UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções da Prova de Seleção do Mestrado - PGMat - 2014.2

1) (0,5) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2+10}{10k^2+10k}$ é convergente ou divergente? Justifique sua resposta.

Solução: Desde que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+10}{10k^2+10k} = \frac{1}{10} \neq 0,$$

segue-se pelo teste do $k-$ésimo termo que a série é divergente.

2) (1,0) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq t_n \leq 1$ e (x_n), (y_n) sequências de números reais. Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = a$, prove que $\lim[t_n x_n + (1-t_n)y_n] = a$.

Solução: Observe que

$$\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = a - a = 0$$

e como (t_n) é limitada, temos que $\lim t_n(x_n - y_n) = 0$. Assim, concluímos que

$$\lim[t_n x_n + (1-t_n)y_n] = \lim t_n(x_n - y_n) + \lim y_n = 0 + a = a.$$

3) (1,5) Sejam f, g, $h : X \to \mathbb{R}$ funções tais, para todo $x \in X$ se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se num ponto $a \in X \cap X'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$, mostre que existe $g'(a)$ e $g'(a) = f'(a) = h'(a)$.

Solução: Primeiro como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $f(a) = h(a)$, segue-se que $f(a) = g(a) = h(a)$. Logo para $x > a$, temos

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq \frac{h(x)-h(a)}{x-a}.$$

Então calculando o limite lateral quando $x \to a^+$ e usando o Teorema do Confronto, obtemos

$$f'_+(a) = g'_+(a) = h'_+(a).$$

De forma semelhante obtemos que

$$f'_-(a) = g'_-(a) = h'_-(a).$$

Consequentemente, desde que f e h são deriváveis em $x = a$, concluímos que g é derivável em $x = a$, e

$$f'(a) = g'(a) = h'(a).$$

4) (2,0) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo do qual x_0 é um ponto interior. Se f é derivável no ponto x_0, mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

A existência do limite acima não implica a continuidade de f no ponto x_0, nem que exista a derivada $f'(x_0)$, mesmo quando f é contínua neste ponto. Dê exemplos.

Solução: Usando o Polinômio de Taylor, temos que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$$

e

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)(-h) + r(-h),$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(-h)}{h} = 0$. Consequentemente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \left\{ f'(x_0) + \frac{r(h)}{2h} - \frac{r(-h)}{2h} \right\} = f'(x_0).$$

Contra-exemplos: Primeiro considere

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 10, & x = 1. \end{cases}$$

f não é contínua em $x = 1$, mas o limite abaixo existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h) - (2-h)}{2h} = 1.$$

Agora considere

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

g não é derivável em $x = 0$, mas o limite abaixo existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0-h)}{2h} = \frac{1}{2}.$$

De fato,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{2h} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(0+h) - g(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0-(-h)}{2h} = \frac{1}{2}.$$

5) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (2x+3y, x-2y)$:

a) (0,5) Determine uma base para a imagem de T.

Solução: Note que núcleo de T, $N(T) = \{(0,0)\}$, pois

$$T(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = 0.$$

Assim, $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e consequentemente $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $Im(T)$.

b) (0,5) T é diagonalizável? Justifique sua resposta.

Solução: O polinômio característico de T é dado por

$$P(\lambda) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

e $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda' = -\sqrt{7}$ ou $\lambda'' = \sqrt{7}$. Logo temos dois autovalores distintos $\Rightarrow T$ diagonalizável.

c) (1,0) Determine α real de modo que as retas perpendiculares em $\mathbb{R}^2$, de equações $y = \alpha x$ e $y = -x/\alpha$ sejam transformadas em retas perpendiculares pelo operador linear T.

Solução: Primeiro notemos que $v_1 = (1,\alpha)$ é um vetor diretor para reta $y = \alpha x$, e $v_2 = (1, \frac{-1}{\alpha})$ é um wetor diretor para reta $y = \frac{-1}{\alpha}x$. Então, $\langle T(v_1), T(v_2)\rangle = 0$, ou seja,

$$\langle (2+3\alpha, 1-2\alpha), (2-\frac{3}{\alpha}, 1+\frac{2}{\alpha})\rangle = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1-\sqrt{2} \text{ ou } \alpha = 1+\sqrt{2}.$$

6) (1,5) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\{u_1, ..., u_m\}$ uma base ortonormal de um subespaço W de V. Mostre que para todo $v \in V$,

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |\langle v, u_i\rangle|^2,$$

onde $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Solução: Seja $\{u_{m+1}, u_{m+2}, ...u_k\}$ uma base ortonormal de $W^\perp$, como $V = W \oplus W^\perp$, segue que $\{u_1, ..., u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, ...u_k\}$ é uma base ortonormal de V, então dado $v \in V$, temos que

$$v = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i.$$

Consequentemente,

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} |\langle v, u_i\rangle|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |\langle v, u_i\rangle|^2.$$

7) Seja $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear não-nulo de um espaço vetorial V.

a) (0,5) Mostre que existe um vetor $u \in V$ tal que $f(u) = 1$

Solução: Desde que o funcional é não nulo, existe um vetor $v_0 \in V$ tal que $f(v_0) = \delta \neq 0$. Tomando $u = \delta^{-1}v_0$, temos que

$$f(u) = f(\delta^{-1}v_0) = \delta^{-1}f(v_0) = 1.$$

b) (1,0) Mostre que $V = N(f) \oplus [u]$.
(Sugestão: resolva a equação $v = w + xu$, com $w \in Ker(f)$)

Solução: Seja $v = w + xu$, com $w \in Ker(f)$. Então,

$$f(v) = f(w + xu) = f(w) + xf(u) = 0 + x = x.$$

Note que $v = w + xu \Leftrightarrow w = v - xu$.

Assim dado $v \in V$, note que $w = v - f(v)u \in Ker(f)$, pois $f(w) = f(v - f(v)u) = f(v) - f(f(v)u) = f(v) - f(v)f(u) = f(v) - f(v) \cdot 1 = 0$.
Assim, $v = w + f(v)u$, onde $w \in Ker(f)$ e $f(v)u \in [u]$.