Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

As Condições de Serre e o Critério Jacobiano

Johnny Albert dos Santos Lima

João Pessoa – PB
Julho de 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

As Condições de Serre e o Critério Jacobiano

por

Johnny Albert dos Santos Lima

sob a orientação do

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo

João Pessoa – PB
Julho de 2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732c Lima, Johnny Albert Dos Santos.
As condições de Serre e o critério jacobiano / Johnny Albert Dos Santos Lima. - João Pessoa, 2018.
58 f.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. profundidade. 2. condições de Serre. 3. critério Jacobiano. 4. potência simbólica de um ideal. I. Título

UFPB/CCEN

As Condições de Serre e o Critério Jacobiano

por

Johnny Albert dos Santos Lima [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 31 de Julho de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves– UFRPE
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Wállace Mangueira de Sousa– UFPB
(Examinador Externo ao Programa)

[1] O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

À minha mãe e minha irmã pelo incentivo.

A meus amigos Jonison e Reillon, que me ajudaram com sugestões e com a teoria.

Aos professores do departamento de matemática, em especial o professor Ricardo Burity que teve a gentileza em me orientador durante toda essa dissertação e também pelas suas críticas construtivas que contribuíram pra o meu desenvolvimento.

Aos professores que participaram de minha banca de dissertação.

Aos meus amigos, em especial aqueles que estiveram presente durante todo o mestrado.

A Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos duas importantes ferramentas da Álgebra Comutativa: as condições de Serre e o critério jacobiano. Posteriormente, exploraremos aplicações que visam caracterizar anéis normais e apresentar um cálculo efetivo para obtenção das potências simbólicas de um ideal via matrizes jacobianas.

Palavras-chave: profundidade, condições de Serre, critério Jacobiano, potência simbólica de um ideal.

Abstract

In this work we will present two important tools of the Commutative Algebra: the Serre's conditions and the Jacobian criterion. Later, we will explore applications that aim to characterize normal rings and present an effective calculation to obtain the symbolic powers of an ideal via Jacobian matrices.

Keywords: depth, Serre's conditions, Jacobian criterion, symbolic power of an ideal.

Sumário

Introdução **2**

1 Preliminares **4**

1.1 Sequências Regulares e Módulos Cohen-Macaulay 4

1.1.1 Profundidade de um Módulo 4

1.1.2 Módulos Cohen-Macaulay 7

1.2 Potências Simbólicas de um ideal 13

2 Critério Jacobiano e Condições de Serre **18**

2.1 Sobre fecho inteiro de anéis 18

2.2 Critério Jacobiano 22

2.3 Condições de Serre 30

3 Aplicações **36**

3.1 Módulos planos 36

3.2 Potências Infinitesimais 41

3.2.1 O método recursivo 42

A Resultados auxiliares **46**

Referências Bibliográficas **48**

Notações

Neste trabalho A denota, a menos de menção contrária, um anel comutativo e com unidade. A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $(a_1, \ldots, a_n)$ denota o ideal gerado pelos elementos $a_1, \ldots, a_n$ do anel A;
- $\sqrt{I}$ denota o radical de I;
- $\mathrm{gr}_I(A)$ denota o anel graduado associado;
- $\mathrm{Ass}(M)$ denota o conjunto dos ideais primos associados do A-módulo M;
- $\mathrm{Min}(M)$ denota o conjunto dos primos minimais do A-módulo M;
- $\mathrm{ht}(I)$ denota a altura do ideal I;
- $\dim(A)$ denota a dimensão de Krull do anel A;
- $\mathcal{Z}(A)$ denota o conjunto dos divisores de zero de A.
- $(I : J)$ denota o ideal condutor de J em I, onde I e J são ideais;
- $\overline{A}$ denota o fecho inteiro do anel A.
- $\mu(I)$ denota o número mínimo de geradores do ideal I;
- $\mathcal{N}(A)$ denota o Nilradical de A;
- $\mathrm{Max}(A)$ denota o conjunto dos ideais maximais do anel A.
- $\mathrm{Spec}(A)$ denota o conjunto dos ideais primos do anel A;
- $\mathrm{Supp}(M)$ denota o suporte de M;

- $\mathrm{Ann}(M)$ denota o anulador de M;
- $I_h(M)$ denota o ideal gerado pelos menores $h \times h$ da matriz M;
- $\mathrm{Sing}(A)$ denota o local singular de A;
- $\mathcal{C}(k)$ denota a característa do corpo k;
- $I^{<n>}$ denota a n-ésima potência infinitesimal de I;
- $I^{(n)}$ denota a n-ésima potência simbólica de I.
- $\kappa(P)$ denota o corpo de frações de A/P
- $V(J)$ denota o conjunto dos ideais primos de A que contém o ideal J

Introdução

Em Álgebra Comutativa, as condições de Serre (R_k) e (S_k), introduzidas pelo matemático francês Jean-Pierre Serre, compõe uma ferramenta que formaliza condições necessárias e suficientes para que um anel Noetheriano A ser normal. Já o critério Jacobiano é uma ferramenta que estabelece regularidade para anéis locais. Ambos os critérios fundamentam-se na teoria como principais técnicas quando o interesse é determinar aspectos sobre normalidade e regularidade, sendo destacados principalmente por seus aspectos práticos de cunho computacional. Sem dúvida, tais resultados remetem a diversas aplicações, dentre as quais, destacaremos neste trabalho, como explorá-los a fim de exibir cálculos efetivos para obtenção das potências simbólicas de um ideal fixado. Assim, o nosso objetivo nesse trabalho será exibir algumas noções básicas para que possamos entender como podemos explorar essas ferramentas.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentaremos as noções básicas de profundidade de um módulo, em especial, trataremos dos módulos Cohen-Macaulay, introduzindo algumas propriedades que serão úteis para os principais resultados desse trabalho. Em um segundo momento, exploraremos a definição de potência simbólica de um ideal I bem como se comporta esse conceito de potência em um anel Cohen-Macaulay.

No segundo capítulo, exploraremos alguns resultados elementares sobre fecho inteiro de anéis e anéis regulares, destacando algumas propriedades que caracterizam certos anéis. Em seguida, apresentaremos o critério Jacobiano, com o objetivo de exibir algumas consequências relacionadas a regularidade. E por fim, estudaremos as Condições de Serre (R_0), (S_1) e (R_1), (S_2), visando estabelecer critérios sobre normalidade.

No terceiro capítulo, temos como objetivo principal, fazer uso do que foi explorado nos capítulos anteriores. Assim, discutiremos um pouco o conceito de módulos planos e como podemos utilizá-lo para justificar em especial, se condições de Serre (R_k) e (S_k) são preservadas quando estamos considerando um homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ entre anéis locais. Definiremos também o local singular de um anel A a partir do qual, com o uso do Critério Jacobiano, exibiremos como podemos relacionar o ideal Jacobiano e as Condições de Serre (R_k) e (S_k). Para finalizar o capítulo introduziremos o conceito de *potência infinitesimal*, com o objetivo de relacioná-lo com a potência simbólica de um

ideal I radical e assim mostrar um método via matrizes Jacobianas que nos permita calcular de maneira mais efetiva a n-ésima potência simbólica, para qualquer que seja n inteiro não negativo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos nosso estudo sobre Módulos Cohen-Macaulay e Potências Simbólicas de um ideal I a fim de solidificar a teoria, visando explorar as noções e resultados necessários para apresentar os principais teoremas dos capítulos seguintes.

As principais referências deste capítulo foram Simis (13), Villarreal (15) e Swanson e Huneke (14)

1.1 Sequências Regulares e Módulos Cohen-Macaulay

Inicialmente, exploraremos o conceito de *profundidade*, invariante algébrico fundamental para o entendimento das condições de Serre e o critério Jacobiano.

1.1.1 Profundidade de um Módulo

Definição 1.1. Seja M um A-módulo. Dizemos que um elemento $x \in A$ é M- *regular (ou não divisor de zero em M)* se $xm = 0$ implicar que $m = 0$, com $m \in M$.

Uma sequência $\{x_1, ..., x_n\}$ de elementos em A será chamada de M- *sequência regular* quando:

i. $M \neq (x_1, \ldots, x_n)M$;

ii. x_{i+1} é um elemento $\frac{M}{(x_1,\ldots,x_i)M}$- regular, para $i = 0, \ldots, n-1$

Denotando $M_k := M/(x_1, \ldots, x_k)M$, a condição ii. é equivalente a afirmar que a aplicação A-linear

$$\phi_{x_{k+1}} : M_k \to M_k$$

$$\overline{m} \mapsto x_{k+1}\overline{m}$$

é injetiva para cada $k = 0, \ldots, n-1$.

Sejam A um anel Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e I um ideal de A tal que $IM \neq M$. Segue da injetividade da aplicação $\phi_{x_{k+1}}$ definida acima que para qualquer $\{x_1, \ldots, x_n\}$ M-sequência regular tem-se $(x_1, \ldots, x_k)M \neq (x_1, \ldots, x_{k+1})M$, para todo $k = 0, ..., n-1$. Sendo A anel Noetheriano, segue que qualquer M-sequência regular $\{x_1, \ldots, x_n\}$ com $x_i \in I$ pode ser estendida a uma sequência de comprimento máximo, isto é, a uma $\{x_1, \ldots, x_m\}$ contida em I $(m \geq n)$ M-sequência regular tal que todo $x \in I$ não é $M/(x_1, \ldots, x_m)M$-regular.

Sob certas hipóteses, o lema a seguir permite permutarmos uma M-sequência regular e ainda assim obtermos uma M-sequência regular.

Lema 1.1. Se $\{x, y\}$ é uma M-sequência regular e y não é divisor de zero de M, então $\{y, x\}$ também é uma M-sequência regular.

Demonstração. De fato, suponhamos por absurdo que x não é M/yM- regular, então existe $m \in M$ tal que $m \notin yM$ com $xm = ym'$ para algum $m' \in M$. Como $\{x, y\}$ é M-regular temos que $m' \in xM$ e assim, $m' = xm''$ para algum $m'' \in M$. Assim, $xm = ym' = yxm''$ o que implica que $x(m - ym'') = 0$, como x é M-regular temos que $m = ym'' \Rightarrow m \in yM$, o que é um absurdo. Logo $\{y, x\}$ é M-regular. □

Proposição 1.2. Qualquer duas M-sequências regulares maximais em I tem o mesmo comprimento.

Demonstração. Entre todas as M-sequências regulares maximais em I existe uma com o número mínimo de elementos n. Mostraremos o resultado por indução em n. Se $n = 0$, então I contém apenas divisores de zero, e não há nada a se mostrar. Suponhamos então $n > 0$, e sejam $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma M-sequência regular maximal em I, e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ outra M-sequência regular em I. Devemos mostrar que I consiste apenas de divisores de zero de $M/(y_1, \ldots, y_n)M$.

Se $n = 1$ então I consiste apenas de divisores de zero de M/x_1M. Logo, existe $m \in M$ tal que $Im \subseteq x_1M$ com $m \notin x_1M$. Em particular, $y_1m = x_1m'$ para algum $m' \in M$. Se tivéssemos $m' \in y_1M$ então teríamos $m' = y_1m'' \Rightarrow y_1m = x_1y_1m'' \Rightarrow y_1(m - x_1m'') = 0 \Rightarrow m = x_1m''$ já que para o caso $n = 1$, temos y_1 não é divisor de zero em M, e consequentemente $m \in x_1M$, o que é um absurdo, logo $m' \notin y_1M$. Como $x_1Im' = y_1Im \subseteq x_1y_1M$ temos que $Im' \subseteq y_1M$, já que x_1 não é divisor de zero de M, e portanto I consiste apenas de divisores de zero de M/y_1M.

Se $n > 1$, denotemos por $M_i = M/(x_1, \ldots, x_i)M$ e $M_i' = M/(y_1, \ldots, y_i)M$, $i = 0, \ldots, n-1$ e tomemos $z \in I$ tal que z não é divisor de zero de M_i e M_i' para todo $i = 0, \ldots, n-1$. A escolha do elemento z é possível, já que o conjunto dos divisores de zero de M_i e M_i' é a união (finita) dos primos associados de M_i e M_i' e I não

está contido em nenhum desses primos associados, já que se estivésse, teríamos que I consiste apenas de divisores de zero de M.

Logo, pelo lema anterior obtemos que $\{z, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ e $\{z, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ são M-sequências regulares em I, onde $\{z, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ é maximal desde que $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, z\}$ é maximal considerando o caso $n = 1$ aplicado a M_{n-1}, conforme argumento precedente. Então $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ e $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ são M/zM-sequências regulares em I, sendo a primeira maximal, por hipótese de indução, temos que a segunda também é maximal. Mas se $\{y_1, \ldots, y_{n-1}, z\}$ é uma M-sequência regular maximal, então $\{y_1, \ldots, y_n\}$ também será, novamente pelo caso $n = 1$. Como queríamos demonstrar. $\square$

A proposição motiva a seguinte definição:

Definição 1.2. Sejam A um anel Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e I um ideal de A tal que $IM \neq M$. O número de elementos de uma M-sequência regular maximal em I é chamado de *profundidade de I em M*, o qual denotaremos por $\operatorname{prof}(I, M)$.

Se $(A, \mathfrak{M})$ é um anel Noetheriano local, então $\operatorname{prof}(\mathfrak{M}, M)$ é chamada *profundidade de M* e escrevemos simplesmente $\operatorname{prof}(M)$. Em particular, definimos $\operatorname{prof}(A)$, como a profundidade do anel A.

Notemos que $\operatorname{prof}(I, M) = 0$ é equivalente a I consistir apenas de divisores de zero de M. Além do mais, se $(A, \mathfrak{M})$ é um anel Noetheriano local, então $\operatorname{prof}(M) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{M} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Em geral, a I-profundidade de M pode ser tomada como o ínfimo entre as profundidades de P em M para todo P primo associado de M/IM. Como mostra a proposição abaixo.

Proposição 1.3. Sejam M um A-módulo e I um ideal em A tal que $IM \neq M$. Então

$$\operatorname{prof}(I, M) = \inf\{\operatorname{prof}(P, M), P \in \operatorname{Ass}(M/IM)\}.$$

Demonstração. Seja $P \in \operatorname{Ass}(M/IM)$, o que implica que $I \subset (0 : M/IM) \subset P$. Logo,

$$\operatorname{prof}(I, M) \leq \operatorname{prof}(P, M).$$

Então, basta mostrarmos que $\operatorname{prof}(I, M) = \operatorname{prof}(P, M)$ para algum $P \in \operatorname{Ass}(M/IM)$. Sejam $k = \operatorname{prof}(I, M)$ e $\underline{x} = x_1, \ldots, x_k$ uma M-sequência maximal em I. Então $I \subset \mathcal{Z}(M/\underline{x}M)$, logo $I \subset \tilde{P}$ para algum $\tilde{P} \in \operatorname{Ass}(M/\underline{x}M)$. Mas,

$$(0 : M) \subset (0 : M/\underline{x}M) \subset \tilde{P},$$

donde $I + (0 : M) \subset \tilde{P}$. Como $\sqrt{(0 : M/IM)} = \sqrt{I + (0 : M)}$, tem-se que $(0 : M/IM) \subset \tilde{P}$, e assim $\tilde{P}$ contém algum P primo associado de M/IM. Logo,

$$\operatorname{prof}(P, M) \leq \operatorname{prof}(\tilde{P}, M).$$

Como queríamos demonstrar. □

Finalizamos esta seção com uma consequência imediata da definição de profundidade de um módulo que tem utilização frequente.

Proposição 1.4. Sejam A um anel Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e $I \subseteq A$ tal que $IM \neq M$. Se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma M-sequência regular em I, então

$$\operatorname{prof}(I, M/(x_1, \ldots, x_n)M) = \operatorname{prof}(I, M) - n.$$

1.1.2 Módulos Cohen-Macaulay

Uma primeira propriedade interessante envolvendo a noção de profundidade de um módulo sobre um anel local Noetheriano é que este invariante é sempre menor ou igual que a dimensão de Krull do módulo, quando estes invariantes são iguais chamamos o módulo de *Cohen-Macaulay*. Módulos Cohen-Macaulay tem propriedades algébricas muito importantes, por exemplo, um anel A Cohen-Macaulay é, em particular, *catenário*, característica que permite um melhor controle da altura de seus ideais.

Definição 1.3. A *dimensão* de um módulo M sobre um anel A é a dimensão de Krull de $A/\operatorname{Ann}(M)$.

Proposição 1.5. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel Noetheriano local e M um A-módulo finitamente gerado. Então

$$\operatorname{prof}(M) \leq \dim(M).$$

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada em (5 , Proposição 3.9, pág. 185).

Definição 1.4. Seja M um A-módulo não nulo finitamente gerado sobre um anel A Noetheriano. Se $(A, \mathfrak{M})$ é local, diremos então que M é um módulo *Cohen-Macaulay* quando $\operatorname{prof}(M) = \dim(M)$.

Em geral, diremos que M é um módulo Cohen-Macaulay se o $A_{\mathfrak{m}}$-módulo $M_{\mathfrak{m}}$ é Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$.

Um anel A será dito *Cohen-Macaulay* se o for como A-módulo.

O próximo resultado fornece propriedades iniciais dos módulos Cohen-Macaulay que caracterizam tais módulos.

Proposição 1.6. Seja M um A-módulo finitamente gerado. Então, M é Cohen-Macaulay se satisfaz umas das seguintes condições equivalentes:

1. $\operatorname{prof}(M_P) = \dim(M_P)$, para todo $P \in \operatorname{Supp}(M)$;
2. $\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{m}}) = \dim(M_{\mathfrak{m}})$, para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp}(M)$ com $\mathfrak{m}$ ideal maximal;
3. $\operatorname{prof}(\mathfrak{m}, M) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}/(0:M))$, para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp}(M)$ com $\mathfrak{m}$ ideal maximal;
4. $\operatorname{prof}(P, M) = \operatorname{ht}(P/(0:M))$, para todo $P \in \operatorname{Supp}(M)$;
5. $\operatorname{prof}(I, M) = \operatorname{ht}(I/(0:M))$, para todo ideal I contendo $(0:M)$.

Demonstração. A implicação $1 \Rightarrow 2$ é imediata.

$2 \Rightarrow 3$ Se $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp}(M)$ então $\mathfrak{m}M \neq M$. Logo, $\operatorname{prof}(\mathfrak{m}, M) = \operatorname{prof}(M_{\mathfrak{m}})$. Por outro lado,

$$\dim(M_{\mathfrak{m}}) = \dim(A_{\mathfrak{m}}/(0:M_{\mathfrak{m}})) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}/(0:M))_{\mathfrak{m}} = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}/(0:M)).$$

Assim, $\operatorname{prof}(\mathfrak{m}, M) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}/(0:M))$.

$3 \Rightarrow 4$ Sem perda de generalidade, podemos supor que $(A, \mathcal{M})$ é local e suponhamos por contradição que existe P que pode ser escolhido máximo possível tal que a igualdade não ocorre. Por hipótese,

$$P/(0:M) \neq \mathcal{M}/(0:M) \Rightarrow P \neq \mathcal{M}.$$

Seja $a \in \mathcal{M} \backslash P$. Logo, $\operatorname{prof}((P,a), M) \leq 1 + \operatorname{prof}(P, M)$. Por outro lado, temos $\operatorname{ht}((P,a)/(0:M)) \geq 1 + \operatorname{ht}(P/0:M)$. Como $\operatorname{prof}(P, M) \leq \operatorname{ht}(P/(0:M))$, então

$$\operatorname{prof}((P,a), M) \leq 1 + \operatorname{prof}(P, M) \leq 1 + \operatorname{ht}(P/(0:M)) \leq \operatorname{ht}((P,a)/(0:M)),$$

isto é,

$$\operatorname{prof}((P,a), M) < \operatorname{ht}((P,a)/(0:M)),$$

Logo, $P \subsetneq (P,a)$ o que contradiz a maximalidade de P.

$4 \Rightarrow 5$ Segue diretamente da igualdade $\operatorname{prof}(I, M) = \inf\{\operatorname{prof}(P, M), P \in \operatorname{Ass}(M/IM)\}$.

$5 \Rightarrow 1$ Dado $P \in \mathrm{Supp}(M)$ tem-se que

$$\mathrm{prof}(P, M) \leq \mathrm{prof}(M_P) \leq \dim(M_P) = \dim(A_P/(0 : M_P)) = \mathrm{ht}(P/(0 : M)).$$

Como $\mathrm{prof}(P, M) = \mathrm{ht}(P/(0 : M))$ a igualdade desejada é imediata.

□

As condições 1. e 2. implicam que toda localização de um módulo Cohen-Macaulay também é Cohen-Macaulay, isto é, a propriedade de um módulo ser Cohen-Macaulay não é perdida após localização.

Exemplo 1.1. Qualquer anel de dimensão 0 é Cohen-Macaulay.

Exemplo 1.2. Se $(A, \mathfrak{M})$ é um anel Noetheriano local reduzido de dimensão 1 então A é Cohen-Macaulay. De fato, em um anel reduzido o conjunto dos divisores de zero de A é a união finita dos primos minimais, sendo $\dim(A) = 1$, existe um elemento $x \in \mathfrak{M}$ que não é divisor de zero de A. Dessa forma, temos que $\{x\}$ é uma A-sequência regular, consequentemente, $\mathrm{prof}(A) = 1$ e A é Cohen-Macaulay.

Exemplo 1.3. Seja k um corpo. O anel $A = \mathrm{k}[x, y]/(x^2, xy)$ não é Cohen-Macaulay. Basta notar que sua localização $A_{\mathfrak{m}}$ no ideal maximal $\mathfrak{m} = (x, y)$ não é Cohen-Macaulay. De fato, todo elemento $z \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = (x, y)$ é divisor de zero já que $x \neq 0$ mas $zx = 0$. Logo, $\mathrm{prof}(A_{\mathfrak{m}}) = 0$, e isso implica que A não é Cohen-Macaulay.

O resultado seguinte nos permite analisar os primos associados de um módulo Cohen-Macaulay.

Proposição 1.7. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local e $M \neq 0$ um A-módulo finitamente gerado. Então, $\mathrm{prof}(M) \leq \dim(A/P)$ para todo $P \in \mathrm{Ass}(M)$.

Demonstração. Procederemos por indução em $\dim(A/P)$. Se $\dim(A/P)$=0, então $P = \mathfrak{M}$ o que implica que $\mathfrak{M} \in \mathrm{Ass}(M) \Rightarrow \mathrm{prof(M)} = 0$. Suponhamos então que $\dim(A/P) \geq 1$. Podemos supor que $\mathrm{prof}(M) \geq 1$, do contrário não há nada o que provar. Seja $x \notin \mathcal{Z}(M)$ com $x \in \mathfrak{m}$. Em particular, $x \notin P$. Afirmamos que existe um ideal primo $P_1 \in \mathrm{Ass}(M/xM)$ tal que (P, x) está contido em P_1. De fato, como $P \in \mathrm{Ass}(M)$, existe $y \in M\backslash\{0\}$ tal que $P = (0 : y)$. Como $\bigcap_{n\geq 0} x^n M = 0$, existe um $k \geq 0$ tal que $y \in x^k M\backslash x^{k+1}M$. Assim, $y = x^k z$ para algum $z \in M\backslash xM$, resulta $Pz = (0)$. Assim, $(P, x)z$ está contido em xM o que implica que (P, x) está contido em P_1, para algum $P_1 \in \mathrm{Ass}(M/xM)$. Portanto $\dim(A/P_1) < \dim(A/P)$. Logo pela hipótese de indução, temos

$$\mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}(M/xM) + 1 \leq \dim(A/P_1) + 1 \leq \dim(A/P) - 1 + 1 = \dim(A/P).$$

□

Quando o módulo M é Cohen-Macaulay, a Proposição (1.7) garante que M não tem primos imersos, isto é, $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Min}(M)$. De fato, como

$$\mathrm{prof}(M) \leq \dim(A/P) \leq \dim(M)$$

a proposição segue imediatamente do fato de M ser Cohen-Macaulay.

O lema seguir tem um impacto similar ao clássico teorema da Base de Hilbert, no sentido de que é preservada a propriedade de Cohen-Macaulicidade do anel de polinômios $A[x]$ quando A é Cohen-Macaulay.

Lema 1.8. Se A é um anel Cohen-Macaulay, então $A[x]$ também é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Seja $P \subset A[x]$ é um ideal primo. Como $A[x]_P$ é uma localização de $A_{P\cap A}[x]$, podemos supor que A é local com ideal maximal $\mathfrak{M} = P \cap A$. Assim, temos $A[x]/\mathfrak{M}A[x] \simeq A/\mathfrak{M}[x]$, anel de polinômios sobre um corpo. Logo, $P = \mathfrak{M}[x]$ ou $P = (\mathfrak{M}, f)$ para algum polinômio mônico f de grau positivo. Como A é Cohen-Macaulay, considere $x_1, \ldots, x_n$ uma A-sequência regular maximal em $\mathfrak{M}$, sendo $n = \dim(A)$. Como $y \in \mathcal{Z}(A[x])$ implica $y \in \mathcal{Z}(A)$, com $y \in A$, segue que $x_1, \ldots, x_n$ é $A[x]$-sequência regular. Assim, $x_1, \ldots, x_n$ é uma $A[x]_P$-sequência regular e portando $\mathrm{prof}(PA[x]_P, A[x]_P) \geq n$. Analisemos agora os casos $P = \mathfrak{M}A[x]$ e $P = (\mathfrak{M}, f)$ separados. Se $P = \mathfrak{M}A[x]$, basta mostrarmos que $\dim(A[x]_{\mathfrak{M}[x]}) \leq \dim(A)$. De fato, temos que

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{M}[x]) = \mathrm{ht}\mathfrak{M} = \dim(A) \Rightarrow \dim(A[x]_{\mathfrak{M}[x]}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{M}[x]_{\mathfrak{M}[x]}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{M}[x]) = \dim(A) = n.$$

No segundo caso, como f é mônico então temos que $f \notin \mathcal{Z}(A[x]_P/(x_1, \ldots, x_n)A[x]_P)$. Logo, $\mathrm{prof}(PA[x]_P, A[x]_P) \geq n + 1 = \dim(A) + 1 = \dim(A[x]) \geq \dim(A[x]_P)$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 1.9 (Macaulay)**.** *Se k é um corpo, então $k[x_1, \ldots, x_n]$ é Cohen-Macaulay.*

A seguir apresentaremos a noção de *sistema de parâmetros* de um módulo. Esta noção é crucial para teoria, em particular, via o Teorema de Krull-Chevalley-Samuel (1.10), determinar um sistema de parâmetros para um módulo M é equivalente a determinar a dimensão de M.

Definição 1.5. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local e M um A-módulo finitamente gerado. Uma sequência $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de A é um *sistema de parâmetros* de M se n é

o menor inteiro que satisfaz a condição:

$$\mathrm{Supp}(M/(x_1, \ldots, x_n)M) = \{\mathfrak{M}\},$$

denotemos n por $\delta(M)$.

A demonstração do teorema a seguir será omitida aqui, mas pode ser encontrada em (9, Teorema 13.4, pág. 98).

Teorema 1.10. (Teorema da Dimensão) *Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local e M um A-módulo. Então,*

$$\dim(M) = \delta(M).$$

Como consequência do Teorema da Dimensão segue o seguinte resultado:

Proposição 1.11. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local e M um A-módulo de dimensão n. Se $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{M}$ é um sistema de parâmetros de M, então para $i = 1, \cdots, n$, tem-se

$$\dim(M/(x_1, \ldots, x_i)M) = d - i.$$

A proposição a seguir nos fornecerá uma caracterização para módulos Cohen-Macaulay envolvendo a noção de sistema de parâmetros.

Proposição 1.12. Seja M um módulo de dimensão n sobre um anel local $(A, \mathfrak{M})$ e seja $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n$ um sistema de parâmetros de M. Então M é Cohen-Macaulay se, e somente se, $\underline{x}$ é uma M-sequência regular.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos M Cohen Macaulay e seja P um primo associado de M. Então $\dim(M) = \dim(A/P)$. Mostraremos que $x_1 \notin P$. Suponhamos por contradição que $x_1 \in P \Rightarrow (x_1)_P \in P_P$. Afirmamos que $(M/x_1M)_P \neq 0$. De fato, se tivéssemos $(M/x_1M)_P = 0$, teríamos, $M_P = (x_1)_P M_P$, logo, pelo lema de Nakayama, $M_P = 0$, o que é uma contradição com a escolha de P. Logo,

$$(M/x_1M)_P \neq 0 \Rightarrow P \in \mathrm{Supp}(M/x_1M),$$

mas como $\dim(M/x_1M) = n - 1$ tem-se $\dim(A/P) = n - 1$, o que é uma contradição. Portanto, x_1 não está em P e x_1 é regular em M. Procedendo por indução e usando o fato que M/x_1M é Cohen-Macaulay de dimensão $n - 1$ juntamente com o fato de $x_2, \ldots, x_n$ formarem um sistema de parâmetro de M/x_1M em $A/(x_1)$, o resultado segue.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\underline{x}$ é uma M-sequência regular, então pela Proposição (1.11) temos que $\dim(M/\underline{x}M) = n-n = 0$ e portanto, $M/\underline{x}M$ é Cohen-Macaulay. Logo, M é Cohen-Macaulay. Como queríamos demonstrar.

□

Em um anel Cohen-Macaulay, ideais que são gerados por uma sequência regular, isto é, as *interseções completas*, possuem propriedades interessantes. Umas das propriedades que mostraremos a seguir, é que neste caso, todos os primos associados a tal ideal têm a mesma altura.

Definição 1.6. Seja A um anel e I um ideal de A. Se I é gerado por uma sequência A-regular dizemos então que I é uma *interseção completa*.

Definição 1.7. Um ideal I de um anel A é dito *unmixed* se $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(P)$ para todo $P \in \mathrm{Ass}(A/I)$.

Proposição 1.13. Seja $(A, \mathfrak{M})$ um anel Cohen-Macaulay e seja I um ideal de A. Se I é uma interseção completa então A/I é Cohen-Macaulay e I é unmixed.

Demonstração. Seja $n = \dim(A)$ e $k = \mathrm{ht}(I)$. Como I é uma interseção completa, então temos que $\dim(A/I) = n - k$ e $\mathrm{prof}(A/I) = \mathrm{prof}(A) - k$. Por A ser Cohen-Macaulay, tem-se $\mathrm{prof}(A/I) = n - k$. Logo $\mathrm{prof}(A/I) = \dim(A/I)$ e portanto A/I é Cohen-Macaulay. Como A/I é Cohen-Macaulay, para cada $P \in \mathrm{Ass}(A/I)$ segue que $\dim(A/P) = \mathrm{prof}(A/I) = n - k$, daí,

$$\dim(A) - \mathrm{ht}(P) \geq n - k,$$

logo, $\mathrm{ht}(P) \leq k$, e assim, $\mathrm{ht}(P) = k$, portanto I é unmixed. □

Em outra perspectiva, as proposições a seguir, garantirão que se I é um ideal em um anel A-Cohen Macaulay, então I contém uma sequência A-regular de tamanho $\mathrm{ht}(I)$.

Proposição 1.14. Seja A um anel Cohen-Macaulay e I um ideal próprio de A de altura k. Se I é gerado por k elementos, $x_1, \ldots, x_k$, então, I é unmixed.

Demonstração. Pela Proposição (1.13), basta que mostremos que I não tem primos imersos, visto que pelo Teorema do Ideal Principal de Krull A.4, todo primo minimal de I tem altura k. Sejam P e Q primos associados de A/I quaisquer e assumamos sem perda de generalidade que $P \subset Q$. Então $I_Q \subset P_Q \subset Q_Q$. Por hipótese temos que I é gerado por k elementos, portanto I_Q também é gerado por k elementos e $\mathrm{ht}(I_Q) = k$, implicando que $x_1/1, \ldots, x_k/1$ é parte de um sistema de parâmetros de A_Q. Como A_Q é Cohen-Macaulay, pela Proposição (1.12) então $x_1/1, \ldots, x_k/1$ é uma sequência regular,

ou seja, mostramos que I_Q é uma interseção completa. Novamente pela Proposição 1.13, concluímos que I_Q é unmixed. Como P_Q e Q_Q são primos associados de $A_Q/I_Q \Rightarrow \mathrm{ht}(Q_Q) = \mathrm{ht}(P_Q)$. Pelo fato de $P_Q \subset Q_Q$ segue que $P_Q = Q_Q$, logo, $Q = P$. Assim, I não tem primos imersos, como queríamos demonstrar. □

Proposição 1.15. Seja I um ideal de altura k em um anel Cohen-Macaulay A, então existe uma sequência regular em I de tamanho k.

Demonstração. Por indução suponhamos que $x_1, \ldots, x_j$ é uma sequência regular em I com $j < k$. Logo $(x_1, \ldots, x_j)$ é unmixed pela Proposição1.14. Se $I \subset \mathcal{Z}(A/(x_1, \ldots, x_j))$, então $\mathrm{ht}(I) = j$, o que é uma contradição. Portanto, existe x_{j+1} em I que é $A/(x_1, \ldots, x_j)$-regular módulo $(x_1, \ldots, x_j)$. Como queríamos demonstrar. □

Finalizamos esta seção introduzindo o conceito de anel catenário, que como já foi mencionado anteriormente é uma característa que permite um melhor controle da altura de seus ideais. Em particular em um domínio catenário local A, podemos garantir a igualdade

$$\dim(A) = \dim(A/P) + \mathrm{ht}(P), \forall\ P \in \mathrm{Spec}(A).$$

Definição 1.8. Seja A um anel Noetheriano. Dizemos que A é um anel *catenário*, se para cada par de ideais primos $P \subset Q$ em A, $\mathrm{ht}(Q/P)$ é igual ao comprimento de qualquer cadeia maximal de ideais primos entre P e Q.

Se A é domínio, então A é catenário se, e somente se, $\mathrm{ht}(Q/P) = \mathrm{ht}(Q) - \mathrm{ht}(P)$.

Um fato notável é que os conceitos de anéis Cohen-Macaulay e catenários estão conectados. Como afima o teorema abaixo, anéis Cohen-Macaulau são catenários.

Teorema 1.16. *Se A é um anel Cohen-Macaulay, então A é catenário.*

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada em (2, Teorema 2.1.12, pág. 62).

1.2 Potências Simbólicas de um ideal

Um conceito importante para o desenvolvimento desse trabalho, é o conceito de potência simbólica de um ideal. No decorrer desta seção, apresentaremos resultados que serão de importante uso quando estivermos tratando de potência infinitesimal a ser definida posteriormente.

Definição 1.9. Seja I um ideal de A. Para cada inteiro não negativo n, a *n-ésima potência simbólica de I*, denotada por $I^{(n)}$, é definida como a interseção de todas as componentes P-primárias de I^n tais que $P \in \mathrm{Min}(A/I)$.

Ou seja,

$$I^{(n)} = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r,$$

onde Q_i é componente primária de I^n correspondente a P_i.

A seguinte proposição nos mostra uma forma equivalente de apresentarmos a n-ésima potência simbólica de I.

Proposição 1.17. Sejam I um ideal próprio de um anel A e $S = R \backslash \bigcup_{i=1}^{r} P_i$, onde $P_1, P_2, \ldots, P_r$ são os primos minimais de I. Então

$$I^{(n)} = S^{-1}I^n \cap A, \text{ para } n \geq 1.$$

Demonstração. Seja $I^n = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r \cap Q_{r+1} \cap \cdots \cap Q_{s-1} \cap Q_s$ uma decomposição primária de I^n onde Q_j, para $0 \leq j \leq r$, são as componentes primárias primárias de I^n correspondente à P_j e Q_i, para $r+1 \leq i \leq s$, são as componentes primárias imersas de I^n. Assim,

$$S^{-1}I^n = S^{-1}Q_1 \cap S^{-1}Q_2 \cap \cdots \cap S^{-1}Q_r \cap S^{-1}Q_{r+1} \cap \cdots \cap S^{-1}Q_{s-1} \cap S^{-1}Q_s$$

Notemos que $P_i \cap S \neq \emptyset$, para $r+1 \leq i \leq s$, e como Q_i é primário então devemos ter $S^{-1}Q_i = S^{-1}A$. Portanto,

$$S^{-1}I^n = S^{-1}Q_1 \cap S^{-1}Q_2 \cap \cdots \cap S^{-1}Q_r.$$

Notemos que

$$S^{-1}Q_i \cap A = Q_i,$$

quando Q_i é um ideal primário. Dessa forma, obtemos

$$S^{-1}I^n \cap A = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r = I^{(n)}.$$

Como queríamos demonstrar.

□

Supondo que I é um ideal radical, podemos calcular a $I^{(n)}$ apenas em termos de $P_j^{(n)}$, onde P_j são primos minimais de I, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.18. Sejam I um ideal radical de A e $P_1, P_2, \ldots, P_m$ primos minimais de I. Então

$$I^{(n)} = P_1^{(n)} \cap P_2^{(n)} \cap \cdots \cap P_m^{(n)}, \text{ para } n \geq 1.$$

Demonstração. Seja

$$I^n = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m \cap Q_{m+1} \cap \cdots \cap Q_s$$

uma decomposição primária de I^n, onde Q_i é P_i-primário para $i \leq m$ e Q_i é uma componente imersa de I^n para $i > m$. Localizando I^n em P_i, obtemos:

$$I^n{}_{P_i} = Q_{1P_i} \cap Q_{2P_i} \cap \cdots \cap Q_{mP_i} \cap Q_{m+1P_i} \cap \cdots \cap Q_{sP_i} = Q_{iP_i} \tag{1.1}$$

Como $I = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_m$ obtemos também que:

$$I^n{}_{P_i} = (I_{P_i})^n = (P_{iP_i})^n = P_i^n{}_{P_i} \tag{1.2}$$

Usando (1.1) e (1.2), tem-se que $P_i^n{}_{P_i} = Q_{iP_i}$. Desta forma, $P_i^{(n)} = Q_i$.

Portanto,

$$I^{(n)} = P_1^{(n)} \cap P_2^{(n)} \cap \cdots \cap P_m^{(n)}$$

Como queríamos demonstrar.

□

É imediato da definição de potência simbólica que $I^n \subset I^{(n)}$ para $n \geq 0$ e que $I^{(1)} = I$ se, e somente se, I não tem primos imersos. O exemplo a seguir exibe a inclusão própria $I^n \subsetneq I^{(n)}$.

Exemplo 1.4. Seja $A = k[x, y, z]$ e $I = (xy, xz, yz)$. Apresentando I em sua decomposição primária obtemos

$$I = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z)$$

Logo, $\mathrm{Ass}(A/I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$. Por outro lado, a decomposição primária de I^2 é dada por

$$I^2 = (x^2, y^2, z^2) \cap (x^2, y^2, xy) \cap (x^2, z^2, xz) \cap (y^2, z^2, yz).$$

Logo, $\mathrm{Ass}(A/I^2) = \{(x, y), (x, z), (y, z), (x, y, z)\}$. Portanto, I^2 está contido propriamente em $I^{(2)}$.

Uma questão importante na teoria das potências simbólicas é sobre investigar classes de ideias em que a igualdade $I^n = I^{(n)}$ ocorre.

Definição 1.10. Um ideal $I \subsetneq A$ é dito *normalmente livre de torção* se $\mathrm{Ass}(A/I^i)$ está contido em $\mathrm{Ass}(A/I)$, para todo $i \geq 1$.

Quando I não tem primos imersos, a proposição a seguir nos mostra uma caracterização em termos da n-ésima potência simbólica de I para quando o ideal I é normalmente livre se torção.

Proposição 1.19. Seja I um ideal de A. Se I não tem primos imersos, então I é normalmente livre de torção se, e somente se, $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos que I é normalmente livre de torção. Afirmamos que todo primo minimal de I é um primo minimal de I^n. De fato, suponhamos por contradição que existe Q primo minimal de I de modo que Q não é primo minimal de I^n, isto é, existe P ideal primo tal que $I^n \subset P$ e $P \subsetneq Q$. Por outro lado, $I \subset \sqrt{I^n} \subset P$, logo Q é tal que $I \subset P$ e $P \subsetneq Q$, isto é, Q não é primo minimal de I, o que é um absurdo. Logo,

$$\mathrm{Min}(A/I) \subset \mathrm{Min}(A/I^n).$$

Como I não tem primos imersos, isto é, $\mathrm{Min}(A/I) = \mathrm{Ass}(A/I)$, segue-se que todo primo associado de I é primo minimal de I^n. Pelo fato que I é normalmente livre de torção obtemos que $\mathrm{Ass}(A/I) = \mathrm{Ass}(A/I^n)$ e portanto I^n não tem primos imersos. Logo concluímos que I^n tem uma única decomposição primária minimal e portanto $I^n = I^{(n)}$.

$\Leftarrow$) Sejam $P_1, \ldots, P_k$ os primos associados de I. Por hipótese, P_i é primo minimal de I para todo i, logo temos

$$\mathrm{Ass}(A/I^n) = \mathrm{Ass}(A/I^{(n)}) = \{P_1, \ldots, P_k\},$$

Logo I é normalmente livre de torção, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 1.20. Seja I um ideal de um anel Cohen-Macaulay A. Se I é gerado por uma sequência regular, então $I^{(n)} = I^n$ para $n \geq 1$.

Demonstração. Seja $x_1, \ldots, x_r$ uma sequência regular que gera I. Assim pelo Teorema do Ideal Principal A.4, temos que $\mathrm{ht}(I) = r$ e portanto I é unmixed pelo Teorema (1.14). Do Teorema (A.1), existe um isomorfismo de anéis graduados

$$\phi : B = (A/I)[t_1, \ldots, t_r] \to \bigoplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1}, t_i \to x_i + I^2$$

onde B é um anel de polinômios com coeficientes em A/I. Notemos que I^i/I^{i+1} é um A/I-modulo livre, pois é isomorfo a B_i, onde B_i é i-ésima compontente graduada de B. Assim

$$\mathrm{Ass}_A(I^i/I^{i+1}) = \mathrm{Ass}_A(A/I).$$

Usando agora a sequência exata

$$0 \to I^i/I^{i+1} \to A/I^{i+1} \to A/I^i \to 0$$

segue por indução que $\mathrm{Ass}_A(A/I^n) \subset \mathrm{Ass}_A(A/I)$ para $n \geq 1$. Portanto, I é normalmente livre de torção e pela Proposição (1.19) temos que $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Na seção anterior, quando I é uma interseção completa em um anel Cohen-Macaulauy A, propriedades como *unmixed* e A/I Cohen-Macaulay são adquiridas a estes ambientes. Investigaremos algumas propriedades quando o conceito de interseção completa é local, isto é, quando I_P é uma interseção completa para todo ideal primo P em A que contém I.

Definição 1.11. Um ideal próprio I de A é dito ser *localmente uma interseção completa* se I_P é uma interseção completa para todo $P \in V(I)$.

Em um ambiente Cohen-Macaulay, supondo que I é primo, a proposição a seguir nos fornece mais uma condição suficiente para as potências ordinária e simbólica de I coincidirem.

Proposição 1.21. Sejam A um anel Cohen-Macaulay e I um ideal primo. Se I é localmente uma interseção completa, então $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Pela Proposição (1.19), basta mostrarmos que $\mathrm{Ass}(A/I^n) \subset \mathrm{Ass}(A/I)$. Seja então P um primo associado de A/I^n, então temos que P_P é um primo associado de $A_P/{I^n}_P$. Como I é localmente uma interseção completa então pela Proposição (1.20) temos que I_P é normalmente livre de torção, isto é, $\mathrm{Ass}(A_P/{I^n}_P) \subset \mathrm{Ass}(A_P/I_P)$ para todo $n \geq 1$. Como I é primo, temos que I_P é primo e portanto $\mathrm{Ass}(A_P/I_P) = \{I_P\}$. Dessa forma, $P_P = I_P$ e usando novamente o fato de I ser primo, temos que $P = I$. Logo, $\mathrm{Ass}(A/I^n) \subset \mathrm{Ass}(A/I)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Capítulo 2

Critério Jacobiano e Condições de Serre

2.1 Sobre fecho inteiro de anéis

Baseada em Swanson e Huneke (14) e Atiyah (1), esta seção tem como objetivo apresentar alguns fatos básicos sobre *fecho inteiro* de um anel.

O conceito de fecho inteiro é a ideia básica para que possamos estudar a normalidade de um anel. Dito isto, provaremos alguns resultados fundamentais que serão de grande utilidade quando estirvemos tratando de anéis normais e as condições de Serre na próxima seção.

Definição 2.1. Sejam A um anel e S uma A-álgebra contendo A. Um elemento $x \in S$ é dito ser *inteiro* sobre A se existe um inteiro n e elementos $r_1, \ldots, r_n \in A$ tais que

$$x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_n = 0.$$

Essa equação é chamada *equação de dependência inteira (integral)* de x sobre A.

Observação: Note que a equação de dependência inteira não necessariamente é única. Por exemplo, sejam S o anel $\mathbb{Z}[t]/(t^2 - t^3)$, onde t é uma variável sobre $\mathbb{Z}$ e A o subanel de S gerado por por t^2 sobre $\mathbb{Z}$. Então $t \in S$ é inteiro sobre A e satisfaz as duas equações quadráticas $x^2 - t^2 = 0 = x^2 - xt^2$.

A próxima proposição nos garante que integrabilidade é uma propriedade do tipo *local-global*. O resultado segue imediatamente da definição acima, portanto omitiremos a demonstração.

Proposição 2.1. Seja $A \subseteq S$ uma extensão de anéis e $x \in S$. Então as seguintes condições são equivalentes:

1. x é inteiro sobre A.

2. Para todo sistema multiplicativo W de A, x é inteiro sobre $W^{-1}A$.

3. Para todo P ideal primo de A, x é inteiro sobre A_P.

4. Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, x é inteiro sobre $A_{\mathfrak{m}}$.

Por definição todo elemento de A é inteiro sobre A. Assim, uma questão interessante é investigar quando os elementos que são inteiros sobre A pertencem a A.

Definição 2.2. Seja $A \subseteq S$ uma inclusão de anéis. O conjunto de todos elementos de S que são inteiros sobre A é chamado *fecho inteiro de* A em S. Se todo elemento de S é inteiro sobre A, diremos então que S é *integralmente fechado sobre* A.

Quando S é o anel total de frações de um anel reduzido A, o fecho inteiro de A em S é também chamado de *fecho inteiro de* A. O anel reduzido A é dito ser *integralmente fechado* se o fecho inteiro de A é o próprio A.

Denotaremos o fecho inteiro de A por $\overline{A}$.

A proposição a seguir garante em particular que $\mathbb{Z}$ e anéis de polinômios sobre um corpo são integralmente fechados.

Proposição 2.2. Um domínio de fatoração única A é integralmente fechado.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$, com a/b no fecho inteiro de A. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a e b não tem fatores em comum diferentes da unidade. Seja $x^n + r_1x^{n-1} + \cdots + r_n = 0$ uma equação de dependência inteira de a/b sobre A. Então,

$a^n + r_1ba^{n-1} + \cdots + r_nb^n = 0 \Rightarrow a^n = -(r_1ba^{n-1} + \cdots + r_nb^n) \in (b)$. Assim, $a^n \in (b)$. Mas como A é domínio de fatoração única, b necessariamente é uma unidade, o que implica que $a/b \in A$. $\square$

Em uma extensão inteira $A \subseteq S$ todo ideal maximal em A pode ser visto como um ideal da forma $A \cap Q$, sendo Q é um ideal maximal em S, como mostra o lema abaixo.

Lema 2.3. Se $A \subseteq S$ é uma extensão inteira, então $Q \in \operatorname{Spec}(S)$ é maximal em S se, e somente se, $Q \cap A$ é maximal em A. Se $A \subseteq S$ é uma extensão inteira de domínios inteiros, então A é corpo, se e somente se S é corpo.

Demonstração. Para demonstrar esse lema, vamos mostrar primeiro a segunda parte e a primeira segue do fato que $A/(Q \cap A) \subseteq S/Q$ é uma extensão inteira de domínios.

$\Rightarrow$) Suponhamos que A é corpo e seja x um elemento não nulo de S. Então, existem r_i em A, tais que $x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_{n-1}x + r_n = 0$. Como A é domínio, podemos supor então que r_n é não nulo. Portanto, dividindo a equação por $r_n x$ obtemos:

$$r_n{}^{-1}x^{n-1} + r_1 r_n{}^{-1}x^{n-2} + \cdots + r_{n-1}r^{n-1} + x^{-1} = 0.$$

Implicando que

$$-(r_n{}^{-1}x^{n-1} + r_1 r_n{}^{-1}x^{n-2} + \cdots + r_{n-1}r^{n-1}) = x^{-1}.$$

Logo, $x^{-1} \in S$ e portanto S é corpo.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que S é corpo. Seja x é um elemento não nulo em A, então $x^{-1} \in S$ e é inteiro sobre A. Portanto, existem $r_i \in A$, temos

$$x^{-n} + r_1 x^{-n+1} + \cdots + r_n = 0.$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por x^{n-1}, temos que $x^{-1} \in A$, e assim A é corpo, como queríamos demonstrar.

□

Lema 2.4 (Truque do determinante)**.** Sejam A um anel, M um A-módulo finitamente gerado, $\phi : M \to M$ um homomorfismo de A-módulos e I um ideal de A tal que $\phi(M) \subseteq IM$. Então, existem r_i em I^i, tais que

$$\phi^n + r_1\phi^{n-1} + \cdots + r_n = 0.$$

Demonstração. Seja $\{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de geradores de M. Então para cada $\phi(m_i) \subseteq IM$, devemos ter $\phi(m_i) = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}m_j$ para $a_{ij} \in I$, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}\phi - a_{ij})m_j = 0.$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Interpretando a igualdade acima como um produto de matrizes e multiplicando ambos o lados da igualdade pela matriz adjunta de $(\delta_{ij}\phi - a_{ij})$ segue que o determinante $\det(\delta_{ij}\phi - a_{ij})$ anula cada m_i, portanto é o endomorfismo nulo. Como $\det(\delta_{ij}\phi - a_{ij})$ é uma função da forma $\phi^n + r_1\phi^{n-1} + \cdots + r_n = 0$, com $r_i \in I^i$, o lema segue de imediato.

□

O próximo lema é uma generalização para a teria de anéis do fato de teoria de corpos que afirma que uma extensão algébrica finitamente gerada sobre um corpo k é um espaço vetorial de dimensão finita sobre este corpo.

Lema 2.5. Seja $A \subseteq S$ uma inclusão de anéis e sejam $x_1, \ldots, x_n \in S$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo $1 \leq i \leq r$, x_i é inteiro sobre A;
2. $A[x_1, \ldots, x_n]$ é um A-submódulo finitamente gerado de S;
3. Existe um A-módulo $M \subseteq S$ não nulo finitamente gerado tal que $x_i M \subseteq M$ para cada $1 \leq i \leq n$ e tal que M é um $A[x_1, \ldots, x_n]$-módulo fielmente plano.

A demonstração do lema anterior pode ser encontra em (14, Lema 2.1.9, pág. 26).

Em geral investigar os elementos de $\overline{A}$ não é uma tarefa simples. Neste sentido, o corolário a seguir nos fornece um resultado estrutural para o fecho inteiro de um anel reduzido no anel total de frações.

Corolário 2.6. Sejam A um anel Noetheriano reduzido e $P_1, \ldots, P_r$ os primos minimais de A. O fecho inteiro de A no seu anel total de frações é o produto direto $\overline{A/P_1} \times \cdots \times \overline{A/P_r}$, onde $\overline{A/P_j}$ é o fecho inteiro de A/P_j no seu corpo de frações $\kappa(P_i)$.

Demonstração. O anel total de frações K de A é o anel obtido através de A por inverter os elementos de A que não estão nos primos minimais de A. Assim, K é o produto direto de $\kappa(P_i)$. Observemos que

$$A \subseteq A/P_1 \times A/P_2 \times \cdots \times A/P_r$$

é um modulo finitamente gerado fielmente plano contido em K, que é inteiro sobre A pelo Lema (2.5).

Como $\overline{A/P_1} \times \overline{A/P_2} \times \cdots \times \overline{A/P_r}$ é inteiro sobre $(A/P_1) \times (A/P_2) \times \cdots \times (A/P_r)$ temos que $\overline{A/P_1} \times \overline{A/P_2} \times \cdots \times \overline{A/P_r}$ é inteiro sobre A. Portanto, $\overline{A/P_1} \times \overline{A/P_2} \times \cdots \times \overline{A/P_r}$ está contido no fecho inteiro de A. Mas, notemos que $\overline{A/P_1} \times \overline{A/P_2} \times \cdots \times \overline{A/P_r}$ é integralmente fechado, pois se $(k_1, \ldots, k_r) \in K = \kappa(P_i) \times \ldots \times \kappa(P_r)$, então a equação de dependência inteira de $(k_1, \ldots, k_r)$ sobre $(A/P_1) \times (A/P_2) \times \ldots \times (A/P_r)$ é o produto de equações de dependência inteira de cada k_i sobre A/P_i. Assim, para todo $i = 1, \ldots, r$ $k_i \in \overline{A/P_i}$. Logo, $\overline{A/P_1} \times \overline{A/P_2} \times \cdots \times \overline{A/P_r}$ é integralmente fechado e disso concluímos que $\overline{A/P_1} \times \overline{A/P_2} \times \cdots \times \overline{A/P_r}$ é o fecho inteiro de A. $\square$

A seguir definiremos a noção de *normalidade* de um anel reduzido. Um importante objetivo é apresentar caracterizações desta definição via as condições de Serre.

Geometricamente, o conceito de normalidade se traduz em termos de regularidade, precisamente: variedades normais são regulares em codimensão 1. Em particular, curvas normais são não singulares.

Definição 2.3. Um anel A Noetheriano é dito ser *normal* se ele é reduzido e é integralmente fechado no seu anel total de frações.

2.2 Critério Jacobiano

Nesta seção, baseado em Vilarreal (15), Swanson e Huneke (14) e Bruns (2), introduziremos o critério Jacobiano e exploraremos algumas das suas consequências. Como o critério Jacobiano se resume a determinar a regularidade de um anel, iremos primeiro trabalhar esse conceito de anel regular.

Definição 2.4. Seja $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano. Diremos que A é um *anel regular* se $\mathfrak{M}$ é gerado por um sistema de parâmetros; e assim tal sistema de parâmetros será denominado por sistema de *parâmetros regular*.

Equivalentemente, a regularidade caracteriza-se por dizer que o anel local A é regular se, e somente se, $\mu(\mathfrak{M}) = \dim(A)$. Quando A não é local, diremos que A é anel regular se A_P for anel regular, para todo ideal primo P em A.

Exemplo 2.1. Segue diretamente da definição de anel regular, que um anel A de dimensão zero é regular, se e somente se, A é um corpo.

Um fato importante que podemos observar é que anéis regulares são domínios:

Proposição 2.7. Se $(A, \mathfrak{M})$ é um anel local regular, então A é um domínio.

Demonstração. Façamos a demonstração por indução sobre $n = \dim(A) = \mu(\mathfrak{M})$. Se $\dim(A) = 0$, então A é um corpo e portanto domínio. Suponhamos então que $\dim(A) > 0$ e seja $x \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^2$. Como $\dim(A/(x)) < \dim(A)$, pela hipótese de indução temos que $A/(x)$ é domínio e, portanto, (x) é um ideal primo. Notemos que $(x) \in \mathrm{Min(A)}$ a menos que A seja domínio. Com efeito, seja então $P \subsetneq (x)$ um ideal primo de A. Dado $p \in P$, segue que $p = xp_1$, para algum $p_1 \in A$. Como $x \notin P$ e P é primo, temos que $p_1 \in P$. Assim $p_1 = xp_2$, para algum $p_2 \in A$ e consequentemente $p_2 \in P$ donde $p = x^2p_2$. Proseguindo com esse raciocínio, obtemos que

$$P \subseteq \bigcap_{n \geq 0} (x)^n = 0.$$

Logo, $P = 0$ e assim mostramos que todo $x \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^2$ gera um primo minimal de A. Isto é,

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^2 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_r,$$

onde P_i são os primos minimais de A para $i \in \{1, \ldots, r\}$. Pelo lema da esquiva, segue-se que $\mathfrak{M} \subseteq P_i$, para algum i, logo $\dim(A) = 0$; o que é uma contradição. Assim, $(x) \notin \mathrm{Min(A)}$ e, portanto, A é um domínio. Como queríamos demonstrar. □

A condição de regularidade é uma hipótese forte, adiante destacaremos mais algumas propriedades sobre anéis regulares, dentre as quais a Cohen-Macaulicidade.

Corolário 2.8. Se $(A, \mathfrak{M})$ é um anel local regular, então A é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ um sistema minimal de geradores de $\mathfrak{M}$. Mostraremos que $x_1, \ldots, x_n$ é uma A-sequência. Ora, como $x_1, \ldots, x_n$ é um sistema minimal de geradores de $\mathfrak{M}$, pela regularidade de A, tem-se que tal sistema é um sistema de parâmetros regular e assim $A/(x_1, \ldots, x_i)$ é também regular para cada i. Portanto, $A/(x_1, \ldots, x_i)$ é um domínio pela Proposição (2.7), assim, segue que x_{i+1} é regular em $A/(x_1, \ldots, x_i)$. Portanto, A é um anel Cohen-Macaulay. □

Proposição 2.9. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local regular e $I \neq A$ um ideal de A. Se A/I é um anel local regular, então I é uma interseção completa.

Demonstração. Seja $\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_k}\}$ um conjunto de geradores de $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/I$, sendo $\overline{x_i} = x_i + I$ e $k = \dim(A/I)$. Notemos que a imagem de $x_1, \ldots, x_k$ em $\overline{\mathfrak{M}}/\overline{\mathfrak{M}}^2$ é uma base para $\overline{\mathfrak{M}}/\overline{\mathfrak{M}}^2$ como um espaço vetorial sobre $A/\mathfrak{M}$. Portanto,

$$x_1 + \mathfrak{M}^2, \ldots, x_k + \mathfrak{M}^2$$

são linearmente independente em $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$. Denotemos por $n = \dim(A)$ e $\mathfrak{M}' = (x_1, \ldots, x_k)$. Como A é um anel regular então $n = \dim_{A/\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2)$, portanto pela igualdade $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + I$ tem-se que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + J$, com $J = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ ideal contido em I. Pelo Corolário 2.8, A é anel Cohen-Macaulay e portanto, $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência regular. Para finalizarmos a prova, mostraremos que $I = J$. De fato, notemos que A/J é um anel local de dimensão k e consequentemente, regular. Assim, pela Proposição 2.7, temos que R/J é um domínio. Como $\dim(A/I) = k$, temos que o homomorfismo canônico

$$\phi : R/J \to R/I$$

é um isomorfismo, logo, $I = J$. Como queríamos demonstrar.

□

A noção de regularidade de um anel local pode ser interpretada geometricamente como *pontos não singulares*, em um ambiente particular, tem-se precisamente: dado $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio irredutível sobre um corpo algebricamente fechado k. Um ponto P da hipersuperfície $X = V(f)$ é dito *não singular* se existe i tal

que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$. Assim, sendo $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(f)$ e $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de A correspondente ao ponto P, então, P é não singular se, e somente, se $A_{\mathfrak{m}}$ é um anel local regular.

Nesse contexto, essencialmente, o *critério jacobiano* nos fornerá condições para garantirmos regularidade via informações da matriz jacobiana do ideal que define o anel quociente em questão.

Definição 2.5. Sejam $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo k e $I = (f_1, \ldots, f_r)$ um ideal. A matriz Jacobiana de I é a matriz

$$\mathcal{J} = (\partial f_i / \partial x_j).$$

Se $\mathrm{ht}(I) = g$, o *ideal Jacobiano* $J = J_{A/k}$ de I é o ideal gerado pelos menores $g \times g$ da matriz Jacobiana $\mathcal{J} = (\partial f_i / \partial x_j)$

Exemplo 2.2. Sejam k um corpo, $A = k[x, y]$ e $I = (xy, y - x^2)$. A matriz Jacobiana de I é dada por

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} y & x \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\mathrm{ht}(I) = 2$, então o ideal Jacobiano de I é o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz $\mathcal{J}$, isto é, $J = (y + 2x^2)$.

Teorema 2.10. (Critério Jacobiano) *Sejam k um corpo e A uma k-algebra finitamente gerada equidimensional, isto é, o anel quociente de A por qualquer primo minimal de A tem mesma dimensão. Sejam J o ideal Jacobiano $J_{A/k}$ e P um ideal primo de A. Se J não está contido em P, então A_P é um anel regular.*

Reciprocamente, se A_P é um anel regular e $\kappa(P)$ é separável sobre k, então J não está contido em P.

Demonstração. Sejam $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ e $(f_1, \ldots, f_m)$ um ideal de S tal que $A = S/(f_1, \ldots, f_m)$. Como A é equidimensional e $S = k[x_1, \ldots, x_n]$, todos os primos minimais sobre $(f_1, \ldots, f_m)$ tem a mesma altura. Denotaremos por h a altura desses primos minimais. Seja agora Q a pré-imagem de P em S.

Suponhamos que J não está contido. Então, a menos de reindexação podemos supor que os menores da submatriz da matriz Jacobiana consistindo das primeiras h colunas por h linhas não estão contidos em Q.

Afirmamos que $f_1, \ldots, f_h$ são elementos de Q cujas imagens são linearmente independente no espaço vetorial QS/Q^2S_Q. De fato, sejam $r_1, \ldots, r_h \in S$ tais que

$\sum_{i=1}^{h} \overline{r_i f_i} = \overline{0}$. Daí, $\sum_{i=1}^{h} r_i f_i \in Q^2 S_Q$. Logo, existe $s \in S \backslash Q$ satisfazendo

$$s \sum_{i=1}^{h} r_i f_i \in Q^2.$$

Derivando essa última expressão em relação à x_j, obtemos

$$\sum_{i=1}^{h} s r_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{h} \frac{\partial (s r_i)}{\partial x_j} f_i \in Q, \tag{2.1}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto, em A_P, temos que $\sum_{i=1}^{h} r_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in P, \forall\ j = 1, \ldots, n$. De maneira mais explícita, obtemos

$$\begin{gathered} r_1 \tfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + r_h \tfrac{\partial f_h}{\partial x_1} \in P \\ r_1 \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + r_h \tfrac{\partial f_h}{\partial x_2} \in P \\ \vdots \\ r_1 \tfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + r_h \tfrac{\partial f_h}{\partial x_n} \in P \end{gathered}$$

Desta forma, passando ao ambiente A_P/P_P, obtemos uma relação de dependência linear sobre as colunas $h \times h$ da submatriz. Pela hipótese sobre P, temos que essa relação só pode ser a trivial e portanto $r_j \in P$ para todo $j = 1, \ldots, h$ e isso prova a afirmação.

Como S_Q é um anel local regular, pela afirmação acima, temos que $f_1, \ldots, f_h$ é parte de um sistema de parâmetros regular em S_Q. Segue que $(f_1, \ldots, f_h)S_Q$ é um ideal primo tal que $\mathrm{ht}((f_1, \ldots, f_k)S_Q) = h$. Como A é equidimensional, segue que

$$\mathrm{ht}((f_1, \ldots, f_m)S_Q) = \mathrm{ht}((f_1, \ldots, f_h)S_Q) \Rightarrow (f_1, \ldots, f_m)S_Q = (f_1, \ldots, f_h)S_Q.$$

Logo, $A_P = (S/(f_1, \ldots, f_h))_Q$ é um anel regular.

Reciprocamente, suponhamos que $\kappa(P)$ é separável sobre k e A_P é regular. Pelo Critério de MacLane (A.2), podemos escolher $x_i \in \kappa(P)$ tais que $k \subseteq k(x_1, \ldots, x_t)$ é uma extensão transcedente e $k(x_1, \ldots, x_t) \subseteq \kappa(P)$ é extensão algébrica separável. Pelo teorema do Elemento Primitivo (A.3), existe $p(Y) \in k[x_1, \ldots, x_t][Y]$, elemento separável em Y satisfazendo

$$\kappa(P) = k(x_1, \ldots, x_t)[Y]/(p(Y)).$$

Desta forma, $J_{\kappa(P)/k}$ é o ideal gerado por $\frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_t}, \frac{\partial p}{\partial Y}$. Como $\frac{\partial p}{\partial Y}$ é não nulo, podemos garantir que $J_{\kappa(P)/k}$ é não nulo.

Por hipótese, A_P é regular, assim podemos escolher $f_1, \ldots, f_h \in S$ tal que o ideal $I = (f_1, \ldots, f_h)$ tem altura h, $f_1, \ldots, f_h$ é uma parte de sistema de parâmetros regular em S_Q e $A_P = (k[x_1, \ldots, x_n]/I)_Q$. Como $\kappa(P) = \kappa(Q)$ é um quociente regular de A_P, então existem $g_1, \ldots, g_s \in S$ tais que

$$\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_h, g_1, \ldots, g_s) = h + s = \dim(S_Q) = \mathrm{ht}(Q),$$

e tal que depois de localizarmos em Q, $S/(f_1, \ldots, f_h, g_1, \ldots, g_s)$ é igual à $\kappa(Q)$. Calculando o ideal Jacobiano de $\kappa(P)$ sobre k, obtemos que

$$J_{\kappa(P)/k} = I_{h+s}\left(\frac{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)}{\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)}\right)\kappa(P) \subseteq I_h\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\kappa(P) = J_{A/k}\kappa(P).$$

Como $J_{\kappa(P)/k}$ é não nulo segue-se que $J_{A/k}$ não está contido em P. Como queríamos demonstrar.

□

Lema 2.11. Sejam A um anel I um ideal. Se I é *unmixed* e P é um ideal primo tal que $I \subset P$, então I_P é unmixed e $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(I_P)$.

Demonstração. Seja $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ uma decomposição primária do ideal I. Suponha que $\sqrt{Q_i} \subset P$ para $i = 1, \ldots, s$. Assim,

$$I_P = \bigcap_{i=1}^{s} Q_{iP}.$$

Desta forma, os primos associados de I_P são $\sqrt{Q_{iP}}$, com $i \leq s$. Além disso, note que $\mathrm{ht}(\sqrt{Q_{iP}}) = \mathrm{ht}(\sqrt{Q_i}) = \mathrm{ht}(I)$ para $i \leq s$. □

Desta forma, como o ideal Jacobiano J de I é o ideal gerado pelos menores $g \times g$ da matriz Jacobiana $\mathcal{J} = (\partial f_i/\partial x_j)$, sendo $\mathrm{ht}(I) = g$, podemos reescrever o Critério Jacobiano do seguinte modo:

Teorema 2.12. *Seja $B = A/I$ um anel quociente, onde $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel de polinômios sobre um corpo k, e seja $I = (f_1, \ldots, f_q) \subset A$ um ideal unmixed. Se $P \subset A$ é um ideal primo contendo I e $\tilde{P} = P/I$, temos:*

1. *Se posto$(\partial f_i/\partial x_j)(P) = ht(I_P)$, então $B_{\tilde{P}}$ é anel regular.*

2. *Se k é um corpo perfeito e $B_{\tilde{P}}$ é regular, então*

$$posto(\partial f_i/\partial x_j)(P) = ht(I_P).$$

onde $(\partial f_i/\partial x_j)(P)$ *denota a matriz Jacobiana de* I *módulo* P.

Proposição 2.13. Sejam A um anel de polinômios sobre um corpo k e I um ideal unmixed de altura g. Se J é o ideal Jacobiano de I e $\mathrm{ht}(I,J) \geq g+2$, então $(A/I)_{\tilde{P}}$ é regular para todo primo $\tilde{P}$ de A/I tal que $\mathrm{ht}(\tilde{P}) \leq 1$.

Demonstração. Seja $\tilde{P} = P/I$, onde P é um ideal primo de A que contém I. Se $(A/I)_{\tilde{P}}$ não é regular, pelo critério Jacobiano (2.10) devemos ter $(J+I)/I \subset \tilde{P}$ implicando que $(J,I) \subset P$. Sendo A um anel Cohen-Macaulay e I é unmixed por hipótese. Assim devemos ter

$$\mathrm{ht}(P) = \begin{cases} g, & \text{se} \quad \mathrm{ht}(\tilde{P}) = 0, \\ g+1, & \text{se} \quad \mathrm{ht}(\tilde{P}) = 1. \end{cases}$$

Desta forma, $(J+I)/I \subset \tilde{P}$ então $\mathrm{ht}(I,J) \leq \mathrm{ht}(P) \leq g+1$, o que é uma contradição. Logo, $(A/I)_{\tilde{P}}$ é regular para todo primo $\tilde{P}$ tal que $\mathrm{ht}(\tilde{P}) \leq 1$, como queríamos demonstrar. □

Uma primeira consequência prática do Critério do Jacobiano é o seguinte teste para detectar ideais radicais ([16]):

Sejam k um corpo e $I = (f_1, \ldots, f_q) \subseteq A = k[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal de altura g. Seja J o ideal Jacobiano de I gerado pelos menores $g \times g$ da matriz Jacobiana $\mathcal{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$.

Teorema 2.14. *(Vasconcelos) Se* k *é um corpo perfeito e* I *é um ideal unmixed, então* I *é um ideal radical se, e somente se, existe um elemento* $f \in J \backslash I$ *tal que* $(I : f) = I$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos, por contradição, que $I \subsetneq (I : f)$, $\forall\ f \in J \backslash I$. Então, para cada $f \in J \setminus I$, existe $x \in (I : f)$ com $x \notin I$, mas isso significa que $xf \in I \Rightarrow \overline{fx} = \overline{0}$. Como $x \notin I$ tem-se que $f \in \mathcal{Z}(A/I)$, isto é, $J \subseteq \mathcal{Z}(A/I)$. Sejam $P_1, \ldots, P_n$ os primos associados de A/I. Então, $J \subseteq P_j$ para algum $j = 1, \ldots, n$, já que $\mathcal{Z}(A/I) = \cup_{j=1}^{n} P_j$. Assim,

$$(J+I)/I \subseteq P_j/I = \tilde{P}_j$$

e portando pelo Critério do Jacobiano $(A/I)_{\tilde{P}_j}$ não é regular. Mas, por hipótese I é radical, assim $I_{P_j} = P_{j\,P_j}$. Daí, $(A/I)_{\tilde{P}_j} = A_{P_j}/P_{j\,P_j}$ é corpo e portanto regular, o que é uma contradição. Portanto, existe $f \in J \backslash I$ tal que $(I : f) = I$.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que existe $f \in J \backslash I$ tal que $(I : f) = I$ e seja

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r$$

a decomposição primária irredundante de I, onde $P_i = \sqrt{Q_i}$ são os primos associados de I para todo $i = 1, \ldots, r$. Localizando I em P_i tem-se que

$$I_{P_i} = (Q_1)_{P_i} \cap (Q_2)_{P_i} \cap \ldots \cap (Q_r)_{P_i} = Q_{iP_i}.$$

Afirmamos que $(A/I)_{\tilde{P}_i}$ sendo $\tilde{P}_i = P_i/I$ é regular. De fato, suponhamos o contrário, então pelo Critério Jacobiano teríamos que $(J + I)/I \subseteq \tilde{P}_i = P_i/I$, consequentemente, $f \in P_i$. Mas, por hipótese f é regular módulo I e P_i um primo associado de A/I implicando que $P_i = (\overline{0} : \overline{a})$, com $a \notin I$. Assim $f \in (\overline{0} : \overline{a})$ implicando que $fa \in I$, usando que $(I : f) = I$ tem-se que $a \in I$, o que é um absurdo. Portanto, $(A/I)_{\tilde{P}_i}$ é um anel local regular e consequentemente, tambem é um domínio pela Proposição (2.7), implicando assim que $I_{P_i} = Q_{iP_i}$ é ideal primo. Para concluir basta notarmos que Q_i também é primo e portanto $Q_i = P_i$. Ora, se $ab \in Q_i$ então $ab/1 \in Q_{iP_i} \Rightarrow a/1 \in Q_{iP_i}$ ou $b/1 \in Q_{iP_i}$. Suponhamos então que $a/1 \in Q_{iP_i}$, logo, $a/1 = r/t$ onde $r \in Q_i$ e $t \notin P_i$. Então por definição existe $s \notin Q_i$ tal que $s(at - r) = 0$ daí, $sat = sr \in Q_i$, logo, $sat \in Q_i$. Como $st \notin P_i = \sqrt{Q_i}$ e Q_i é ideal primário temos que $a \in Q_i$. Logo, Q_i é ideal primo e portanto I é ideal radical. Como queríamos demonstrar.

□

Visando apresentar um método para computação das potências simbólicas de ideais primos, a seguir exploraremos um lema que nos garante o cálculo da n-ésima potência simbólica de um ideal primo P através de saturação de um elemento fora de P.

Lema 2.15. Sejam A um anel e P um ideal primo. Se $f \in A \backslash P$ e $P_f^{(n)} = P_f^n$ para algum $n \geq 1$, então

$$P^{(n)} = (P^n : f^\infty)$$

Demonstração. $\Leftarrow$) Se $x \in (P^n : f^\infty)$, então para algum $r \geq 1$ temos que $xf^r \in P^n$. Logo, $x \in P^{(n)}$.

$\Rightarrow$) Se $z \in P^{(n)}$, então pela Proposição (1.17) $sz \in P^n$ para algum $s \notin P$. Como $s/1 \notin P_f$ e $(s/1)(z/1) \in P_f^n$, temos que $z/1$ pertence a n-ésima potência simbólica de P_f. Por hipótese,

$$z/1 \in P_f^{(n)} = P_f^n,$$

implicando que existem $y \in P^n$ e $r \geq 0$ tais que

$$z/1 = y/f^r \Rightarrow f^m(zf^r - y) = 0,$$

para algum $m \geq 0$. Segue daí que $zf^{r+m} = yf^m \in P^n$ e consequentemente $z \in (P^n : f^\infty)$. Logo, $P^{(n)} = (P^n : f^\infty)$, como queríamos demonstrar.

□

Como aplicação do Critério Jacobiano, a seguinte proposição, devido a Wolmer Vasconcelos, permite-nos calcular potências simbólicas de ideais primos via o processo de saturação de um elemento.

Proposição 2.16. Sejam A um anel de polinômios sobre um corpo k e Q um ideal primo de A. Se f é um elemento do ideal Jacobiano J de Q que não pertence a Q, então

$$Q^{(n)} = (Q^n : f^\infty) \text{ para } n \geq 1,$$

e tal elemento f existe se k é um corpo perfeito.

Demonstração. Inicialmente, se k é perfeito, então, pelo Teorema (2.14), garantimos a existência do elemento $f \in J \setminus Q$, visto que Q é ideal primo, em particular, Q é radical.

Posteriormente, supondo a existência do elemento f, para mostrarmos a proposição, basta demonstrarmos pelo Lema (2.15) que a n-ésima potência simbólica de Q coincide com n-ésima potência ordinária de Q. Ora, como a localização A_f é Cohen-Macaulay, pela Proposição (1.21), é suficiente então provamos que Q_f é localmente uma interseção completa. Para isso seja P um ideal primo talque $Q \subseteq P$ e $f \notin P$. Tomando $\tilde{P} = P/Q$ temos que,

$$(A_f/Q_f)_{P_f} \simeq (A_f)_{P_f}/(Q_f)_{P_f} \simeq A_P/Q_P \simeq (A/Q)_P \simeq (A/Q)_{\tilde{P}}.$$

Como $J/Q \subsetneq \tilde{P}$, pelo Critério Jacobiano concluímos que A_P/Q_P é regular e consequentemente $(Q_f)_{P_f}$ é uma interseção completa, pela Proposição (2.9). Como queríamos demonstrar.

□

Exemplo 2.3. Sejam $A = \mathbb{Q}[x, y, z]$ e

$$I = (x^3 - yz, y^2 - xz, z^2 - x^2y).$$

O ideal I é ideal primo pois ele é o núcleo do homomorfismo dado por:

$$\phi : \mathbb{Q}[x, y, z] \to \mathbb{Q}[t], \text{ onde } \phi(h(x, y, z)) = h(t^3, t^4, t^5).$$

Usando programa de computação algébrica Macaulay ([6]) e a Proposição 2.16 obtemos

$$I^{(2)} = (I^2 : f^\infty) = (I^2, \Delta),$$

onde $f = 2y^2 + xz$ e $\Delta = -x^5 + 3x^2yz - xy^3 - z^3$.

2.3 Condições de Serre

Nesta seção introduziremos as condições de Serre (R_k) e (S_k) baseadas em Swanson e Huneke (14). Exploraremos como tais condições caracterizam certos anéis com respeito a normalidade.

Definição 2.6. Sejam A um anel Noetheriano e k um inteiro não negativo.

Dizemos que o anel A satisfaz a *condição de Serre* (R_k) se para todo ideal primo P de A de altura no máximo k, temos A_P é um anel local regular.

Dizemos que o anel A satisfaz a *condição de Serre* (S_k) se para todo ideal primo P em A, a profundidade de A_P é maior ou igual que $\min\{k, \mathrm{ht}(P)\}$.

Em outras palavras, um anel A satisfaz a condição de Serre (R_k) se, e somente se, para todo $P \in \mathrm{Spec}(A)$ com $\mathrm{ht}(P) \leq k$ temos $\mu(P_P) = \mathrm{ht}(P)$, e A satisfaz a condição de Serre (S_k) se para todo $P \in \mathrm{Spec}(A)$ temos que P_P contém um sequência regular de comprimento maior ou igual a $\min\{k, \mathrm{ht}(P)\}$.

Exemplo 2.4. Notemos que todo anel Noetheriano A de dimensão 0 satisfaz a condição de Serre S_k, $\forall\ k \in \mathbb{Z}_+$. De fato, seja $P \in \mathrm{Spec}(A)$, como $\dim(A) = 0$ segue que $\mathrm{ht}(P) = 0$ e portanto $\min\{k, \mathrm{ht}(P)\} = 0$. Como $\mathrm{prof}(A_P) \geq 0$ tem-se que A satisfaz a condição de Serre (S_k), $\forall\ k \in \mathbb{Z}_+$.

Exemplo 2.5. Todo anel A Cohen-Macaulay satisfaz $(S_k), \forall\ k \in \mathbb{Z}_+$. De fato, A é Cohen-Macaulay se, e somente se, para todo $P \in \mathrm{Spec}(A)$ temos P_P contém uma A_P-sequência regular de comprimento $\mathrm{ht}(P)$.

Observação: Em particular notemos que, se A satisfaz a condição de Serre (S_1) entao, A não possui primos imersos, isto é, todo primo associdado de A é minimal. Com efeito, seja $P \in \mathrm{Ass}(A)$, assim $P_P \in \mathrm{Ass}(A_P) \Rightarrow \mathrm{prof}(A_P) = 0$. Como A satisfaz (S_1) temos que $0 = \mathrm{prof}(A_P) \geq \min\{1, \mathrm{ht}(P)\}$. Logo, $\mathrm{ht}(P) = 0$ e portanto P é primo minimal de A.

Os próximos dois teoremas são de fato os resultados mais importantes desta seção, visto que iremos relacionar as condições de Serre $(R_0), (S_1)$, respectivamente $(R_1), (S_2)$, com o fato de um anel A ser reduzido, respectivamente normal.

Teorema 2.17. *Um anel Noetheriano A é reduzido se, e somente se, A satisfaz as condições de Serre (R_0) e (S_1).*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos que A é reduzido. Inicialmente notemos que A satisfaz a condição (R_0). Com efeito, seja $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\mathrm{ht}(P) = 0$, implicando que $\dim(A_P) = 0$. É suficiente mostrarmos que $\mu(P_P) = 0$. Como

$0 = \mathcal{N}(A)_P = \mathcal{N}(A_P)$ temos que $\mathcal{N}(A_P) = 0$, mas por outro lado,

$$0 = \mathcal{N}(A_P) = \bigcap_{Q \subseteq P} Q_P = P_P.$$

Logo, $\mu(P_P) = 0$, e portanto A_P é regular.

Mostraremos agora que A satisfaz (S_1), isto é, $\operatorname{prof}(A_P) \geq \min\{1, \operatorname{ht}(P)\}$. Se $\operatorname{ht}(P) = 0$, o resultado segue. Suponhamos então que $\operatorname{ht}(P) = 1$. Notemos que se A é reduzido, então $\operatorname{Ass}(A)$ consiste apenas de primos minimais de A.

Dessa forma

$$\mathcal{Z}(A_P) = \bigcup_{Q_P \in \operatorname{Ass}(A_P)} Q_P = \bigcup_{Q_P \in \operatorname{Min}(A_P)} Q_P \subsetneq P_P$$

A última inclusão é própria pelo Lema da Esquiva e o fato que $\operatorname{ht}(P) = 1$. Logo existe $x \in P_P \backslash \mathcal{Z}(A_P)$. Além disso, $xA_P \neq A_P$ pois $P_P \subsetneq A_P$. Logo, x é regular e isso implica que $\operatorname{prof}(A_P) \geq 1$. Portanto, o anel A satisfaz (S_1).

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que A satisfaz as condições de Serre (R_0) e (S_1). Pela Observação (2.3) A não tem primos imersos.

Queremos mostrar que A é reduzido, então consideremos a decomposição primária do ideal nulo

$$0 = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r$$

Com $\sqrt{Q_i} = P_i$ e $P_i \in \operatorname{Min}(A)$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Pela condição (R_0) temos que A_{P_i} é regular, e portanto domínio pela Proposição 2.7. Mas como P_i é minimal, segue que A_{P_i} tem um único primo, a saber $P_{P_i} = 0$. Para concluir mostraremos que $Q_i = P_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$. De fato, dado $x \in P_i$ temos que $\frac{x}{1} \in P_{iP_i} = 0$ implicando em $\frac{x}{1} = \frac{0}{1}$. Daí existe $s \in A \backslash P_i$ talque $sx = 0 \in Q_i$. Como Q_i é primário e $s \notin P_i = \sqrt{Q_i}$ temos que $x \in Q_i$. Logo, $Q_i = P_i$ e isso implica que A é reduzido, como queríamos demonstrar.

□

Antes de começarmos explorando as condições de Serre (R_1) e (S_2), vejamos o seguinte lema que nos garante que em um anel integralmente fechado, qualquer ideal gerado por um elemento regular não possui primos imersos.

Lema 2.18. Seja A um anel Noetheriano integralmente fechado no seu anel total de frações. Então, o conjunto dos primos associados de um ideal gerado por um não divisor de zero x consiste exatamente dos ideais primos minimais sobre (x). Além disso, todos os primos associados são localmente principais.

Demonstração. De fato, todos os ideais primos minimais sobre (x) são associados a (x). Seja então P um ideal primo associado a (x). Pelo lema da esquiva existe um não divisor de y em A tal que $P = ((x) :_A y)$. Podemos localizar em P e assumir sem perda de generalidade que A é um anel local com ideal maximal P. Por definição, $\frac{y}{x}P \subset A$. Se $\frac{y}{x}P \subset P$, então pelo Lema (2.4), $\frac{y}{x} \in \overline{A} = A$, isto é,

$$y \in (x) \text{ e } P = ((x) :_A y) = A,$$

que é uma contradição pois P é próprio. Então, necessariamente devemos ter que $\frac{y}{x}P = A$. Portanto, existe $z \in P$ tal que $\frac{y}{x}z = 1$. Logo,

$$P = ((x) :_A y) = ((yz) :_A y) = (z),$$

assim P é um ideal primo principal de altura 1. Desta maneira, P é minimal sobre (x). Como queríamos demonstrar.

□

Assim como o fato de um anel ser reduzido está fortemente conectado ao fato deste anel satisfazer as condições de Serre (R_0) e (S_1), é de se esperar que também possamos traduzir a normalidade em condições de Serre particulares. O teorema abaixo nos fornece um critério para normalidade.

Teorema 2.19. *Um anel A Noetheriano é normal se, e somente se, A satisfaz as condições de Serre (R_1) e (S_2).*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos que A é normal. Como todo anel normal é localmente um domínio, temos então que A é reduzido. Logo, pelo Teorema (2.17), A satisfaz as condições de Serre (R_0) e (S_1). Seja $P \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $\operatorname{ht}(P) = 1$, mostraremos que A_P é um anel regular. Como $\dim(A_P) = 1$ e A_P é domínio integralmente fechado temos que $0 \subsetneq P_P$ e existe $x \in P_P$ tal que $x \neq 0$, portanto x é regular. Notemos que $\sqrt{x} = P_P$. Dessa forma, P_P é um primo associado a (x) e pelo Lema (2.18) P_P é principal. Logo,

$$\mu(P_P) = 1 = \dim(A_P),$$

isto é, A_P é regular. Portanto, A satisfaz a condição de Serre (R_1).

Mostraremos agora que A satisfaz (S_2). Como o anel A satisfaz (S_1), basta considerarmos $P \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $\operatorname{ht}(P) \geq 2$. Como A_P é um domínio integralmente fechado de dimensão maior do que ou igual a dois, existe a seguinte cadeia de ideais primos $0 \subsetneq Q_P \subsetneq P_P$. Tomando $x \in Q_P$ não nulo, pelo Lema (2.18) segue

P_P não é primo associado a (x), caso contrário P_P seria primo minimal o que contraria o fato de $\dim(A_P) \geq 2$. Assim existe $y \in P_P$ não divisor de zero em A_P/xA_P. Portanto, x, y é uma sequência regular em A_P. Logo, A satisfaz a condição de Serre (S_2).

$\Leftarrow$) Suponhamos que A satisfaça as condições de Serre (R_1) e (S_2). Vamos mostrar que A é normal. Notemos que como A satisfaz as condições de Serre (R_1) e (S_2), então A satisfaz as condições de Serre (R_0) e (S_1). Logo, pelo Teorema (2.17), A é reduzido e portanto A_P é reduzido, para todo $P \in \operatorname{Spec}(A)$. Inicialmente mostraremos que A_P é integralmente fechado no seu anel total de frações. Sejam $x, y \in A_P$ elementos não nulos tais que y não está em nenhum ideal primo minimal de A_P e $\frac{x}{y}$ é inteiro sobre A_P. Se $Q \in \operatorname{Min}(A_P/yA_P)$, pelo Teorema do Ideal Principal segue que $\operatorname{ht}(Q) \leq 1$, mas como y é regular, temos que $\operatorname{ht}(Q) = 1$.

Seja o ideal $I := (yA_P :_{A_P} x)$ em A_P. Suponha, por absurdo, que I é um ideal próprio. Neste caso, seja $J \in \operatorname{Ass}(A_P/I)$, então $J = (I : z)$ para algum $z \in A_P \backslash I$. Como $I = (yA_P :_{R_P} x)$, temos que

$$J = ((yA_P :_{A_P} x) : z) = (yA_P :_{A_P} xz),$$

mas J é ideal próprio, assim temos que $xz \neq 0$. Logo, $J \in \operatorname{Ass}(A_P/yA_P)$ e isto implica que $\operatorname{Ass}(A_P/I) \subseteq \operatorname{Ass}(A_P/yA_P)$.

Além disso, temos $\operatorname{Min}(A_P/yA_P) = \operatorname{Ass}(A_P/yA_P)$, pois se Q é tal que

$$Q \in \operatorname{Ass}(A_P/yA_P) \backslash \operatorname{Min}(A_P/yA_P)$$

então pela condição de Serre (S_2), $\operatorname{ht}(Q) \geq 2$. Mas Q é da forma $Q = \tilde{Q}_P$, onde $\tilde{Q} \in \operatorname{Spec}(A)$, com $\tilde{Q} \subseteq P$. Além disso, $\operatorname{prof}(A_{\tilde{Q}}/yA_{\tilde{Q}}) = 0$, já que

$$\operatorname{Ass}(A_P/yA_P)_Q = \{P'A_Q; P' \in \operatorname{Ass}(A_P/yA_P), P' \subseteq Q\}.$$

Em particular $\tilde{Q}_{\tilde{Q}} \in \operatorname{Ass}(A_{\tilde{Q}}/yR_{\tilde{Q}})$ e isso implica que $\operatorname{prof}(A_{\tilde{Q}}/yA_{\tilde{Q}}) = 0$. Como y é regular em A_P temos que

$$\operatorname{prof}(A_P/yA_P) = \operatorname{prof}(A_P) - 1.$$

Além do mais, se y é regular em A_P, então y é regular em $A_{\tilde{Q}}$. Assim

$$\operatorname{prof}(A_{\tilde{Q}}/yA_{\tilde{Q}}) = \operatorname{prof}(A_{\tilde{Q}}) - 1$$

Usando a condição de Serre (S_2),

$$0 = \operatorname{prof}(A_{\tilde{Q}}/yA_{\tilde{Q}}) \geq \min\{1, \operatorname{ht}(\tilde{Q}) - 1 \geq 1\}$$

O que é um absurdo. Logo, $\operatorname{Min}(A_P/yA_P) = \operatorname{Ass}(A_P/yA_P)$. Em particular, segue que todo primo associado de I tem altura 1. Dessa forma, se $Q \in \operatorname{Ass}(A_P/I)$, então $\operatorname{ht}(Q) = 1$. Como A satisfaz a condição de Serre (R_1), A_Q é regular e portanto normal. Por outro lado, sendo $\frac{x}{y}$ inteiro sobre A_P, então $\frac{x}{y}$ é inteiro sobre A_Q e daí $\frac{x}{y} \in A_Q$, pois A_Q é integralmente fechado. Isso nos diz que $\frac{x}{y} = r \in A_Q$, isto é, x é múltiplo de y. Logo,

$$I_Q = (yA_P :_{A_Q} x)_Q = (yA_P : \frac{x}{1}) = A_Q$$

Disto segue que I_Q contém a unidade em A_Q, $I_Q \nsubseteq Q_Q \Rightarrow I \nsubseteq Q$. O que é um absurdo. Logo, $I = A_P$ e $x = ry$ para algum $r \in A_P$. Assim,

$$\frac{x}{y} = \frac{yr}{y} = r \in A_P$$

e A_P é integralmente fechado. Para terminar, notemos que A_P é domínio.

Para isso, pelo Corolário 2.6

$$A_P = \overline{A_P} = \overline{A_P}/P_1A_P \times \cdots \times \overline{A_P}/P_sA_P$$

onde $\operatorname{Min}(A_P) = \{P_1A_P, \ldots, P_sA_P\}$. Como cada A_P/P_iA_P é domínio, segue que $\overline{A_P}/P_iA_P$ é domínio. Mas A_P é anel local, assim $A_P = \overline{A_P}/P_jA_P$, para algum $j \in \{1, \ldots, s\}$. Logo A_P é domínio e portanto, A é normal. Como queríamos demonstrar.

□

Ilustraremos no exemplo a seguir como podemos aplicar as condições de Serre.

Exemplo 2.6. Sejam $A = k[x_1, \ldots, x_7]$ e $I = (x_1x_7 - x_2x_6, x_3x_5 - x_4x_7)$, onde k é um corpo. Mostraremos que A/I é um anel normal e para isso utilizaremos as condições de Serre (R_1) e (S_2).

Calculando a matriz Jacobiana de I, temos:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} x_7 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & x_5 & -x_7 & x_3 & 0 & -x_4 \end{bmatrix}$$

Note que I é um ideal de altura 2 e consequentemente I é uma interseção completa. Com o auxílio do programa de computação algébrica Macaulay ([6]) obtivemos que a altura de $\mathrm{ht}(I, J) = 4 = \mathrm{ht}(I) + 2$. Logo, pela Proposição (2.13), tem-se $(A/I)_{\tilde{P}}$ é anel regular para todo primo $\tilde{P}$ de A/I com $\mathrm{ht}(\tilde{P}) \leq 1$, isto é, A/I satisfaz (R_1).

Como I é uma interseção completa, temos que A/I é um anel Cohen-Macaulay e portanto, A/I satisfaz a condição de Serre (S_2).

Capítulo 3

Aplicações

Baseado em Swanson e Huneke (14) e Aron (13), esse capítulo tem como objetivo explorar algumas aplicações envolvendo as Condições de Serre e o Critério Jacobiano introduzidos no capítulo anterior.

Uma primeira questão a ser investigada é a seguinte: sob quais condições um homomorfismo de anéis Noetherianos locais preserva as Condições de Serre? Adiante, observaremos que é suficiente impor que o homomorfismo seja plano para garantirmos que as Condições de Serre sejam preservadas.

3.1 Módulos planos

Definição 3.1. Sejam A um anel e M um A-módulo. Diremos que M é *plano* sobre A se para todo sequência exata de A-módulos,

$$\cdots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \cdots$$

a sequência

$$\cdots \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \longrightarrow \cdots$$

é exata.

Para simplificar, toda sequência de A-módulos

$$\cdots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \cdots$$

será denotada por $\mathcal{S}$.

Definição 3.2. Sejam A um anel e M um A-modulo. Diremos que M é *fielmente plano* se para todo sequência de A-módulos $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ é exata se, e somente se, $\mathcal{S} \otimes_A M$ é exata.

Segue da definição que se M é fielmente plano, então M é plano.

Pelo fato que toda sequência exata $\mathcal{S}$ pode ser reduzida à uma sequência exata curta da forma $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$, a definição de planitude se resume a considerar apenas as sequências exatas curtas. Além disso, no ponto de vista do produto tensorial, podemos ser mais precisos ainda em restringir nossa atenção às sequências exatas da forma $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$, isto é, apenas verificar a exatidão da sequência $0 \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M$.

Definição 3.3. Se $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de anéis e B é um A-módulo plano, diremos que ϕ é um *homomorfismo plano*, ou que B é uma *A-álgebra plana.*

Quando $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo plano, todo ideal primo de A é contraído de um ideal primo de B, isto é, ϕ satisfaz a condição Lying-Over. Como mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.1. Se $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo fielmente plano, então todo ideal $P \in \mathrm{Spec}(A)$ é contração de um ideal primo Q de B que é minimal sobre PB.

Demonstração. Seja $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Como ϕ é fielmente plano temos que $PB \neq B$, logo, existem ideais primos em B que contém PB. Seja $r \notin P$. Como A/P é domínio, a multplicação por r em A/P é uma função injetiva. Por hipótese, B é uma A-álgebra plana, portanto a multiplicação por r em B/PB é também injetiva. Assim, r é um não divisor de zero em B/PB, e portanto r não pode pertencer a nenhum ideal primo minimal sobre PB. Isso mostra que P é uma contração de qualquer primo de B que seja minimal sobre PB. Como queríamos demonstrar. □

Além disso, quando $\phi : A \longrightarrow B$ é plano, então ϕ satisfaz a condição Going-Down.

Proposição 3.2. Sejam $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo plano e $P_1 \subset P_2$ ideais primos em A tais que P_2 é contração de Q_2 ideal primo em B, então existe $Q_1 \subset Q_2$ ideal primo em B tal que $Q_1 \cap A = P_1$.

Demonstração. Via o processo de localização, podemos supor que A é um anel local com maximal P_2 e que B é um anel local com maximal Q_2. Desta forma, ϕ também é um homomorfismo fielmente plano e consequentemente o resultado segue da proposição anterior.

□

Teorema 3.3. *Se $(A, \mathfrak{M}) \longrightarrow (B, \mathfrak{N})$ é um homomorfismo de anéis Noetherianos locais. Então temos a desigualdade*

$$dim(B) \leq dim(A) + dim(B/\mathfrak{M}B). \tag{3.1}$$

E a igualdade em 3.1 ocorre se ϕ é plano.

Demonstração. Denotemos por $k = \dim(A)$ e $j = \dim(B/\mathfrak{M}B)$. Então existem $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{M}$ e $y_1, \ldots, y_j \in B$ tais que $(x_1, \ldots, x_k)$ é minimal sobre $\mathfrak{M}$ e a imagem de $y_1, \ldots, y_j$ forma uma sistema de parâmetros em $B/\mathfrak{M}B$. Além do mais,

$$\mathfrak{M}^s \subseteq (x_1, \ldots, x_k) \text{ e } \mathfrak{N}^t \subseteq \mathfrak{M}B + (y_1, \ldots, y_j)$$

para algum s, t inteiros positivos. Segue-se que

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^{st} &\subseteq (\mathfrak{M}B + (y_1, \ldots, y_j))^s \\ &\subseteq (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_j)B \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ideal Principal (A.4), segue que $\dim(B) \leq k + j$.

Suponhamos agora que ϕ é plano. Mostraremos que a desigualdade contrária ocorre. Seja Q um primo de B, minimal sobre $\mathfrak{M}B$ tal que $\dim(B/Q) = \dim(B/\mathfrak{M}B)$. Portanto,

$$\dim(B) \geq \dim(B/Q) + \mathrm{ht}(Q) = \dim(B/\mathfrak{M}B) + \mathrm{ht}(Q).$$

Notemos que Q contrai $\mathfrak{M}$ em A. Portanto, pela propriedade de Going-Down, temos que $\mathrm{ht}(Q) \geq \dim(A)$. E a igualdade em 3.1 é satisfeita. □

O lema adiante nos garante, em particular, que homomorfismos locais planos preservam regularidade o que nos indica que esta é a condição suficiente para preservar as Condições de Serre.

Lema 3.4. Seja $\phi : (A, \mathfrak{M}) \longrightarrow (B, \mathfrak{N})$ um homomorfismo local plano de anéis Noetherianos locais, então:

1. Se B é regular (respectivamente Cohen-Macaulay), então A é regular (respectivamente Cohen-Macaulay);

2. Se A e $B/\mathfrak{M}B$ são anéis regulares (respectivamente Cohen-Macaulay), então B também é regular (respectivamente Cohen-Macaulay).

A demonstração desse lema pode ser encontrada em (2, Proposição 2.2.12, pág. 68).

Teorema 3.5. *Seja $\phi : (A, \mathfrak{M}) \longrightarrow (B, \mathfrak{N})$ um homomorfismo local plano de anéis Noetherianos locais, e seja k um inteiro não negativo.*

1. *Se B satisfaz a condição de Serre (R_k), respectivamente (S_k), então A também satisfaz as mesmas condições;*

2. *Se A e $\kappa(P) \otimes_A B$ satisfazem as condições de Serre (R_k), respectivamente (S_k), para todo P ideal primo de A, então B também satisfaz as mesmas condições.*

Demonstração. 1. Mostraremos que A satisfaz as condições (R_k), respectivamente (S_k). Sejam P um primo de A tal que $\mathrm{ht}(P) \leq k$ e Q um primo de B minimal sobre PB. Como o homomorfismo é plano, pela Proposição 3.2, tem-se que ϕ satisfaz a condição Going-down e consequentemente,

$$\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(P) \leq k.$$

Por hipótese, B satisfaz as condições de Serre (R_k), respectivamente (S_k). Notemos que nesse caso, B_Q é um anel Cohen-Macaulay, e desde que $A_P \to B_Q$ é fielmente plano, temos pelo Lema (3.4) que A_P é anel Cohen-Macaulay. Portanto, A satisfaz (R_k) e (S_k), para todo inteiro positivo k.

2. Agora mostraremos que B satisfaz as condições (R_k), respectivamente (S_k). Sejam Q um ideal primo de B tal que $\mathrm{ht}(Q) \leq k$ e $P = Q \cap A$ ideal primo de A. Como $PS \subseteq Q$, pela planitude de ϕ segue da Proposição (3.2) que

$$\mathrm{ht}(P) \leq \mathrm{ht}(Q) \leq k.$$

Por hipótese, sabemos que A e $\kappa(P) \otimes_A B$ satisfazem as condições (A_k), respectivamente (S_k). Usando o mesmo argumento no item 1, isto é, realizando o processo de localização, e utilizando o Lema (3.4), podemos concluir que B satisfaz as condições de Serre R_k, respectivamente (S_k), para todo k inteiro positivo. Como queríamos demonstar.

□

Em particular, pelo Teorema (2.19), quando estamos tratando de um homomorfismo plano $\phi : A \longrightarrow B$ entre anéis locais. Sabendo que B é normal, podemos garantir que A possui essa mesma propriedade. Como mostra o seguinte corolário:

Corolário 3.6. Seja $\phi : (A, \mathfrak{M}) \longrightarrow (B, \mathfrak{N})$ um homomorfismo plano local de anéis Noetherianos locais. Então, B é normal se, e somente se, A e $\kappa(P) \otimes_A B$ são normais para todo $P \in \mathrm{Spec}(A)$.

Demonstração. $\Rightarrow$) De fato, se B é normal, então pelo Teorema (2.19), ele satisfaz as condições de Serre (R_1) e (S_2). Aplicando o Teorema 3.5 temos que A e $\kappa(P) \otimes_A B$ satisfazem as condições de (R_1) e (S_2). Portanto, A e $\kappa(P) \otimes_A B$ são normais.

$\Leftarrow$) Se A e $\kappa(P) \otimes_A B$ são normais, aplicando novamente o Teorema (3.5), segue que B é normal, mais uma vez pelo Teorema (2.19). Como queríamos demonstrar.

□

Definição 3.4. Seja A um anel. O *local singular* de A é o conjunto de todos os ideais primos de A tais que A_P não é regular. Denotaremos por $\mathrm{Sing}(A)$ o local singular de A.

O teorema a seguir mostra como podemos relacionar as condições de Serre (R_k) e (S_k) apenas tendo informação sobre a profundidade do ideal J em questão.

Teorema 3.7 (Matsumoto, [7])**.** *Sejam A um anel Noetheriano e J um ideal de A tal que $V(J) = Sing(A)$. Então para todo k não negativo, prof$(J, A) \geq k$ se, e somente se, A satisfaz (R_{k-1}) e (S_k).*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $\mathrm{prof}(J, A) \geq k$. Mostraremos que A satisfaz as condições (R_{k-1}) e (S_k). Seja $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\mathrm{ht}(P) \leq k - 1$. Afirmamos que J não está contido em P. De fato, se P contém J, então

$$\mathrm{ht}(J) \leq \mathrm{ht}(P) \leq k - 1$$

e isso implicaria que $\mathrm{prof}(J, A) \leq k - 1$, o que é uma contradição. Assim J não está contido em P, isto é, $P \notin V(J) = \mathrm{Sing}(A)$. Logo, A_P é regular, e portanto A satisfaz a condição (R_{k-1}).

Agora mostraremos que $\mathrm{prof}(A_P) \geq k$ ou $\mathrm{prof}(A_P) \geq \mathrm{ht}(P)$ e para isso observaremos os casos $J \subset P$ e $J \not\subset P$, para todo $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Se J está contido em P então $\mathrm{prof}(A_P) \geq k$. Se J não está contido em P então $P \notin \mathrm{Sing}(A)$ e portanto A_P regular, logo,

$$\mathrm{prof}(A_P) = \mathrm{ht}(P).$$

Portanto, A satisfaz a condição (S_k).

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que A satisfaz a condições de (R_{k-1}) e (S_k). Afirmamos que $\mathrm{ht}(J) \geq k$. De fato, se tivéssemos $\mathrm{ht}(J) < k$, então por definição de altura, existiria um primo P que contém J tal que $\mathrm{ht}(P) \leq k-1$. Como A satisfaz a condição (R_{k-1}), então A_P é regular, mas isso é um absurdo já que $P \in V(J)$. Logo,

$$\mathrm{ht}(J) \geq k,$$

e como A satisfaz a condição (S_k), segue-se que $\mathrm{prof}(J, A) \geq k$. Como queríamos demonstrar.

□

Como consequência desse teorema, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.8. Sejam A um anel Noetheriano, K seu anel total de frações, e J ideal de A tal que $V(J) = \mathrm{Sing}(A)$. Então, A é reduzido se, e somente se, $\mathrm{prof}(J, A) \geq 1$;

Demonstração. Sabemos que A é reduzido se, e somente se, A satisfaz as condições (R_0) e (S_1). Aplicando o Teorema (3.7), o resultado segue imediatamente.

□

Em um contexto particular, se k é um corpo perfeito e A é a localização de uma k-álgebra finitamente gerada equidimensional, neste caso, o ideal jacobiano desta extensão é o ideal J tal que $V(J) = \mathrm{Sing}(A)$. Dessa forma, revisitando o Teorema (3.7), podemos relacionar a noção de ideal Jacobiano com as Condições de Serre da seguinte forma:

$$A \text{ satisfaz as condições de Serre } (R_{k-1}) \text{ e } (S_k) \Leftrightarrow \mathrm{prof}(J, A) \geq k.$$

3.2 Potências Infinitesimais

Sejam $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ anel de polinômios sobre um corpo k e I um ideal radical de A. Pela Proposição (1.17), vimos que podemos definir a r-ésima potência simbólica de I como

$$I^{(r)} := \{a \in A \mid \exists\ s \in A \backslash P, \text{ com } sa \in I^r\}$$

para todo $P \in \mathrm{Ass}(A/I)$. A seguir apresentaremos uma outra noção de potência de um ideal I, a qual batizaremos por *Potência Infinitesimal*. Veremos como a potência simbólica pode ser relacionada com a potência infinitesimal de um ideal I.

Definição 3.5. Sejam A um anel e I um ideal de A. A *r-ésima potência infinitesimal* de I é o ideal

$$I^{<r>} := \{f \in A \mid \frac{\partial^\alpha f}{\partial \underline{x}^\alpha} \in I,\ \forall\ \alpha, |\alpha| \leq r-1\}, \tag{3.2}$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e $\frac{\partial^\alpha f}{\partial \underline{x}^\alpha}$ representando a $|\alpha|$-ésima derivada parcial $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$.

Note que de maneira recursiva, podemos apresentar a r-ésima potência infinitesimal de I por

$$I^{<r>} = \{f \in A \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I^{<r-1>},\ \forall\ 1 \leq i \leq n\}$$

As noções de potências infinitesimal e simbólicas se relacionam via o célebre Teorema de Zariski-Nagata, que nos permite concluir que sob a hipótese de o ideal I ser radical, a r-ésima potência infinitesimal coincide com a r-ésima potência simbólica. A demonstração desse resultado será omitida e pode ser encontrada em (4, Teorema 3.14, pág.106).

Teorema 3.9 (Zariski, Nagata)**.** *Suponha que k é um corpo algebricamente fechado de característica zero e A um anel de polinômios sobre k. Se I é um ideal radical em A, então*

$$I^{(r)} = I^{<r>}, \tag{3.3}$$

para todo inteiro não negativo r.

Por esta razão, consideraremos sempre I um ideal radical e k um corpo de característica zero.

De uma maneira geral, o Teorema de Zariski-Nagata (3.9) mecionado acima pode ser estendido para corpos perfeitos, isto é, sejam k um corpo perfeito e $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios sobre k. Se P é um ideal primo de A, então

$$P^{(r)} = P^{<r>}.$$

Para mais detalhes sobre esse fato, o leitor poderá ver (3).

3.2.1 O método recursivo

Nesta seção apresentaremos um método que nos permita calcular a potência simbólica de um ideal I através de matrizes Jacobianas. Assim, antes de começarmos exibindo o método estabeleceremos algumas notações que serão usadas até o final deste capítulo.

Dados polinômios $\mathbf{f} := \{f_1, \ldots, f_m\} \subset A$, denotaremos por $\Theta(\mathbf{f})$ a transposta da matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$. Para um inteiro r não negativo, denotaremos por $\Psi^{(r)}(\mathbf{f})$ a matriz de relações (*sigizias*) de $\Theta(\mathbf{f})$ sobre o anel $A/I^{(r)}$ levantada à A e $((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A$ denotará o ideal gerado pelas entradas do produto matricial $(\mathbf{f}).\Psi^{(r)}(\mathbf{f})$. Se r é fixado, simplificaremos a notação pondo $\Psi(\mathrm{f}) := \Psi^{(r)}(\mathbf{f})$.

A fim de ilustrar as estruturas introduzidas no parágrafo anterior, computemos o ideal $((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A$ para um I um ideal concreto no anel de polinômios em três variáveis.

Exemplo 3.1. Sejam $A = k[x, y, z]$ e $I = (xy, xz, yz) \subset A$ um ideal. Tomando $f_1 = xy, f_2 = xz, f_3 = yz$, a transposta da matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ será

$$\Theta(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{bmatrix}.$$

Agora calcularemos a matriz de relações de $\Theta(\mathbf{f})$ sobre $k[x, y, z]/(xy, xz, yz)$. Com um cálculo simples, podemos observar que os elementos

$$\overline{u} = (\overline{z} \;\; 0 \;\; 0)^T, \; \overline{v} = (0 \;\; \overline{y} \;\; 0)^T, \; \overline{w} = (0 \;\; 0 \;\; \overline{x})^T$$

são relações de $\Theta(\mathbf{f})$ sobre $k[x,y,z]/(xy,xz,yz)$, isto é, $\overline{u},\overline{v},\overline{w} \in \mathrm{Ker}(\Theta(\mathbf{f}))$. Afirmamos que

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \overline{z} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{y} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{x} \end{bmatrix}.$$

De fato, mostraremos que qualquer relação de $\Theta(\mathbf{f})$ em $k[x,y,z]/(xy,xz,yz)$ é combinação linear de $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$. Seja $\overline{v'} = (\overline{a} \;\; \overline{b} \;\; \overline{c})^T$ uma relação de $\Theta(\mathbf{f})$ em $k[x,y,z]/(xy,xz,yz)$. Então,

$$\Theta(\mathbf{f})(\overline{v'}) = \begin{bmatrix} \overline{y} & \overline{z} & 0 \\ \overline{x} & 0 & \overline{z} \\ 0 & \overline{x} & \overline{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \\ \overline{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segue-se que $ay+bz$, $ax+cz$, $bx+cy \in (xy,xz,yz)$. Fazendo a divisão euclidiana de a por z temos:

$$a = pz + r(x,y), \tag{3.4}$$

onde $r(x,y)$ é um polinômio que depende somente de x e y.

Portanto, $ay+bz \in (x,z)$. Multiplicando ambos os lados da equação em 3.4 por y e somando bz, obtemos que

$$r(x,y)y + (py+b)z \in (x,z) \Rightarrow r(x,y)y \in (x,z).$$

Como (x,z) é ideal primo e $y \notin (x,z)$, então $r(x,y) \in (x,z)$. Portanto x divide $r(x,y)$. Usando o mesmo raciocínio com $ax+cz \in (y,z)$ obtemos que y divide $r(x,y)$. Logo, o produto xy divide $r(x,y)$ o que implica $\overline{a} = \overline{pz}$. Analogamente, iremos obter que $\overline{b} = \overline{qy}$ e $\overline{c} = \overline{sx}$. Logo $\overline{v'} = \overline{p}.\overline{u} + \overline{q}.\overline{v} + \overline{s}.\overline{w}$. Como queríamos demonstrar.

A proposição a seguir estabelece um método recursivo para o cálculo da k-ésima potência simbólica de I via matrizes Jacobianas.

Proposição 3.10. Seja k um inteiro não negativo. Se $\mathbf{f} := \{f_1,\ldots,f_m\}$ é um conjunto de geradores de $I^{(r)}$ então

$$I^{(r+1)} = ((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A + II^{(r)}. \tag{3.5}$$

Demonstração. Como mencionamos anteriormente, I é radical. Portanto, pelo Teorema (3.9) temos que

$$I^{(r+1)} = I^{<r>} \text{ e } I^{(r)} = I^{<r>}.$$

Para simplificarmos, denotaremos por $\Theta = \Theta(\mathbf{f})$ e $\Psi = \Psi(\mathbf{f}) = (\psi_{ij})$. Mostraremos que

$((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A \subset I^{(r+1)}$.
Seja $q \in ((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A$, daí, $q = \sum_j \psi_{jl} f_j$. Derivando q em relação a x_i, para $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} = \sum_j \psi_{jl} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \psi_{jl}}{\partial x_i} f_j$$

Como $f_j \in I^{<r>}$ e $\phi_{jl} \in I^{<r>}$ pela definição de $\Psi(\mathbf{f})$, para todo j, l, segue que

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} \in I^{<r>}.$$

Logo,

$$\frac{\partial^\beta}{\partial \underline{x}^\beta} \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \in I, \ \forall \ \beta, |\beta| \leq r-1, \ \forall \ i.$$

Como todo operador diferencial $\dfrac{\partial^\alpha q}{\partial \underline{x}^\alpha}$, com $|\alpha| \leq r$ pode ser visto como combinação linear dos operadores acima, temos que $q \in I^{<r+1>}$. Portanto,

$$((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A \subset I^{<r+1>},$$

e pelo fato que $II^{(r)} = II^{<r>} \subset I^{<r+1>}$ segue-se que

$$((\mathbf{f}).\Psi(\mathbf{f}))A + II^{(r)} \subset I^{(r+1)}.$$

Para a inclusão contrária, seja $g \in I^{<r+1>}$. Como $I^{<r+1>} \subset I^{<r>} = (f_1, \ldots, f_m)$ temos que $g = \sum_j h_j f_j$, para alguns $h_j \in A$.

Aplicando Θ ao vetor $u = \sum_j h_j e_j \in A^m$, obtemos um vetor de $\sum_i A dx_i$ cuja i-ésima coordenada é dada por $\sum_j h_j \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$. Afirmamos que cada um desses polinômios pertence a $I^{<r>}$. De fato, devirando g em relação a x_i, obtemos

$$\sum_j h_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_j \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right) f_j \tag{3.6}$$

Como $g \in I^{<r+1>}$ tem-se $\dfrac{\partial g}{\partial x_i} \in I^{<r>}$. Portanto,

$$\sum_j h_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \in I^{<r>}.$$

Feito isso, mostramos que o vetor $\overline{u}$ é tal que $\overline{u} \in \mathrm{Ker}\overline{\Theta}$ em $A/I^{<r>}$. Logo, pela

definição de Ψ,

$$\overline{u} = \sum_l \overline{\psi}_{jl} e_j \Rightarrow h_j = \sum_l a_l \psi_{jl} + c_j,$$

para alguns $a_l \in A$ e $c_j \in I^{<k>}$. Substituindo h_j em g, a inclusão segue. Como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.2. Sejam $A = k[x, y, z]$ e $I = (xy, xz, yz) \subset A$ um ideal como no exemplo 3.1. Usando a equação em 3.5, iremos calcular $I^{<2>}$. Mostramos anteriormente que

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \overline{z} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{y} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{x} \end{bmatrix}$$

Logo, $((\mathbf{f}).\Psi^{(1)}(\mathbf{f}))A = (xyz)$. Portanto,

$$I^{<2>} = I^2 + (xyz).$$

Apêndice A

Resultados auxiliares

Teorema A.1. *Seja I um ideal de um anel A. Se I é gerado por uma sequência regular $x_1, \ldots, x_r$, então o epimorfismo de álgebras graduadas:*

$$\begin{aligned} \phi : (A/I)[t_1, \ldots, t_r] &\longrightarrow gr_I(A) = (A/I)[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r] \\ t_i \qquad &\longmapsto \qquad \overline{x}_i = x_i + I^2 \end{aligned}$$

é um isomorfismo, onde $t_1, \ldots, t_r$ são indeterminada sobre A/I.

Demonstração. Façamos a demonstração por indução em r. Se $r = 1$, então $I = (y)$, onde y é um elemento regular e o homomorfismo nesse caso fica definido por

$$\begin{aligned} \phi : (A/(y))[t] &\longrightarrow \mathrm{gr}_{(y)}(A) = (A/(y))[\overline{y}] \\ t \qquad &\longmapsto \qquad \overline{y} = y + (y)^2 \end{aligned}$$

Mostraremos que $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$.

Com efeito, seja $q(t) = (a_0 + (y)) + (a_1 + (y))t + \ldots + (a_n + (y))t^n \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Pela multiplicação definida em $\mathrm{gr}_{(y)}A$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = \phi(q(t)) &= (a_0 + (y)) + (a_1 + (y))(y + (y)^2) + \ldots + (a_n + (y))(y + (y)^2)^n \\ &= (a_0 + (y)) + (a_1 y + (y)^2) + \ldots + (a_n y^n + (y)^{n+1}). \end{aligned}$$

Logo $a_i y_i \in (y)^{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n$. Como y é regular então $a_i \in (y)$. Logo $q(t) = 0$, e nesse caso ϕ é um isomorfismo.

Consideremos agora o ideal $J = (x_1, \ldots, x_{r-1})$, por hipótese indutiva, o homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi' : (A/J)[t_1, \ldots, t_{r-1}] &\longrightarrow \mathrm{gr}_J(A) = (A/J)[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{r-1}] \\ t_i \quad &\longmapsto \overline{x}_i = x_i + J^2 \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Como x_r é um elemento regular de A/J temos que $(J : x_r) = J$. Além disso, $(J^m : x_r) = J^m$, para todo $m \geq 1$. Com efeito, faremos indução em m. Quando $m = 1$, não temos nada a fazer. Suponhamos por indução que $(J^{m-1} : x_r) = J^{m-1}$. Seja $a \in (J^m : x_r) \Rightarrow ax_r \in J^m \subseteq J^{m-1} \Rightarrow a \in (J^{m-1} : x_r)$. Observemos que $a = 0$ em $(A/J)[t_1, \ldots, t_{r-1}]$, pelo isomorfismo ϕ', temos que a classe de a é nula em $\mathrm{gr}_J(A)$, ou seja, $a + J^m = J^m \Rightarrow a \in J^m$.

Seja $F \in A[t_1, \ldots, t_r]$ um polinômio homogêneo de grau d tal que sua imagem em $(A/I)[t_1, \ldots, t_r]$ está contida em $\mathrm{Ker}(\phi)$, ou seja, $F(x_1, \ldots, x_r) \in I^{d+1}$. Como ϕ é graduado, é suficiente mostrarmos que $F \in IA[t]$, e novamente faremos por indução em d. Se $d = 0$ então F é uma constante, e assim $F \in I$. Existe $W \in A[t_1, \ldots, t_r]$ de grau $d + 1$ tal que $F(x_1, \ldots, x_r) = W(x_1, \ldots, x_r)$ e W é da forma $W = \sum_{i=1}^{r} t_i W_i$, onde $W_i = 0$ ou W_i é um polinômio homogêneo em $A[t_1, \ldots, t_r]$ de grau d. Existem polinômios $G \in A[t_1, \ldots, t_{r-1}]$ e H em $A[t]$ de grau d e $d - 1$ respectivamente tais que

$$F' = F - \textstyle\sum_{i=1}^{r} x_i W_i = G + t_r W.$$

Logo, $F'(f_1, \ldots, f_r) = 0$, assim $H(x_1, \ldots, x_r) \in (J^d : x_q) = J^d \subseteq I^d$ e por hipótese indutiva temos que os coeficientes de H estão em I. Assim, resta mostrarmos que os coeficientes de G estão em I. Consideremos $H' \in A[t_1, \ldots, t_{r-1}]$ de grau d tal que $H(x_1, \ldots, x_r) = H'(x_1, \ldots, x_r)$. Seja $Q = G + x_r H' \in A[t_1, \ldots, t_{r-1}]$, e notemos que $Q(x_1, \ldots, x_r) = F'(x_1, \ldots, x_r) = 0$, e por ϕ' ser um isomorfismo, temos que Q é o polinômio nulo em $(A/J)[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Logo, os coeficientes de Q estão em J e consequentemente estarão em I, como queríamos demonstrar.

□

Teorema A.2 (Critério de MacLane)**.** *Seja $k \subset F$ uma extensão de corpos. Se F é uma álgebra finitamente gerada sobre k, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Se $F = k(x_1, \ldots, x_n)$, existe uma base transcedente $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ de F sobre k tal que F é separável sobre $k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$.*

2. *F é separável sobre k.*

Teorema A.3 (Elemento Primitivo)**.** *Seja $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ uma extensão de corpos separável finita. Então, existe $x \in \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L} = \mathcal{K}(x)$.*

Teorema A.4 (Teorema do Ideal Principal de Krull)**.** *Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal de A gerado por $x_1, \ldots, x_n \in A$. Se P é um ideal primo minimal de I, então $ht(P) \leq n$.*

Além disso, se $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência regular em I, então $ht(P) = n$ para todo P ideal primo minimal de I.

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F., MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1969).

[2] Bruns, W., Herzog, J, *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge University Press (1993).

[3] Dao, H., Grifo, E., Heneke, C., Núñez-Betancourt, L., Stefanni, A. *Symbolic Power of Ideals*. arXiv:1708.03010, 2017.

[4] Eisenbud, D. *Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York (1995).

[5] Kunz, E. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Boston, Berlin, Birkhäuser, (1985).

[6] Bayer, D., Stillman, M., *Macaulay*: A system for computation in algebraic geometry and commutative algebra. 1992. Available via anonymous ftp from `math.harvard.edu`.

[7] R. Matsumoto, *On computing the integral closure*. Comm. Algebra 28 (2000), 401-405.

[8] Matsumura, H., Commutative algebra, W. A. Benjamin Co., New York (1970).

[9] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (1986).

[10] Santos, D.C., *Potências simbólicas e suas interações*. Dissertação de mestrado, DM-UFS, 2016.

[11] Santos, M.C., *Potências simbólicas de ideais*. Dissertação de mestrado, DM-UFS, 2014.

[12] Simis, A. *Effective computation of Symbolic powers by jacobian matrices*. Comm. in Algebra 24 (1996), 3561-3565.

[13] Simis, A., Andrade, J.F, *Tópicos de Álgebra Comutativa*. IMPA, Minas Gerais, (1981).

[14] Swanson, I., Huneke, C., *Integral Closure of Ideal, Rings, and Modules*. Cambridge University Press, (2006).

[15] Villareal, R., *Monomial Algebras*. New York, Marcel Dekker (2001).

[16] Vasconcelos, W. V., *On the equations of Rees algebras*, J. reine angew. Math. 418 (1991), 189-218.