UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gabarito da Prova de Seleção do Mestrado - PGMat - 2015.1

1) (1,0) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2+10}{10k^3+10k}$ é convergente ou divergente? Justifique sua resposta.

Resolução: Escreva $a_k := \dfrac{k^2+10}{10k^3+10k} = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{1+\frac{10}{k^2}}{10+\frac{10}{k^2}}$ *e observe que* $\dfrac{1+\frac{10}{k^2}}{10+\frac{10}{k^2}} > \dfrac{1}{20}$, *para todo* $k \geq 1$. *Portanto, escrevendo* $b_k := \frac{1}{20k}$, *temos que* $0 < b_k < a_k$, *para todo* $k \geq 1$. *Como a série harmônica* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ *é divergente, temos que a série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *é divergente. Segue do critério da comparação que a série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *também é divergente.*

2) (1,5) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq t_n \leq 1$ e (x_n), (y_n) sequencias de números reais. Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = a$, prove que $\lim[t_n x_n + (1-t_n)y_n] = a$.

Resolução: Observe que $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = a - a = 0$. *Como* (t_n) *é limitada, temos que* $\lim t_n(x_n - y_n) = 0$. *Assim, concluímos que*

$$\lim[t_n x_n + (1-t_n)y_n] = \lim t_n(x_n - y_n) + \lim y_n = 0 + a = a\,.$$

3) (1,0) Usando o fato de que (a,b) é conexo, prove o Teorema do Valor Intermediário, que diz que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Resolução: Pela continuidade de f, *temos que todos os pontos de* x *suficientemente próximos de* a *no intervalo* $[a,b]$ *são tais que* $f(x) < d$. *Analogamente, todos os pontos de* y *suficientemente próximos de* b *no intervalo* $[a,b]$ *são tais que* $f(y) > d$. *Em particular, os conjuntos* $A = \{x \in (a,b); f(x) < d\}$ *e* $B = \{y \in (a,b); f(y) > d\}$ *são abertos não-vazios de* (a,b). *Se não existir um ponto* c *em* (a,b) *tal que* $f(c) = d$, *então* $(a,b) = A \cup B$, *em contradição com o fato de que* (a,b) *é conexo.*

4) (1,5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b). Mostre que se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é estritamente crescente em $[a,b]$.

Resolução: Devemos mostrar que, quaisquer que sejam s *e* t *em* $[a,b]$, *temos que* $s < t \implies f(s) < f(t)$. *Sejam, então,* s *e* t *em* $[a,b]$, *com* $s < t$. *Como* f *é contínua em* $[s,t]$ *e derivável em* (s,t), *segue do Teorema do Valor Médio que existe* $c \in (s,t)$ *tal que:*

$$f(t) - f(s) = f'(c)(t-s)\,.$$

Como $f'(c) > 0$, *por hipótese, e como* $t - s > 0$, *segue que* $f(t) - f(s) > 0$, *e portanto* $f(s) < f(t)$.

5) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$:

a) (0,5) Determine uma base para a imagem de T.

b) (0,5) T é diagonalizável? Justifique sua resposta.

c) (0,5) Determine α real de modo que as retas perpendiculares em $\mathbb{R}^2$, de equações $y = \alpha x$ e $y = -x/\alpha$ sejam transformadas em retas perpendiculares pelo operador linear T.

Resolução:

a) *Note que núcleo de T é dado por $N(T) = \{(0, 0)\}$, pois*

$$T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 0, y = 0.$$

Assim, $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e consequentemente $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base para $Im(T)$.

b) *O polinômio característico de T é dado por:*

$$P(\lambda) = det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

e $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda' = -\sqrt{7}$ ou $\lambda'' = \sqrt{7}$. Logo temos dois autovalores distintos $\Rightarrow T$ diagonalizável.

c) *Primeiro notemos que $v_1 = (1, \alpha)$ é um vetor diretor para reta $y = \alpha x$, e $v_2 = (1, \frac{-1}{\alpha})$ é um wetor diretor para reta $y = \frac{-1}{\alpha}x$. Então, $\langle T(v_1), T(v_2)\rangle = 0$, ou seja:*

$$\langle (2+3\alpha, 1-2\alpha), (2-\frac{3}{\alpha}, 1+\frac{2}{\alpha})\rangle = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 - \sqrt{2} \text{ ou } \alpha = 1 + \sqrt{2}.$$

6) (1,5) Sejam A e B dois espaços vetoriais e seja $F : A \to B$ uma transformação linear. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(i) F é injetiva;

(ii) O núcleo $N(F)$ de F contém apenas o vetor nulo;

(ii) F leva vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes.

Resolução: Vamos mostrar que $(i) \Leftrightarrow (ii)$ e que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

- $(i) \implies (ii)$ *Suponha F injetiva. Então $v \in N(F) \implies F(v) = 0 = F(0) \implies v = 0$. Logo $N(F) = \{0\}$.*
- $(ii) \implies (i)$ *Suponha $N(F) = \{0\}$. Então $F(v) = F(v') \implies F(v - v') = 0 \implies v - v' = 0 \implies v = v'$. Logo F é injetiva.*
- $(ii) \implies (iii)$ *Suponha $N(F) = \{0\}$. Dados $v_1, \ldots, v_n \in A$ vetores L.I., vamos mostrar que $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ são vetores L.I. em B. De fato, se $\alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = 0$, então $F(\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n) = 0$, e então $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0$. Como $v_1, \ldots, v_n$ são L.I., segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Portanto $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ são L.I.*

- *(iii)* $\implies$ *(ii) Suponha que a transformação linear F leva vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes. Seja $v \neq 0$ um vetor não nule em A. Então o conjunto unitário $\{v\}$ é L.I., e portanto $\{F(v)\}$ é L.I. em B. Então $F(v) \neq 0$. Logo $N(F) = \{0\}$.*

7) Sejam A e B espaços vetoriais de dimensões finitas.

   a) (0,5) Enuncie o Teorema do Núcleo e da Imagem.

   b) (0,5) Mostre que se $\dim A = \dim B$ e se $F : A \to B$ é uma transformação linear, então F é injetiva se, e somente se, F é um isomorfismo.

   Resolução:

   a) *Teorema: Sejam A e B espaços vetoriais de dimensões finitas. Para toda transformação linear $F : A \to B$ tem-se $\dim(A) = \dim N(F) + \dim Im(F)$.*

   b) *Seja $n = \dim A = \dim B$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $n = \dim N(F) + \dim Im(F)$. Logo $N(F) = \{0\}$ se, e somente se, $\dim Im(F) = n$, ou seja, $Im(F) = B$.*

8) (1,0) Mostre que num espaço vetorial E com produto interno, todo conjunto ortogonal X de vetores não-nulos é linearmente independente.

   Resolução: Sejam $v_1, \dots, v_n \in X$. Temos $< v_i, v_j >= 0$ se $i \neq j$. Se $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = 0$ é uma combinação linear nula desses vetores, então, para cada $i = 1, \dots, n$ tomamos o produto interno de ambos os membros dessa igualdade por v_i, e temos:

$$\alpha_1 < v_1, v_i > + \cdots + \alpha_n < v_n, v_i >= 0\,.$$

   Logo $\alpha_i < v_i, v_i >= \alpha_i |v_i|^2 = 0$, e portanto $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.