2e^{2t} & (3t + 5)e^t - 4e^{2t} & -(t + 2)e^t + 2e^{2t} \\ -2(t + 2)e^t + 4e^{2t} & (3t + 8)e^t - 8e^{2t} & -(t + 4)e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

5.5 Sistemas Lineares com coeficientes constantes

Considere o problema de valor inicial não homogêneo

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(a) = B, \quad (5.26)$$

num intervalo I . Onde A é uma matriz constante $n \times n$, Q é uma função vetorial n -dimensional contínua em I , e $a \in I$. Multiplicando ambos os membros de (5.26) por e^{-tA} , obtemos

$$e^{-tA} \{Y'(t) - AY(t)\} = e^{-tA}Q(t) \quad (5.27)$$

Daí

$$\frac{d}{dt} \{e^{-tA}Y(t)\} = e^{-tA}Q(t)$$

Integrando a equação acima de a a t , temos

$$e^{-tA}Y(t) - e^{-aA}B = \int_a^t e^{-sA}Q(s)ds \quad (5.28)$$

Multiplicando por e^{tA} a igualdade acima obtemos a solução explícita

$$Y(t) = e^{(t-a)A}B + e^{tA} \int_a^t e^{-sA}Q(s)ds. \quad (5.29)$$

Teorema 16 *Seja A uma matriz constante $n \times n$ e Q uma função vetorial n -dimensional contínua num intervalo I . Então o problema de valor inicial*

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(a) = B,$$

tem uma única solução em I dada pela fórmula (5.29) acima.

Observe que o primeiro termo, $e^{(t-a)A}B$, é a solução do problema homogêneo $Y'(t) = AY(t)$, $Y(a) = B$. O segundo termo é a solução do problema não homogêneo

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(a) = 0.$$

Exemplo 8 Resolver o problema de valor inicial

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(0) = B$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: De acordo com o teorema 13 a solução vem dada por

$$Y(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} Q(s) ds = \int_0^t e^{(t-s)A} Q(s) ds.$$

Os autovalores de A são 2, 2, 4. Para calcular e^{tA} utilizamos a fórmula do caso III, obtendo

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{2t} \{I + t(A - 2I)\} + \frac{1}{4} (e^{4t} - e^{2t}) (A - 2I)^2 - \frac{1}{2} t e^{2t} (A - 2I)^2 \\ &= e^{2t} \left\{ I + t(A - 2I) + \frac{1}{4} (e^{2t} - 2t - 1) (A - 2I)^2 \right\} \end{aligned}$$

Trocando t por $(t - s)$, nesta fórmula, obtemos $e^{(t-s)A}$. Logo,

$$\begin{aligned} e^{(t-s)A} Q(s) &= e^{2(t-s)} \left\{ I + (t-s)(A - 2I) + \frac{1}{4} (e^{2(t-s)} - 2(t-s) - 1) (A - 2I)^2 \right\} Q(s) \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + (A - 2I) e^{2t} \begin{bmatrix} t-s \\ 0 \\ s(t-s) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{4} (A - 2I)^2 e^{2t} \begin{bmatrix} e^{2t} e^{-2s} - 2(s-t) - 1 \\ 0 \\ e^{2t} t e^{-2s} - 2s(t-s) - s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t , temos

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t e^{(t-s)A} Q(s) ds = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} + (A - 2I) e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ 0 \\ \frac{t^3}{6} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{4} (A - 2I)^2 e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} - t - t^2 \\ 0 \\ \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto que

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

encontramos

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{t^3}{6} \\ -\frac{t^3}{6} \\ t^2 + \frac{t^3}{6} \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}t^2 - \frac{t^3}{6} \\ -\frac{3}{8}e^{2t} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}t + \frac{3}{4}t^2 + \frac{t^3}{6} \\ \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}t^2 - \frac{t^3}{6} \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}t^2 \\ -\frac{3}{8}e^{2t} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}t + \frac{3}{4}t^2 \\ \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}t^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.6 Sistema linear geral

Considere o problema

$$Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t), \quad Y(a) = B \quad (5.30)$$

No caso $n = 1$, podemos resolver a equação (5.30) da seguinte forma: Seja $A(t) = \int_a^t P(s)ds$, desse modo, multiplicando a equação (5.30) por $e^{-A(t)}$ obtemos

$$e^{-A(t)} \{Y'(t) - P(t)Y(t)\} = e^{-A(t)}Q(t) \quad (5.31)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \{e^{-A(t)}Y(t)\} = e^{-A(t)}Q(t) \quad (5.32)$$

Daí

$$e^{-A(t)}Y(t) - e^{-A(a)}Y(a) = \int_a^t e^{-A(s)}Q(s)ds$$

segue que

$$Y(t) = e^{A(t)}e^{-A(a)}Y(a) + A(t) \int_a^t e^{-A(s)}Q(s)ds. \quad (5.33)$$

A passagem de (5.31) para (5.32) não é aplicável às funções matriciais, pois a derivada de $e^{-A(t)}$ não é, necessariamente, $-P(t)e^{-A(t)}$. Se A é uma função escalar a fórmula se $E(t) = e^{A(t)}$ então

$$E'(t) = A'(t)e^{A(t)}$$

é válida mas nem sempre é válida quando A é uma função matricial. Por exemplo, se $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ então $\frac{d}{dt} [e^{A(t)}] \neq A'(t)e^{A(t)}$. Suponhamos que multiplicamos

cada membro de (5.30) por uma matriz $F(t)$, $n \times n$, não especificada. Isto nos dá a relação

$$F(t)Y'(t) = F(t)P(t)Y(t) + F(t)Q(t)$$

Somemos agora aos dois membros $F'(t)Y(t)$. Desse modo, obtemos

$$\{F(t)Y(t)\}' = \{F'(t) + F(t)P(t)\}Y(t) + F(t)Q(t)$$

se $F'(t) + F(t)P(t) = 0$ então, temos

$$\{F(t)Y(t)\}' = F(t)Q(t)$$

Daí

$$F(t)Y(t) - F(a)Y(a) = \int_a^t F(s)Q(s)ds.$$

Se F é uma matriz não singular, então

$$Y(t) = F^{-1}(t)F(a)Y(a) + F^{-1}(t) \int_a^t F(s)Q(s)ds. \quad (5.34)$$

Se encontramos uma função matricial $F(t)$, $n \times n$, que satisfaça

$$F'(t) = -F(t)P(t)$$

e que seja não singular teremos encontrado uma generalização da fórmula escalar dada por (5.33).

Teorema 17 *Suponhamos que $A(t)$ é uma função matricial $n \times n$ contínua num intervalo aberto I . Se $a \in I$ e B é um vetor n -dimensional dado, o sistema linear homogêneo*

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(a) = B$$

tem em I uma solução Y que é um vetor n -dimensional.

Teorema 18 *Dada uma função matricial P , $n \times n$, contínua num intervalo aberto I e dado qualquer $a \in I$, existe uma função matricial F , $n \times n$, que satisfaz à equação diferencial*

$$F'(x) = -F(x)P(x) \quad (5.35)$$

em J , com valor inicial $F(a) = I$. Além disso, F é não singular para todo $x \in J$.

Prova. Seja Y_k uma solução vetorial de

$$Y_k'(x) = -P(x)^t Y_k(x)$$

em J com vetor inicial $Y_k(a) = I_k$, onde I_k é a coluna k da matriz identidade I , $n \times n$. Aqui $P(x)^t$ é a transposta de $P(x)$. Seja $G(x)$ a matriz $n \times n$ cuja coluna k é $Y_k(x)$. Então G satisfaz

$$G'(x) = -P(x)^t G(x) \quad (5.36)$$

em J , com valor inicial $G(a) = I$. Tomemos a transposta em cada membro de (5.36). Posto que a transposta do produto é o produto das transpostas na ordem invertida, temos

$$[G'(x)]^t = -G(x)^t P(x).$$

Também a derivada da transposta é a transposta da derivada. Logo, $(G')^t = (G^t)'$. Portanto, $F(x) = G(x)^t$ satisfaz a equação diferencial (5.35) com valor inicial $F(a) = I$. Vamos mostrar que F é não singular. Seja H a função matricial $n \times n$ cuja coluna k é a solução da equação diferencial

$$Y'(x) = P(x)Y(x)$$

com valor inicial $Y(a) = I_k$, a coluna k de I . Então H satisfaz o problema de valor inicial

$$H'(x) = P(x)H(x), \quad H(a) = I,$$

em J . O produto $F(x)H(x)$ tem derivada

$$F(x)H'(x) + F'(x)H(x) = F(x)P(x)H(x) - F(x)P(x)H(x) = 0, \quad \forall x \in J$$

Logo, $F(x)H(x)$ é constante, $F(x)H(x) = F(a)H(a) = I$, assim H é a inversa de F . ■

Resumimos tudo isso no seguinte teorema.

Teorema 19 *Dada uma função matricial P , $n \times n$, e uma função vetorial n -dimensional Q , ambas contínuas no intervalo aberto J , a solução do problema de valor inicial*

$$Y'(x) = P(x)Y(x) + Q(x), \quad Y(a) = B,$$

em J , vem dada por

$$Y(x) = F^{-1}(x)Y(a) + F^{-1}(x) \int_a^x F(t)Q(t)dt.$$

A matriz $F(x)$, $n \times n$, é a transposta da matriz cuja coluna k é a solução do problema de valor inicial

$$Y'(x) = -P(x)^t Y(x), \quad Y(a) = I_k$$

onde I_k , é a coluna k da matriz identidade I .

5.7 Resolução por séries de potências

Consideremos um sistema linear homogêneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \quad Y(0) = B, \quad (5.37)$$

em que a matriz A , $n \times n$, dada, tenha um desenvolvimento em série de potências de x convergente num certo intervalo aberto que contenha a origem, tal como

$$A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_kx^k + \cdots, \quad \text{para } |x| < r_1,$$

onde os coeficientes A_0, A_1, \dots são matrizes $n \times n$ dadas. Vamos considerar

$$Y(x) = B_0 + B_1x + \cdots + B_kx^k + \cdots$$

com os vetores B_0, B_1, \dots , como coeficientes. Já que $Y(0) = B_0$, a condição inicial será satisfeita com $B_0 = B$. Para encontrar os coeficientes restantes substituímos a série de potências de $Y(x)$ na equação diferencial e igualamos os coeficientes de potências semelhantes de x obtendo o seguinte sistema de equações

$$B_1 = AB_0, \quad (k+1)B_{k+1} = \sum_{r=0}^k A_r B_{k-r}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

Estas equações podem ser resolvidas na forma sucessiva com respeito aos vetores B_1, B_2, \dots . Se a série de potências de $Y(x)$ que obtermos convergir num certo intervalo $|x| < r_2$, então $Y(x)$ será uma solução do problema de valor inicial (5.37) no intervalo $|x| < r$, sendo $r = \min\{r_1, r_2\}$. Por exemplo, se $A(x)$ é uma matriz constante A , então $A_0 = A$, $A_k = 0$, $k \geq 1$, assim

$$B_1 = AB, \quad (k+1)B_{k+1} = AB_k, \quad k \geq 1$$

Daí

$$B_2 = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{A^2}{2}B$$

$$B_3 = \frac{1}{3}AB_2 = \frac{A^3}{3!}B$$

\vdots

$$B_k = \frac{A^k}{k!}B, \quad k \geq 1$$

Logo

$$Y(x) = B + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k B = e^{xA}B.$$

5.8 Método das aproximações sucessivas

Consideremos o sistema linear homogêneo qualquer

$$Y'(t) = AY(t) \quad (5.39)$$

onde A é uma função matricial $n \times n$, contínua no intervalo aberto J . O método que vamos empregar é o "método das aproximações sucessivas" que foi publicado primeiro por Liouville em 1838 com o estudo das equações diferenciais lineares de segunda ordem. Mais tarde, ele foi estendido por J. Caqué em 1864, L. Fuchs em 1870 e G. Peano em 1888 no estudo das equações lineares de ordem n . Em 1890, Émile Picard (1856-1941) estendeu o método para as equações diferenciais não lineares. O método começa tomando uma suposta solução da equação (5.39). Tomamos um vetor inicial dado B . Substituímos a suposta solução no segundo membro da equação e obtemos uma nova equação diferencial

$$Y'(t) = A(t)B \quad (5.40)$$

Já não temos função incógnita no segundo membro, desse modo podemos integrar a equação, obtendo:

$$Y_1(t) = Y_1(a) + \int_a^t A(t)B dt = B + \int_a^t A(t)B dt$$

onde usamos $Y_1(a) = B$. Trocamos agora Y por Y_1 no segundo membro da equação (5.39) obtendo

$$Y'(t) = A(t)Y_1(t)$$

Esta equação tem uma única solução Y_2 em J que satisfaz $Y_2(a) = B$,

$$Y_2(x) = B + \int_a^x A(t)Y_1(t) dt. \quad (5.41)$$

Continuando com este processo, chegamos

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A(t)Y_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

Queremos mostrar agora que $(Y_k(x))$ converge a um limite Y que é a solução do problema, com condição inicial $Y(a) = B$. **Demonstração da convergência das aproximações sucessivas** Temos que

$$Y_k(x) = Y_0(x) + \sum_{m=0}^{k-1} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\} \quad (5.43)$$

Vamos mostrar que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}$$

converge para cada x de J . Basta mostrar que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \quad (5.44)$$

converge. Considere um subintervalo J_1 de J que contenha a , J_1 fechado e limitado. Temos que

$$Y_1(x) - Y_0(x) = \int_a^x A(t)B dt$$

suponha $a < x$. Então podemos escrever

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| = \left\| \int_a^x A(t)B dt \right\| \leq \int_a^x \|A(t)\| \|B\| dt \quad (5.45)$$

Como $A(t)$ é contínua em J , então $A(t)$ é limitado em J_1 . Por conseguinte $\|A(t)\| \leq M$, ($M = \sup_{t \in J_1} \|A(t)\|$) em J_1 . Logo, o integrando de (5.45) está limitado por $\|B\| M$, desse modo,

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| \leq \int_a^x \|B\| M dt = M \|B\| (x - a), \quad \forall x > a \text{ em } J_1.$$

Fazendo o mesmo para $Y_2 - Y_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|Y_2(x) - Y_1(x)\| &= \left\| \int_a^x A(t) \{Y_1(t) - Y_0(t)\} dt \right\| \leq \int_a^x \|A(t)\| \|B\| M (t - a) dt \\ &\leq \|B\| M^2 \int_a^x (t - a) dt = \|B\| \frac{M^2 (x - a)^2}{2!}, \quad \forall x > a \text{ em } J_1. \end{aligned}$$

Por indução

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \|B\| \frac{M^{m+1} (x - a)^{m+1}}{(m + 1)!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

e para todo $x > a$ em J_1 . Se $x < a$, utilizamos o mesmo raciocínio com $|x - a|$ em lugar de $(x - a)$. Se L é o comprimento do intervalo J_1 , temos $|x - a| \leq L$, $\forall x \in J_1$, desse modo

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \|B\| \frac{M^{m+1} L^{m+1}}{(m + 1)!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{ para todo } x \in J_1$$

Como a série $\sum_{m=0}^{\infty} \|B\| \frac{M^{m+1} L^{m+1}}{(m+1)!}$ é convergente segue que a série (5.44) converge uniformemente em J_1 , pois é majorada por uma série convergente. Com isso concluímos que a sucessão das aproximações sucessivas sempre converge e, em J_1 , a convergência é uniforme. Seja Y a função limite. Isto é, definimos Y para cada $x \in J_1$ por

$$Y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(x)$$

Propriedades de Y : a) Y é contínua em J_1 ; b) $Y(x) = B + \int_a^x A(t)Y(t)dt$, para todo $x \in J_1$; c) $Y(a) = B$, $Y'(x) = A(x)Y(x)$, para todo $x \in J_1$. Demonstração de a). Cada Y_k é uma matriz coluna cujos elementos são funções escalares, contínuas em J_1 . Cada elemento de Y é limite de uma sucessão uniformemente convergente de funções contínuas, desse modo, cada elemento de Y é contínua em J_1 . Logo Y é contínua em J_1 . Demonstração de b). A fórmula de recorrência (5.42) estabelece que

$$Y_{k+1} = B + \int_a^x A(t)Y_k(t)dt$$

Logo,

$$\begin{aligned} Y(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(x) = B + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x A(t)Y_k(t)dt \\ &= B + \int_a^x A(t) \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(t)dt \\ &= B + \int_a^x A(t)Y(t)dt. \end{aligned}$$

Demonstração de c). A equação $Y(a) = B$ resulta de (b), devido a (a), o integrando de (b) é contínuo em J_1 , portanto, em virtude do teorema fundamental do cálculo, $Y'(x)$ existe e é igual a $A(t)Y(t)$ em J_1 . O intervalo J_1 é um subintervalo qualquer de J fechado e limitado e que contém a . Se J_1 se amplia, o processo de se obter $Y(x)$ não varia pois só inclui a integração de a a x . Já que para todo x , existe uma solução no intervalo J .

Teorema 20 (*Teorema de Unicidade para Sistemas Lineares Homogêneos*). Se $A(t)$ é contínua no intervalo aberto J , a equação diferencial

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

tem uma única solução em J que satisfaz uma condição inicial $Y(a) = B$.

Prova. Sejam Z e Y duas soluções em J . Seja J_1 qualquer subintervalo de J limitado e fechado que contenha a . Demonstraremos que $Z(x) = Y(x)$, para todo $x \in J_1$. Isto implica $Z = Y$ em todo intervalo J . Já que Z e Y são soluções então temos

$$Z'(t) = Y'(t) = A(t)(Z(t) - Y(t))$$

seja $x \in J_1$ e integremos de a a x , obtemos

$$Z(x) - Y(x) = \int_a^x A(t) \{Z(t) - Y(t)\} dt$$

o que implica

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M \left| \int_a^x \|Z(t) - Y(t)\| dt \right| \quad (5.46)$$

Seja M_1 uma cota superior para a função $\|Z(t) - Y(t)\|$ em J_1 . Então de (5.46) temos

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq MM_1 |x - a| \quad (5.47)$$

aplicando (5.47) no segundo membro de (5.46) obtemos

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M^2 M_1 \left| \int_a^x |t - a| dt \right| = M^2 M_1 \frac{|x - a|^2}{2}$$

por indução

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M^m M_1 \frac{|x - a|^m}{m!} \quad (5.48)$$

quando $m \rightarrow \infty$ o segundo membro de (5.48) tende a 0, assim $Z(x) = Y(x)$. ■

5.9 Aproximações sucessivas para sistemas não lineares

Consideremos um sistema não linear de 1^a ordem

$$Y'(t) = F(t, Y), \quad (5.49)$$

onde F é uma função matricial vetorial n-dimensional dada, e Y é uma função vetorial n-dimensional que devemos determinar. Queremos uma solução Y que satisfaça a equação (5.49) para cada $t \in J$ e que satisfaça uma condição inicial dada, por exemplo $Y(a) = B$, onde $a \in J$ e B é um vetor n-dimensional dado. Como no caso linear, construímos uma sucessão de aproximações sucessivas Y_0, Y_1, \dots , tomando $Y_0 = B$ e definindo Y_{k+1} em função de Y_k mediante a fórmula de recorrência

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x F(t, Y_k(t)) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.50)$$

Impondo certas condições a F , esta sucessão convergirá para uma função limite Y que satisfaça a equação diferencial e a condição inicial.

Exemplo 9 Consideremos o problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2$, com $y = 0$ em $x = 0$. Calculemos algumas aproximações da solução. Seja $Y_0(x) = 0$ e determinemos as três seguintes aproximações:

$$Y_1(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

$$Y_2(x) = \int_0^x [t^2 + Y_1(t)^2] dt = \int_0^x \left[t^2 + \frac{t^6}{9} \right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$Y_3(x) = \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right)^2 \right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Vemos agora o trabalho necessário para calcular mais aproximações. Por exemplo, as duas aproximações seguintes Y_4 e Y_5 serão polinômios de graus 31 e 63, respectivamente.

Exemplo 10 Consideremos o problema de valor inicial, $y' = 2x + e^y$, com $y = 0$ quando $x = 0$. Começamos com $Y_0(x) = 0$ e encontramos

$$Y_1(x) = \int_0^x (2t + 1) dt = x^2 + x,$$

$$Y_2(x) = \int_0^x (2t + e^{t^2+t}) dt = x^2 + \int_0^x e^{t^2+t} dt$$

Aqui não se pode ir adiante pelo fato que a última integral não pode ser calculada como expressão de funções elementares.

No caso não linear, esse método é eficiente para estabelecer teoremas de existência. Considere

$$Y' = F(t, Y)$$

seja J um intervalo aberto no qual desejamos uma solução. Suponhamos $a \in J$ e B é um vetor n -dimensional dado. Designamos por S um conjunto no espaço de dimensão $n + 1$ dado por

$$S = \{(x, y) \text{ tal que } |x - a| \leq h, \|Y - B\| \leq k\}$$

onde $h > 0$ e $k > 0$. [Se $n = 1$, S é um retângulo com centro em (a, B) , com base $2h$ e altura $2k$]. Suponhamos que o domínio de F inclui um domínio desse tipo e que F é limitada em S , seja

$$\|F(x, Y)\| \leq M \tag{5.51}$$

para todo ponto (x, Y) de S , onde M é uma constante positiva. Suponha que a função composta $G(x) = F(x, Y(x))$ é contínua no intervalo $(a - h, a + h)$, para toda função Y que seja contínua em nesse intervalo e que tenha a propriedade que $(x, Y(x)) \in S$ para todo x no intervalo. (Essa hipótese assegura a existência das integrais que aparecem no método das aproximações sucessivas, assim como, a continuidade das funções assim construídas). Finalmente, suponhamos que F é Lipschitziana em relação a Y , isto é,

$$\|F(x, Y) - F(x, Z)\| \leq A \|Y - Z\|$$

para todo (x, Y) e (x, Z) de S , A constante positiva.

Teorema 21 *Suponhamos que F satisfaz a limitação, a continuidade e as condições de Lipschitz acima citadas, no conjunto S . Seja I o intervalo aberto $(a - c, a + c)$, onde $c = \min \{h, k/M\}$. Existe então uma única solução Y definida em I , sendo $Y(a) = B$, tal que $(x, Y(x)) \in S$ e*

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \quad \forall x \in I.$$

Prova. Seja $Y_0(x) = B$ e definamos as funções vetoriais Y_1, Y_2, \dots em I mediante a fórmula de recorrência

$$Y_{m+1}(x) = B + \int_a^x F(t, Y_m(t)) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.52)$$

Para que a fórmula (5.52) tenha sentido necessitamos saber se $(x, Y_m(x)) \in S$ para todo $x \in I$. Por indução, quando $m = 0$, temos $(x, Y_0(x)) = (x, B)$ que está em S . Suponhamos $(x, Y_m(x)) \in S$ para um m e cada $x \in I$. Utilizando (5.51) e (5.52) obtemos

$$\|Y_{m+1}(x) - B\| \leq \left| \int_a^x \|F(t, Y_m(t))\| dt \right| \leq M \left| \int_a^x dt \right| \leq M|x - a|$$

Posto que $|x - a| \leq c$, $\forall x \in I$, então

$$\|Y_{m+1}(x) - B\| \leq Mc \leq k$$

o qual demonstra que $(x, Y_{m+1}(x)) \in S$, para todo $x \in I$. A convergência da sucessão $\{Y_m(x)\}$ se estabelece como na seção anterior. Escrevemos

$$Y_k(x) = Y_0(x) + \sum_{m=0}^{k-1} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}$$

e demonstremos que $Y_k(x)$ tem um limite quando $k \rightarrow \infty$, provando que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\|$$

converge em I . Isto se deduz da desigualdade

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \frac{MA^m |x - a|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{MA^m c^{m+1}}{(m+1)!}$$

que se demonstra por indução usando a fórmula de recorrência e a condição de Lipschitz. Definimos então a função limite

$$Y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(x), \quad \text{para todo } x \in I$$

e comprovamos que satisfaz à equação integral

$$Y(x) = B + \int_a^x F(t, Y(t)) dt.$$

■

Capítulo 6

Sistemas Autônomos

Este capítulo pertence à teoria qualitativa das equações diferenciais. Aqui, não estamos interessados na obtenção de expressões exatas para as soluções dos problemas. A ênfase é, antes em se obter propriedades das soluções, retirando-as através de uma análise das equações.

Propomo-nos estudar neste capítulo problemas na forma:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ está definida num aberto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$.

As soluções desta equação são aplicações diferenciáveis $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$ tais que

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais da equação diferencial do problema (6.1).

Para melhor compreender esses problemas é importante ver o significado geométrico da equação diferencial. Ela admite a seguinte interpretação geométrica: x é uma curva integral de $x' = f(x)$ se, e somente se, seu vetor velocidade $x'(t)$ em t coincide com o valor do campo f em $x(t)$.

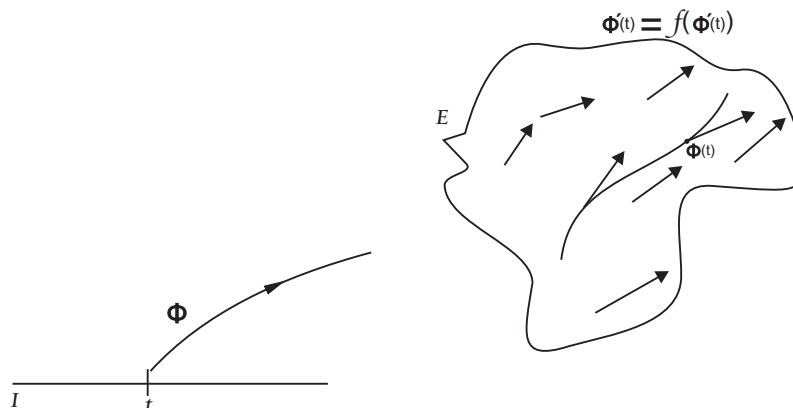


figura 9.1

6.1 Trajetórias e o Fluxo

Como vimos no Capítulo 3, a hipótese de f ser de classe C^1 garante que o PVI (6.1) possui uma única solução.

Se conhecemos uma solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ qualquer da equação $x' = f(x)$, definida em algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, então também podemos determinar soluções com qualquer condição inicial temporal em \mathbb{R} e qualquer condição espacial na imagem da solução x . Mais precisamente, se $t_1 \in \mathbb{R}$ e $x_1 = x(t_1)$ para algum $t_1 \in I$, então

$$\bar{x}(t) = x(t - t_1 + t_1)$$

define um caminho derivável no intervalo trasladado

$$J = I - t_1 + t_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid t - t_1 + t_1 \in I\}$$

tal que $\bar{x}(t_1) = x_1$ e $\bar{x}'(t) = x'(t - t_1 + t_1) = f(x(t - t_1 + t_1)) = f(\bar{x}(t))$ para cada $t \in J$. Observe que a solução original x e a trasladada \bar{x} percorrem a mesma imagem no aberto E , ou seja, os trajetos percorridos pelas duas soluções são iguais.

Esta propriedade de translação ou de invariância de soluções é característica das equações autônomas e nos permite estudar todas as soluções de (6.1) tomando sempre a mesma condição inicial temporal t_0 . Em geral tomamos $t_0 = 0$. Pelo visto acima, o conjunto de todas as soluções do PVI

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

em E coincide com o conjunto de todas as possíveis soluções de $x' = f(x)$.

Note que duas soluções distintas de uma mesma equação

$$x' = f(x) \tag{6.2}$$

não podem se cruzar transversalmente num mesmo ponto $p \in E$, pois então teríamos duas velocidades vetoriais distintas neste ponto, enquanto que ambas devem ter a mesma velocidade $f(p)$.

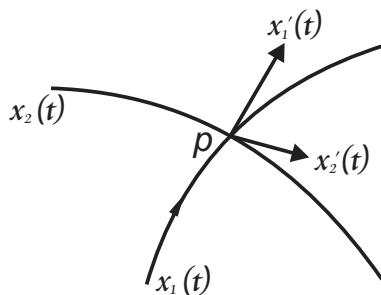


figura 9.2

Tampouco pode existir um ponto $p \in E$ no qual duas soluções x_1 e x_2 de (6.2) são tangentes, por contrariar a unicidade das soluções com a mesma condição inicial $x_0 = p$. De fato, se $x_1(t_1) = p = x_2(t_2)$, basta transladar $x_2(t)$, definindo

$$\bar{x}_2(t) = x_2(t + t_2 - t_1),$$

para obter duas soluções x_1 e \bar{x}_2 da mesma equação com mesma condição inicial $x(t_1) = p$. Da mesma forma, não pode acontecer que duas soluções iguais num certo intervalo de tempo acabem bifurcando e tomem caminhos distintos, pois no último ponto comum voltamos a ter a situação da tangência que acabamos de examinar.

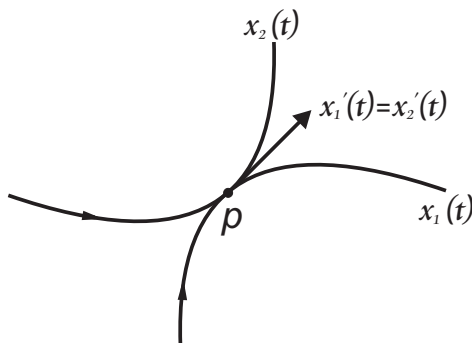


figura 9.3

Definição 16 Dizemos que I é um intervalo máximo da solução de (6.2) por x_0 se dada qualquer solução $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ de (6.2), temos $J \subseteq I$.

Estamos interessados em saber quando a solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ da equação (6.2) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 5, se mostrarmos que $\|x(t)\|$ fica limitada, então a solução da equação diferencial (6.2) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, caso contrário, não estará definida globalmente.

Exemplo 24 Dado o campo $f(x) = x^2$ em \mathbb{R} , verificamos que $x(t) = (1 - t)^{-1}$ é a única solução de $x' = f(x)$ com $x(0) = 1$. Neste caso, $I = (-\infty, 1)$. Note que $|x(t)|$ fica ilimitado quando $t \rightarrow 1$.

Definição 17 Dizemos que o fluxo no tempo t associado ao campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ é a aplicação

$$\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^N$$

definida da seguinte maneira: dado $x \in E$, tomamos a solução máxima $x : I \rightarrow E$ de $x' = f(x)$ com $x(0) = x$ e então definimos

$$\phi_t(x) = x(t).$$

Assim, enquanto a trajetória $x(\cdot)$ descreve a posição da solução em função da variável temporal t para $x = x(0)$ fixado, o fluxo $\phi_t(\cdot)$ no tempo t , por outro lado, exerce um papel inverso: fixado t , descreve a posição das soluções em função da condição inicial x , ou seja, diz onde se encontram as trajetórias depois de passado o tempo t .

O fluxo no tempo t possui as seguintes propriedades:

(i) $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ é contínua;

(ii) $\phi_0(x) = x$;

A propriedade (i) é justificada a partir da dependência contínua das condições iniciais. Já (ii), é imediato da definição de fluxo no tempo t .

Definição 18 *Juntando todos os fluxos nos tempos t , obtemos o fluxo do campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$, que é aplicação*

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

onde $\Omega = \mathbb{R} \times E \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$, é definida por

$$\phi(t, x) = \phi_t(x)$$

para cada $t \in I$.

Assim, a derivada parcial temporal do fluxo satisfaz a equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)) \quad (6.3)$$

para cada t no intervalo máximo I . Para ver isto, basta tomar a solução $x(t)$ de $x' = f(x)$ com $x(0) = x$ e derivar $\phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t)$ parcialmente em relação a t para obter

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = x'(t) = f(x(t)) = f(\phi_t(x)) = f(\phi(t, x)).$$

Deste modo, o fluxo $\phi(t, x)$ de um campo nos dá uma informação global de todas as trajetórias do campo.

A seguir, mostraremos uma propriedade muito importante de fluxo.

Proposição 3 *Se $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ é o fluxo de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 então*

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x) \quad (6.4)$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ tais que $s, t + s \in I$.

Proposição 2 *Consideremos o seguinte PVI:*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \phi(s, x). \end{cases} \quad (6.5)$$

Afirmação: $x_1(t) = \phi(t, \phi(s, x))$ é solução do PVI (6.5). De fato, como foi mostrado anteriormente $x_1(t)$ satisfaz a equação do PVI (6.5) e a condição inicial é

obviamente satisfeita. Por outro lado, $x_2(t) = \phi(t + s, x)$ também é solução do PVI (6.5). De fato, usando a definição de fluxo, temos

$$\phi(t + s, x) = \phi_{t+s}(x) = x(t + s),$$

derivando $x_2(t)$ parcialmente em relação a t , obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t + s, x) = x'(t + s) = f(x(t + s)) = f(\phi(t + s, x)).$$

Logo, $x_2(t)$ também é solução do PVI (6.5).

No entanto, temos a hipótese de que o campo f é de classe C^1 , então, pelo Teorema de Existência e Unicidade, a solução do PVI (6.5) é única e, portanto, $x_1(t) = x_2(t)$.

6.2 Pontos de Equilíbrio ou Singularidades

Para o entendimento da dinâmica de um campo de vetores destacamos dois tipos especiais de trajetórias de campos quaisquer: as singularidades e as trajetórias periódicas. Começamos aqui com as singularidades.

Definição 19 Dizemos que $x_0 \in E$ é uma singularidade ou um ponto de equilíbrio do campo f se $f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^N$. Dizemos que uma singularidade x_0 é isolada se é a única singularidade do campo em toda uma vizinhança. Pontos que não são singulares costumam ser denominados regulares.

Dizemos que uma singularidade x_0 é isolada se é a única singularidade do campo em toda uma vizinhança. Pontos que não são singulares costumam ser denominados regulares.

Exemplo 25 Para os sistemas de equações diferenciais lineares $x' = Ax$, a origem $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^N$ é sempre um ponto singular, pois $A0 = 0$ para toda matriz A .

Se x_0 é uma singularidade de f , então o caminho constante dado por $x(t) = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é a única solução de $x' = f(x)$ com $x(0) = x_0$. Segue-se que um ponto x_0 de equilíbrio de f pode ser caracterizado como um ponto tal que $\phi_t(x_0) = x_0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, de modo que muitas vezes também dizemos que um ponto de equilíbrio do campo é um ponto fixo do campo.

A análise dos pontos de equilíbrio de uma equação diferencial é muitas vezes extremamente importante para ajudar no entendimento global do comportamento das trajetórias no espaço de fase.

Definição 20 Dizemos que uma trajetória $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ de (6.2) com $x(0) = x_0$ é periódica se $f(x_0) \neq 0$ e existe um valor $t_1 > 0$ tal que $x(t_1) = x(0) = x_0$ e o período T é o menor de tais possíveis valores $t_1 > 0$. Também dizemos, neste caso, que x_0 é um ponto periódico do campo f .

Note que, por definição, um ponto equilíbrio não é um ponto periódico. Uma trajetória periódica pode ser caracterizada pela existência de um ponto $x_0 \in E$ tal que $\phi_t(x_0) = x_0$ para algum $t = T > 0$, mas não para $0 < t < T$.

A seguir vamos estender os conceitos de estabilidade, introduzidos na seção 2.6 para sistemas autônomos no plano.

Definição 21 Um ponto de equilíbrio $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ é estável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para qualquer órbita $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ com

$$\|x(t) - x_0\| < \delta$$

tenhamos

$$\|x(t) - x_0\| < \epsilon, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 22 Um ponto de equilíbrio x_0 é assintoticamente estável se ele for estável e se existir um $\eta > 0$ tal que toda órbita $x(t)$ com

$$\|x(0) - x_0\| < \eta$$

então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0. \tag{6.6}$$

Essa definição simplesmente diz que órbitas “começando perto” de x_0 permanecem perto, e de fato convergem para o ponto de equilíbrio.

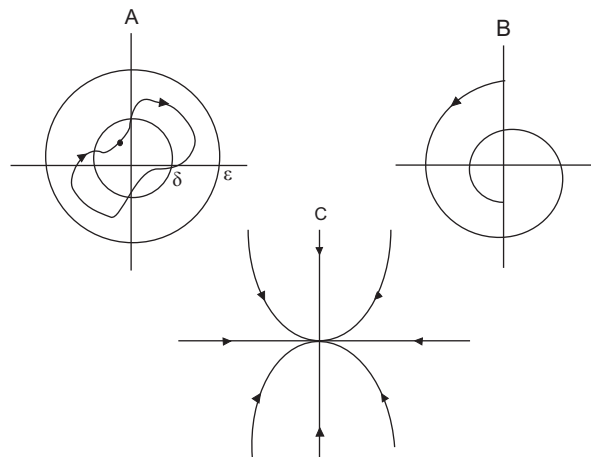


figura 9.4

As figuras B e C apresentam pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; já o exemplo A mostra um ponto de equilíbrio somente estável.

Na definição de singularidade assintoticamente estável, grifamos a palavra estável para enfatizar que a condição (6.6), uma característica desse tipo de singularidade, não é suficiente para caracterizá-la.

Vamos agora supor que a origem $(0, 0)$ é uma singularidade isolada do sistema:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (6.7)$$

e façamos um estudo da geometria das órbitas em sua vizinhança. O caso de uma singularidade $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ pode ser reduzido ao caso de singularidade na origem mediante a mudança variáveis $(x, y) \rightarrow (x - x_0, y - y_0)$. Pela fórmula de Taylor, f e g podem ser escritas como

$$\begin{cases} f(x, y) = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + F(x, y) \\ g(x, y) = g_x(0, 0)x + g_y(0, 0)y + G(x, y) \end{cases}, \quad (6.8)$$

onde F e G são $o(|x| + |y|)$; a notação "o" significa o seguinte: $h(s) = o(s)$ se $h(s)/|s| \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$. As expressões em (6.8) nos sugerem que o comportamento das órbitas nas vizinhanças da singularidade $(0, 0)$ deve ser determinado pela parte linear do campo (f, g) . Como veremos mais adiante isso é "quase" verdade. Portanto, comecemos com o estudo de um sistema linear com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (6.9)$$

6.2.1 O Sistema Linear

Suponhamos que a origem seja uma singularidade isolada do sistema (6.9), ou, equivalentemente, $ad - bc \neq 0$. Para facilitar nossas explicações, vamos introduzir o vetor X e a matriz A :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e assim (6.9) se escreve da forma

$$X' = AX. \quad (6.10)$$

O sistema (6.10) lembra a equação diferencial $x' = ax$, estudada no Capítulo 2, cuja solução geral foi

$$x(t) = ce^{at}$$

Ocorre, então, a idéia de tentar soluções de (6.9) ou (6.10) na forma

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}, \text{ ou equivalentemente, } X(t) = Ce^{\lambda t}. \quad (6.11)$$

Substituindo-se em (6.9), obtemos que c_1, c_2 e λ devem satisfazer ao sistema

$$\begin{cases} (a - \lambda)c_1 + bc_2 = 0 \\ cc_1 + (d - \lambda)c_2 = 0 \end{cases}. \quad (6.12)$$

Como estamos interessados em soluções não triviais (c_1, c_2) , segue-se que o determinante do sistema (6.12) deve ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (6.13)$$

As raízes dessa equação do 2º grau são os valores próprios da matriz A . O polinômio em (6.13) é chamado de polinômio característico. Assim, obtidos os autovalores de A , voltamos ao sistema (6.12), de onde obteremos c_1 e c_2 e poderemos então escrever as soluções de (6.9) na forma (6.11). Entretanto, como nosso interesse central é obter uma descrição pictórica das órbitas nas vizinhanças do ponto singular $(0, 0)$, vamos reduzir o estudo de (6.9) àquele de um sistema equivalente, mais simples. A Álgebra Linear nos ensina que, através de uma mudança de variáveis no plano (x, y) a matriz A pode ser levada a um dos tipos abaixo, dependendo do sinal do discriminante

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc.$$

Sendo assim, temos quatro casos a tratarmos:

(i) $\Delta > 0$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

onde $\lambda \neq \mu$ são dois autovalores de A supostos reais.

(ii) $\Delta = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é o único autovalor da A .

(iii) $\Delta = 0$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

λ como em (ii).

(iv) $\Delta < 0$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onde $\alpha \pm i\beta$ são autovalores de A .

O que quer dizer com A ser levada a B mediante uma mudança de variável é o seguinte: existe uma matriz não singular Q (a matriz mudança de variáveis) tal que $B = QAQ^{-1}$. Concluimos, pois, que a curva $Y(t) = QX(t)$ é tal que

$$Y' = QX' = QAX = QAQ^{-1}Y = BY,$$

e conseqüentemente, basta estudar o sistema (6.9) com a matriz de um dos quatro tipos acima. Isso porque, após obter as órbitas nesses casos, pode-se voltar às variáveis originais $X = Q^{-1}Y$ e o que acontece no plano de fases é apenas uma distorsão das órbitas; distorsão significa rotação em torno da origem, reflexão em torno de uma reta passando pela origem, expansão ou compressão ao longo de dois eixos.

Agora iremos analisar cada caso separadamente.

Caso (i). O sistema (6.9) se torna

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\mu t} \end{cases} .$$

Basta estudar as órbitas no 1º quadrante (nos demais quadrantes, as órbitas são obtidas por simetria); portanto para $c_1, c_2 > 0$, obtemos:

$$c_1^{-\mu} x^\mu = c_2^{-\lambda} y^\lambda \implies y = c x^{\mu/\lambda}, \quad x > 0.$$

Daí, sem se preocupar com a orientação, no momento, vemos que a curva solução tem o aspecto indocado nas figuras abaixo

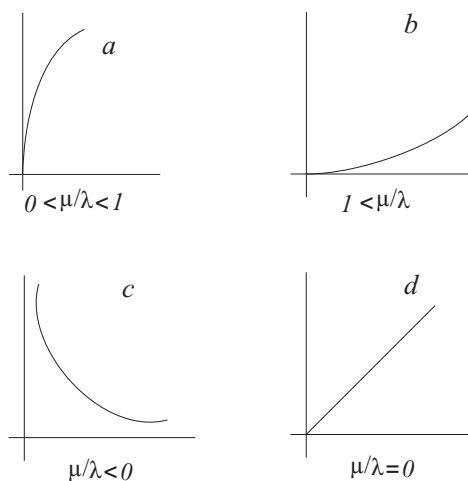


figura 9.5

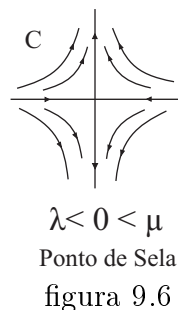
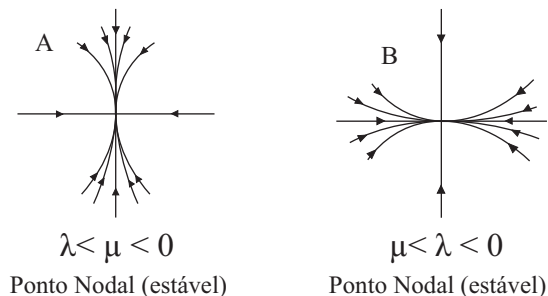
Observe que os casos extremos $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$ dão os semi-eixos como órbitas. Observe que nos casos *a* e *b*, as órbitas, entram na origem ao longo de uma direção fixa: quando $0 < \mu/\lambda < 1$ as inclinações das tangentes à órbita, $y'/x' \rightarrow +\infty$, e quando $\mu/\lambda > 1$ essas inclinações, $y'/x' \rightarrow 0$.

Consegue-se a orientação das curvas pela análise das soluções na forma paramétrica. Assim:

1. se $\lambda, \mu < 0$, as curvas em *a* e *b* tendem para a origem quando $t \rightarrow +\infty$, e aí dizemos que a origem é um *atrator*;

2. se $\lambda, \mu > 0$, as curvas em a e b se afastam da origem quando $t \rightarrow +\infty$, neste caso dizemos que a origem é um *repulsor*;
3. se $\lambda < 0$ e $\mu > 0$, teremos que a origem é um ponto de sela.

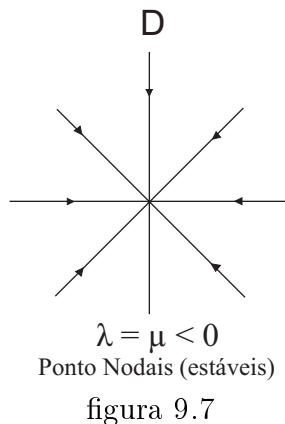
Pondo todas essas observações, juntas, obtemos as configurações A, B e C abaixo. Usa-se também a expressão nó para designar um ponto nodal.



Caso (ii). O sistema (6.9) se torna

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases} \implies y = cx$$

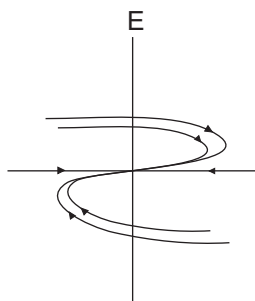
e assim as curvas soluções são semi-retas como em d na figura D, e o espaço de configurações é como o da figura D, abaixo.



Caso (iii). O sistema (6.9) se torna

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

Logo, os semi-eixos $x > 0$ e $x < 0$ são curvas soluções, correspondentes a $c_2 = 0$ e com orientação dependendo do sinal de λ . Basta considerar o caso $c_2 > 0$. o outro se seguindo por simetria. Suponhamos que $\lambda < 0$. Vemos que para t grande e positivo, $x(t) > 0$, e $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$; além disso, a curva corta o eixo y quando $t = -c_1/c_2$, e $x(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$. Neste caso, todas as órbitas entram na origem ao longo de uma determinação determinada; de fato, $y'/x' = \lambda c_2 / (\lambda c_1 + \lambda c_2 t + c_2) \rightarrow 0$. Assim, obtemos a configuração em E abaixo



$\lambda = \mu < 0$
Ponto Nodais (estáveis)

figura 9.8

Caso (iv) O sistema (6.9) se torna

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y. \end{cases}$$

Neste caso, é preferível usar coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Daí,

$$x' = r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta, \quad y' = r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta$$

de onde se segue

$$r' = x' \cos \theta + y' \sin \theta, \quad \theta' = r^{-1}(y' \cos \theta - x' \sin \theta).$$

As últimas equações nos dão

$$r' = \alpha r \quad \theta' = \beta$$

e daí

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0,$$

que são as equações paramétricas em coordenadas polares da órbita que, para $t = 0$, passa pelo ponto (r_0, θ_0) . Portanto, a órbita é:

- Um círculo, se $\alpha = 0$;
- Uma espiral logarítmica se $\alpha \neq 0$; e a origem é um atrator se $\alpha < 0$. Além disso, a espiral é dextrógira se $\beta < 0$ e sinistrógira se $\beta > 0$.

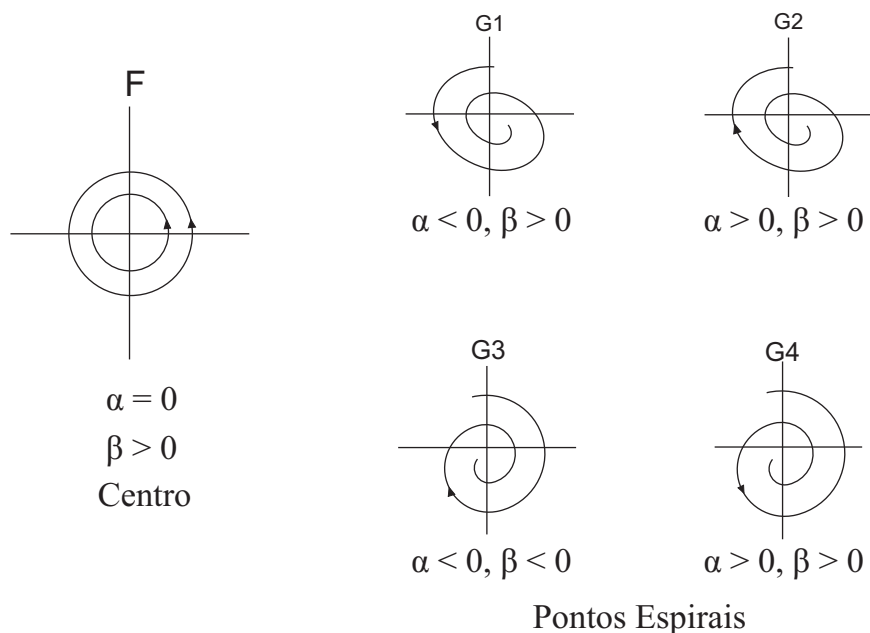


figura 9.9

Observação 4 Um retorno às variáveis (x, y) do sistema (6.9) implica apenas uma distorção das figuras acima. Nas figuras A, B, C, as órbitas entram na singularidade ao longo de duas direções ortogonais; nas figuras correspondentes ao sistema original haverá duas direções não necessariamente ortogonais ao longo das quais as órbitas entrarão na singularidade. Na figura E continuará a haver uma direção, não necessariamente um eixo coordenado, ao longo da qual as órbitas entram na origem. Na figura F os círculos serão transformados em elipses.

Podemos, pois, resumir no quadro abaixo as várias possibilidades dependendo do discriminante

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc$$

e dos valores relativos de a, b, c e d :

| Δ | $ad - bc$ | $a+d$ | Tipo de Singularidade |
|----------|-----------|-------|------------------------|
| > 0 | < 0 | | sela |
| > 0 | > 0 | < 0 | nó estável |
| > 0 | > 0 | > 0 | nó instável |
| < 0 | | $= 0$ | centro |
| < 0 | | < 0 | ponto espiral estável |
| < 0 | | > 0 | ponto espiral instável |
| $= 0$ | | < 0 | nó estável |
| $= 0$ | | > 0 | nó instável |

6.2.2 O Sistema Não Linear

Pelas hipóteses feitas acima, as funções f e g podem ser escritas na forma (6.8), com F e G contínuas e $o(|x| + |y|)$. Chamando $a = f_x(0, 0)$, $b = f_y(0, 0)$, $c = g_x(0, 0)$ e $d = g_y(0, 0)$, o sistema (6.7) se descreve como

$$\begin{cases} x' = ax + by + F(x, y) \\ y' = cx + dy + G(x, y) \end{cases} \quad (6.14)$$

Podemos, portanto, olhar o sistema (6.14) como uma perturbação não linear do sistema (6.9). A origem $(0, 0)$ é uma singularidade de (6.14) e, se supusermos $ad - bc \neq 0$, tratar-se-á de uma singularidade isolada e, neste caso, dizemos que a origem é um *ponto singular simples*; caso $ad - bc = 0$, então, a natureza da singularidade depende fortemente da parte não linear. Nas nossas considerações suporemos sempre que a origem é um ponto singular simples. Como dissemos acima, é de se esperar que a parte linear do sistema (6.14), isto é, o sistema (6.9), descreva a geometria das órbitas na vizinhança da origem; entretanto isso é aproximadamente verdade. De fato, todos os fatos ou propriedades do sistema (6.9) que dependem das desigualdades entre a, b, c e d permanecerão inalteradas, como podemos verificar no quadro acima. Aquelas que são caracterizadas por igualdades podem mudar. Mais precisamente, temos os resultados abaixo.

- (i) Se a origem for um atrator para o sistema (6.9), então também será para o sistema não linear (6.14).
- (ii) Se a origem for um ponto espiral para o sistema linear (6.9), então também o será para o sistema não linear (6.14).
- (iii) Se a origem for um ponto de sela para o sistema linear (6.9), então também o será para o sistema não linear (6.14).
- (iv) Se a origem for um ponto nodal dos tipos A, B para o sistema linear (6.9), então também a origem é ainda um ponto nodal para o sistema não linear (6.14).
- (v) Se a origem for um centro para o sistema linear (6.9), então, a origem pode ser um centro ou um ponto espiral para o sistema (6.14).
- (vi) Se a origem for um ponto nodal do tipo D, então a origem pode ser um nó ou um ponto espiral para o sistema (6.14).

Vamos ilustrar (v) e (vi) com os exemplos a seguir.

Exemplo 26 *Consideremos o sistema:*

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{y}{\ln(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ y' = -y + \frac{x}{\ln(x^2 + y^2)^{1/2}}, \end{cases} \quad (6.15)$$

o qual pode ser escrito, em coordenadas polares, como

$$\begin{cases} \theta' = \frac{1}{\ln r} \\ r' = -r. \end{cases}$$

Logo $r(t) = ce^{-t}$, onde $c > 0$ é uma constante arbitrária, e daí

$$\theta' = \frac{1}{\ln c - t} \Rightarrow \theta(t) = k - \ln(t - \ln c),$$

onde $k = \theta(t_0) + \ln(t_0 - \ln c)$. Isso mostra que a origem é um ponto espiral para (6.15), cuja parte linear tem a origem como um ponto nodal.

Exemplo 27 Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases} \quad (6.16)$$

o qual pode ser escrito, em coordenadas polares, como

$$\begin{cases} \theta' = 1 \\ r' = -r^2. \end{cases} \quad (6.17)$$

Logo $\theta(t) = t + \theta_0$ e $r(t) = \left(t + \frac{1}{r_0}\right)^{-1}$ são as equações polares paramétricas da solução do sistema que, no instante $t = 0$, passa pelo ponto (r_0, θ_0) . Essa curva é uma espiral, e assim a origem é um ponto espiral para o sistema (6.16). Observe que a origem, para o sistema linear correspondente a (6.16), é um centro.

6.3 Retrato de Fase

Daqui em diante, a menos de menção explícita em contrário, supomos sempre que

- (i) $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um campo de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^N$;
- (ii) Todas as soluções de $x' = f(x)$ tem intervalo máximo $I = \mathbb{R}$.

Definição 23 Dizemos que a curva definida pela imagem $\{x(t) \mid t \in I\} \subseteq E$ da trajetória de $x' = f(x)$ com $x(0) = x_0$ é a órbita de f por x_0 . A qual é orientada no sentido do tempo crescente.

Pelo que foi visto, uma mesma órbita é definível por uma infinidade de soluções, bastando lembrar da invariância por translação das soluções de $x' = f(x)$: cada solução fornece uma maneira de parametrizar o mesmo conjunto, que é a órbita.

Por continuidade das soluções, cada órbita é um conjunto conexo, ou seja, sem interrupções, e também sem auto-interseção. Pela existência e unicidade decorre, em particular, que por cada ponto de E passa uma única órbita do campo f e já sabemos que as órbitas não podem se cruzar. Isto diz que o domínio aberto E do campo f é totalmente particionado em órbitas do campo e, por isso, nos referimos ao domínio E do campo como o espaço de fase do campo.

Dois tipos importantes de órbitas no retrato de fase de um campo são as parametrizadas por trajetórias singulares e por trajetórias periódicas.

Definição 24 *A órbita de uma singularidade consiste de um único ponto, a singularidade, e podemos dizer que é uma órbita singular. Já a órbita descrita por uma trajetória periódica é uma órbita periódica.*

Para finalizarmos esta seção apresentaremos um conceito de conjugação entre dois campos de vetores, o qual é de fundamental importância na teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias, pois mantém as propriedades dinâmicas dos dois campos.

Sejam $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $f_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ dois campos de vetores com fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2 , respectivamente, e sejam $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ dois pontos dados.

Definição 25 *Dizemos que o campo f_1 em x_1 , ou então que o fluxo ϕ_t^1 em x_1 é localmente topologicamente conjugado ao campo f_2 ou ao fluxo ϕ_t^2 em x_2 se existem vizinhanças U_1 de x_1 em E_1 e U_2 de x_2 em E_2 e um difeomorfismo $g : U_1 \rightarrow U_2$ tal que $g(x_1) = x_2$ e*

$$\phi^2(t, g(x)) = g(\phi^1(t, x))$$

para qualquer $x \in U_1$ e cada $t \in \mathbb{R}$ tais que $\phi^1(t, x) \in U_1$.

6.4 Fluxo Tubular

Nesta seção iremos obter um modelo para o comportamento de qualquer campo na vizinhança de pontos regulares, ou seja, que não são singularidades. Antes disto, apresentaremos algumas definições.

Definição 26 *Uma integral primeira da equação diferencial $x' = f(x)$ de primeira ordem associada a um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido num aberto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ é uma função diferenciável $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ que não é constante em aberto algum de E mas que deve ser tal que*

$$(V \circ x)'(t) = 0$$

para qualquer solução $x = x(t)$ de $x' = f(x)$.

Em particular, cada solução da equação permanece confinada a uma única superfície de nível

$$V_\alpha = \{x \in E \mid V(x) = \alpha\}$$

da integral primeira V . Note que o conceito de integral primeira leva em conta não apenas o campo f mas também o domínio E do campo.

Definição 27 Uma equação diferencial $x' = f(x)$ de primeira ordem associada a um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido em um aberto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ é dita integrável se existe um número suficiente de integrais primeiras, a ponto de permitir identificar as curvas definidas pelas soluções da equação.

Note que o conceito de integrabilidade, assim como o de integral primeira, leva em conta não apenas o campo f mas também o domínio E do campo.

Exemplo 28 A equação diferencial

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 \\ x'_2 = x_1 \\ x'_3 = 0 \end{cases}$$

em \mathbb{R}^3 é integrável, pois $V_1(x_1, x_2, x_3) = x_3$ e $V_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ são duas integrais primeiras do sistema que permitem identificar as curvas definidas pelas soluções da equação diferencial: as órbitas então sempre simultaneamente dentro de planos $x_3 = cte$ e de cilindros $x_1^2 + x_2^2 = cte$, ou seja, são cilindros horizontais no \mathbb{R}^3 .

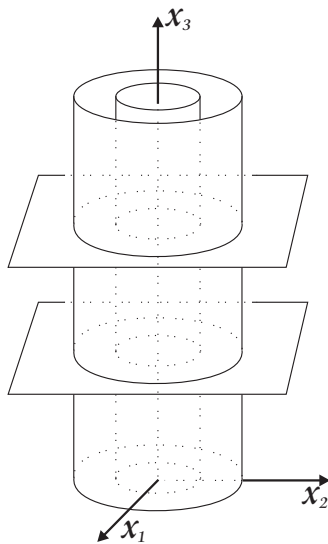


figura 9.10

Em geral, em \mathbb{R}^N , são necessárias $n - 1$ integrais primeiras $V_i(x)$ linearmente independentes para que as $n - 1$ superfícies $V_i = cte$, cada uma de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}^N , determinem a curva em \mathbb{R}^N . Esta afirmação segue da Forma Local das Submersões.

Como modelo de equação na vizinhança de um ponto que não é de equilíbrio, apresentamos agora o mais simples de todos os exemplos de equações diferenciais.

Exemplo 29 Consideremos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = \bar{f}(y) \\ y(0) = (y_1, y_2, \dots, y_N), \end{cases} \quad (6.18)$$

onde $\bar{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é dado por $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_N) = (1, 0, \dots, 0)$. A solução do PVI (6.18) é $y(t) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_N)$. Logo, o fluxo de \bar{f} é dado por

$$\psi_t(y_1, y_2, \dots, y_N) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_N)$$

A equação $y' = \bar{f}(y)$ é integrável, pois as projeções $P_i(y_1, y_2, \dots, y_N) = y_i$, com $i \in \{2, \dots, N\}$, são $n - 1$ integrais primeiras que permitem identificar as trajetórias do sistemas.

Dizemos que o fluxo do campo constante \bar{f} é laminar ou tubular, pois todas as trajetórias que estão no hiperplano afim $y_1 = c$ estarão no hiperplano afim $y_1 = c + t$ após decorrido o tempo t . No caso tridimensional, o retrato de fase do fluxo laminar \bar{f} é descrito pela figura.

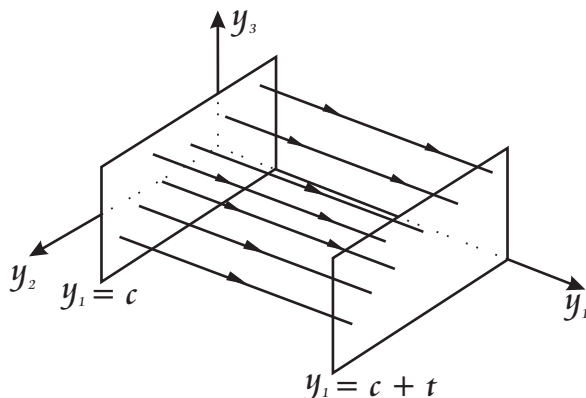


figura 9.11

Em geral, dado um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ dizemos que o ponto $x_0 \in E$ tem a propriedade de fluxo tubular se existem uma vizinhança $U \subseteq E$ de x_0 , denominada uma vizinhança tubular de x_0 , uma constante $r > 0$, um aberto $W \subset \mathbb{R}^{N-1}$ e um difeomorfismo $g : U \rightarrow (-r, r) \times W$ que conjuga o fluxo ϕ_t de f em U com o fluxo ψ_t do campo constante $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_N) = (1, 0, \dots, 0)$ em $(-r, r) \times W$, ou seja, vale

$$\psi(t, g(x)) = g(\phi(t, x))$$

para qualquer $x \in U$ e cada $|t| < r$. Em outras palavras, o ponto x_0 tem a propriedade de fluxo tubular se o campo de vetores f , na vizinhança de x_0 , é dado por \bar{f} , a menos da mudança de coordenadas g . Note que na vizinhança tubular U não pode haver singularidades do campo.

Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ em campo de vetores e $x_0 \in E$ um ponto regular de f .

Definição 28 Dizemos que um hiperplano H contendo x_0 é uma seção transversal de f por x_0 se o vetor $f(x_0)$, colocado no ponto x_0 , não está em H . Mais precisamente, o hiperplano H é um espaço afim $H = x_0 + V$, onde V é um subespaço linear de dimensão $n - 1$; H é uma seção transversal de $f(x_0) \notin V$.

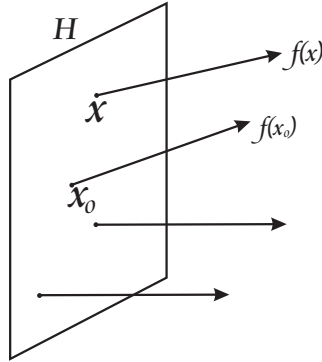


figura 9.12

Por continuidade do campo de vetores, para cada $x \in H$ próximo de x_0 , o vetor $f(x) \notin H$. No entanto, isto ocorre apenas localmente, isto é, para x próximo de x_0 .

O próximo Teorema diz que, localmente em torno de um ponto regular, todo campo se comporta como o campo constante \bar{f} do Exemplo 29.

Teorema 12 (Teorema do Fluxo Tubular) *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ um campo de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Se $x_0 \in E$ é um ponto regular, então x_0 tem a propriedade de fluxo tubular.*

Prova. Por hipótese temos $f(x_0) \neq 0 \in \mathbb{R}^N$ e portanto podemos tomar uma seção transversal H de f em x_0 ; basta escolher $H = x_0 + V$, onde $V = [f(x_0)]^\perp$ é o subespaço vetorial de \mathbb{R}^N perpendicular a $f(x_0)$. Antes de mais nada, fazemos uma mudança de coordenadas para simplificar a notação. Transladando tudo por $-x_0$, podemos supor que $x_0 = 0 \in E$ e com um movimento linear rígido podemos fazer com que H seja o subespaço linear $[e_1]^\perp \cong \mathbb{R}^{N-1}$ vertical.

Isto significa que podemos supor que $x_0 = 0 \in E$ e $f(0) = \alpha e_1 = (\alpha, 0, \dots, 0)$, com $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ e que $\{(0, x_2, \dots, x_N) \mid x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}\} = [e_1]^\perp = H$ é uma seção transversal de f por $x_0 = 0 \in E$. Estamos buscando uma mudança local de coordenadas $g(x) = y$ que coloque f na forma tubular. Resolvemos o problema da seguinte maneira.

Pela continuidade do campo f , escolhemos um pequeno aberto $W \subseteq H$ contendo 0 tal que $\bar{W} \subseteq H \cap E$ e, para cada $y \in W$, vale $f(y) \notin H$. (Como estamos identificando H com \mathbb{R}^{N-1} , podemos falar em abertos contidos em H ; observe que também temos $(-\epsilon, \epsilon) \times W \subseteq E$ para $\epsilon > 0$ pequeno).

Considere a aplicação $h : (-r, r) \times W \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$h(t, (0, x_2, \dots, x_N)) = \phi(t, (0, x_2, \dots, x_N)) = \phi_t(0, x_2, \dots, x_N),$$

onde $r > 0$ é pequeno. Assim, h é simplesmente o fluxo de f restrito a uma vizinhança da seção transversal e portanto é de classe C^1 . Usando (6.3), obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, 0) = f(\phi(0, 0)) = f(0) = \alpha e_1.$$

Como $h(0, (0, x_2, \dots, x_N)) = (0, x_2, \dots, x_N)$, temos $\frac{\partial h}{\partial x_i}(0, 0) = 1$, para cada $2 \leq i \leq n$. Isto significa que a matriz jacobiana $Dh(0, 0) = \text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$ tem determinante $\alpha \neq 0$ e portanto é invertível. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, h é localmente invertível em 0; sem perda de generalidade, podemos supor que $\epsilon > 0$ e que o aberto $W_0 \subseteq W \subseteq H \cap E$ são tais que $h|_{(-\epsilon, \epsilon) \times W}$ é um difeomorfismo sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^N$; seja $g : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ o difeomorfismo inverso.

Resta mostrar que, em U , g conjugua o campo f com o campo laminar constante $\psi \equiv e_1$, ou seja, que $\psi_t \circ g = g \circ \phi_t$ em U , para cada $|t| < \epsilon$.

Fixando $x \in U$, sejam $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\tilde{c} = (0, c_1, \dots, c_N) \in W_0$ tais que $x = h(t_0, \tilde{c}) = \phi(t_0, \tilde{c})$. Então $g(x) = g(h(t_0, \tilde{c})) = (t_0, \tilde{c})$ e, dado $t \in \mathbb{R}$, se $t + t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$, segue

$$\phi_t(x) = \phi_t(\phi(t_0, \tilde{c})) = \phi(t + t_0, \tilde{c}) = h(t + t_0, \tilde{c})$$

e portanto

$$(g \circ \phi_t)(x) = g(\phi_t(x)) = g(h(t + t_0, \tilde{c})) = (t + t_0, \tilde{c}) = \psi_t(t_0, \tilde{c}) = \psi_t(g(x)) = (\psi_t \circ g)(x),$$

demonstrando o Teorema. ■

Capítulo 7

Estabilidade em EDO

7.1 Estabilidade para Sistemas de EDO

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{7.1}$$

onde $x = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^\tau$ e $f(t, x) = [f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)]^\tau$. Dizemos que um ponto x_0 é um *valor de equilíbrio* de (7.1) se, e somente se, $f(t, x_0) \equiv 0$.

Exemplo 1 *Achar o valor de equilíbrio do sistema de equações diferenciais*

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1^3 + x_2 \tag{7.2}$$

Solução : Seja $x_0 = (x_1^0, x_2^0)^\tau$ um valor de equilíbrio, então devemos ter: $1 - x_2^0 = 0$ e $(x_1^0)^3 + x_2^0 = 0$. Isto implica que $x_2^0 = 1$ e $x_1^0 = -1$. Temos que $(-1, 1)^\tau$ é o único valor de equilíbrio desse sistema. Nosso interesse consiste em determinar as seguintes propriedades das soluções de (7.1).

1. Existem valores de equilíbrio $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ para os quais $x(t) \equiv x_0$ é uma solução de (7.1)? Vimos pela definição de valor de equilíbrio que se $x(t) \equiv x_0$, então x satisfaz (7.1).
2. Seja $\phi(t)$ uma solução de (7.1). Suponha que $\psi(t)$ é uma segunda solução com $\psi(0)$ muito próxima de $\phi(0)$; ou seja, $\psi_j(0)$ muito próxima de $\phi_j(0)$, $j = 1, \dots, n$. Será que $\psi(t)$ permanece próxima a $\phi(t)$ para todo tempo $t > 0$, ou $\psi(t)$ diverge de $\phi(t)$ quando t vai para o infinito? Esta questão se refere ao problema de *estabilidade* (e é o que estamos interessados em estudar). E este é o problema fundamental na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias.

3. O que acontece às soluções $x(t)$ de (7.1) quando t se aproxima do infinito? Todas as soluções se aproximam dos valores de equilíbrio? Se elas não se aproximam de valores de equilíbrio ao menos se aproximam de uma solução periódica?

No caso de estabilidade vamos trabalhar com a função f em (7.1), dependendo unicamente de x , tais equações diferenciais são chamadas *autônomas*.

7.2 Estabilidade de Sistemas Lineares

Seja $x = \phi(t)$ uma solução da equação diferencial

$$x' = f(x) \tag{7.3}$$

estamos interessados em determinar quando $\phi(t)$ é estável ou instável. Começemos com a definição formal de estabilidade.

Definição 1 *A solução $x = \phi(t)$ de (7.3) é **estável** se cada solução $\psi(t)$ de (7.3) a qual está suficientemente próxima a $\phi(t)$ em $t = 0$ deve permanecer próxima a $\phi(t)$ para todo tempo $t \geq 0$. A solução $\phi(t)$ é **instável** se existe ao menos uma solução $\psi(t)$ de (7.3) que começa próxima a $\phi(t)$ em $t = 0$, mas não fica próxima a $\phi(t)$ para todo tempo $t > 0$. Mais precisamente, a solução $\phi(t)$ é estável se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$|\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |\psi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, n \tag{7.4}$$

para toda solução $\psi(t)$ de (7.3).

A estabilidade pode ser completamente resolvida para cada solução da equação diferencial linear

$$x' = Ax \tag{7.5}$$

Para ver isto, temos o seguinte resultado.

Teorema 13 • *Cada solução $x = \phi(t)$ de (7.5) é estável se todos os autovalores de A tem parte real negativa.*

- *Cada solução $x = \phi(t)$ de (7.5) é instável se ao menos um autovalor de A tem parte real positiva.*
- *Suponha que todos os autovalores de A tem parte real ≤ 0 e $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_l = i\sigma_l$ tem parte real zero. Seja $\lambda_j = i\sigma_j$ com multiplicidade k_j . Isto significa que o polinômio característico de A poder ser fatorado na forma*

$$p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} q(\lambda)$$

onde todas as raízes de $q(\lambda)$ tem parte real negativa. Então toda solução $x = \phi(t)$ de (7.5) é estável se A tem k_j autovetores linearmente independentes para cada autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$. De outro modo, cada solução $\phi(t)$ é instável.

Nosso primeiro passo antes de provar o teorema 13 é mostrar que cada solução $\phi(t)$ é estável se a solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ é estável, e cada solução $\phi(t)$ é instável se $x(t) \equiv 0$ é instável. Para isto, seja $\psi(t)$ qualquer solução da equação (7.5). Observe que $z(t) = \phi(t) - \psi(t)$ é também uma solução de (7.5). Além disso, se a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ é estável, então $z(t) = \phi(t) - \psi(t)$ permanecerá sempre pequena se $z(0) = \phi(0) - \psi(0)$ é suficientemente pequeno. Consequentemente, cada solução $\phi(t)$ de (7.5) é estável. Por outro lado, suponha que $x(t) = 0$ é instável. Então existe uma solução $x = h(t)$ a qual é muito pequena inicialmente, mas torna-se grande quanto $t \rightarrow \infty$. A função $\psi(t) = \phi(t) + h(t)$ é claramente uma solução de (7.5). Mais ainda, $\psi(t)$ está próxima a $\phi(t)$ inicialmente, mas diverge de $\phi(t)$ quando t cresce. Deduz-se que cada solução $x = \phi(t)$ de (7.5) é instável. Nosso próximo passo é estabelecer o conceito de comprimento ou magnitude de um vetor. Isto nos ajudará se tivermos de provar que n quantidade $\psi_j(t)$ $j = 1, \dots, n$ são pequenas, basta mostrar para uma única quantidade.

Definição 2 *Seja $x = (x_1, \dots, x_n)^\tau$ um vetor com n componentes. Os números x_1, \dots, x_n podem ser reais ou complexos. Definimos o comprimento de x , e denotamos por $\|x\|$ como*

$$\|x\| = \max |x_1|, \dots, |x_n|.$$

Prova do teorema 13. a) Cada solução $x = \psi(t)$ de $x' = Ax$ é da forma $\psi(t) = e^{At}\psi(0)$. Seja $\phi_{ij}(t)$ o ij -ésimo elemento da matriz e^{At} , e seja $\psi_1^0, \dots, \psi_n^0$ as componentes de $\psi(0)$. Então a i -ésima componente de $\psi(t)$ é

$$\psi_i(t) = \phi_{i1}(t)\psi_1^0 + \dots + \phi_{in}(t)\psi_n^0 = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}\psi_j^0$$

Suponha que todos os autovetores de A tem parte real negativa. Seja $-\alpha_i$ a maior das partes reais do autovalor de A . É simples mostrar que para cada número $-\alpha$, com $-\alpha_1 < -\alpha < 0$, podemos achar um número k tal que $|\phi_{ij}(t)| \leq ke^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. Consequentemente

$$|\psi(t)| \leq \sum_{j=1}^n ke^{-\alpha t} |\psi_j^0| = ke^{-\alpha t} \sum_{j=1}^n |\psi_j^0|$$

para algumas constantes positivas k e α . Agora, $|\psi_j^0| \leq \|\psi(0)\|$, tem-se

$$\|\psi(t)\| \leq \max |\psi_1|, \dots, |\psi_n(t)| \leq nke^{-\alpha t} \|\psi(0)\|$$

Seja $\epsilon > 0$ escolhamos $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{nk}$. Então

$$\|\psi(t)\| < \epsilon \text{ se } \|\psi(0)\| < \delta(\epsilon) \text{ e } t \geq 0.$$

Consequentemente, a solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ é estável. b) Seja λ um autovalor de A com parte real positiva e seja v um autovetor de A associado a λ . Então ,

$\psi(t) = ce^{\lambda t}v$ é uma solução de $x' = Ax$ para qualquer constante c . Se λ é real então v também é real e

$$\|\psi(t)\| = |c|e^{\lambda t}\|v\|.$$

Claramente, $\|\psi(t)\|$ se aproxima do infinito quando $t \rightarrow \infty$, para qualquer escolha de $c \neq 0$. Portanto, $x \equiv 0$ é instável. Se $\lambda = \alpha + i\beta$ é complexo, então $v = v_1 + iv_2$ é também complexo. Neste caso,

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t}(v_1 + iv_2) &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i\text{sen}\beta t)(v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha t}[(v_1 \cos \beta t - v_2 \text{sen}\beta t) + i(v_1 \text{sen}\beta t + v_2 \cos \beta t)] \end{aligned}$$

é uma solução de (7.5) a valores complexos. Além disso,

$$\psi_1(t) = e^{\alpha t}(v_1 \cos \beta t - v_2 \text{sen}\beta t)$$

é uma solução de (7.5) a valores reais, para qualquer constante c . Claramente, $\|\psi_1(t)\|$ é não limitada quando $t \rightarrow \infty$, se c , v_1 e v_2 são diferentes de zero. Portanto, $x(t) \equiv 0$ é instável. c) Se A tem k_j autovetores linearmente independentes para cada autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$ de multiplicidade k_j , então podemos achar uma constante k tal que $|(e^{At})_{ij}| < k$. Portanto, $\|\psi(t)\| \leq nk\|\psi(0)\|$ para cada solução $\psi(t)$ de (7.5). Segue de (a) que $x(t) \equiv 0$ é estável. Por outro lado, se A tem menos que k_j autovetores linearmente independentes com autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$, então $x' = Ax$ tem soluções $\psi(t)$ da forma

$$\psi(t) = ce^{i\sigma_j t}[v + t(A - i\sigma_j I)v]$$

onde $(A - i\sigma_j I)v \neq 0$. Se $\sigma_j = 0$, então $\psi(t) = c(v + tAv)$ é valor real. Portanto, $\|\psi(t)\|$ é não limitada quando $t \rightarrow \infty$, para todo $c \neq 0$. Similarmente, as partes reais e imaginárias de $\psi(t)$ são não limitadas, no caso em que $\sigma_j \neq 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Portanto, tem-se $x(t) \equiv 0$ é instável. (cqtd)

Definição 3 Uma solução $x = \psi(t)$ de (7.3) é assintoticamente estável se ela é estável e, se toda solução $\psi(t)$ que está próxima de $\phi(t)$ se aproxima mais ainda de $\phi(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. (ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t) - \phi(t)\| = 0$.)

Observação 5 A estabilidade assintótica de qualquer solução $x = \phi(t)$ de (7.5) é equivalente à estabilidade assintótica da solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$.

Eis alguns exemplos

Exemplo 2 Mostre que cada solução da equação diferencial

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x$$

é estável, mas não assintoticamente estável.

Solução : O polinômio característico da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6$$

Portanto os autovalores de A são $\lambda = \pm\sqrt{6}i$. Portanto, pela parte (c) do teorema 13, cada solução $x = \psi(t)$ de $x' = Ax$ é estável. Contudo, nenhuma solução é assintoticamente estável. Isto segue do fato que a solução geral de $x' = Ax$ é

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{6}\text{sen}\sqrt{6}t \\ 2\cos\sqrt{6}t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos\sqrt{6}t \\ 2\text{sen}\sqrt{6}t \end{pmatrix}$$

Temos que, cada solução $x(t)$ é periódica, com período $\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$ e nenhuma solução $x(t)$ (exceto $x(t) \equiv 0$) aproxima-se de 0 quando $t \rightarrow \infty$.

7.3 Estabilidade para sistemas não lineares

7.3.1 Sistemas quase lineares

Na seção anterior tratamos da equação $x' = Ax$. Consideremos agora a equação diferencial não linear

$$x' = Ax + g(t, x) \quad (7.6)$$

onde $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_n(t, x))^T$ é muito pequena comparada a x e $g(t, 0) = 0$. Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(t, x)}{\|x\|} = 0. \quad (7.7)$$

Teorema 14 *Consideremos o sistema quase-linear*

$$x' = Ax + g(t, x) \quad (t, x) \in \Omega_b \quad (7.8)$$

onde $\Omega_b = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \|x\| < b\}$, A é um operador linear em \mathbb{R}^n cujos autovalores tem parte real negativa, g é contínua e $g(t, x) = o(\|x\|)$ uniformemente em t . Suponhamos ainda que o sistema tenha solução única em todo ponto. Então a solução nula é assintoticamente estável.

Demonstração : Existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que $\|e^{tA}\| \leq ke^{-t\mu}$, $\forall t \geq 0$. Ainda mais existe $\delta_1 > 0$ para o qual $\|x\| < \delta_1$ implica que $\|g(t, x)\| \leq \frac{\mu}{2k}\|x\|$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $\|x\| < \delta = \frac{\delta_1}{k}$, seja $\varphi(t)$ a solução de (7.8) em Ω_{δ_1} , com $\varphi(0) = x$ e intervalo maximal $(w, w+)$. Sabemos que

$$\varphi(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s, \varphi(s))ds$$

para todo $t \in (w, w_+)$. Como $\|\varphi(0)\| < \delta$, isto implica, para $t \geq 0$, que

$$\varphi(t) \leq ke^{-\mu t}\|x\| + k \int_0^t e^{-\mu(t-s)}\|g(s, \varphi(s))\|ds$$

donde

$$e^{\mu t}\|\varphi(t)\| \leq k\|x\| + \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{\mu s}\|\varphi(s)\|ds$$

pela desigualdade de Gronwall, obtemos

$$e^{\mu t}\|\varphi(t)\| \leq k\|x\|e^{(\mu/2)t}, \quad t \geq 0$$

Portanto,

$$\|\varphi(t)\| \leq k\|x\|e^{-(\mu/2)t} \leq \delta_1 e^{-(\mu/2)t}, \quad t \geq 0.$$

Afirmção : $w_+ = \infty$. se não teríamos

$$\delta_1 = \lim_{t \rightarrow w_+} \|\varphi(t)\| \leq \delta_1 e^{-(\mu/2)w_+} < \delta_1 \quad (\text{absurdo!})$$

Portanto, $w_+ = \infty$, e da desigualdade

$$\|\varphi(t)\| \leq \delta_1 e^{-(\mu/2)t}, \quad t \geq 0 \quad \text{se } \|\varphi(0)\| < \delta$$

segue que a solução nula é assintoticamente estável.

Corolário 1 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de*

$$x' = f(x), \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aberto}, \quad (7.9)$$

e suponhamos que $Df(x_0)$ tem todos os autovalores com parte real negativa. Então existem vizinhanças U de x_0 e constante $k > 0$ e $\nu > 0$ tais que para todo $x \in U$, a solução $\varphi(t)$ de (5) tal que $\varphi(0) = x$ está definida em U para todo $t \geq 0$, e $\|\varphi(t) - x_0\| \leq ke^{-\nu t}\|x - x_0\|$, $\forall t \geq 0$. Em particular, x_0 é assintoticamente estável.

Demonstração : Considere $x = x_0 + z$ e expanda f em torno de x_0 . Desse modo,

$$f(x_0 + z) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_n(z), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R_n(z)}{\|z\|} = 0$$

daí

$$z' = Az + R_n(z).$$

7.3.2 Critério de Liapunov

Consideremos um sistema autônomo

$$x' = f(x) \quad (7.10)$$

$f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 , $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. A solução de (7.10) passando por $x \in A$ será indicada por $\varphi_x(t)$, com $\varphi_x(0) = x$. Seja $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Ponhamos, para cada $x \in A$, $V'(x) = DV_x \cdot f(x)$, ou seja, $V'(x) = \frac{d}{dt}V(\varphi_x(t))|_{t=0}$.

Definição 4 *Seja x_0 um ponto singular de (7.10). Uma função de Liapunov para x_0 é uma função $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável definida em um aberto U , com $x_0 \in U$, satisfazendo às seguintes condições :*

(a) $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0 \quad \forall x \neq x_0$;

(b) $\dot{V} \leq 0$ em U .

A função de Liapunov V diz-se estrita quando

(c) $\dot{V} < 0$ em $U - x_0$.

Nota: Seja A um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ em A é uma aplicação $X : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x) \quad (7.11)$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow A$ (I intervalo da reta) tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)) \quad (7.12)$$

para todo $t \in I$, são chamadas *trajetórias* ou *curvas integrais* de X ou da equação diferencial (7.11). Um ponto $x \in A$ é dito *ponto singular* de X se $X(x) = 0$ e *ponto regular* de X se $X(x) \neq 0$. Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow A$ de X chama-se *máxima* se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow A$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$ então $I = J$ e consequentemente $\varphi = \psi$. Neste caso, I chama-se *intervalo máximo*.

Observação 6 *Ponto singular é o valor de equilíbrio de (7.11).*

O critério de Liapunov para o sistema (7.10) é:

Teorema 15 *Seja x_0 um ponto singular de (7.10). Se existe uma função de Liapunov para x_0 , então x_0 é estável. Se a função for estrita, então x_0 é assintoticamente estável.*

Prova: Seja $\delta > 0$. Afirmação : Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $V^{-1}((-\infty, c]) \subseteq B_\delta(x_0)$. Prova da afirmação : Suponha $V^{-1}((-\infty, \frac{1}{n}]) \not\subseteq B_\delta(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \leq V(x_n) \leq \frac{1}{n}$, $x_n \in \mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)$ então

$$\left. \begin{array}{l} x_{n_j} \rightarrow x, \quad x \in \mathbb{R}^n - B_\delta(x_0) \\ V(x) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} V(x_{n_j}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq x_0, \quad V(x) = 0 \text{ (contradição)}$$

$V^{-1}((-\infty, c))$ é aberto e $x_0 \in V^{-1}((-\infty, c))$ Tome $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subseteq V^{-1}((-\infty, c))$. Se $x : (a, b) \rightarrow U$ é solução com $x(0) \in B_\epsilon(x_0)$ então $x(t) \in B_\delta(x_0)$, $\forall t > 0$? Sim. Pois $(a, b) \ni t \rightarrow V(x(t)) \in \mathbb{R}$ e,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0$$

Logo,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq c, \quad \forall t \geq 0$$

como $V(x(0)) \in B_\epsilon(x_0) \subseteq V^{-1}((-\infty, c))$ então

$$V(x(t)) \leq c, \quad \forall t \Rightarrow x(t) \in V^{-1}((-\infty, c)) \subseteq B_\delta(x_0), \quad \forall t.$$

Isto prova que x_0 é estável. Suponha agora que

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle < 0 \quad (7.13)$$

temos pelo que acabamos de provar que x_0 é estável e seja $c > 0$ e $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_0) \subseteq V^{-1}((-\infty, c))$ seja $x : (a, +\infty) \rightarrow U$ com $x(0) \in B_\rho(x_0)$ solução de $\dot{x} = f(x)$. Por (7.13) $V(x(t))$ é decrescente.

Afirmção : $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$.

De fato, suponha $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a > 0$ então deve existir $\delta > 0$ tal que $\delta < \|x(t)\| \leq \rho$. Considere o $\max \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle < 0$ chame este máximo de $\alpha (= \inf -\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \geq 0$ em $\delta \leq \|x(t)\| \leq \rho$) então

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq \alpha$$

temos que $V(x(t)) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a$ Assim

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \frac{d}{ds}V(x(s))ds \leq V(x(0)) + \alpha t, \quad \alpha < 0$$

contradição quando $t \rightarrow +\infty$. ($V(x(t)) \rightarrow -\infty$ absurdo). Suponha que existe $t_r \rightarrow +\infty$, $r > 0$ tal que $\rho \geq \|x(t_r) - x_0\| \geq r$. Logo, $V(x(t)) \geq \min_{\rho \geq \|x-x_0\| \geq r} V(x) > 0$. (compacto) Assim, $0 = \lim_{t_r \rightarrow \infty} V(x(t_r)) \geq \min_{\|x-x_0\| \geq r} V(x) > 0$ (contradição). Portanto, $\lim_{t_r \rightarrow \infty} \|x(t_r) - x_0\| = 0$.

Temos o seguinte resultado que nos garante sobre a instabilidade de um ponto de equilíbrio.

Teorema 22 *Seja E uma função real de classe C^1 em A e suponha que*

(i) $E(0) = 0$;

(ii) $\nabla E \cdot F > 0$ em A e;

(iii) para todo $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in A$ com $\|x_0\| < \epsilon$ e $E(x_0) > 0$. Então a origem é instável para o sistema

$$X' = F(X), \quad F(0) = 0.$$

7.4 Construção de funções de Liapunov

Encontrar ou construir funções de Liapunov de um determinado sistema, na maioria dos casos, não é uma tarefa fácil. Mas em muitas situações podemos tentar encontrar funções que se enquadrem dentro das condições de Liapunov, e desse modo, podemos estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema. Vamos começar a nossa tarefa estabelecendo o seguinte teorema que nos dará condições de encontrar funções de Liapunov, para muitos sistemas de equações diferenciais de 1ª ordem no caso bidimensional.

Teorema 23 *A função*

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

é definida positiva se e somente se

$$a > 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0$$

e definida negativa se e somente se

$$a < 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0.$$

Prova. De fato,

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

podemos escrever a função $V(x, y)$ na forma

$$V(x, y) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{4a^2}y^2 \right) + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) y^2$$

que pode ainda ser escrita no seguinte modo

$$V(x, y) = a \left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a} \right) y^2$$

e daí notamos que

$$V(x, y) = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } a > 0, 4ac - b^2 > 0 \\ \leq 0 & \text{se } a < 0, 4ac - b^2 > 0. \end{cases}$$

o que demonstra o teorema. ■

Vamos aplicar esse resultado no seguinte sistema.

Exemplo 11 *Mostrar que o ponto crítico de*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - xy^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x^2y \end{aligned}$$

é assintoticamente estável.

Solução: Procuremos uma função de Liapunov para esse sistema, considere

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

temos que

$$V_x = 2ax + by$$

e

$$V_y = bx + 2cy$$

assim

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) \\ &= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + yx^3) + 2c(y^2 + x^2y^2)] \end{aligned}$$

se fizermos $b = 0$ e $a, c > 0$ então $V' < 0$ e V é definida positiva. Desse modo, o ponto $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

Um outro método de construir funções de Liapunov consiste no seguinte. Considere o sistema

$$X' = AX \tag{7.14}$$

onde os autovalores de A tem partes reais negativas. Seja e_1, \dots, e_n a base canônica do \mathbb{R}^n e, para cada i , $1 \leq i \leq n$, seja

$$X_i(t) = X_i(t, e_i) = (x_{i1}(t), \dots, x_{in}(t))$$

solução de (7.14) que satisfaz $X_i(0) = e_i$. Então se $Y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n \in \mathbb{R}^n$, a função

$$X(t, Y) = y_1X_1(t) + \dots + y_nX_n(t)$$

é solução de (7.14) satisfazendo $X(0) = Y$. Pondo

$$E(Y) = \int_0^\infty \|X(t, Y)\|^2 dt \tag{7.15}$$

observamos que se $E(Y)$ converge então

- (i) $E(Y) \geq 0$ e,
- (ii) $E(Y) = 0$ se, e só se, $Y = 0$. Em seguida, observamos que

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^\infty \left\| \sum_{i=1}^n y_i X_i(t) \right\|^2 dt = \int_0^\infty \left\| \sum_{i=1}^n (y_i x_{i1}(t), \dots, y_i x_{in}(t)) \right\|^2 dt \\ &= \int_0^\infty \left\| \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{i1}(t), \dots, \sum_{i=1}^n y_i x_{in}(t) \right) \right\|^2 dt \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{i1}(t), \dots, \sum_{i=1}^n y_i x_{in}(t) \right) \right\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{i1}(t) \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{in}(t) \right)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{ik}(t) \right)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{ik}(t) \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j x_{jk}(t) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n y_i y_j \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}(t) x_{jk}(t) \right)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$E(Y) = \sum_{k=1}^n y_i y_j \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}(t) x_{jk}(t) \right) dt$$

Basta agora mostrar que a integral

$$\int_0^\infty x_{ik}(t) x_{jk}(t) dt$$

converge para todo k . Mas isto é consequência dos autovalores da matriz A terem partes reais negativas.

Vamos mostrar que E é uma função de Liapunov para (7.14), de fato,

$$E(X(t, x_0)) = \int_0^\infty \|X(s, X(t, x_0))\|^2 ds = \int_0^\infty \|X(s+t, x_0)\|^2 ds = \int_t^\infty \|X(u, X_0)\|^2 du$$

Logo,

$$\frac{\partial E}{\partial t}(X(t, X_0)) = \frac{\partial}{\partial t} \int_t^\infty \|X(u, X_0)\|^2 du = -\|X(t, X_0)\|^2 < 0.$$

Exemplo 12 *O sistema*

$$\begin{aligned}
 x' &= -x \\
 y' &= -2y
 \end{aligned}$$

tem por matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e valores próprios $-1, -2$. Neste caso, as soluções X_1, X_2 tais que $X_1(0) = e_1$ e $X_2(0) = e_2$ são

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Portanto, se $Y = x_1 e_1 + x_2 e_2$ então temos que

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^\infty \|x e^{-t} e_1 + y e^{-2t} e_2\|^2 dt \\ &= \int_0^\infty (x^2 e^{-2t} + y^2 e^{-4t}) dt \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}. \end{aligned}$$

Definição 5 Seja $F \in C^1$ em $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in A$, $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$. Então uma função $L = L(X)$ de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n chama-se uma aproximação linear de F em x_0 se L é linear em \mathbb{R}^n e

$$\lim_{\|x-x_0\| \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(x_0) - L(x) + L(x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

ou

$$\lim_{\|x-x_0\| \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Em particular, quando $x_0 = 0$ então

$$\lim_{\|x-x_0\| \rightarrow 0} \frac{F(x) - L(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Teorema 24 Se $F \in C^1$ então F tem uma aproximação linear em x_0 e a matriz desta aproximação em relação à base canônica de \mathbb{R}^n é

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_0}.$$

J é a matriz jacobiana de F em x_0 e $T = DF$. Para aplicar esses resultados ao estudo de estabilidade, seja F uma função de classe C^1 em A contendo a origem, e suponhamos que

(i) $F(0) = 0$,

(ii) as partes reais de todos os autovalores próprios da matriz jacobiana J de F calculada na origem são negativos.

Nestas condições a função de Liapunov $E = E(x)$ para o sistema linear $X' = JX$ é a matriz de Liapunov para o sistema não linear $X' = F(X)$.

Prova. De fato, sabemos que $\nabla E \cdot JX \leq -\|X\|^2$. Logo

$$\nabla E \cdot F(X) = \nabla E(X) \cdot [JX + G(X)]$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla E(X) \cdot JX + \nabla E(X) \cdot G(X) \\
&\leq -\|X\|^2 + \|\nabla E(X)\| \|G(X)\|
\end{aligned}$$

Temos que $\nabla E(X) = 2AX$ (veja a prova no lema 5) onde $\|A(X)\| \leq k \|X\|$ para alguma constante k real. Como

$$\lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{F(x) - JX}{\|X\|} = \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{\|G(X)\|}{\|X\|} = 0$$

então

$$\|G(X)\| \leq \frac{1}{4k} \|X\|$$

Logo,

$$\nabla E \cdot F(X) \leq -\|X\|^2 + 2k \|X\| \frac{1}{4k} \|X\| = -\frac{1}{2} \|X\|^2.$$

Portanto, E é de fato, a função de Liapunov para $\dot{X} = F(X)$.

■

Lema 5 Para o sistema $\dot{X} = J(X)$ e a função $E(Y)$ definida em (7.15) temos que existe uma matriz A tal que $\nabla E(X) = 2AX$ e $\|A\| \leq k$ para alguma constante $k > 0$.

Prova. Por simplicidade, consideraremos o caso bidimensional. Sabemos

$$\begin{aligned}
E(y_1, y_2) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 y_i y_j \int_0^\infty \sum_{k=1}^2 x_{ik} x_{jk} dt \\
&= y_1^2 \int_0^\infty (x_{11}^2 + x_{12}^2) dt + 2y_1 y_2 \int_0^\infty (x_{11} x_{21} + x_{12} x_{22}) dt + y_2^2 \int_0^\infty (x_{21}^2 + x_{22}^2) dt
\end{aligned}$$

temos que

$$E_{y_1} = 2y_1 \int_0^\infty (x_{11}^2 + x_{12}^2) dt + 2y_2 \int_0^\infty (x_{11} x_{21} + x_{12} x_{22}) dt$$

e

$$E_{y_2} = 2y_1 \int_0^\infty (x_{11} x_{21} + x_{12} x_{22}) dt + 2y_2 \int_0^\infty (x_{21}^2 + x_{22}^2) dt$$

assim

$$\nabla E(Y) = 2AY$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^\infty (x_{11}^2 + x_{12}^2) dt & \int_0^\infty (x_{11} x_{21} + x_{12} x_{22}) dt \\ \int_0^\infty (x_{11} x_{21} + x_{12} x_{22}) dt & \int_0^\infty (x_{21}^2 + x_{22}^2) dt \end{bmatrix}$$

e como os autovalores de J têm partes reais negativas segue que $\|A\| \leq k$ para algum $k > 0$. ■

Exemplo 13 *A equação diferencial*

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x + g(x, \dot{x}) = 0$$

governa o comportamento de um circuito elétrico RLC simples quando x representa a carga no capacitor, \dot{x} a corrente no circuito, e $g(x, \dot{x})$ as não-linearidades do circuito. Suponha

$$g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(0, 0) = 0.$$

O sistema de primeira ordem equivalente é:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y - \frac{1}{L}g(x, y) \end{aligned}$$

A aproximação linear é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Os valores próprios da matriz desse sistema são

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} \right)$$

e como têm partes reais negativas, o teorema de Liapunov nos diz que a origem é assintoticamente estável.

Capítulo 8

O Teorema de Poincaré-Bendixson

8.1 Conjuntos Limites

Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ um campo de vetores de classe C^1 definido num aberto $E \subseteq \mathbb{R}^N$. No que segue continuamos supondo que todos os campos são de classe C^1 e todas as soluções da equação diferencial $x' = f(x)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$; em particular fica, assim, definido o fluxo $\phi_t : E \rightarrow E$ de f para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 29 Dizemos que um conjunto $C \subseteq E$ é invariante pelo fluxo ϕ_t de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, dizemos que C é positivamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \geq 0$ e que é negativamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \leq 0$.

Definição 30 O conjunto w – limite de um ponto $x \in E$ é o conjunto

$$L_w(x) = \left\{ y \in E \mid \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \lim_{t_n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) = y \right\}.$$

Definição 31 O conjunto α – limite de um ponto $x \in E$ é o conjunto

$$L_\alpha(x) = \left\{ y \in E \mid \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \lim_{t_n \rightarrow -\infty} \phi_{t_n}(x) = y \right\}.$$

A seguir, enunciaremos e provaremos as principais propriedades dos conjuntos limites. Iremos enunciar todas as propriedades para o conjunto w – limite, já que, os resultados análogos valem para o conjunto α – limite.

Na maioria dos resultados utilizamos de maneira essencial a propriedade de grupo (6.4)

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$$

do fluxo, apresentada na Proposição 3.

Proposição 4 Se y está na órbita de x , então $L_w(y) = L_w(x)$.

Prova. Para provar este resultado, tomamos t tal que $\phi_t(x) = y$. Seja $z \in L_w(x)$, de modo que exista uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\phi_{t_n}(x) \rightarrow z$. Então

$$z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n-t}(\phi_t(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n-t}(y)$$

e portanto existe a sequência $t_n - t \rightarrow +\infty$ tal que $\phi_{t_n-t}(y) \rightarrow z$. Logo, $z \in L_w(y)$ e portanto $L_w(x) \subseteq L_w(y)$. De maneira semelhante, como também x está na órbita de y , pode-se mostrar que $L_w(y) \subseteq L_w(x)$ e portanto concluir que $L_w(y) = L_w(x)$. ■

Proposição 5 *O conjunto $L_w(x)$ é fechado e invariante.*

Prova. Dado $y \in L_w(x)$, existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\phi_{t_n}(x) \rightarrow y$. Como $\phi_t(x)$ é contínua em x , para t fixo, temos

$$\lim_{t+t_n \rightarrow +\infty} \phi_{t+t_n}(x) = \phi_t \left(\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) \right) = \phi_t(y)$$

e como $t_n + t \rightarrow +\infty$, resulta $\phi_t(y) \in L_w(x)$. Isto mostra que $L_w(x)$ é um conjunto invariante pelo fluxo de f .

Para mostrar que $L_w(x)$ é fechado, mostramos que seu complementar é aberto.

Pela definição de w -limite, dado $y \in \mathbb{R}^N - L_w(x)$, existem $\epsilon > 0$ e $\bar{t} > 0$ tais que $\phi_t(x) \notin B_\epsilon(y)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ com $t \geq \bar{t}$. Segue-se que $B_\epsilon(y) \cap L_w(x) = \emptyset$, de modo que $B_\epsilon(y) \subseteq \mathbb{R}^N - L_w(x)$ e portanto $\mathbb{R}^N - L_w(x)$ é aberto. ■

Proposição 6 *Se $C \subseteq E$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $L_w(x) \subseteq C$ para cada $x \in C$.*

Prova. Dado $y \in L_w(x)$, com $x \in C$, existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$y = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x).$$

Temos $\phi_{t_n}(x) \in C$, pela invariância e portanto, como C é fechado, temos $y \in C$. Logo $L_w(x) \subseteq C$. ■

Corolário 2 *Se a órbita de f por x é periódica, então $L_w(x)$ é a própria órbita periódica.*

Prova. Supondo que a órbita γ de f por x é periódica de período t_0 , temos $\phi_{nt_0}(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, pois $\phi_{t_0}(x) = x$ e $\phi_{nt_0}(x) = (\phi_{t_0} \circ \dots \circ \phi_{t_0})(x)$. Em particular, como $nt_0 \rightarrow +\infty$, x está no seu conjunto w -limite e portanto $L_w(x) \subseteq \gamma$, pela Proposição 6, já que γ é fechado e invariante. Se $y = \phi_t(x)$ (para t fixo) é um ponto qualquer na órbita periódica γ , então $\phi_{t+nt_0}(x) = \phi_t(\phi_{nt_0}(x)) = y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de modo que $y \in L_w(x)$, pois $t + nt_0 \rightarrow +\infty$. Logo, $\gamma \subseteq L_w(x)$ e concluímos que $\gamma = L_w(x)$. ■

Corolário 3 Se $z \in L_w(x)$, então $L_w(z) \subseteq L_w(x)$.

Prova. Pela Proposição 5, $L_w(x)$ é fechado e invariante. Dado $z \in L_w(x)$, decorre que $L_w(z) \subseteq L_w(x)$ pela Proposição 6. ■

Proposição 7 Se a semi-órbita $\{\phi_t(x) \mid t \geq 0\}$ de f por x é limitada, então o conjunto $L_w(x)$ é não-vazio. Reciprocamente, se o conjunto $L_w(x)$ é compacto e não-vazio, então a semi-órbita $\{\phi_t(x) \mid t \geq 0\}$ é limitada.

Prova. A primeira afirmação segue de imediato por compacidade pois, por hipótese, a sequência $x_n = \phi_n(x)$ é limitada e portanto possui uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de $L_w(x)$.

Para provar a segunda, procedemos por contraposição: supomos que a semi-órbita $\{\phi_t(x) \mid t \geq 0\}$ de f por x é ilimitada e provamos que $L_w(x)$ não é compacto. Por hipótese obtemos, então, uma sequência de pontos $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\|\phi_{t_n}\| \rightarrow +\infty$ para $n \rightarrow +\infty$.

Seja $y \in L_w(x)$ um ponto qualquer. Por definição, a trajetória por x passa infinitas vezes pela bola $B_0 = B_1(y) = \{z \in \mathbb{R}^N \mid \|z - y\| < 1\}$ para tempos arbitrariamente grandes: afinal, a trajetória positiva por x acumula em y . Mas também, por hipótese, a trajetória por x deve sair para fora da bola $B_n = B_n(y)$ para tempos arbitrariamente grandes. Assim, para cada $n \geq 1$, por conexidade, a órbita de x passa infinitas vezes pelo anel $C_n = \{z \in \mathbb{R}^N \mid n \leq \|z - y\| \leq n + 1\}$. Como C_n é um conjunto compacto, obtemos que $C_n \cap L_w(x) \neq \emptyset$. Como isto deve valer para cada $n \geq 1$, resulta que $L_w(x)$ não é compacto. ■

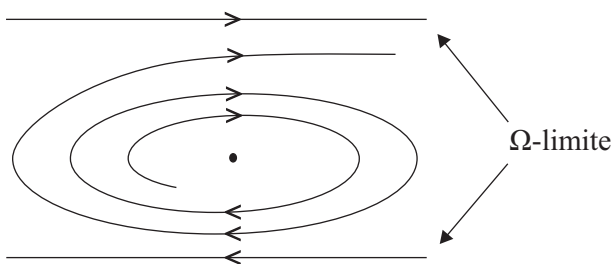


figura 10.1: Um conjunto w – limite desconexo.

Na figura anterior um exemplo de um conjunto w – limite de uma trajetória que não é conexo, por ser a união de duas retas paralelas (ilimitadas). Pela Proposição a seguir, este conjunto w – limite, como de fato ocorre, não pode ser compacto.

Proposição 8 Se o conjunto $L_w(x)$ é compacto, então também é conexo.

Prova. Suponhamos $L_w(x)$ compacto e não-vazio e tomamos A e B abertos disjuntos quaisquer de \mathbb{R}^N tais que $A \cap L_w(x) \neq \emptyset \neq B \cap L_w(x)$. Basta provar que $L_w(x) \not\subseteq A \cup B$ para estabelecer que $L_w(x)$ é conexo.

Tomando pontos $y_a \in A \cap L_w(x)$ e $y_b \in B \cap L_w(x)$, existem sequências t_n e s_n que crescem a $+\infty$ tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) = y_a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{s_n}(x) = y_b$. Podemos reordenar

estas seqüências e supor, sem perda de generalidade, que $s_n < t_n < s_{n+1}$, para cada n .

Como o segmento de órbita $I_n = \{\phi_t(x) \mid s_n \leq t \leq t_n\}$ também é conexo, não podemos ter $I_n \subseteq A \cup B$ e portanto deve existir um valor k_n tal que $s_n < k_n < t_n$ e $\phi_{k_n}(x) \in \mathbb{R}^N - (A \cup B)$. Como $L_w(x)$ é compacto, a semi-órbita positiva de x é limitada, segundo a Proposição 7 e portanto está contida num compacto. Assim a seqüência construída $\phi_{k_n}(x)$ tem uma subsequência convergente para um ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Como $\mathbb{R}^N - (A \cup B)$ é fechado, temos $y \in \mathbb{R}^N - (A \cup B)$ e, como $k_n \rightarrow +\infty$, também $y \in L_w(x)$, de modo que $L_w(x) \not\subseteq A \cap B$. ■

8.2 Os Teoremas de Poincaré e Bendixson

Nesta seção consideramos campos de vetores no plano, também denominamos campos planares. No que segue, $f = (f_1, f_2) : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que todas as soluções da equação $x' = f(x)$ estão definidas para todo tempo real.

Definição 32 *Uma seção transversal local, ou, simplesmente, uma seção local do campo f num ponto $x \in E$ é um conjunto $S = H \cap W \subseteq E$ obtido pela interseção de uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^N$ de x em E com um hiperplano H por x tal que, para cada $y \in S$ colocando a origem do vetor $f(y)$ no ponto y , temos $f(y) \notin H$.*

A seguir iremos enunciar alguns resultados que nos auxiliarão na demonstração do Teorema de Poncaré-Bendixson.

Teorema 16 (Teorema da Curva de Jordan) *O complementar no plano de uma curva de Jordan possui duas componentes conexas abertas disjuntas, uma limitada e a outra ilimitada, cuja fronteira comum é a curva.*

A utilidade do Teorema da Curva de Jordan é fundamental para o que segue e pode ser ilustrada pela 10.1, onde a curva definida por um segmento S e um trecho da trajetória $x(t)$, ambos ligando x_1 a x_2 , definem juntos uma curva de Jordan Γ e assim determinam duas componentes conexas no plano, uma das quais denotamos por U . Observe que o aberto U pode estar todo contido no domínio E de f ou não.

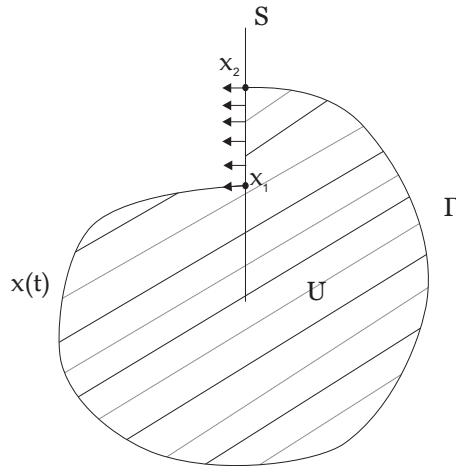


figura 10.2

Lema 6 (O Lema das Sequências Monótonas) *Seja $x \in S$ um ponto da seção transversal local S de f . Se a trajetória $x(t) = \phi_t(x)$ de f por x volta a bater em S para tempos crescentes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, então a sequência de pontos $x_n = \phi_{t_n}(x)$ é monótona em S , no seguinte sentido: no segmento S , x_n sempre está entre x_{n-1} e x_{n+1} . Além disto, existem $t_n < t_{n+1}$ tais que $x_n = x_{n+1}$ se, e somente se, a trajetória de f por x é periódica.*

Prova. A partir da figura 10.3 podemos nos certificar que, sempre que a trajetória $x(t) = \phi_t(x)$ bate de novo em S , as batidas subsequêntes determinam uma sequência monótona. De fato, note que a trajetória $\phi_t(x) = x(t)$, após bater pela n -ésima vez em $x_n = \phi_{t_n}(x) \in S$ com $t_n > 0$, não pode mais sair do interior U da curva Γ determinada pela trajetória e pela seção transversal (que é a região hachurada da figura 10.3) pois, pela unicidade, a trajetória não pode cortar a trajetória nem pode cruzar a seção (onde o campo aponta pra dentro de U). Sendo assim, as subsequêntes batidas formam uma sequência monótona em S , ou seja, x_n está sempre entre x_{n-1} e x_{n+k} em S , para qualquer $k \geq 1$.

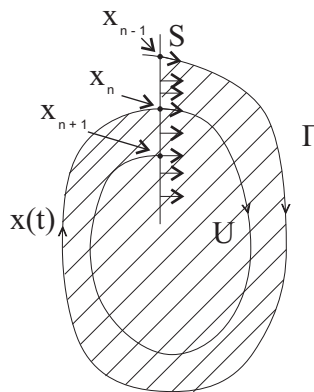


figura 10.3

Além disto, se duas batidas distintas da trajetória de f por x em S coincidem então a trajetória é periódica (por definição) e se duas batidas são distintas, então a trajetória não pode ser periódica, pois, como podemos ver na figura 10.3, uma vez entrando em U , a trajetória nunca mais pode voltar ao ponto de partida x_{n-1} . ■

Corolário 4 *A trajetória de um campo planar por um ponto de um conjunto w – limite não pode cruzar uma seção local do campo em mais do que um ponto.*

Prova. Para fixar as idéias, sejam S uma seção local do campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $y \in S$ tal que $y \in L_w(x)$ para algum $x \in E$. Então existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $x_n = \phi_{t_n}(x) \rightarrow y$. Como $y \in S$, podemos supor também que $x_n \in S$, projetando pelo fluxo, se necessário.

Temos duas opções: a trajetória de f por x é periódica ou não é. No primeiro caso, a órbita de f por x coincide com o conjunto w – limite de x pelo Corolário 2 e portanto $L_w(x) \cap S = \{y\}$ é um único ponto, pelo Lema 6.

No segundo caso, a órbita γ de f por x não é periódica e portanto os x_n são pontos distintos de $\gamma \cap S$ que convergem a $y \in S$. Pelo Lema 6, a sequência $\gamma \cap S$ completa é uma sequência monótona e sabemos que sequências monótonas só podem ter, no máximo, uma subsequência convergente. Isto significa que $L_w(x) \cap S = \{y\}$ é um único ponto, pois qualquer outro ponto de $L_w(x) \cap S$ produziria uma outra subsequência de $\gamma \cap S$ que convergiria a um outro limite. ■

Proposição 9 *Se o conjunto w – limite de um ponto de um campo planar é compacto e contém uma órbita periódica, então este conjunto w – limite coincide com a órbita periódica.*

Prova. Sejam x e y tais que $L_w(x)$ é compacto, a órbita γ de f por y é periódica e $\gamma \subseteq L_w(x)$. Queremos mostrar também que $L_w(x) \subseteq \gamma$, de modo que $L_w(x) = \gamma$ é uma órbita periódica.

Vamos supor que $L_w(x) \not\subseteq \gamma$, ou seja, que $L_w(x) - \gamma \neq \emptyset$. Por ser compacto, o conjunto w – limite $L_w(x)$ é conexo e, como γ é um conjunto fechado, resulta que o complementar não-vazio $L_w(x) - \gamma$ de γ em $L_w(x)$ não pode também ser fechado e portanto existem um ponto $y_0 \in \gamma$ e uma sequência $y_k \in L_w(x) - \gamma$ tais que $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y_0$.

Como $y_0 \in \gamma$, temos $f(y_0) \neq 0$ e portanto podemos tomar uma seção local de f em y_0 ; projetando pelo fluxo, se necessário, podemos supor também que $y_k \in S$ para cada k . Pelo Corolário 4, sabemos que $L_w(x) \cap S$ consiste de, no máximo, um único ponto. Como $y_k \in L_w(x) \cap S$ para cada k , resulta que a sequência y_k é constante e, como $y_k \rightarrow y_0$, decorre que $y_k = y_0 \in \gamma$. Isto contradiz o fato que $y_k \notin \gamma$ e portanto estabelece que $L_w(x) \subseteq \gamma$. ■

Com estes resultados preliminares, podemos demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 17 (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Os únicos conjuntos w – limite compactos, não-vazios e sem singularidades de um campo planar são as órbitas periódicas do campo.*

Prova. Vamos provar que os únicos conjuntos w – limite compactos, não-vazios e sem singularidades de campos planares são as órbitas periódicas. Para isto, fixamos um campo planar $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $x \in E$ quaisquer tais que $L_w(x) \neq \emptyset$ é compacto e $f(y) \neq 0$ para cada $y \in L_w(x)$. Queremos mostrar que $L_w(x)$ é uma órbita periódica.

Seja $y \in L_w(x)$. Pelo Corolário 3, temos $L_w(y) \subseteq L_w(x)$. Pela Proposição 9, basta mostrar que a trajetória γ de f por y é periódica, pois $\gamma = L_w(y) \subseteq L_w(x)$ e decorre que $L_w(x) = \gamma$ é uma órbita periódica.

Ora, por hipótese, $L_w(x)$ é compacto, de modo que $L_w(y) \neq \emptyset$ pela Proposição 7, ou seja, podemos tomar um ponto $z \in L_w(y)$. Por hipótese, z não pode ser uma singularidade de f , pois $z \in L_w(y) \subseteq L_w(x)$. Podemos, então, tomar umaseção local S de f por z .

Como $z \in L_w(y)$, temos uma sequência $y_k = \phi_{t_k}(y) \rightarrow z$ com $t_k \rightarrow +\infty$ e, como na demonstração do Corolário 4, podemos projetar pelo fluxo, se necessário, e supor que todos $y_k \in S$. Por outro lado, sabemos que $L_w(x) \cap S$ é, no máximo, um único ponto, pelo Corolário 4. Como cada $y_k \in \gamma \subseteq L_w(x)$, decorre que todos y_k coincidem, ou seja, pelo Lema 6, a trajetória de f por y é periódica. ■

Observação 7 *O Teorema de Poincaré-Bendixson não é válido em \mathbb{R}^N com $N > 2$. A restrição tampouco é somente dimensional, pois embora o resultado seja válido para campos de vetores na esfera bidimensional, não vale no toro bidimensional. O ingrediente essencial para a validade do Teorema de Poincaré-Bendixson é a cisão do domínio do campo em duas componentes por qualquer curva de Jordan, o que ocorre no plano e na esfera bidimensional mas não no toro bidimensional nem nos espaços euclidianos de dimensão maior do que 2.*

Corolário 5 *Um conjunto compacto, não-vazio e invariante por um campo planar contém pelo menos uma singularidade ou uma órbita periódica.*

Prova. Se C é invariante por f , temos $L_w(x) \subseteq C$ para cada $x \in C$. Se não existem pontos de equilíbrio em C , então não existem pontos de equilíbrio em $L_w(x)$ e portanto, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, $L_w(x) \subseteq C$ é uma órbita periódica. ■

8.2.1 Aplicações do Teorema de Poincaré-Bendixson

Aplicação 1.

Teorema 18 *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 num conjunto aberto $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Se γ é uma órbita fechada de f tal que $\text{Int}\gamma \subseteq E$, então existe um ponto singular de f contido em $\text{Int}\gamma$.*

Prova. Suponhamos que não existem pontos singulares em $\text{Int } \gamma$. Consideremos o conjunto Γ de órbitas fechadas de f contidas em $\overline{\text{Int } \gamma}$, ordenadas segundo a seguinte ordem parcial

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \rightarrow \overline{\text{Int } \gamma_1} \supseteq \overline{\text{Int } \gamma_2}.$$

Mostraremos que todo subconjunto S totalmente ordenado de Γ admite uma cota superior; isto é um elemento maior igual que qualquer outro elemento de S . Um conjunto ordenado nestas condições chama-se indutivo.

De fato, seja $\sigma = \{\cap \overline{\text{Int } \gamma_i}, \gamma_i \in S\}$. Notemos que $\sigma \neq \emptyset$, pois cada $\overline{\text{Int } \gamma_i}$ é compacto e a família $\{\overline{\text{Int } \gamma_i}, \gamma_i \in S\}$ tem a Propriedade da Interseção Finita. Isto é, qualquer interseção finita de elementos da família é não vazia. Seja $q \in \sigma$. Pelo Teorema de Poincaré-Bendixson $L_w(q)$ é uma órbita fechada contida em σ , pois este conjunto é invariante por f e não contém pontos singulares. Esta órbita é uma cota superior de S .

Pelo Lema de Zorn, Γ tem um elemento maximal, μ , pois Γ é indutivo. Portanto não existe nenhuma órbita fechada de Γ contida em $\text{Int } \mu$. Mas se $p \in \text{Int } \mu$, $L_\alpha(p)$ e $L_w(p)$ são órbitas fechadas pelo Teorema de Poincaré-Bendixson (pois não existem pontos singulares). Como $L_\alpha(p)$ e $L_w(p)$ não podem ser ambas iguais a μ , uma delas estará contida em $\text{Int } \mu$. Esta contradição prova que devem existir pontos singulares em $\text{Int } \mu$. ■

Exemplo 30 A equação $x'' + x^4 + 3 = 0$ não tem soluções periódicas.

De fato, o sistema bi-dimensional associado é

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^4 - 3, \end{cases}$$

que não tem pontos singulares.

Aplicação 2. (As equações de Liénard e van der Pol.)

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que

1. $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ é ímpar em u ; isto é, $G(-u) = -G(u)$.
2. $G(u) \rightarrow \infty$ se $u \rightarrow \infty$ e existe $\beta > 0$ tal que se $u > \beta$, G é crescente.
3. Existe $\alpha > 0$ tal que $G(u) < 0$ se $0 < u < \alpha$.

A seguir enunciaremos um resultado que garante a existência de solução periódica para a equação de Liénard.

Teorema 19 (Teorema de Liénard) nas condições acima, a equação de segunda ordem

$$u'' + g(u)u' + u = 0, \tag{8.1}$$

chamada de equação de Liénard, admite uma solução periódica não constante.

Prova. A equação (8.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u' = v - G(u) \\ v' = -u \end{cases} \quad (8.2)$$

Anotemos as seguintes propriedades do sistema (8.2).

1. O único ponto singular de (8.2) é $0 = (0, 0)$ pois $G(0) = 0$.
2. Vê-se de (8.2) que toda solução $(u(t), v(t))$ é tal que $u(t)$ é crescente onde $v(t) > G(t)$ e decrescente onde $v(t) < G(t)$. Também $v(t)$ é decrescente se $u(t) > 0$ e crescente se $u(t) < 0$. Além disso, o campo $(v - G(u), -u)$ é horizontal no eixo v e vertical na curva $v = G(u)$.

Segue-se que qualquer solução de (8.2) saindo do ponto $A = (0, v_0)$, com v_0 suficientemente grande tem uma órbita com um arco $ABCD$ tal como o mostrado na figura 10.4.

3. As soluções de (8.2) são invariantes por reflexões $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$; isto é, $(u(t), v(t))$ é solução de (8.2) se, e somente se, $(-u(t), -v(t))$ também o for. Isto decorre de G ser ímpar. Portanto se conhecemos um arco de trajetória $ABCD$ como na figura 10.4, então sua reflexão com respeito a origem também é um arco de trajetória. Em particular, se $A = (0, v_0)$, $D = (0, -v_1)$ e $v_1 < v_0$, então a semiórbita positiva que passa por A será limitada, e, de fato, contida na região limitada pela curva de Jordan J formada pelo arco $ABECD$, sua reflexão com respeito à origem e os segmentos do eixo v que ligam os extremos destes arcos. Ver figura 10.5.

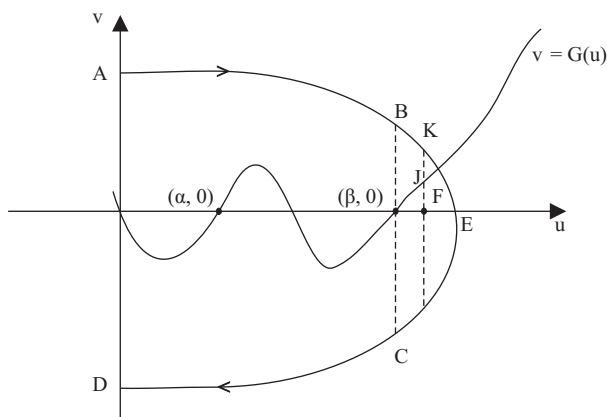


figura 10.4

A seguir provaremos que se v_0 é suficientemente grande, $v_1 < v_0$ e o conjunto $L_w(A)$ estará contido na região limitada por J . Logo verificaremos que 0 é uma fonte de (8.2) portanto $L_w(A) \neq \emptyset$ e pelo Teorema de Poincaré-Bendixson $L_w(A)$ será uma órbita fechada. Isto terminará a prova.

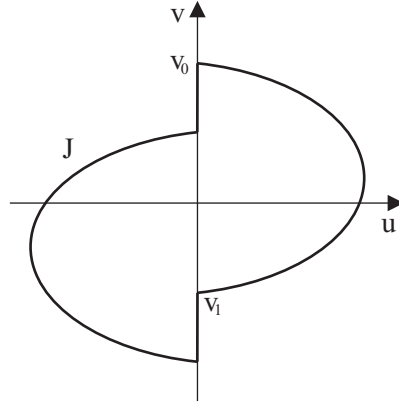


figura 10.5

Consideremos a função $R(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$. Para uma solução $u = u(t)$, $v = v(t)$ de (8.2) temos

$$4 \frac{dR(u(t), v(t))}{dt} = -u(t)G(u(t)). \quad (8.3)$$

Com referência à figura 10.4, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) &= R(D) - R(A) = \int_{ABECD} dR = \left[\int_{AB} + \int_{CD} \right] dR + \\ &\int_{BEC} dR = \left[\int_{AB} + \int_{CD} \right] \frac{dR}{dt} \frac{dt}{du} du + \int_{BEC} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dv} dv = \\ &= \left[\int_{AB} + \int_{CD} \right] \frac{-uG(u)}{v - G(u)} du + \int_{BEC} G(u) dv. \end{aligned}$$

As primeiras duas integrais tendem monotonicamente a zero quando $v_0 \rightarrow \infty$, pois o denominador do integrando tende uniformemente para ∞ . Se F (veja figura 10.4), é um ponto qualquer no eixo u , entre $(\beta, 0)$ e E , temos que

$$\begin{aligned} \phi(v_0) &= \int_{BEC} G(u) dv \text{ satisfaz a } -\phi(v_0) = - \int_{BEC} G(u) dv = \\ &= \int_{CEB} G(u) dv > \int_{EK} G(u) dv > FJ \times FK. \end{aligned}$$

A última desigualdade resulta de que G é crescentes e seus valores à direita de F são maiores do que FJ . Como $FK \rightarrow \infty$ se $v_0 \rightarrow \infty$ isto prova que $\phi(v_0) \rightarrow -\infty$ se $v_0 \rightarrow \infty$. Portanto, $v_1^2 < v_0^2$, se v_0 é grande.

Por (8.3) se $0 < |u| < \alpha$, $\frac{dR}{dt}(t) > 0$, portanto, 0 é uma fonte de (8.2); isto é, 0 é o α -limite de todo ponto numa vizinhança de 0. ■

Corolário 6 *A equação de van der Pol $x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$ com $\epsilon > 0$ tem uma única solução periódica não constante que é estável.*

Nosso segundo objetivo nesta seção é estudar outro resultado relativo a campos planares.

Quando o domínio E do campo é simplesmente conexo, o clássico Teorema de Green dá uma restrição sobre o tipo de campo de vetores que podem ter uma órbita periódica.

Proposição 10 (Teorema de Bendixson) *Se o campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 definido no aberto simplesmente conexo $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tem uma única órbita periódica, então ou $\operatorname{div} f$ é identicamente nulo ou troca de sinal em E .*

Prova. Uma órbita periódica γ de f é parametrizada pela solução (x_1, x_2) de $x' = f(x)$ por um ponto qualquer de γ , de modo que $dx_1 = f_1 dt$ e $dx_2 = f_2 dt$ garantem que $f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = (-f_2, f_1) \cdot (dx_1, dx_2) = (-f_2, f_1) \cdot (f_1, f_2) dt = 0 dt$. Assim,

$$\int \int_R \operatorname{div} f dA = \int \int_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dA = \pm \oint_{\gamma} f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = 0,$$

onde R é o interior de γ , contido em E , e a segunda igualdade é garantida pelo Teorema de Green.

Como f é C^1 em E , o divergente de f é contínuo e portanto a igualdade $\int \int_R \operatorname{div} f dA = 0$ garante que $\operatorname{div} f$ é identicamente nulo ou troca de sinal em R . ■

Exemplo 31 *O campo $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^3, -x_1^3)$ tem $\operatorname{div} f(x_1, x_2) = -3x_1^2$, que não troca de sinal nem é identicamente nulo em conjuntos abertos de \mathbb{R}^2 , portanto f não possui órbita periódica alguma. Olhando*

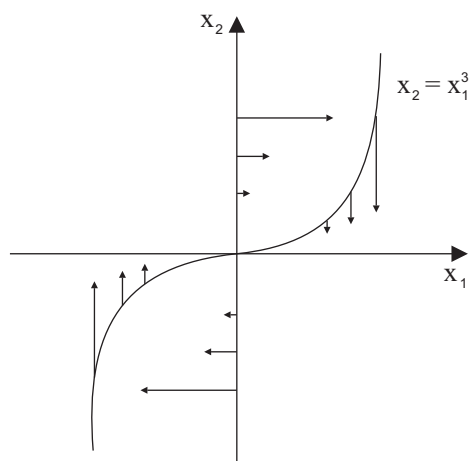


figura 10.6

para o campo f , cujo comportamento é ilustrado na figura 10.6, isto não é de todo evidente pois o campo f tem um jeito de centro não linear.

Apêndice A

Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados básicos que iremos utilizar nos capítulos subsequentes.

A.1 Linguagem básica da topologia

A.1.1 Conjuntos abertos

Seja X um subconjunto do espaço euclidiano \mathbb{R}^N .

Definição 33 Um ponto $x_0 \in X$ diz-se um ponto interior de X quando existe $\delta > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset X$. O conjunto de todos os pontos interiores de X é representado por $\text{int}X$.

Definição 34 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset X$. Assim, X é aberto $\Leftrightarrow \text{int}X = X$.

Exemplo 32 Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$, $\text{int}X$ é um conjunto aberto. De fato, se $a \in \text{int}X$ então existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset X$. Se $x \in B_r(a)$, então pondo $\delta = r - \|x - a\|$, vemos que $B_\delta(x) \subset B_r(a)$, donde $B_r(a) \subset X$ e, portanto, $x \in \text{int}X$. Assim, todo ponto $a \in \text{int}X$ é centro da bola $B_r(a)$ contida em $\text{int}X$, o que prova que $\text{int}X$ é aberto.

Teorema 20 Os conjuntos abertos do espaço euclidiano \mathbb{R}^N gozam das seguintes propriedades:

1. O conjunto \emptyset e o espaço \mathbb{R}^N são abertos;
2. A interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de um número finito de conjuntos abertos A_1, \dots, A_n é um conjunto aberto;

3. A reunião $A = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.

Prova.

1. Um conjuntro só pode deixar de ser aberto se contiver algum ponto que não seja interior. Como \emptyset não contém ponto algum, é aberto. \mathbb{R}^N é obviamente aberto.
2. Seja $a \in A$. Então, para cada $i = 1, \dots, k$, temos $a \in A_i$. Como A_i é aberto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B_{\delta_i}(a) \subset A_i$. Seja $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$. Então, $B_\delta(a) \subset A_i$ para cada i , donde $B_\delta(a) \subset A$.
3. Dado $a \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, existe $\delta > 0$ com $B_\delta(a) \subset A_\lambda \subset A$. Logo A é aberto.

■

Definição 35 Um conjunto $A \subset X$ diz-se aberto em X quando, para cada $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \cap X \subset A$.

Exemplo 33 O conjunto $A = (0, 1]$ é aberto em $X = [0, 1]$.

Teorema 21 Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto $A \subset \mathbb{R}^N$ seja um conjunto aberto em X .

Prova. (Necessário) Se f é contínua e $A \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, tomemos um ponto $a \in f^{-1}(A)$. Então $f(a) \in A$. Pela definição de aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(a)) \subset A$. Sendo f contínua, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$. Isto significa que $f(B_\delta(a) \cap X) \subset B_\epsilon(f(a)) \subset A$, donde $B_\delta(a) \cap X \subset f^{-1}(A)$. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto em X .

(Suficiente) Se a imagem inversa por f de todo aberto de \mathbb{R}^N é aberto em X ; então, dados $a \in X$ e $\epsilon > 0$, como $B_\epsilon(f(a))$ é aberto, concluímos que $A = \{x \in X; \|f(x) - f(a)\| < \epsilon\}$ é aberto em X . Evidentemente, $a \in A$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \cap X \subset A$. Isto significa porém que $x \in X$, $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$, ou seja, que f é contínua no ponto a . Como $a \in X$ é qualquer, f é contínua. ■

A.1.2 Conjuntos fechados

Definição 36 Um ponto $a \in \mathbb{R}^N$ diz-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto. De outra forma, é necessário e suficiente que toda bola aberta de centro a contenha algum ponto de X . O conjunto dos pontos aderentes de X chama-se o fecho de X e é indicado com a notação \overline{X} .

Exemplo 34 Se $X = \mathbb{Q}^N$ é o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^N cujas coordenadas são números racionais, então $\overline{X} = \mathbb{R}^N$.

Definição 37 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ chama-se fechado quando contém todos seus pontos aderentes, isto é, $\overline{X} = X$.

Exemplo 35 Uma bola fechada $B[a; r]$ é um subconjunto fechado do espaço \mathbb{R}^N pois se $\|x_k\| \leq r$ para todo k e $\lim x_k = b$, então, $\|b\| = \lim \|x_k\| \leq r$.

Definição 38 A fronteira de X em \mathbb{R}^N é o conjunto ∂X , formado pelos pontos $b \in \mathbb{R}^N$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar de X .

Exemplo 36 Seja $X = [0, 1]$, então $\partial X = \{0, 1\}$

Teorema 22 Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.

Proposição 3 S é aberto $\Leftrightarrow S \cap \partial S = \emptyset \Leftrightarrow \partial S \subset S^c \Leftrightarrow \partial S^c \subset S^c \Leftrightarrow S^c$ é fechado.

Corolário 7 O fecho de todo conjunto é um conjunto fechado.

Teorema 23 Os conjuntos fechados do espaço euclidiano \mathbb{R}^N gozam das seguintes propriedades:

1. O conjunto \emptyset e o espaço \mathbb{R}^N inteiros são fechados;
2. A reunião $F_1 \cup \dots \cup F_n$ de um número finito de conjuntos fechados F_1, \dots, F_n é um conjunto fechado;
3. A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados F_λ é um conjunto fechado.

Definição 39 Fixemos um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$. Um subconjunto $F \subset X$ diz-se fechado em X quando se tem $F = X \cap G$, onde G é um conjunto fechado em \mathbb{R}^N .

Exemplo 37 Seja $X = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ a semi-reta positiva aberta. O intervalo semi-aberto $F = (0, 1]$ é fechado em X .

Teorema 24 Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma aplicação definida no subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^N$ seja um conjunto fechado em X .

Definição 40 Dados $Y \subset X \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que Y é denso em X quando $\overline{Y} \cap X = X$, ou seja, $X \subset \overline{Y}$.

Exemplo 38 \mathbb{Q} e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são densos em \mathbb{R} .

A.1.3 Conjuntos compactos

Definição 41 Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^N$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in X$, existe um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Exemplo 39 $X \subset \bigcup_{x \in X} (x - \epsilon, x + \epsilon); \epsilon > 0$.

Definição 42 Uma subcobertura é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Definição 43 Diz-se que a cobertura $X \subset \cup C_\lambda$ é aberta quando os C_λ forem todos abertos, finita se L é um conjunto finito, enumerável se L é enumerável, etc.

Definição 44 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ é dito um conjunto compacto quando toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.

Exemplo 40 $\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - 1/3, n + 1/3)$, não admite subcobertura finita.

Teorema 25 Se toda cobertura aberta admite subcobertura finita, então K é fechado e limitado.

Prova. Em primeiro lugar, as bolas abertas de raio 1 e centros nos pontos de K constituem uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} B_1(x)$, a qual possui uma subcobertura finita $K \subset B_1(x_1) \cup \dots \cup B_1(x_i)$. Assim, K está reunido numa união finita de conjuntos limitados, logo é limitado. Além disso, K é fechado pois, se não fosse, existiria um ponto $a \in \overline{K} - K$. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, tomamos A_i igual ao complementar da bola fechada $B_{1/i}[a]$. Para todo $x \in K$, temos $x \neq a$, logo $\|x - a\| > 1/i$ para algum i , o que nos dá $x \in A_i$. Portanto, $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, uma cobertura aberta, da qual extraímos uma subcobertura finita: $K \subset A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_p}$. Como $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$, toda reunião de uma coleção finita de conjuntos A_i é igual ao conjunto de maior índice na coleção. Assim, temos $K \subset A_i$ para algum i . Esta inclusão significa que a bola $B_{1/i}[a]$ não tem pontos em comum com K , o que contradiz ser $a \in \overline{K}$ e prova o teorema. ■

Teorema 26 Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$. Para todo subconjunto compacto $K \subset X$, sua imagem $f(K)$ é compacta.

Prova. Mostremos primeiro que $f(K)$ é fechado em \mathbb{R}^N . Seja, pois, $y \in \mathbb{R}^N$ aderente a $f(K)$. Então $y = \lim f(x_k), x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela compacidade de K , uma subsequência (x_{k_i}) converge para um certo ponto $x \in K$. Segue-se que $y = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = f(\lim x_{k_i}) = f(x)$, donde $y \in f(K)$. Agora, mostremos que $f(K)$ é limitado. De fato, se não fosse, poderíamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, obter um ponto $x_k \in K$ tal que $|f(x_k)| > k$. Então a sequência $(f(x_k))$ não admitiria subsequências convergentes. Mas (x_k) tem uma subsequência convergente, com $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = x \in K$. A continuidade de f nos dá então $f(x) = f(\lim x_{k_i}) = \lim f(x_{k_i})$, uma contradição. ■

Corolário 8 (Weierstrass) *Toda função real contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, atinge seu máximo e seu mínimo em K , isto é, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para qualquer $x \in K$.*

Prova. Com efeito, $f(K) \subset \mathbb{R}$ é compacto, logo $y_0 = \inf f(K)$ e $y_1 = \sup f(K)$ pertencem a $f(K)$, isto é, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Então, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$. ■

Teorema 27 *Toda aplicação contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^N$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, é uniformemente contínua.*

Prova. Suponha, por absurdo, que o teorema fosse falso. Então existiriam $\epsilon > 0$ e duas sequências de pontos $x_k \in X, y_k \in K$ tais que $\|x_k - y_k\| < 1/k$ e $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \epsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim y_k = y \in K$, donde $\lim x_k = y$ também.

Então, pela continuidade de f , viria $\epsilon \leq \lim \|f(x_k) - f(y_k)\| = \|f(y) - f(y)\|$, uma contradição. ■

A.1.4 Conjuntos conexos

Definição 45 *Uma cisão de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A e B são ambos abertos em X .*

Observação 8 *Dada uma cisão $X = A \cup B$, temos $A = X - B$ e $B = X - A$. Logo, pelo Teorema (22), os conjuntos A e B são abertos e fechados.*

Exemplo 41 *Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ admite pelo menos a cisão trivial $X = X \cup \emptyset$. Um exemplo de cisão não-trivial é $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.*

Definição 46 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ chama-se conexo quando não admite outra cisão além da trivial.*

Exemplo 42 *A reta \mathbb{R} e o espaço euclidiano \mathbb{R}^N são exemplos de espaços conexos.*

Proposição 11 *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Proposição 12 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, é um intervalo.*

A.2 Espaços Métricos

Nesta secção iremos introduzir alguns conceitos de espaços métricos, os quais serão utilizados na demonstração do Teorema de Picard.

Definição 47 *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

- d1.** $d(x, x) = 0$;
- d2.** Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- d3.** $d(x, y) = d(y, x)$;
- d4.** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *Espaço Métrico* é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .

Exemplo 43 *Se $M = \mathbb{R}^n$, então*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

para quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , define uma métrica em M , denominada a métrica euclidiana. Um espaço \mathbb{R}^n qualquer munido da métrica euclidiana costuma ser denominado, genericamente, de espaço euclidiano.

Exemplo 44 *Este exemplo traz a métrica da convergência uniforme, ou métrica do sup, a qual utilizaremos na demonstração do teorema de existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem.*

Indicaremos com $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Definiremos agora uma métrica em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ pondo, para $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Proposição 4 *Verificando que d é uma métrica:*

- d1.** Se $f \equiv g \Rightarrow d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0$
- d2.** Se $f \neq g \Rightarrow d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| > 0$
- d3.** $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |(-1)[g(x) - f(x)]| = d(g, f)$

d4. Para provarmos a desigualdade triangular, devemos mostrar que:

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

De fato, temos que $\sup A \geq x$, $\forall x \in A$ e $\sup B \geq y$, $\forall y \in B$, então $x + y \leq \sup A + \sup B$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$, daí temos que $\sup A + \sup B$ é uma cota superior para o conjunto $A + B$.

Logo,

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| = d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

A.2.1 Espaços Métricos Completos

Definição 48 Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M, d) chama-se uma sequência de Cauchy quando, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Definição 49 Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Definição 50 Seja E um espaço vetorial normado. Se o espaço métrico (E, d) , com a métrica definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

for completo, então E é dito um espaço de Banach.

Exemplo 45 A reta e o espaço euclidiano \mathbb{R}^N são exemplos de espaço métrico completo.

Tendo posse destas definições podemos mostrar um resultado que será de grande utilidade na demonstração do Teorema de Picard.

Teorema 28 (Teorema do Ponto Fixo de Banach para Contração)

Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $T : M \rightarrow M$ uma contração, ou seja, existe uma constante $0 \leq c < 1$, tal que, para quaisquer $x, y \in M$, temos

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y).$$

Então existe um único $\bar{x} \in M$ tal que $T\bar{x} = \bar{x}$.

Prova. Existência: Seja $x_1 \in M$ e defina $x_{n+1} = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Afirmação: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, para $n > 1$, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq cd(x_{n-1}, x_n)$$

e por indução, sobre n , obtemos

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1}d(x_1, x_2).$$

Então para $1 \leq n < m$, temos

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \leq c^{n-1}d(x_1, x_2) + \dots + c^{m-2}d(x_1, x_2) = c^{n-1}d(x_1, x_2)(1 + c + \dots + c^{m-n-1}) \leq \frac{c^{n-1}d(x_1, x_2)}{1 - c}$ e como $c^n \rightarrow 0$, segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Desde que M seja completo, existe $\bar{x} \in M$ tal que $x_n \rightarrow \bar{x}$.

Afirmação: $T\bar{x} = \bar{x}$. De fato, para todo inteiro positivo temos

$$d(T\bar{x}, x_{n+1}) = d(T\bar{x}, Tx_n) \leq cd(\bar{x}, x_n)$$

e como $d(\bar{x}, x_n) \rightarrow 0$, segue que $x_n \rightarrow T\bar{x}$. Pelo teorema de unicidade do limite, temos então $T\bar{x} = \bar{x}$.

Unicidade: Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in X$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ com $T\bar{x} = \bar{x}$, $T\bar{y} = \bar{y}$. Então $0 < d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq cd(\bar{x}, \bar{y})$ e, portanto, $c \geq 1$, o que contradiz a hipótese. ■

Proposição 13 *Se $Y \subset \mathbb{R}^m$ é um espaço métrico completo então*

$$B_0(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y; f \text{ é limitada}\}$$

é um espaço métrico completo com a métrica do exemplo (44), para qualquer $X \subset \mathbb{R}^k$.

Proposição 5 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $B_0(X, Y)$. Para cada $x \in X$ fixado, a sequência $x_n = f_n(x)$ em Y também é de Cauchy, pois $|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m)$. Por ser completo, existe em Y o limite $y = \lim f_n(x)$, o que, então, define uma aplicação $y = f(x)$ de X em Y . Observe que $\{f_n\}$ converge simplesmente a f : o que queremos é mostrar que esta aplicação f é limitada e que a sequência $\{f_n\}$ converge a f no espaço métrico $B_0(X, Y)$.*

Como ocorre com sequências de Cauchy, $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $B_0(X, Y)$, de modo que podemos tomar uma aplicação $g_0 : X \rightarrow Y$ constante qualquer e $r > 0$ tais que $d(f_n, g_0) \leq r$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in E$, temos

$$|f(x) - g_0(x)| = \lim |f_n(x) - g_0(x)| \leq \lim d(f_n, g_0) \leq r,$$

de modo que $d(f, g_0) \leq r$ e, portanto, $f \in B_0(X, Y)$. Finalmente, dado $\epsilon > 0$ tomamos n_0 tal que $d(f_k, f_n) < \frac{1}{2}\epsilon$ para quaisquer $k, n \geq n_0$. Fixando $x \in X$ e $n \geq n_0$ decorre que $|f_k(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$ para cada $k \geq n_0$, de modo que

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

Assim, $d(f, f_n) < \epsilon$ para cada $n \geq n_0$, ou seja, $\lim d(f_n, f) = 0$.

Proposição 14 *Um subespaço fechado de espaço métrico completo é completo.*

Proposição 6 *Seja $Y \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em Y , existe $\lim x_n = a \in M$. Como Y é fechado em M , tem-se $a \in Y$. Logo, Y é completo.*

Proposição 15 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de aplicações $f_n : X \rightarrow Y$ contínuas que convergem uniformemente para $f : X \rightarrow Y$. Então f também é contínua.*

Proposição 7 *Dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f) < \frac{1}{3}\epsilon$. Por continuidade de f_n obtemos $\delta > 0$ tal que $|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{1}{3}\epsilon$ para qualquer $|y - x| < \delta$. Segue que,*

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

para qualquer $|y - x| < \delta$. Assim, f é contínua no ponto arbitrário x .

Dados subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, denotamos por

$$C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y; f \text{ é contínua e limitada}\}.$$

Assim, por definição, $C(X, Y)$ é um subespaço métrico de $B_0(X, Y)$ com a métrica do supremo e, pela Proposição (15) é um subconjunto fechado de $B_0(X, Y)$. Como subconjuntos fechados de completos são completos, pela Proposição (14), o seguinte corolário da Proposição (13) é imediato.

Corolário 9 *Se $Y \subset \mathbb{R}^m$ é completo, então $C(X, Y)$ é um espaço métrico completo com a métrica uniforme, para qualquer $X \subset \mathbb{R}^k$.*

O espaço métrico completo $C(X, Y)$ será utilizado para mostrar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais.

Os próximos resultados nos auxiliarão na demonstração do Teorema de Peano.

Teorema 29 (Teorema de Arzelá-Ascoli) *Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Seja \mathcal{F} uma família equicontínua de funções $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$ para toda $\phi \in \mathcal{F}$. Se F é uniformemente limitada (isto é, existe $M > 0$ tal que $|\phi| < M$ para todo $\phi \in \mathcal{F}$), então toda sequência $\{\phi_n\}$ de elementos de F possui uma subsequência $\{\phi_{n_k}\}$ uniformemente convergente em X .*

Teorema 30 (Teorema de Aproximação de Weierstrass) *Dada uma função $f : B_b[x_0] \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ contínua, então existe uma sequência de funções $f_n : B_b[x_0] \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, cujas componentes são polinômios tal que, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ uniformemente em $B_b[x_0]$.*

A.3 Campos Vetoriais

Definição 51 Um campo vetorial \vec{F} é uma aplicação $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Será conveniente interpretar $\vec{F}(X)$, $X \in \Omega$, como um vetor aplicado em X .

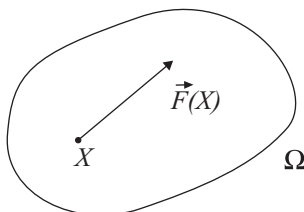


figura 5.3

Exemplo 46 Seja $\varphi(x, y, z)$ uma função escalar $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Se φ for diferenciável, então o gradiente de φ

$$\nabla\varphi = (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \dots, \varphi_{x_N})$$

é um campo vetorial.

Definição 52 Um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ denomina-se conservativo ou gradiente se existe um campo escalar diferenciável $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\varphi = \vec{F}, \text{ em } \Omega. \quad (1.1)$$

Uma função $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (1.1) denomina-se função potencial de \vec{F} .

A seguir, mostraremos um teorema que nos fornece uma condição necessária (mas não suficiente) para que um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja conservativo.

Teorema 31 Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto Ω . Uma condição necessária para \vec{F} ser conservativo é que $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$, em Ω .

Prova. Por questão de simplicidade suponhamos $n = 3$ e $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Supondo \vec{F} conservativo, existirá $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\varphi = \vec{F}, \text{ em } \Omega.$$

Como

$$\nabla\varphi = \varphi_x\vec{i} + \varphi_y\vec{j} + \varphi_z\vec{k} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \vec{F},$$

temos:

$$\begin{cases} \varphi_x = P \\ \varphi_y = Q \\ \varphi_z = R \end{cases} .$$

Como \vec{F} é de classe C^1 , resulta que φ é de classe C^2 . Assim:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}.$$

Já que φ é de classe C^2 , usando o Teorema de Schwarz, temos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

e, portanto

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \text{em } \Omega.$$

De modo análogo, conclui-se que:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Logo,

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{i} - (R_x - P_z)\vec{j} - (Q_x - P_y)\vec{k} = \vec{0}.$$

■

Teorema 32 Se $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for um campo vetorial contínuo e conservativo, se $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função potencial para \vec{F} ($\nabla \varphi = \vec{F}$) e se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ for uma curva de classe C^1 , com $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$, então:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma} \nabla \varphi \cdot d\gamma = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Prova. De fato, sendo φ uma função potencial para \vec{F} e sendo \vec{F} contínua, resulta que φ é de classe C^1 em Ω . Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(\gamma(t))) = \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Daí,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = [\varphi(\gamma(t))]_a^b = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(B) - \varphi(A).$$

■

Corolário 10 Se $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo conservativo, então

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = 0 \quad (1.2)$$

para qualquer caminho fechado $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$.

Observação 9 Campos de vetores aparecem em Mecânica, como exemplo, os campos de força. Se \vec{F} for um campo de força, então a integral (1.2) é definida como sendo o trabalho da força \vec{F} ao longo do caminho γ .

Definição 53 Dizemos que Ω é conexo por caminho quando quaisquer dois pontos A e B de Ω , existe uma poligonal contida em Ω e com extremidades em A e B .

Vimos no teorema anterior que se \vec{F} for conservativo e contínuo em Ω , então a integral de linha $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ será independente do caminho de integração em Ω . Provaremos a seguir que se $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ for independente do caminho de integração em Ω , então \vec{F} será conservativo em Ω .

Teorema 33 (Existência de função potencial): Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo no aberto conexo por caminhos Ω . Suponhamos que $\int \vec{F} \cdot d\gamma$ seja independente do caminho de integração em Ω . Seja $A \in \Omega$. Então a função $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_A^x \vec{F} \cdot d\gamma$$

é tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em Ω .

Prova. Faremos a demonstração no caso $n = 3$. Seja, então, $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Vamos provar que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \text{ e } \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R.$$

Seja $X = (x, y, z) \in \Omega$, como Ω é aberto, existe uma bola de centro X contida em Ω . Tomemos $h > 0$, tal que o segmento de extremidades X e $X + h\vec{i} = (x + h, y, z)$, esteja contido nesta bola. Temos:

$$\frac{\varphi(X + h\vec{i}) - \varphi(X)}{h} = \frac{\int_A^{X+h\vec{i}} \vec{F} \cdot d\gamma - \int_A^X \vec{F} \cdot d\gamma}{h} = \frac{\int_X^{X+h\vec{i}} \vec{F} \cdot d\gamma}{h}.$$

Seja $\gamma(t) = X + t\vec{i}$; $t \in [0, h]$; γ é uma curva ligando X a $X + h\vec{i}$. Então:

$$\int_X^{X+h\vec{i}} \vec{F} \cdot d\gamma \equiv \int_0^h \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Como $\gamma'(t) = \vec{i}$ e $F(\gamma(t)) = P(\gamma(t))\vec{i} + Q(\gamma(t))\vec{j} + R(\gamma(t))\vec{k}$, resulta $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = P(\gamma(t))$. Assim,

$$\frac{\varphi(X + h\vec{i}) - \varphi(X)}{h} = \frac{\int_0^h P(\gamma(t))dt}{h},$$

aplicando o limite, obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(X + h\vec{i}) - \varphi(X)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h P(\gamma(t))dt}{h},$$

aplicando L'Hopital:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(X + h\vec{i}) - \varphi(X)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} P(\gamma(h)) = P(\gamma(0)) = P(X).$$

Então $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(X)$. Com raciocínio idêntico, conclui-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R \text{ em } \Omega.$$

Portanto, $\nabla \varphi = \vec{F}$ em Ω . ■

Teorema 34 *Seja Ω um aberto simplesmente conexo. Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 , com $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, então \vec{F} será conservativo.*

Prova. Faremos a demonstração para $n = 2$. Basta mostrarmos que

$$P_y = Q_x \tag{1.3}$$

implica

$$\int_{\alpha} \vec{F} = 0. \tag{1.4}$$

Sem perda de generalidade podemos supor que α é um caminho fechado simples (isto é, sem intersecções). Seja D o aberto delimitado por α . A hipótese de Ω ser simplesmente conexo implica que a fronteira de D é α . O Teorema do Divergente nos diz que

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_D \text{div}(-Q, P),$$

onde $\text{div}(-Q, P) = -Q_x + P_y$. Portanto, usando a condição (1.3) obtém-se (1.4).

■

Bibliografia

- [1] Apostol, T. M.; Calculus, vol. 2, Editorial Reverté, S. A., 1967.
- [2] Guidorizzi L.H.; Um curso de Cálculo; vol. 3; Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, 2000.
- [3] Honig, S. C.; Aplicações da topologia à análise; Editora Edgard Blücher, Ltda, São Paulo, 1976.
- [4] Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA,1979.
- [5] Lima, E. L., Curso de Análise, vol. 1, Projeto Euclides, 1995.
- [6] Figueiredo, D. G., Análise I, LTC, 1996.
- [7] Figueiredo, D. G. & NEVES, A. F., Equações Diferenciais Aplicadas, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.
- [8] Doering, C. I. & LOPES, A. O., Equações Diferenciais Ordinárias, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [9] Lima, E. L., Curso de Análise, vol. 2, Projeto Euclides, 1981.
- [10] BOYCE, William E. e DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, terceira edição, Guanabara Dois, 1979.
- [11] Earl A. Coddington, An Introduction to Ordinary Differential Equations, Dover Publications, INC., 1989.
- [12] JACK K. HALE, Ordinary Differential Equations, vol. XXI, Robert E. Krieger Publishing Company, INC., 1980.
- [13] MATOS, Marivaldo P., Séries e Equações Diferenciais, Editora Prentice Hall - Grupo Pearson, 2001.
- [14] LIMA, Elon Lages. Espaços métricos, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.