Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Produto tensorial entre espaços de Banach e aplicações

Adelson Carlos Madruga

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Produto tensorial entre espaços de Banach e aplicações

por

Adelson Carlos Madruga

sob a orientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M183p Madruga, Adelson Carlos.
Produto tensorial entre espaços de Banach e aplicações / Adelson Carlos Madruga. - João Pessoa, 2018.
95 f.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços de Banach. 3. Ideais de operadores. 4. Multi-ideais de operadores. I. Campos, Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/BC

Produto tensorial entre espaços de Banach e aplicações

por

Adelson Carlos Madruga [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 26 de Fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB
(Orientador)

Prof. Dra. Mariana de Brito Maia – UFERSA
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da(o) CAPES/CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais, Luzia e Antonio, por se doarem integralmente, proporcionando-me uma base sólida para que cada etapa dessa caminhada fosse conquistada.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a DEUS, por permanecer sempre ao meu lado, dando-me coragem e disposição para alcançar essa tão sonhada e importante conquista.

Aos meus pais, Luzia Felix e Antonio Madruga, que não mediram esforços para a realização desse sonho e cuja presença sempre me serviu de esteio, sustentação e da certeza de que nunca caminharei sozinho. Essa conquista é nossa!

Aos meus irmãos, Francineide Madruga e Jaelson Madruga, por se fazerem sempre presentes mesmo quando me encontrava distante, apoiando-me nos momentos de dificuldades.

Ao meu sobrinho, Conrado Madruga, que embora ainda não saiba o significado dessa conquista, transmite-me paz e tranquilidade com sua presença.

Aos meus avós, tios, primos e cunhado pelo incentivo constante e, principalmente, pelos momentos de descontração e lazer.

Aos amigos pela torcida infalível em todas as etapas dessa trajetória.

Aos colegas do mestrado, Bosoerg, Douglas, Fagner, Rafael e Sérgio, pelos conhecimentos compartilhados, apoio e amizade, tornando, assim, a caminhada mais suportável.

Ao meu orientador, Jamilson Campos, que com maestria e dedicação conduziu a orientação desse trabalho, sempre contribuindo com seu inigualável conhecimento e experiência. Obrigado pela confiança, paciência, disponibilidade e incentivo.

Aos meus professores da licenciatura, Agnes Liliane, Cibelle Castro, Claudilene Costa, Fabrício Lima, Givaldo Lima, Jamilson Campos, Jussara Paiva e Marcos André, pelo incentivo e ajuda em todos os momentos que deles precisei.

Ao corpo docente do PGMat/UFPB, em especial, à Miriam Pereira, Flank David e Ricardo Burity pelas contribuições dadas a minha formação durante o transcorrer de suas disciplinas.

Aos professores Mariana Maia e Joedson dos Santos, membros da banca examinadora, por aceitarem o nosso convite e pelas valiosas contribuições dada à essa pesquisa.

À professora Rogéria Gaudencio pela disponibilidade em me supervisionar durante o estágio docência e pelas contribuições que foram de grande importância ao meu crescimento profissional. Muito obrigado!

Às secretárias do PGMat/UFPB, Alaíce Duarte e Roseli Agapito, por sempre se mostrarem solícitas quando delas precisei.

Enfim, mas não menos importante, à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar o produto tensorial entre espaços de Banach. Para isso, inicialmente, apresentaremos alguns resultados de Análise Funcional e de espaços de sequências a valores vetoriais que serão necessários ao desenvolvimento dos conteúdos posteriores. Em seguida, faremos um estudo algébrico do produto tensorial de espaços vetoriais, destacando sua construção e suas propriedades. No viés topológico, estudaremos as normas projetiva e injetiva, suas propriedades e o dual do produto tensorial projetivo. Por fim, veremos duas aplicações do produto tensorial entre espaços de Banach, a saber, uma com respeito ao método de composição, que gera multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares, e a outra relacionada a uma caracterização para os operadores absolutamente somantes.

Palavras-chave: Produto tensorial, espaços de Banach, ideais de operadores, multi-ideais, operadores absolutamente somantes.

Abstract

This work has as the main purpose to study the tensor product between Banach spaces. For this, initially, we will present some results of Functional Analysis and of vector-valued sequence spaces that will be necessary to the development of the later contents. Next, we will make an algebraic study of the tensor product of vector spaces, highlighting its construction and its properties. In the topological bias, we will study the projective and injective norms, their properties and the dual of the projective tensor product. Finally, we will see two applications of the tensor product between Banach spaces, namely one with respect to the composition method, which generates multi-ideals from the linear operator ideals, and other related to a characterization for the absolutely summing operators.

Keywords: Tensor Product, Banach spaces, operator ideals, multi-ideals, absolutely summing operators.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Resultados Clássicos de Análise Funcional 3

1.2 Dualidade e Adjunto de um operador 19

1.3 Completamento de um espaço normado 23

1.4 Espaços de sequências a valores vetoriais 25

2 Produto Tensorial **30**

2.1 Produto tensorial de espaços vetoriais 30

2.2 Produto tensorial e linearização 37

2.3 Tensores como formas bilineares e como aplicações lineares 43

2.4 Dualidade tensorial e dualidade de traço 47

2.5 Alguns exemplos 49

2.5.1 Funções de valores vetoriais 49

2.5.2 Funções de duas variáveis 50

3 Produto tensorial projetivo e injetivo **52**

3.1 A norma projetiva 52

3.2 O espaço dual de $X\hat{\otimes}_\pi Y$ 65

3.3 A norma injetiva 68

4 Aplicações **75**

4.1 Multi-ideais de composição 75

4.2 Operadores absolutamente p-somantes 78

Referências Bibliográficas **84**

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- $L(E, F)$ denota o conjunto de todos os operadores lineares de E em F;
- $\mathcal{L}(E, F)$ denota o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F;
- $\mathcal{K}(E, F)$ denota o conjunto de todos os operadores lineares compactos de E em F;
- B_E denota a bola unitária fechada no espaço E;
- $\mathring{B}_E$ denota a bola unitária aberta no espaço E;
- $X^{\#}$ denota o dual algébrico do espaço X;
- E' denota o dual topológico do espaço E;
- $\dim(E)$ denota a dimensão do espaço E;
- $\mathrm{Im}(f)$ denota a imagem da aplicação f;
- $\ker(T)$ denota o núcleo do operador linear T;
- $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ denota que $E \subseteq F$ e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$, para todo $x \in E$;
- $E \overset{1}{=} F$ denota que E é isometricamente isomorfo a F;
- $(x_j)_{j=1}^n$ denota a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;
- $\mathrm{int}(A)$ denota o interior do conjunto A;

- id_E denota a aplicação identidade em E;
- e_n denota a sequência $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ cujos termos são todos nulos com exceção do n-ésimo;
- $[A]$ ou $\operatorname{span}\{A\}$ denota o espaço vetorial gerado pelo subconjunto A de um espaço vetorial E;
- $T' \colon F' \longrightarrow E'$ denota o operador adjunto de $T \in \mathcal{L}(E, F)$;
- $T^{\#} \colon F^{\#} \longrightarrow E^{\#}$ denota o operador adjunto de $T \in L(E, F)$;
- $B(X \times Y, Z)$ denota o conjunto de todas as aplicações bilineares de $X \times Y$ em Z;
- $B(X \times Y)$ denota o conjunto de todas as formas bilineares de $X \times Y$ em $\mathbb{K}$;
- $X \otimes Y$ denota o produto tensorial dos espaços vetoriais X e Y;
- $x \otimes y$ denota o tensor elementar em $X \otimes Y$;
- $co(S)$ denota a envoltória convexa de S;
- $\overline{co}(S)$ denota o fecho da envoltória convexa de S;
- $\pi(\cdot)$ denota a norma projetiva definida em $X \otimes Y$;
- $\varepsilon(\cdot)$ denota a norma injetiva definida em $X \otimes Y$;
- $X \otimes_\pi Y$ denota o produto tensorial munido da norma projetiva;
- $X \otimes_\varepsilon Y$ denota o produto tensorial munido da norma injetiva;
- $X \hat{\otimes}_\pi Y$ denota o completamento do espaço normado $X \otimes_\varepsilon Y$, chamado de produto tensorial projetivo;
- $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ denota o completamento do espaço normado $X \otimes_\varepsilon Y$, chamado de produto tensorial injetivo;
- $\mathcal{I}$ denota o ideal de operadores.

Introdução

O caráter algébrico das aplicações multilineares possibilita que resultados da Álgebra sejam bem incorporados na Análise Funcional, permitindo assim a criação de ferramentas capazes de auxiliar na resolução de problemas que envolvem esse tipo de aplicação. Dentre essas ferramentas, destacamos o produto tensorial de espaços vetoriais que, por exemplo, lineariza essas aplicações.

O produto tensorial foi introduzido na Análise Funcional por meio de um estudo desenvolvido por Murray e Von Neumann [12] no final da década de 1930. Anos depois, mais especificamente em 1943, Schatten em [18] e [19] fez o primeiro estudo das classes de normas sobre os produtos tensoriais entre espaços de Banach. Entretanto, as várias possibilidades do uso dos produtos tensoriais na Teoria dos Espaços de Banach só ficou evidente e ganhou força com o artigo de Grothendieck [8], *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, publicado em 1956 no Brasil. Nesse inestimável trabalho, entre muitas coisas, Grothendieck define e estuda a classe dos operadores absolutamente somantes. Embora atualmente, os estudos sobre esse tipo de classe, em sua grande maioria, façam uso de caracterizações por desigualdades ou por operadores induzidos, nos estudos de Grothendieck eles foram, inicialmente, postos em termos de produto tensorial.

Como havia alguma relutância de pensar em termos de produto tensorial na Análise Funcional, os resultados apresentados no *Résumé* foram, de certa forma, considerados de difícil compreensão. Anos depois, por volta de 1960, vários pesquisadores como Lindenstrauss, Pelczyński e Pietsch e seus colaboradores reescreveram as ideias de Grothendieck sobre a teoria dos operadores absolutamente somantes de forma mais compreensível e sistematizaram a teoria de ideais de operadores, de certo modo, sem o uso de produtos tensoriais. Anos depois, o estudo de ideais de operadores com uso de produtos tensoriais aparece novamente, dentre muitos trabalhos, no estudo de Pietsch [15], publicado em 1983, e no livro de Pisier [16] e no de Defant e Floret [5].

Iniciado por volta dos anos 1970, o trabalho desenvolvido por Pisier na Teoria dos Espaços de Banach foi o que finalmente chamou a atenção para a abordagem do produto tensorial na Análise Funcional. Sua obra [16] foi fundamental para solucionar seis dos problemas deixados por Grothendieck no *Résumé*. Além disso, Pisier deixa claro que

pensar em termos de ideais de operadores e em termos de produtos tensoriais é de fato bastante útil.

Atualmente, pesquisadores como, por exemplo, P. Rueda e G. Botelho vêm utilizando o produto tensorial entre espaços de Banach como uma importante ferramenta na Análise Funcional. Entre seus trabalhos, destacamos o artigo [1], desenvolvido com a colaboração de D. Pellegrino, que deixa evidente, entre outras contribuições, a utilidade do produto tensorial projetivo no método de composição, que gera multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares, e o artigo [3], que aborda a propriedade Schur em produtos tensoriais projetivos e injetivos.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o produto tensorial entre espaços vetoriais (e de Banach), mostrando sua construção, algumas de suas propriedades e duas aplicações na Análise Funcional. Para isso, estruturamos a dissertação em quatro capítulos da forma que descrevemos abaixo.

O Capítulo 1 traz uma breve explanação de resultados preliminares necessários para o desenvolvimento da teoria ao longo do trabalho. Nele, apresentamos resultados clássicos de Análise Funcional e, entre muitas coisas, tecemos algumas considerações sobre os espaços de sequências a valores vetoriais.

No Capítulo 2, abordamos a teoria do produto tensorial de espaços vetoriais. Nosso interesse, nesse capítulo, se concentra no estudo algébrico dessa teoria, observando sua construção e suas propriedades.

No Capítulo 3, estudamos duas maneiras de normar o produto tensorial de espaços vetoriais (em particular, de Banach). Trabalhamos a norma projetiva, mostramos que o produto tensorial projetivo lineariza as aplicações bilineares contínuas e determinamos o espaço dual do produto tensorial projetivo. Além disso, apresentamos um estudo sobre a norma injetiva.

No último capítulo, o Capítulo 4, apresentamos duas aplicações dos produtos tensoriais entre espaços de Banach: a primeira aplicação relaciona o produto tensorial ao método de composição, método usado para gerar multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares; a segunda apresenta uma caracterização para os operadores absolutamente p-somantes em função da continuidade de operadores entre espaços produtos tensoriais.

Um fato digno de nota: muitos resultados clássicos de Análise Real e de Álgebra Linear serão utilizados indistintamente ao longo da dissertação sem nenhuma menção ou indicações de referências.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve apresentação de alguns resultados de Análise Funcional e dos espaços de sequências a valores vetoriais que serão necessários para o desenvolvimento da teoria dos próximos capítulos. Salientamos que algumas demonstrações serão omitidas, por se tratarem de resultados clássicos, e para elas apontaremos as devidas referências.

1.1 Resultados Clássicos de Análise Funcional

Na presente seção, iremos expor algumas definições e resultados clássicos de Análise Funcional, como os importantes teoremas do Gráfico Fechado e os de Hahn-Banach. Em sua construção, utilizamos como referências principais os livros [2], [4] e [11]. Iniciamos o texto definindo uma norma sobre um espaço vetorial:

Definição 1.1. Uma *norma* num espaço vetorial E é uma aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E \colon E &\longrightarrow [0,\infty) \\ x &\longmapsto \|x\|_E \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\|x\|_E \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$, para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

(iii) $\|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$, para todos x, $y \in E$ (desigualdade triangular).

Quando um espaço vetorial for munido de uma norma será chamado de *espaço vetorial normado* ou simplesmente *espaço normado* e denotado pelo par $(E, \|\cdot\|_E)$.

Definição 1.2. Um espaço normado E é chamado de *espaço de Banach* se ele for completo na métrica

$$d(x,y) = \|x-y\|, \text{para todo } x,y \in E,$$

induzida pela norma.

Definição 1.3. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados. As seguintes expressões definem normas sobre o espaço produto cartesianos $E_1 \times \cdots \times E_n$:

$$\begin{aligned}
&\|(x_1,\ldots,x_n)\|_1 = \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|, \\
&\|(x_1,\ldots,x_n)\|_2 = \left(\|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ e} \\
&\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}.
\end{aligned}$$

Definição 1.4. Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ em um espaço vetorial E são *equivalentes* se existem constantes a, $b > 0$ tais que, para todo $x \in E$, tem-se

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0.$$

O próximo resultado se trata de um exercício corriqueiro em Análise Funcional e por isso omitiremos sua demonstração.

Proposição 1.5. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados.

(a) As aplicações $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ definem normas equivalentes no produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_n$.

(b) $E_1 \times \cdots \times E_n$ munido de uma das normas do item (a) é Banach se, e somente se, $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Banach.

Veremos, na proposição a seguir, a importância dos subespaços fechados de um espaço de Banach.

Proposição 1.6. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então, F é um espaço de Banach se, e somente se, F é fechado em E.

Demonstração: Sejam F um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em F tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $\|x_n - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x + x - x_n\| \\
&\leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todos $m, n > n_0$. Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F e existe $y \in F$ tal que $x_n \to y$. Pela unicidade do limite, $x = y \in F$, provando que F é fechado em E.

Reciprocamente, suponha que F é fechado em E e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Então, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e portanto existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Como F é fechado, temos que $x \in F$, provando assim que F é um espaço de Banach. ■

Nosso objetivo agora é mostrar que qualquer espaço vetorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.7. Sejam E um espaço normado e $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de E. Então existe uma constante $c > 0$, que depende do conjunto B, tal que

$$\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \cdots + |a_n|),$$

para quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_n$.

Demonstração: Veja [2, Lema 1.1.5]. ■

Teorema 1.8. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E.*

Demonstração: Sejam E um espaço normado de dimensão n, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ uma base normalizada de E e $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Então para cada $k \in \mathbb{N}$ existem únicos escalares $a_1^k, \ldots, a_n^k$ tais que $x_k = a_1^k\beta_1 + \cdots + a_n^k\beta_n$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\| < c \cdot \varepsilon$ sempre que $k, m \geq n_0$, onde c é a constante do Lema 1.7 para o conjunto $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Segue então que

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_j^k - a_j^m\right| \leq \frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^{n}(a_j^k - a_j^m)\beta_j\right\| = \frac{1}{c}\|x_k - x_m\| < \varepsilon,$$

sempre que $k, m \geq n_0$. Daí, para cada $j = 1, \ldots, n$, a sequência de escalares $(a_j^k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy, portanto convergente. Digamos $b_j = \lim_k a_j^k, j = 1, \ldots, n$. Nesse caso, temos $\lim_k \sum_{j=1}^{n} \left|a_j^k - b_j\right| = 0$. Definindo $x = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$, temos $x \in E$ e

$$\lim_k \|x_k - x\| = \lim_k \left\|\sum_{j=1}^{n}(a_j^k - b_j)\beta_j\right\| \leq \lim_k \sum_{j=1}^{n} \left|a_j^k - b_j\right| = 0,$$

provando que $x_k \longrightarrow x$. Portanto E é um espaço Banach. A segunda afirmação segue da primeira e da Proposição 1.6. ■

Definiremos agora alguns espaços de sequências de escalares que serão utilizados em resultados posteriores. Denotaremos por c_0, c_{00}, ℓ_p e ℓ_∞, respectivamente, o espaço das sequências que convergem para zero, das sequências eventualmente nulas, das sequências p-somáveis e das sequências limitadas. Em símbolo temos

$$c_0 := \left\{(a_j)_{j=1}^\infty \colon a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } a_j \longrightarrow 0\right\},$$

$$c_{00} := \left\{(a_j)_{j=1}^\infty \in c_0 \colon \text{existe } j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_j = 0, \text{ para todo } j \geq j_0\right\},$$

$$\ell_p := \left\{(a_j)_{j=1}^\infty \colon a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty\right\},$$

$$\ell_\infty := \left\{(a_j)_{j=1}^\infty \colon a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty\right\}.$$

As desigualdades de Hölder e de Minkowski para sequências são necessárias para mostrar que o espaço ℓ_p é um espaço normado. As duas próximas proposições mostram essas desigualdades e as respectivas demonstrações podem ser encontradas em [11, Example 1.2-3].

Proposição 1.9 (**Desigualdade de Hölder para sequências**). Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

para quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

Proposição 1.10 (**Desigualdade de Minkowski para sequências**). Seja $p \geq 1$. Então para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Os dois teoremas seguintes mostram que os espaços de sequências ℓ_p e ℓ_∞ são Banach.

Teorema 1.11. *Se $1 \leq p < \infty$, então ℓ_p é um espaço de Banach com a norma*

$$\left\|(a_j)_{j=1}^\infty\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: Veja [11, Example 1.5-4]. ■

Teorema 1.12. *O espaço das sequências limitadas ℓ_∞ é Banach com a norma*

$$\left\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|$$

Demonstração: Veja [11, Example 1.5-2]. ■

Como toda sequência convergente é limitada temos que c_0 é um subespaço de ℓ_∞. O fato de c_0 ser um espaço de Banach [2, Exemplo 1.1.7] segue da Proposição 1.6 que c_0 é um subespaço fechado de ℓ_∞. O espaço c_{00} é um subespaço não-fechado de c_0 e portanto não é Banach [2, Exemplo 1.1.7].

Agora, iremos apresentar alguns resultados relacionados aos operadores lineares contínuos. Iniciaremos definindo esse tipo operador.

Definição 1.13. Sejam E e F espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T\colon E \longrightarrow F$ é dita um *operador linear contínuo* se é linear e contínua simultaneamente, isto é,

(i) $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e quaisquer $x, y \in E$;

(ii) Se para todos $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$, sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

Além disso, se $T\colon E \longrightarrow F$ for um operador linear contínuo bijetor cujo operador inverso $T^{-1}\colon F \longrightarrow E$ for contínuo, dizemos que T é um *isomorfismo topológico*, ou simplesmente *isomorfismo*, e que E e F são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*.

Denotaremos o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F por $\mathcal{L}(E, F)$. Se F for o corpo dos escalares $\mathbb{K}$, escrevemos E' em vez de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ e o chamaremos de *dual topológico de E*, ou simplesmente *dual de E*, e seus elementos chamaremos de *funcionais lineares contínuos*. Sendo $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear, dizemos que T é uma *isometria linear* se $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

O próximo teorema traz algumas caracterizações que são bastante úteis para mostrar a continuidade de um operador linear.

Teorema 1.14. *Sejam E, F espaços normados e $T\colon E \to F$ um operador linear. São equivalentes:*

(a) *T é Lipschitziano.*

(b) *T é uniformemente contínuo.*

(c) *T é contínuo.*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E.*

(e) *T é contínuo na origem.*

(f) $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| < \infty$.

(g) *Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: Da teoria dos espaços métricos, sabemos que as implicações (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) são sempre válidas e não dependem da linearidade de T.
(d)$\Rightarrow$(e) Digamos que T é contínuo no ponto $x_0 \in E$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$, sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Seja $x \in E$ tal que $\|x\| < \delta$. Então, $\|x\| = \|x + x_0 - x_0\| < \delta$ implica em

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| = \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

donde T é contínuo na origem.
(e)$\Rightarrow$(f) Sendo T contínuo na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$, sempre que $\|x\| < \delta$. Daí, $\|x\| \leq 1$ implica em $\left\|\frac{\delta}{2}x\right\| < \delta$ que por sua vez implica em

$$\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| < 1,$$

para todo $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$. Logo,

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

(f)$\Rightarrow$(g) Se $x = 0$ a desigualdade é trivialmente satisfeita para qualquer $c > 0$. Seja $x \in E \setminus \{0\}$. Então,

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|T(y)\| =: c < \infty.$$

Portanto, $\|T(x)\| \leq c\,\|x\|$ para todo $x \in E$.
(g)$\Rightarrow$(a) Sejam $x, y \in E$. Temos

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq c\,\|x - y\|$$

e portanto T é Lipschitziano. ■

A condição (f) do Teorema 1.14 nos mostra como normar o espaço $\mathcal{L}(E,F)$ dos operadores lineares contínuo de E em F:

Proposição 1.15. Sejam E e F espaços normados.

(a) A expressão

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E,F)$.

(b) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todos $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $x \in E$.

(c) Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ também é Banach.

Demonstração: Veja [2, Proposição 2.1.4]. ■

Apresentamos agora uma classe especial de operadores lineares contínuos.

Definição 1.16. Um operador linear contínuo $T\colon E \longrightarrow F$ é dito ser de *posto finito* se a imagem de T é um subespaço de dimensão finita de F. Denotaremos por $\mathcal{F}(E,F)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos de posto finito de E em F.

O operador $\varphi \otimes y\colon E \longrightarrow F$ definido por $\varphi \otimes y(x) := \varphi(x)y$, com $\varphi \in E'$ e $y \in F$, é um exemplo de operador linear contínuo de posto finito. De fato, dados $a, b \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\varphi \otimes y(a + \lambda b) = \varphi(a + \lambda b)y = \varphi(a)y + \lambda\varphi(b)y = \varphi \otimes y(a) + \lambda\varphi \otimes y(b),$$

donde $\varphi \otimes y$ é linear. A continuidade de $\varphi \otimes y$ segue de

$$\|\varphi \otimes y(x)\| = \|\varphi(x)y\| \leq \|\varphi\| \, \|y\| \, \|x\| \, ,$$

para todo $x \in E$. Além disso, $\|\varphi \otimes y\| = \sup_{x \in B_E} \|\varphi(x)y\| = \|\varphi\| \, \|y\|$. Como $\varphi \otimes y(E) \subseteq [y]$, temos que $\varphi \otimes y$ é um operador linear contínuo de posto finito.

Os operadores lineares contínuos de posto finito possuem a seguinte caracterização:

Proposição 1.17. Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. São equivalentes:

(a) T é de posto finito.

(b) Existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ e $y_1, \ldots, y_n \in F$ tais que $T = \varphi_i \otimes y_i + \cdots + \varphi_n \otimes y_n$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que a imagem de T tenha dimensão finita, isto é, $\dim(T(E)) = n \in \mathbb{N}$. Escolha uma base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ para $T(E)$. Desse modo, para todo $x \in E$ existem únicos $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i. \tag{1.1}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, defina $\varphi_i \colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ pondo $\varphi_i(x) = \alpha_i$. Note que a linearidade de φ_i segue da unicidade de cada elemento de $T(E)$ como combinação linear de vetores da base e da linearidade de T. Não é difícil mostrar que a função $\|\cdot\|_s : T(E) \to [0, \infty)$, dada por $\|T(x)\|_s := \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)|$, define uma norma em $T(E)$. Como, por hipótese, $T(E)$ tem dimensão finita, a norma de F restrita a $T(E)$ e a norma $\|\cdot\|_s$ são equivalentes, logo existe $k > 0$ tal que

$$|\varphi_i(x)| \ = |\alpha_i| \leq |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| = \|T(x)\|_s \leq k \, \|T(x)\| \leq k \, \|T\| \, \|x\| \, ,$$

para todos $x \in E$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $\varphi_i \in E'$, para todo $i = 1, \ldots, n$. De (1.1) segue que $T = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Se $T = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i$, então $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $T(E) \subseteq [y_1, \ldots, y_n]$, portanto $T \in \mathcal{F}(E, F)$. ■

Apresentaremos a seguir um conjunto de teoremas que fazem parte dos principais resultados dessa seção. São eles: o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico Fechado e os Teoremas de Hahn-Banach.

Sob a hipótese de que o domínio é espaço de Banach, o Teorema de Banach-Steinhaus mostra que uma família de operadores lineares contínuos é uniformemente limitada sempre que for pontualmente limitada. Para sua demonstração necessitaremos do Teorema de Baire que enunciaremos a seguir e cuja demonstração pode ser vista em [4, Theorem 2.1].

Teorema 1.18 (**Teorema de Baire**). *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não vazio.*

Teorema 1.19 (**Banach-Steinhaus**). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ satisfazendo a seguinte condição: para cada $x \in E$ existe $c_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < c_x.$$

Então, $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração: Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$A(n,T_i) = \{x \in E\colon\ \|T_i(x)\| \leq n\}$$

e a aplicação contínua $\|\cdot\| \circ T_i : E \to \mathbb{R}$. Como $A(n,T_i) = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0,n])$, segue que $A(n,T_i)$ é fechado para todos $n \in \mathbb{N}$ e $i \in I$. Dessa forma,

$$A_n := \left\{x \in E\colon\ \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n\right\} = \bigcap_{i\in I} A(n,T_i)$$

é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$, pois a interseção de conjuntos fechados é sempre um fechado. Afirmamos que $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. De fato, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq E$ por definição. Para a inclusão contrária, dado $x \in E$ existem $c_x < \infty$ e $n_1(x) \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < c_x \leq n_1,$$

donde $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pelo Teorema 1.18, tem-se $\operatorname{int}(A_{n_0}) \neq \varnothing$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Sejam $a \in \operatorname{int}(A_{n_0})$ e $r > 0$ tais que a bola fechada de centro a e raio r esteja contida no aberto $\operatorname{int}(A_{n_0})$, isto é,

$$\{x \in E\colon\ \|x-a\| \leq r\} \subseteq \operatorname{int}(A_{n_0}).$$

Considerando agora $y \in E$ tal que $\|y\| \leq 1$, observe que, se $x = a + ry$, então $\|x-a\| = \|ry\| \leq r$ e portanto $x \in A_{n_0}$. Daí,

$$\|T_i(x-a)\| = \|T_i(x) - T_i(a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0 \leq 2n_0,$$

para todo $i \in I$. Logo, $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x-a)\| \leq 2n_0$ e $\|T_i(y)\| \leq \dfrac{2n_0}{r}$ para todo $i \in I$ e todo $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Tomando o supremo sobre $y \in B_E$ obtemos

$$\|T_i\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r},$$

para todo $i \in I$. Por fim, tomando o supremo sobre os índices $i \in I$ temos

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r} < \infty.$$

■

Vejamos uma consequência do teorema apresentado anteriormente.

Corolário 1.20. Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E,F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E. Se definirmos

$$\begin{aligned} T\colon E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x), \end{aligned}$$

então T é um operador linear contínuo.

Demonstração: A linearidade de T segue imediatamente das propriedades dos limites e da linearidade de cada T_n. Por hipótese, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente para todo $x \in E$, logo é limitada. Daí, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$, para todo $x \in E$. Pelo Teorema 1.19, existe $c > 0$ tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq c$. Além disso,

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \, \|x\| \leq c \, \|x\| \, ,$$

para todos $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$ concluímos que $\|T(x)\| \leq c \, \|x\|$ para todo $x \in E$ e, portanto, T é contínua. ■

Definição 1.21. Sejam E, F e G espaços vetoriais. Uma aplicação $A\colon E \times F \longrightarrow G$ é dita *bilinear* se for linear em cada variável, isto é,

(i) $A(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda A(x_1, y) + A(x_2, y)$, para todo x_1, $x_2 \in E$, $y \in F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ e

(ii) $A(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda A(x, y_1) + A(x, y_2)$, para todo $x \in E$, y_1, $y_2 \in F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Denotaremos por $B(X \times Y, Z)$ o espaço vetorial das aplicações bilineares de $X \times Y$ em Z. Se $Z = \mathbb{K}$ denotaremos o espaço das formas bilineares por $B(X \times Y)$. A próxima proposição estabelece algumas caracterizações para a continuidade de uma aplicação bilinear. A demonstração desse resultado é semelhante ao da Proposição 1.14 e por isso será omitida.

Proposição 1.22. Sejam E, F, G espaços normados e $A\colon E \times F \longrightarrow G$ uma aplicação bilinear. Então para qualquer uma das normas em $E \times F$ da Proposição 1.5, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é contínua.

(b) A é contínua na origem.

(c) $\sup\{\|A(x,y)\| : x \in B_E, y \in B_F\} < \infty$.

(d) Existe $C \geq 0$ tal que $\|A(x,y)\| \leq C\,\|x\| \cdot \|y\|$ para todos $x \in E$ e $y \in F$.

Seja $T\colon E \to F$ uma aplicação. Dizemos que T é uma *aplicação aberta* se $T(A)$ é aberto em F para todo conjunto A aberto em E. Nosso próximo resultado mostra que se E e F são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor definidos entre esses espaços é uma aplicação aberta. Para a demonstração consulte [2, Teorema 2.4.2].

Teorema 1.23 (**Teorema da Aplicação Aberta**). *Sejam E, F espaços de Banach e $T\colon E \to F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então, T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear, contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Sejam E e F espaços normados. O gráfico de um operador linear $T\colon E \to F$ é o conjunto

$$\mathrm{G}(T) \coloneqq \{(x, T(x))\colon x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Note que da linearidade de T segue que $\mathrm{G}(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. Veremos que se E e F forem espaços de Banach, a continuidade de T é equivalente ao fato de $\mathrm{G}(T)$ ser fechado em $E \times F$.

Teorema 1.24 (**Teorema do Gráfico Fechado**). *Sejam E, F espaços de Banach e $T\colon E \to F$ um operador linear. Então, T é contínuo se, e somente se, $\mathrm{G}(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração: Suponha T contínuo e considere a função

$$\begin{aligned} f\colon E \times F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \|T(x) - y\| \end{aligned}$$

uma função. Provaremos que f é contínua. Dado $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $E \times F$ tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$, da continuidade de T temos que $T(x_k) \to T(x)$ em F. Daí, $T(x_n) - y_n \to T(x) - y$. Como a função $\|\cdot\|$ é contínua segue que $\|T(x_n) - y_n\| \to \|T(x) - y\|$. Portanto, f é contínua. Temos então que $\mathrm{G}(T) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado em $E \times F$.

Reciprocamente, considere que $\mathrm{G}(T)$ é fechado. Sabemos que o produto cartesiano $E \times F$ de espaços de Banach também é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$. Segue da Proposição 1.6 que $\mathrm{G}(T)$ também é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$.

Afirmação: A aplicação $\pi\colon \mathrm{G}(T) \to E$, dada por $\pi(x, T(x)) = x$, é linear, contínua e bijetora.

Primeiro, provaremos a linearidade. Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x, T(x)), (y, T(y)) \in \mathrm{G}(T)$. Temos

$$\begin{aligned}\pi((x, T(x)) + \lambda(y, T(y))) &= \pi(x + \lambda y, T(x) + \lambda T(y)) = \pi(x + \lambda y, T(x + \lambda y)) \\ &= x + \lambda y = \pi(x, T(x)) + \lambda \pi(y, T(y)),\end{aligned}$$

donde π é linear. Da relação $x \in E \mapsto T(x) \in F$, segue que $\pi(\mathrm{G}(T)) = E$, isto é, π é sobrejetiva. Se $\pi(x, T(x)) = 0$, temos $x = 0$ e assim $T(x) = 0$. Isso implica que $\ker(\pi) = \{0\}$ e portanto π é injetiva. Temos também que π é contínua, pois

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1 ,$$

Para todo $x \in E$.

Pelo Teorema da Aplicação Aberta, π^{-1} também é contínua e assim, existe $c > 0$ tal que $\|\pi^{-1}(x)\|_1 = \|(x, T(x))\|_1 \leq c\,\|x\|$, para todo $x \in E$. Daí,

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq c\,\|x\| ,$$

para todo $x \in E$ e portanto T é contínuo. ■

O Teorema de Hahn-Banach é de grande importância na Análise Funcional e em outras áreas da Matemática, seja por suas aplicações ou por seus corolários. Apresentaremos a seguir o Teorema de Hahn-Banach que é válido para espaços vetoriais reais e complexos e sua demonstração pode ser vista em [2, Teorema 3.1.2].

Teorema 1.25 (Hahn-Banach). *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $p\colon E \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|\, p(x), \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in E, \text{ e}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Apresentaremos agora três corolários do Teorema de Hahn-Banach que também recebem esta nomenclatura. Os dois últimos serão usados com maior frequência ao longo deste trabalho.

Corolário 1.26. Sejam G um subespaço de um espaço normado E e $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e tal que $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Demonstração: Consideremos a função $p\colon E \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$. Para todo $a \in \mathbb{K}$ e todos $x, y \in E$, temos

$$p(ax) = \|\varphi\|\,\|ax\| = |a|\,\|\varphi\|\,\|x\| = |a|\,p(x)$$

e

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|\varphi\|\,\|x+y\| \leq \|\varphi\|\,(\|x\| + \|y\|) \\ &= \|\varphi\|\,\|x\| + \|\varphi\|\,\|y\| = p(x) + p(y). \end{aligned}$$

Como $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\,\|x\| = p(x)$ para todo $x \in G$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$ para todo $x \in E$. Logo, $\widetilde{\varphi}$ é contínuo e $\|\widetilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{x \in B_G} |\varphi(x)| = \sup_{x \in B_G} |\widetilde{\varphi}(x)| \\ &\leq \sup_{x \in B_E} |\widetilde{\varphi}(x)| = \|\widetilde{\varphi}\|\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. ■

Corolário 1.27. Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstração: Sejam $G = [x_0]$ o espaço gerado por x_0 e $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ o funcional linear contínuo dado por $\varphi(\lambda x_0) = \lambda\,\|x_0\|$. Então, pelo Corolário 1.26 existe $\widetilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ funcional linear contínuo tal que $\widetilde{\varphi}$ coincide com φ em G e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Portanto, $\widetilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$ e

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| &= \sup_{\|\lambda x_0\| \leq 1} |\varphi(\lambda x_0)| \\ &= \sup_{\|\lambda x_0\| \leq 1} |\lambda|\,\|x_0\| = \sup_{\|\lambda x_0\| \leq 1} \|\lambda x_0\| = 1. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.28. Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \max\{|\varphi(x)|\colon \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Demonstração: Dado $x \in E$, vale $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x\|$ para todo $\varphi \in E'$. Daí,

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} (\|\varphi\| \, \|x\|) = \|x\| \, .$$

Pelo Corolário 1.27 existe $\psi \in E'$ tal que $\|\psi\| = 1$ e $\psi(x) = \|x\|$. Logo,

$$\|x\| = \psi(x) \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

e com isso ganhamos a primeira igualdade. A segunda igualdade segue de

$$\max \{|\varphi(x)| \colon \varphi \in E' \ e \ \|\varphi\| = 1\} \leq \sup_{\|\varphi\| = 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

e de

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| = \|x\| = \psi(x) \leq \max \{|\varphi(x)| \colon \varphi \in E' \ e \ \|\varphi\| = 1\} \, .$$

■

Conceituaremos agora o que é uma projeção e um subespaço complementado. Antes de definir esse último, apresentaremos uma proposição que estabelece uma equivalência necessária à sua definição.

Definição 1.29. Um operador linear contínuo $P \colon E \longrightarrow E$, onde E é um espaço de Banach, é chamado uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$.

Proposição 1.30. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço de E. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe uma projeção $P \colon E \longrightarrow E$ tal que $P(E) = F$. Neste caso dizemos que P é uma projeção de E sobre F.

(b) F é fechado e existe um subespaço fechado $G \subseteq E$ tal que $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$, isto é, $E = F \oplus G$.

Neste caso, temos que $F = \{x \in E \colon P(x) = x\}$ e $G = \mathrm{Ker}(P)$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Seja $x \in F$. Tomando $y \in E$ tal que $P(y) = x$ temos que $x = P(y) = P(P(y)) = P(x)$. Se $x = P(x)$, então $x \in \mathrm{Im}(P) = F$. Considerando o operador identidade de E, $\mathrm{id}_E \colon E \longrightarrow E$, temos

$$F = \{x \in E \colon P(x) = x\} = \{x \in E \colon (P - \mathrm{id}_E)(x) = 0\} = (P - \mathrm{id}_E)^{-1}(\{0\}),$$

o que mostra que F é fechado.

Agora, tomando $G = \ker(P)$, não é difícil mostrar que G é um subespaço fechado de E. Temos que $(x - P(x)) \in G$, $P(x) \in F$ e $x = (x - P(x)) + P(x)$, para todo $x \in E$. Ainda, se $x \in G \cap F$, temos $x = P(x)$ pois $x \in F$ e $P(x) = 0$ pois $x \in G$. Portanto $x = 0$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Por hipótese, para cada $x \in E$, existem únicos $x_1 \in F$ e $x_2 \in G$ tais que $x = x_1 + x_2$. É imediato que o operador $P\colon E \longrightarrow E$ dado por $P(x) = x_1$ está bem definido, é linear, $P^2 = P$, $\mathrm{Im}(P) = F$, $\ker(P) = G$ e $F = \{x \in E\colon P(x) = x\}$. Provaremos agora que P é contínuo. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $x_n \longrightarrow x$ e $P(x_n) \longrightarrow y$. Para cada n, escreva $x_n = y_n + z_n$ com $y_n \in F$ e $z_n \in G$. Então

$$z_n = x_n - y_n = x_n - P(x_n) \longrightarrow x - y.$$

Como G é fechado, $x - y \in G$ e portanto $P(x) = P(y)$. Por outro lado, $y_n = P(x_n) \longrightarrow y$. Como F é fechado por hipótese, $y \in F$. Dessa forma, $y = P(y) = P(x)$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado temos que o operador linear P é contínuo. ■

Definição 1.31. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço de E. Dizemos que F é *complementado* em E se satisfaz as condições equivalentes da Proposição 1.30.

Definiremos agora quando um operador T entre espaços normados é compacto.

Definição 1.32. Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ entre espaços normados é dito *compacto* se $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F.

Denotaremos por $\mathcal{K}(E, F)$ o conjunto dos operadores compactos de E em F.

Proposição 1.33. Sejam E e F espaços normados. Então $\mathcal{K}(E, F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$. Além disso, se F for espaço de Banach então $\mathcal{K}(E, F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E, F)$.

Demonstração: Veja [2, Proposição 7.2.5]. ■

Ainda falando de alguns conceitos e resultados básicos de Análise Funcional, falaremos brevemente sobre séries em espaços de Banach.

Definição 1.34. Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente, *absolutamente somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente e que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *incondicionalmente somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para toda permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Proposição 1.35. Seja E um espaço de Banach. A família $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de E é somável se, e somente se, o conjunto $I_0 = \{i \in I\colon x_i \neq 0\}$ é finito e $\sum_{i \in I_0} x_i = x$, ou o conjunto I_0 é enumerável e $\lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N} x_{\sigma(k)} = x$ para toda bijeção $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow I_0$.

Demonstração: Veja [9, Proposition A.4.2 (2)]. ■

Desse modo, se $(x_i)_{i\in I}$ é uma família absolutamente somável, então existe um subconjunto enumerável I_0 de I tal que $x_i = 0$ se $i \notin I_0$.

Proposição 1.36. Um espaço normado E é Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.

Demonstração: Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência absolutamente somável em E e $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $y_n := \|x_n\|$. Então, a sequência de números reais $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável em $\mathbb{R}$, logo incondicionalmente somável. Assim sendo, $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_{\sigma(n)}\right\| = \sum_{n=1}^{\infty} y_{\sigma(n)} < \infty$. Pelo Critério de Cauchy para séries, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)}\right\| &= \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| \\ &\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

para todos $n \geq m > n_0$. Consequentemente, a sequência $(\sum_{n=1}^{k} x_{\sigma(n)})_{k=1}^{\infty}$ das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é de Cauchy em E, logo existe $x \in E$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{k} \sum_{n=1}^{k} x_{\sigma(n)} = x.$$

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k} > 0$, existe $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \dfrac{1}{2^k}$, para todos $n, m > n_0$. Considere $n_1 := n_0(\frac{1}{2}) + 1$ e, para $k > 1$, $n_k := \max\{n_0(\frac{1}{2^k}), n_{k-1}\} + 1$. Assim, obtemos uma sequência de índices $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tais que $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$. Pelo Critério de Comparação, a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \ \text{ implica em } \ \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \infty.$$

Por hipótese, temos que toda série absolutamente somável é incondicionalmente somável. Em particular, $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = a$, para algum $a \in E$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{k} x_{n_{k+1}} &= \lim_{k} \left(x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j})\right) \\ &= x_{n_1} + \lim_{k} \sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = x_{n_1} + a,\end{aligned}$$

isto é, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que possui subsequência convergente para $x_{n_1} + a$. Então, $x_n \to x_{n_1} + a \in E$ e portanto E é Banach. ■

1.2 Dualidade e Adjunto de um operador

Nesta seção, discorreremos sobre os duais dos espaços ℓ_p e c_0 e apresentaremos a noção de operador adjunto.

Proposição 1.37. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Os espaços ℓ_{p^*} e $(\ell_p)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*} \overset{\psi}{\longmapsto} \varphi_b \in (\ell_p)', \ \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j, \text{ para todo } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p. \quad (1.2)$$

Demonstração: Mostraremos que φ_b está bem definida, é linear e contínua. De fato, pela desigualdade de Hölder temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left\| (a_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p \left\| (b_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p^*} < \infty,$$

logo $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ é absolutamente convergente e portanto convergente, mostrando assim a boa definição da φ_b. Considere agora $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda (c_j)_{j=1}^{\infty}) = \varphi_b((a_j + \lambda c_j)_{j=1}^{\infty}) &= \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + \lambda c_j) b_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (a_j b_j + \lambda c_j b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} c_j b_j \\
&= \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) + \lambda \varphi_b((c_j)_{j=1}^{\infty}),
\end{aligned}$$

portanto φ_b é linear. Além disso, calculamos

$$\left| \sum_{j=1}^{k} a_j b_j \right| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

e fazendo $k \longrightarrow \infty$ temos

$$|\varphi_b(a)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \|a\|_p \|b\|_{p^*} . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Tomando o sup em (1.3) com $\|a\|_p = 1$, temos $\|\varphi_b\| \leq \|b\|_{p^*}$. Portanto, φ_b é contínua.

A boa definição, a linearidade e continuidade da ψ seguem imediatamente da φ_b.

Seja $a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Então, a se escreve de forma única como $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$, onde e_j é a base de Schauder de ℓ_p. Dado $\varphi_b \in (\ell_p)'$, pela continuidade de φ_b temos $\varphi_b(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_b(e_j)$. De fato, se para cada $k \in \mathbb{N}$ denotarmos $c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j e_j$, por linearidade

$$\varphi_b(c_k) = \varphi_b\left(\sum_{j=1}^{k} a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_b(a_j e_j) = \sum_{j=1}^{k} a_j \varphi_b(e_j),$$

de modo que

$$\varphi_b(a) = \varphi_b(\lim_{k\to\infty} c_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi_b(c_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_b(e_j),$$

onde $\varphi_b(e_j) = b_j$. Vejamos que ψ é sobrejetora. Se $a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, então

$$\psi(a) = \psi\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(a_j e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j = \varphi_b(a),$$

o que prova a sobrejetividade da ψ e, desse modo, podemos definir a sua inversa.

Afirmação: A aplicação inversa $\varphi_b \in (\ell_p)' \overset{\psi^{-1}}{\longmapsto} (\varphi_b(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$ está bem definida e é contínua.

De fato, seja $a_k = (c_j^k)_{j=1}^{\infty}$, onde

$$c_j^k = \begin{cases} \frac{|b_j|^{p^*}}{b_j}, & \text{se} \quad j \leq k \text{ e } b_j \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad j > k \text{ ou } b_j = 0 \end{cases} .$$

Desse modo, temos $\varphi_b(a_k) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^k b_j = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p^*}$ e assim

$$\begin{aligned} |\varphi_b(a_k)| \leq \|\varphi_b\| \|a_k\| &= \|\varphi_b\| \left(\sum_{j=1}^{k} \left|c_j^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\varphi_b\| \left(\sum_{j=1}^{k} \left|\frac{|b_j|^{p^*}}{b_j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= \|\varphi_b\| \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^{(p^*-1)p} \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|\varphi_b\| \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí

$$\sum_{j=1}^{k} |b_j|^{p^*} = \varphi_b(a_k) = |\varphi_b(a_k)| \leq \|\varphi_b\| \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dividindo pelo último fator e usando $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^*}$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^{p^*} \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \|\varphi_b\|$$

e tomando $k \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\|b\|_{p^*} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \|\varphi_b\|.$$

Logo, $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$ e portanto ψ^{-1} está bem definida e é contínua, o que completa a demonstração. ■

A relação de dualidade apresentada na Proposição 1.37 também descreve o dual de c_0 que apresentaremos na próxima proposição e a sua demonstração pode ser vista em [2, Proposição 4.2.3]:

Proposição 1.38. Os espaços ℓ_1 e $(c_0)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \overset{\psi}{\longmapsto} \varphi_b \in (c_0)', \ \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j, \text{ para todo } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0. \tag{1.4}$$

Vimos que para todo espaço normado E podemos considerar seu dual E', que é um espaço de Banach. Podemos também considerar o dual de E', que chamamos de *bidual* e denotamos por E''. O próximo resultado mostra que todo espaço normado pode ser encontrado no seu bidual e sua demonstração se encontra em [2, Proposição 4.3.1].

Proposição 1.39. Seja E um espaço vetorial normado. Então, para todos $x \in E$ e

$\varphi \in E'$, o operador linear

$$\begin{aligned} J_E \colon E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \end{aligned}$$

é uma isometria linear, chamado de *mergulho canônico de E em E''*.

Observação 1.40. Quando E for apenas um espaço vetorial e estivermos tratando do dual algébrico, utilizaremos a mesma notação, J_E, para denotar o mergulho canônico de E.

Definição 1.41. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador linear contínuo. O operador $T' \colon F' \longrightarrow E'$ definido por

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)), \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F'$$

é chamado *adjunto de T*.

No caso em que os espaços vetoriais E e F não sejam necessariamente normados e estivermos considerando seus respectivos duais algébricos, $E^{\#}$ e $F^{\#}$, isto é, sem topologia, utilizaremos a notação $T^{\#}$ em vez de T' para o adjunto de T.

Proposição 1.42. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T' é um operador linear contínuo de F' em E' e $\|T\| = \|T'\|$. Além disso, se T é um isomorfismo (isométrico), então T' é um isomorfismo (isométrico).

Demonstração: Primeiro, veremos que o operador T' está bem definido, ou seja, que $T'(\varphi) \in E'$ para todo $\varphi \in F'$. De fato, dados $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} T'(\varphi)(x + \lambda y) &= \varphi(T(x + \lambda y)) = \varphi(T(x)) + \lambda\varphi(T(y)) \\ &= T'(\varphi)(x) + \lambda T'(\varphi)(y) \end{aligned}$$

e

$$\|T'(\varphi)(x)\| = \|\varphi(T(x))\| \leq \|\varphi\| \, \|T\| \, \|x\| \,, \tag{1.5}$$

donde $T'(\varphi) \in E'$. Mostraremos agora que T' é linear. Sejam $\varphi, \psi \in F'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} T'(\varphi + \lambda\psi)(x) &= (\varphi + \lambda\psi)(T(x)) = \varphi(T(x)) + \lambda\psi(T(x)) \\ &= T'(\varphi)(x) + \lambda T'(\psi)(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Logo, $T'(\varphi + \lambda\psi) = T'(\varphi) + \lambda T'(\psi)$ e portanto T' é linear. Tomando o supremo sobre $x \in B_E$ em (1.5), obtemos

$$\|T'(\varphi)\| \leq \|\varphi\| \, \|T\| \,, \tag{1.6}$$

para todo $\varphi \in F'$. Assim, $T' \in \mathcal{L}(F', E')$. Tomando o supremo sobre $\varphi \in B_{F'}$ em (1.6), concluímos que $\|T'\| \leq \|T\|$. A desigualdade contrária segue de

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(T(x))| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} |T'(\varphi)(x)| \\ &\leq \|x\| \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|T'(\varphi)\| = \|x\| \, \|T'\| \,. \end{aligned}$$

Portanto, $\|T\| = \|T'\|$. Agora, suponhamos que T seja um isomorfismo isométrico. Então $T^{-1}\colon F \to E$ é, além de linear, contínuo. Para cada $\varphi \in E'$, consideremos $\xi \in F'$ dado por $\xi(z) = \varphi(T^{-1}(z))$. Como

$$T'(\xi)(x) = \xi(T(x)) = \varphi(T^{-1}(T(x))) = \varphi(x),$$

para todo $x \in E$, obtemos $T'(\xi) = \varphi$ e por isso T' é sobrejetor. Seja $\psi \in \ker(T')$. Então

$$\psi(T(x)) = T'(\psi)(x) = 0, \tag{1.7}$$

para todo $x \in E$. Como T é sobrejetor, temos de (1.7) que $\psi(y) = 0$, para todo $y \in F$, donde T' é injetor. Para garantir que T' é um isomorfismo, resta mostrar que $(T')^{-1}$ é contínuo, já que a inversa de um operador linear é sempre linear. Mas isso decorre imediatamente do fato (de fácil demonstração) de que $(T')^{-1} = (T^{-1})'$. Para concluir, mostremos que $\|T'(\varphi)\| = \|\varphi\|$, para todo $\varphi \in F'$. Como T é um isomorfismo isométrico, $x \in B_E$ se, e somente se, $T(x) \in B_F$. Daí,

$$\begin{aligned} \|T'(\varphi)\| &= \sup_{x \in B_E} |T'(\varphi)(x)| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(T(x))| \\ &= \sup_{T(x) \in B_F} |\varphi(T(x))| = \sup_{z \in B_F} |\varphi(z)| = \|\varphi\| \,. \end{aligned}$$

■

1.3 Completamento de um espaço normado

É sabido que nem sempre um espaço normado é completo e por isso um questionamento natural seria: é possível completá-lo? Nesta seção, veremos que a resposta para essa

questão é afirmativa. Além disso, iremos expor alguns resultados relacionados a esse completamento.

Definição 1.43. Seja E um espaço vetorial normado. Chamaremos de *completamento de E* o par $(\hat{E}, \xi)$, onde $\hat{E}$ um espaço de Banach e $\xi\colon E \longrightarrow \hat{E}$ uma imersão isométrica (aplicação linear injetiva e, claro, contínua) cuja imagem $\xi(E)$ é densa em $\hat{E}$, isto é, $\overline{\xi(E)} = \hat{E}$.

O teorema a seguir mostra a existência e unicidade do completamento de um espaço normado. A demonstração desse resultado, bastante técnica, pode ser encontrado em [11, Theorem 2.3-2].

Teorema 1.44. *Seja E um espaço normado. Então existe um espaço de Banach $\hat{E}$ e uma isometria ξ de E em um subespaço W de $\hat{E}$ que é denso em $\hat{E}$. O espaço $\hat{E}$ é único, a menos de isometrias.*

Um resultado muito útil sobre a bola unitária fechada do completamento de um espaço normado é apresentado a seguir e sua demonstração pode ser vista em [20, Proposição 3.11].

Proposição 1.45. Sejam E um espaço normado e $(\hat{E}, \xi)$ o seu completamento. Então $B_{\hat{E}} = \overline{B_{\xi(E)}}$.

O espaço normado E pode ser identificado como um subespaço denso do seu completamento $\hat{E}$ com a seguinte identificação $x \in E \longleftrightarrow \xi(x) \in \hat{E}$. A menos dessa identificação, podemos escrever $E = \xi(E)$. Assim, pela Proposição 1.45 temos que

$$\overline{B_E}^{\hat{E}} = B_{\hat{E}}. \tag{1.8}$$

Lema 1.46. Sejam E um espaço vetorial normado, $(\hat{E}, \xi)$ o seu completamento e $A \subseteq E$. Então $\overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}} = \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$.

Demonstração: Mostraremos primeiro que $\overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}} \subseteq \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$. Seja $z \in \overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}}$, então existe uma sequência (z_n) em $\overline{A}^E$ tal que $\xi(z_n) \longrightarrow z$. Fixando $n \in \mathbb{N}$, como $z_n \in \overline{A}^E$, existe uma sequência (x_k) em A tal que $x_k \longrightarrow z_n$. Teremos da continuidade de ξ que $\xi(x_k) \longrightarrow \xi(z_n)$ e concluímos que $\xi(z_n) \in \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí temos $z \in \overline{\overline{\xi(A)}^{\hat{E}}}^{\hat{E}} = \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$. Provaremos agora a inclusão contrária. Dado $y \in \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$, podemos tomar uma sequência (y_n) em A tal que $\xi(y_n) \longrightarrow y$. Como $A \subseteq \overline{A}^E$, temos que (y_n) estará em $\overline{A}^E$. Portanto, $y \in \overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}}$. ■

Agora, sejam $(\hat{E}, \xi)$ o completamento do espaço normado E e $A \subseteq E$. Usando a identificação (1.8) e o Lema 1.46, obtemos $\overline{(\overline{A}^E)}^{\hat{E}} = \overline{(A)}^{\hat{E}}$.

1.4 Espaços de sequências a valores vetoriais

O objetivo dessa seção é estudar os espaços de sequências a valores vetoriais $\ell_\infty(E)$, $\ell_p(E)$, $\ell_p^w(E)$, $\ell_p^u(E)$ e $c_o(E)$, onde E é um espaço normado. Veremos quais as condições para que esses espaços sejam Banach e uma relação de inclusão entre eles. Nesse texto foram utilizadas as referências [5], [6] e [13].

Seja E um espaço vetorial normado. Denotamos por $\ell_\infty(E)$ o conjunto de todas as *sequências limitadas* em E, isto é, sequencias $(x_n)_{n=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ de tal modo que existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Simbolicamente,

$$\ell_\infty(E) = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} \colon (x_n)_{n=1}^\infty \text{ é limitada em } E\right\}.$$

É simples mostrar que $\ell_\infty(E)$ é um espeço vetorial com as operações usuais de sequências e que a função $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty(E) \to [0, \infty)$ dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty := \sup_n \|x_n\|_E,$$

está bem definida e caracteriza uma norma em $\ell_\infty(E)$.

Veremos a seguir em que condição o espaço $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach e a demonstração para esse resultado pode ser vista em [13, Proposição 2.1.4].

Proposição 1.47. $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.

Definição 1.48. Seja E um espaço normado. O conjunto das sequências que convergem para zero em E será denotado por $c_0(E)$ e em símbolos temos

$$c_0(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \colon x_j \in E, \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \|x_j\|_E \longrightarrow 0\right\}.$$

Não é difícil mostrar que $c_0(E)$ é um subespaço de $\ell_\infty(E)$ e o próximo resultado garante que $c_0(E)$ é um espaço de Banach com a norma de herdada de $\ell_\infty(E)$. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [13, Teorema 2.2.4 (a)].

Proposição 1.49. Seja E um espaço de Banach. Então $c_0(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$. Consequentemente, $(c_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.50. Sejam E um espaço vetorial normado e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é *fortemente p-somável* se $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p < \infty$.

Denotamos por $\ell_p(E)$ o conjunto de todas as sequências fortemente p-somáveis em E.

Em símbolo temos

$$\ell_p(E) := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}.$$

Com as operações usuais de sequências, $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial. Além disso, utilizando a Desigualdade de Minkowski 1.10, não é difícil mostrar que a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \ell_p(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_n)_{n=1}^{\infty} &\longmapsto \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

define uma norma em $\ell_p(E)$.

Proposição 1.51. Seja E um espaço normado. Então $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.

Demonstração: Como $\ell_p(E)$ contém uma cópia isométrica de E pela aplicação $x \in E \mapsto (x, 0, 0, \cdots) \in \ell_p(E)$, que possui imagem fechada (é um exercício simples mostrar isso), então se $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach, E também o é.

Reciprocamente, seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0(\varepsilon) = k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|x^k - x^r\right\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$, para todos $k, r > k_0$. Em particular,

$$\left\|x_j^k - x_j^r\right\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n^k - x_n^r\right\|^p = \left\|x^k - x^r\right\|_p^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \tag{1.9}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todos $k, r > k_0$. Desse modo, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E. Definamos $y := (y_j)_{j=1}^{\infty}$, onde $y_j = \lim\limits_{k\to\infty} x_j^k$.

Afirmação: $y \in \ell_p(E)$ e $x^k \to y$.

De fato, temos que (1.9) implica em

$$\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - x_n^r\right\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todos $k, r > k_0$. Fazendo $r \to \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - y_n\right\|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $k > k_0$. Agora, fazendo $m \to \infty$ segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n^k - y_n\right\|^p = \left\|x^k - y\right\|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

para todo $k > k_0$. Consequentemente, $x^k \to y$. Tomando $k = k_0 + 1$, temos que $x^{k_0+1} - y = (x_n^{k_0+1} - y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Portanto, $y = x^{k_0+1} - (x^{k_0+1} - y) \in \ell_p(E)$. ■

Definição 1.52. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é dita ser *fracamente p-somável* quando

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty, \text{ sempre que } \varphi \in E'.$$

O conjunto de todas as sequências fracamente p-somáveis em E será denotado por $\ell_p^w(E)$. Em símbolo,

$$\ell_p^w(E) := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty, \forall\, \varphi \in E' \right\}.$$

Observe que de (1.10) temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ se, e somente se, $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, para todo $\varphi \in E'$. Além disso, não é difícil mostrar que $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.

Definimos a seguinte função sobre o espaço $\ell_p^w(E)$:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{p,w} : \ell_p^w(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Com um argumento de gráfico fechado, não é difícil provar que a função $\|\cdot\|_{p,w}$ está bem definida e define uma norma sobre $\ell_p^w(E)$ (as propriedades de norma são facilmente verificadas).

Mais ainda, utilizando a mesma técnica usada na demonstração da Proposição 1.51 e com a ajuda do Teorema de Hahn-Banach, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.53. $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{p,w})$ é um espaço de Banach se, e somente se, E um espaço de Banach.

Definição 1.54. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é dita ser *incondicionalmente p-somável* quando

$$\lim_n \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{p,w} = 0.$$

Denotamos o espaço das sequências incondicionalmente p-somáveis por

$$\ell_p^u(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) \colon \lim_n \left\| (x_j)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} = 0 \right\}. \tag{1.10}$$

O termos incondicionalmente p-somável é justificado pelo seguinte resultado, cuja demonstração pode se encontrada em [5, Proposition 8.3].

Proposição 1.55. Um sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é incondicionalmente somável se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^u(E)$.

Mostraremos a seguir que o espaço $\ell_p^u(E)$ é um espaço de Banach com a norma induzida por $\ell_p^w(E)$.

Proposição 1.56. Seja E um espaço de Banach. Então $\ell_p^u(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_p^w(E)$ com a norma $\|\cdot\|_{p,w}$.

Demonstração: A verificação de que $\ell_p^u(E)$ é um subespaço vetorial de $\ell_p^w(E)$ é imediata. Mostraremos que $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$. Sejam $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^u(E)$ e $x \in \ell_p^w(E)$ tais que $x^k \to x$ em $\ell_p^w(E)$. Observe que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_n^k)_{n=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. Logo,

$$\lim_{l\to\infty} \left\| (x_n^k)_{n=l}^\infty \right\|_{w,p} = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, para todo $\varepsilon > 0$ existe $l_0 = l_0(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| (x_n^k)_{n=l}^\infty \right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.11}$$

para todo $l > l_0$. Por outro lado, $x^k \to x$ em $\ell_p^w(E)$ implica que existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} > \left\| x^k - x \right\|_{w,p} &= \left\| (x_n^k - x_n)_{n=1}^\infty \right\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^\infty \left| \varphi(x_n^k - x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=l}^\infty \left| \varphi(x_n^k - x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| (x_n^k)_{n=l}^\infty - (x_n)_{n=l}^\infty \right\|_{w,p}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

para todo $k > k_0$ e todo $l \in \mathbb{N}$. De (1.11) e (1.12), para $l > l_0(\varepsilon, k_0)$ e $k = k_0 + 1$, temos

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=l}^\infty\|_{w,p} &= \left\| (x_n)_{n=l}^\infty - (x_n^k)_{n=l}^\infty + (x_n^k)_{n=l}^\infty \right\|_{w,p} \\ &\leq \left\| (x_n)_{n=l}^\infty - (x_n^k)_{n=l}^\infty \right\|_{w,p} + \left\| (x_n^k)_{n=l}^\infty \right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, $\lim_{l\to\infty} \|(x_n)_{n=l}^\infty\|_{w,p} = 0$. Logo $x \in \ell_p^u(E)$. ■

Definição 1.57. Seja E um espaço vetorial normado. Um subconjunto $A \subseteq E$ é *fracamente limitado* se para todo funcional $\varphi \in E'$, $\varphi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$.

As definições de conjunto limitado e fracamente limitado são equivalentes como mostra o lema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [13, Lema 2.4.9].

Lema 1.58. Sejam E um espaço vetorial normado e A um subconjunto de E. Então, A é limitado se, e somente se, A é fracamente limitado.

Proposição 1.59. Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Então

$$\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E).$$

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Então,

$$\begin{aligned}\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|\varphi\|^p \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] = \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| = \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_p.\end{aligned}$$

Por fim, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ então $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty$ e assim

$$\lim_n \left\|(x_j)_{j=n}^\infty\right\|_{w,p} \leq \lim_n \left\|(x_j)_{j=n}^\infty\right\|_p = 0.$$

Portanto $\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^u(E)$.

A inclusão $\ell_p^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$ segue imediatamente da Proposição 1.56.

Agora, seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. Então,

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < \infty,$$

para todo $\varphi \in E'$. Logo, o conjunto $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ dos termos da sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ é fracamente limitado e, pelo Lema 1.58, é limitado. Assim, existe $M \geq 0$ tal que $\|x_j\| \leq M$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e então $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Além disso,

$$\|x_k\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_k)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,p},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando o supremo sobre $k \in \mathbb{N}$, obtemos $\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_\infty \leq \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,p}$, donde $\ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$. ■

Capítulo 2

Produto Tensorial

Neste capítulo, apresentaremos o produto tensorial do ponto de vista algébrico. Inicialmente, definiremos os tensores elementares como funcionais lineares e o produto tensorial como um subespaço gerado por esses funcionais. Mostraremos as suas principais propriedades, em especial, que o produto tensorial pode ser identificado como um espaço de linearização para aplicações bilineares. Além disso, apresentaremos duas outras formas de ver os tensores: como formas bilineares e como aplicações lineares. Restringindo nosso estudo aos espaços vetoriais de dimensão finita, veremos que os produtos tensoriais fornecerão meios de compreender a dualidade de espaços de aplicações lineares e de formas bilineares. Por fim, veremos alguns exemplos. Para o desenvolvimento desse capítulo utilizamos como referências principais o livro [17] e a dissertação [20].

2.1 Produto tensorial de espaços vetoriais

Nesta seção, estudaremos a construção do produto tensorial entre espaços vetoriais e algumas de suas propriedades. Construiremos o produto tensorial dos espaços vetoriais X e Y, $X \otimes Y$, como um subespaço de funcionais lineares sobre $B(X \times Y)$ da seguinte maneira: dados $x \in X$, $y \in Y$, denotaremos por $x \otimes y$ o funcional dado pela avaliação de uma forma bilinear A no ponto $(x, y) \in X \times Y$, isto é,

$$\begin{aligned} x \otimes y \colon B(X \times Y) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto (x \otimes y)(A) = A(x, y). \end{aligned}$$

O funcional $x \otimes y$ é chamado *tensor elementar*. Temos ainda que o tensor $x \otimes y$ é linear. De fato, dados A, $C \in B(X \times Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, teremos

$$(x \otimes y)(A + \lambda C) = (A + \lambda C)(x, y) = A(x, y) + (\lambda C)(x, y)$$

$$= A(x,y) + \lambda C(x,y) = (x \otimes y)(A) + \lambda(x \otimes y)(C).$$

Definição 2.1. O subespaço do dual algébrico $B(X \times Y)^{\#}$ gerado pelos elementos $x \otimes y$, com $x \in X$ e $y \in Y$, será chamado de *produto tensorial de X por Y*, denotado por $X \otimes Y$, e chamaremos os elementos de $X \otimes Y$ de tensores.

Em símbolos, temos

$$\begin{aligned} X \otimes Y &= \operatorname{span}\{x \otimes y \colon x \in X, y \in Y\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \colon n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in X, y_i \in Y, i = 1, \ldots n \right\}, \end{aligned}$$

e, portanto, um tensor típico em $X \otimes Y$ tem a forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i, \tag{2.1}$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in X$, $y_i \in Y$. Salientamos que essa forma de representação do tensor u não é única. Essa não unicidade será explorada mais adiante.

Se $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ e $A \in B(X \times Y)$, então a ação de u em A é dada por

$$u(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A(x_i, y_i). \tag{2.2}$$

É importante ressaltar que o valor da expressão (2.2) não depende da representação escolhida para u.

Veremos a partir de agora algumas propriedades elementares dos produtos tensoriais.

Proposição 2.2. Sejam X, Y espaços vetoriais e $\mathbb{K}$ um corpo. Então

(i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, para todos x_1, $x_2 \in X$ e $y \in Y$.

(ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, para todos $x \in X$ e y_1, $y_2 \in Y$.

(iii) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iv) $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$, para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Demonstração: Seja $A \colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear.
(i) Sejam x_1, $x_2 \in X$ e $y \in Y$. Temos

$$\begin{aligned} ((x_1 + x_2) \otimes y)(A) &= A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y) \\ &= (x_1 \otimes y)(A) + (x_2 \otimes y)(A), \end{aligned}$$

donde segue a igualdade desejada.
(ii) Demonstração análoga a de (i).
(iii) Sejam $x \in X$, $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos que $(\lambda(x \otimes y))(A) = \lambda((x \otimes y)(A)) = \lambda A(x, y) = A(\lambda x, y) = A(x, \lambda y)$. Isso implica que $(\lambda(x \otimes y))(A) = ((\lambda x) \otimes y)(A) = (x \otimes (\lambda y))(A)$, donde segue o resultado.
(iv) Basta tomar $\lambda = 0$ no item (iii). ■

Ressaltamos que a representação do tensor $u \in X \otimes Y$ dada em (2.1) pode ser rescrita usando o item (iii) da Proposição 2.2, na forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} z_i \otimes y_i,$$

onde $z_i = \lambda_i x_i$. Assim, sem perda de generalidade, utilizaremos indistintamente qualquer uma das representações.

A próxima proposição mostra como conjuntos linearmente independentes e bases podem ser transferidos dos espaços vetoriais para o produto tensorial.

Proposição 2.3. Sejam X e Y espaços vetoriais.

(a) Sejam W e Z subconjuntos linearmente independentes de X e Y respectivamente. Então $\{x \otimes y \colon x \in W, y \in Z\}$ é um subconjunto linearmente independente de $X \otimes Y$.

(b) Sejam $\{w_i \colon i \in I\}$ e $\{z_j \colon j \in J\}$ bases para X, Y respectivamente. Então o conjunto $\{w_i \otimes z_j \colon (i, j) \in I \times J\}$ é uma base para $X \otimes Y$.

Demonstração: (a) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ tal que $x_i \in W$ e $y_i \in Z$. Suponha que $u = 0$ e considere $A \colon W \times Z \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear definida por $A(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, onde $\varphi \in X^{\#}$, $\psi \in Y^{\#}$ funcionais lineares não-nulos. Temos que $u(A) = 0$, pois u é um funcional linear que não se anulam. Daí, temos

$$u(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i)\psi(y_i) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i) y_i\right) = 0,$$

para todo $\psi \in Y^{\#}$. Segue que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i) y_i = 0$ e assim, como Z é linearmente independente, temos $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. O resultado segue então de (iv) da Proposição 2.2.
(b) Como, por hipótese, os conjuntos $\{w_i \colon i \in I\}$ e $\{z_j \colon j \in J\}$ são linearmente independentes, então pelo item (a) o conjunto $\{w_i \otimes z_j \colon (i, j) \in I \times J\}$ é linearmente independente e, como sabemos, gera $X \otimes Y$. ■

Observação 2.4. Se X e Y são espaços vetoriais de dimensão finita segue da Proposição 2.3 que $\dim(X \otimes Y) = \dim(X)\dim(Y)$. Além disso, se $Y = \mathbb{K}$ temos que $\dim(X \otimes \mathbb{K}) = \dim(X)\dim(\mathbb{K}) = \dim(X)$ e, independente das considerações dimensionais, $X \otimes \mathbb{K}$ e $\mathbb{K} \otimes X$ são isomorfos a X.

Seja $u \in X \otimes Y$ um tensor não-nulo qualquer. Então existe um $n \in \mathbb{N}$ estritamente pequeno de tal forma que existe uma representação de u contendo n termos; seja $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ tal representação. Mostraremos que os conjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ são linearmente independentes. De fato, suponha, por absurdo, que x_1 seja uma combinação linear de $x_2, \ldots, x_n$, isto é, $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Temos

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = x_1 \otimes y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i \otimes y_i \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i \otimes y_i \\
&= \lambda_2 x_2 \otimes y_1 + \cdots + \lambda_n x_n \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n \\
&= \lambda_2 (x_2 \otimes (y_1 + y_2)) + \cdots + \lambda_n (x_n \otimes (y_1 + y_n)) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i \otimes (y_1 + y_i) = \sum_{i=2}^{n} w_i \otimes z_i,
\end{aligned}$$

onde $w_i = \lambda_i x_i$ e $z_i = y_1 + y_i$. Disso segue que o termo $x_1 \otimes y_1$ pode ser absorvido pelos outros, dando uma representação de u com $n - 1$ termos, o que gera uma contradição. Chamaremos o número n de *posto de u*. Claro que os tensores com posto $n = 1$ são os já definidos tensores elementares.

Como podemos identificar se dois tensores são iguais? Ou em outras palavras, como é possível determinar se $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação do tensor nulo? A princípio, poderíamos determinar isso pela avaliação $\sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i)$ para cada forma bilinear $A \in B(X \times Y)$. Entretanto, existem formas mais fáceis, como mostra a seguinte proposição:

Proposição 2.5. Sejam $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ e $n \in \mathbb{N}$. São equivalentes:

(i) $u = 0$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$, para todos $\varphi \in X^{\#}$, $\psi \in Y^{\#}$;

(iii) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i = 0$, para todo $\varphi \in X^{\#}$;

(iv) $\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i = 0$, para todo $\psi \in Y^{\#}$.

Demonstração: As implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) seguem diretamente com uso da mesma técnica usada na demonstração do item (a) da Proposição 2.3. Mostraremos que (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Seja $\psi \in Y^{\#}$. Se $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i = 0$, para todo $\varphi \in X^{\#}$, então temos que $\psi(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i) = 0$ e pela linearidade do ψ, $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$. Agora usando a linearidade do φ, temos que $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i\psi(y_i)) = 0$. Como essa última igualdade é verdade para todo $\varphi \in X^{\#}$, segue que $\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i)x_i = 0$. O resultado segue da arbitrariedade permitida na escolha do ψ.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Sejam $A\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear, E $= [x_1, \cdots, x_n]$, F $= [y_1, \cdots, y_n]$ subespaços de X e Y respectivamente e $T\colon E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ a restrição de A em $E \times F$. Escolhendo bases para os subespaços de dimensão finita E, F e expandindo T em relação a essas bases, produzimos uma representação para T da forma

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j(x)\omega_j(y), \tag{2.3}$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $\theta_j \in E^{\#}$ e $\omega_j \in F^{\#}$ [10, Corollary s/n page 362]. Podemos estender o domínio de θ_j e ω_j para X e Y respectivamente da seguinte maneira: escolhendo complementos algébricos G, H para E, F respectivamente de tal modo que $X = E \oplus G$ e $Y = F \oplus H$. Então, se $x = x_1 + x_2 \in X$ com $x_1 \in E$ e $x_2 \in G$, definimos $\theta_j(x) = \theta_j(x_1)$. Definimos os funcionais ω_j da mesma forma. Agora, podemos considerar T como uma forma bilinear em $X \times Y$ usando a representação dada em (2.3). Dessa forma, A e T podem ser formas bilineares diferentes em $X \times Y$, mas que coincidem em $E \times F$. Assim, usando (iv), para todo $A \in B(X \times Y)$ temos

$$\begin{aligned} u(A) &= \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta_j(x_i)\omega_j(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta_j(\omega_j(y_i)x_i) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_j(y_i)x_i\right) = 0, \end{aligned}$$

e portanto $u = 0$. ■

A proposição anterior estabelece meios eficazes de reconhecermos quando dois tensores são iguais e iremos utilizá-la constantemente durante esse trabalho. Entretanto, veremos, a seguir, que nem sempre é necessário tomar todos os funcionais no dual algébrico para provar que dois tensores são os mesmos. Para isso precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.6. Um subconjunto S de um espaço dual $X^{\#}$ é dito *separador de pontos* se ele contém funcionais lineares suficientes para distinguir os pontos de X, isto é, se $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in S$, então $x = 0$. Equivalentemente, se $x \neq y$ isso implica que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, para todo $\varphi \in S$.

Observação 2.7. **(a)** A partir da definição acima, fica evidente que ao aplicar a Proposição 2.5 não é necessário tomar os funcionais em todo o espaços dual, mas apenas a subconjuntos separadores de pontos.

(b) Um caso importante do uso do item (a) ocorre quando os espaços componentes no produto tensorial são espaços duais: para mostrar que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes \psi_i = 0$ em $X^{\#} \otimes Y^{\#}$ é suficiente ter $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(y) = 0$, para todos $x \in X$ e $y \in Y$. De fato, considere que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes \psi_i = 0$. Usando a Proposição 2.5, temos que $\sum_{i=1}^{n} \theta(\varphi_i)\omega(\psi_i) = 0$, para todos $\theta \in X^{\#\#}$ e $\omega \in Y^{\#\#}$. Sendo $J_X \colon X \longrightarrow X^{\#\#}$ e $J_Y \colon Y \longrightarrow Y^{\#\#}$ mergulhos canônicos, como os conjuntos $J_X(X)$ e $J_Y(Y)$ são separadores de pontos de $X^{\#}$ e $Y^{\#}$ respectivamente (veja [2, Exercício 4.5.11], para espaços normados), temos

$$0 = \sum_{i=1}^{n} J_E(x)(\varphi_i) J_E(y)(\psi_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(y),$$

para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Agora, iremos analisar a interação entre os produtos tensoriais e algumas construções dos espaços vetoriais geralmente utilizadas. Sejam E e F subespaços dos espaços vetoriais X e Y respectivamente. Então $E \otimes F$ pode ser considerado com um subespaço do produto tensorial $X \otimes Y$ de forma natural. Se $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, podemos pensar em u como um elemento de $X \otimes Y$ dado por

$$u(A) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i),$$

onde $A \in B(X \times Y)$. Isso nos dá uma aplicação linear injetiva de $E \otimes F$ em $X \otimes Y$. De fato, considere a aplicação inclusão $I \colon E \otimes F \longrightarrow X \otimes Y$. Suponha que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $X \otimes Y$. Pela demonstração da Proposição 2.5, para cada forma bilinear T em $E \times F$, existe uma forma bilinear $A \in B(X \times Y)$ tal que $\sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i)$. Isso implica que $\sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i) = 0$. Daí, segue que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $E \otimes F$ e, portanto, I é injetiva.

Mostraremos agora que o produto tensorial respeita a soma direta.

Proposição 2.8. Sejam X, Y espaços vetoriais e F, G subespaços de Y tais que $Y = F \oplus G$. Então $X \otimes Y = (X \otimes F) \oplus (X \otimes G)$.

Demonstração: Seja $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Como, por hipótese, $Y = F \oplus G$,

existem $f_i \in F$ e $g_i \in G$ tais que $y_i = f_i + g_i$. Então

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (f_i + g_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes f_i + x_i \otimes g_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes g_i = u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Portanto, $X \otimes Y$ é expresso na formas $X \otimes F + X \otimes G$. Agora, iremos mostrar que $(X \otimes F) \cap (X \otimes G) = \{0\}$. Seja $u \in (X \otimes F) \cap (X \otimes G)$, de modo que tenhamos duas representações de u:

$$u = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes y_i = \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j, \tag{2.4}$$

com $y_i \in F$ e $z_j \in G$. Considere agora a forma bilinear $A \in B(X \times Y)$ definida por $A(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Pela igualdade (2.4), temos $u(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i)\psi(y_i) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(w_j)\psi(z_j)$. Disso segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i)\psi(y_i) - \sum_{j=1}^{m} \varphi(w_j)\psi(z_j) \\ &= \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) y_i\right) - \psi\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi(w_j) z_j\right) \\ &= \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) y_i - \sum_{j=1}^{m} \varphi(w_j) z_j\right). \end{aligned}$$

Logo $\sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) y_i - \sum_{j=1}^{m} \varphi(w_j) z_j = 0$ e portanto $\sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) y_i = \sum_{j=1}^{m} \varphi(w_j) z_j$. Mas $F \cap G = \{0\}$, então $\sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) y_i = 0$, para todos $\varphi \in X^{\#}$. Segue que $u = 0$. ■

Dessa proposição, e sob as mesmas hipóteses, segue que o espaço quociente $(X \otimes Y)/(X \otimes F)$ pode ser identificado como $X \otimes (Y/F)$. De fato, sejam X, Y espaços vetoriais e F, G subespaços de Y de forma que $Y = F \oplus G$. Então

$$\frac{X \otimes Y}{X \otimes F} \simeq \frac{(X \otimes F) \oplus (X \otimes G)}{(X \otimes F)} \simeq X \otimes G \simeq X \otimes \frac{Y}{F}.$$

De forma análoga, se H e W são subespaços de X tais que $X = H \oplus W$, então

$$\frac{X \otimes Y}{H \otimes Y} \simeq \frac{X}{H} \otimes Y.$$

2.2 Produto tensorial e linearização

Um dos objetivos principais do produto tensorial é linearizar as aplicações bilineares. Nesta seção, veremos como isso funciona e que, em certo sentido, a menos de isomorfismos, o produto tensorial é o único espaço vetorial em que as aplicações bilineares são linearizadas.

Seja $A\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear. Recordamos que cada tensor $u \in X \otimes Y$ atua como um funcional linear no espaço das formas bilineares e, portanto, podemos definir uma aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\colon X \otimes Y &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\longmapsto \widetilde{A}(u) = u(A). \end{aligned}$$

Note que $\widetilde{A}$ está bem definida e é facilmente vista como um funcional linear em $X \otimes Y$. De fato, sejam $u, v \in X \otimes Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Pela linearidade de u e v temos

$$\widetilde{A}(u + \lambda v) = (u + \lambda v)(A) = u(A) + (\lambda v)(A) = u(A) + \lambda v(A) = \widetilde{A}(u) + \lambda \widetilde{A}(v).$$

Além disso, tem-se $\widetilde{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}(x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i)$.

Seja $\theta\colon X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$, definida por $\theta(x, y) = x \otimes y$, uma aplicação. Note que θ é bilinear, pois dados x_1, $x_2 \in X$, $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\theta(\lambda x_1 + x_2, y) = (\lambda x_1 + x_2) \otimes y = \lambda(x_1 \otimes y) + x_2 \otimes y = \lambda\theta(x_1, y) + \theta(x_2, y)$$

e, analogamente, $\theta(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda\theta(x, y_1) + \theta(x, y_2)$, para todos $x \in X$, y_1, $y_2 \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Agora, observe que a composição da aplicação bilinear θ e o funcional linear $\widetilde{A}$ que aplica $X \otimes Y$ em $\mathbb{K}$, nos dá a forma bilinear A. De fato,

$$(\widetilde{A} \circ \theta)(x, y) = \widetilde{A}(\theta(x, y)) = \widetilde{A}(x \otimes y) = (x \otimes y)(A) = A(x, y).$$

Por outro lado, se $\psi\colon X \otimes Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que a composição do ψ com a aplicação bilinear θ tem por resultado a forma bilinear A em $X \times Y$, isto é,

$\psi \circ \theta = A = \widetilde{A} \circ \theta$, então $\psi = \widetilde{A}$. De fato, dado $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \psi(\theta(x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^{n} (\psi \circ \theta)(x_i, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{A} \circ \theta)(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}(\theta(x_i, y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}(x_i \otimes y_i)) = \widetilde{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \widetilde{A}(u),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

o que garante a unicidade do funcional linear $\widetilde{A}$. Assim, as formas bilineares em $X \times Y$ estão em correspondência um-para-um com os funcionais lineares em $X \otimes Y$. Em resumo,

$$B(X \times Y) = (X \otimes Y)^{\#}.$$

Observação 2.9. Observe que o cálculo da unicidade (2.5) nos mostra que para conhecer como um funcional aplicado num tensor se comporta, basta conhecer seu comportamento nos tensores elementares. Dessa forma, a partir de agora, quando formos provar que um funcional definido num produto tensorial é linear, iremos considerar apenas os tensores elementares.

Podemos aplicar a mesma ideia às aplicações bilineares. Se $A\colon\ X \times Y \longrightarrow Z$ é uma aplicação bilinear, definimos uma aplicação $\widetilde{A}\colon X \otimes Y \longrightarrow Z$ por

$$\widetilde{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i).$$

Em virtude da Observação 2.9, vamos mostrar que $\widetilde{A}$ é uma aplicação linear por meio apenas de tensores elementares. Então, seja $u = x \otimes y \in X \otimes Y$. Note que se $u = 0$ tem-se $\widetilde{A}(u) = 0$, pois para cada $\varphi \in Z^{\#}$ a composição $\varphi \circ A$ é um funcional bilinear em $X \times Y$ e, portanto,

$$\varphi(A(x, y)) = (\varphi \circ A)(x, y) = (x \otimes y)(\varphi \circ A) = 0,$$

o que implica em $A(x, y) = 0$. Além disso, se u, $v \in X \otimes Y$, onde $u = x \otimes y$ e $v = w \otimes z$, e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\widetilde{A}(u + \lambda v) = \widetilde{A}(x \otimes y + (\lambda w) \otimes z) = A(x, y) + A(\lambda w, z)$$

$$= A(x,y) + \lambda A(w,z) = \widetilde{A}(u) + \lambda \widetilde{A}(v)$$

e portanto $\widetilde{A}$ é linear. A unicidade da aplicação $\widetilde{A}$ segue de cálculo análogo ao da unicidade (2.5) no caso do funcional linear. A situação é ilustrada no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "A"] \arrow[d, bend right, "\theta"'] & Z \\ X \otimes Y \arrow[ur, bend right, "\widetilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

A aplicação especial $\theta\colon X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$ age como uma aplicação bilinear universal: todo o argumento que construímos acima nos mostra que qualquer aplicação bilinear definida em $X \times Y$ se fatora por θ via uma aplicação linear definida no produto tensorial $X \otimes Y$.

Em resumo, temos que o produto tensorial é o espaço vetorial que lineariza as aplicações bilineares. Além disso, o próximo teorema mostrará que as aplicações bilineares podem ser identificadas como aplicações lineares definidas no produto tensorial de espaços vetoriais.

Teorema 2.10. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada aplicação bilinear $A\colon X \times Y \longrightarrow Z$ existe uma única aplicação linear $\widetilde{A}\colon X \otimes Y \longrightarrow Z$ tal que $A(x,y) = \widetilde{A}(x \otimes y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Além disso, a correspondência $A \longleftrightarrow \widetilde{A}$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $B(X \times Y, Z)$ e $L(X \otimes Y, Z)$.*

Demonstração: A boa definição, a linearidade e a unicidade da aplicação $\widetilde{A}$ já foi demonstrada anteriormente. Mostraremos apenas que a correspondência $A \longleftrightarrow \widetilde{A}$ é um isomorfismo. Considere o operador

$$\begin{aligned} \Phi\colon B(X \times Y, Z) &\longrightarrow L(X \otimes Y, Z) \\ A &\longmapsto \widetilde{A}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar inicialmente que Φ é linear e, pela Observação 2.9, usaremos para isso tensores elementares. Sejam $x \otimes y \in X \otimes Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

$$\begin{aligned} (\widetilde{A + \lambda B})(x \otimes y) &= (A + \lambda B)(x,y) \\ &= A(x,y) + (\lambda B)(x,y) \\ &= A(x,y) + \lambda B(x,y) \\ &= \widetilde{A}(x \otimes y) + \lambda \widetilde{B}(x \otimes y). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi(A + \lambda B) = (\widetilde{A + \lambda B}) = \widetilde{A} + \lambda \widetilde{B} = \Phi(A) + \lambda \Phi(B)$$

e portanto Φ é linear. Agora, seja $A \in \ker(\Phi)$, isto é, $\Phi(A) = 0$. Temos que $\widetilde{A} = \Phi(A) = 0$ e portanto $\widetilde{A}(x \otimes y) = A(x, y) = 0$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Segue que $A = 0$ e assim Φ é injetor. Por fim, iremos mostrar a sobrejetividade do Φ. Seja $T \in L(X \otimes Y, Z)$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} A\colon X \times Y &\longrightarrow Z \\ (x, y) &\longmapsto A(x, y) = T(x \otimes y). \end{aligned}$$

Note que A é bilinear, isto é, $A \in B(X \times Y, Z)$. De fato, pela linearidade de T, tem-se

$$\begin{aligned} A(\lambda x_1 + x_2, y) &= T((\lambda x_1 + x_2) \otimes y) = T((\lambda x_1) \otimes y + x_2 \otimes y) \\ &= T((\lambda x_1) \otimes y) + T(x_2 \otimes y) = \lambda T(x_1 \otimes y) + T(x_2 \otimes y) \\ &= \lambda A(x_1, y) + A(x_2, y), \end{aligned}$$

para todos $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. De modo análogo, temos

$$A(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda A(x, y_1) + A(x, y_2),$$

para todos $x \in X$, y_1, $y_2 \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como A é bilinear, vimos inicialmente que existe uma única aplicação $\widetilde{A} \in L(X \otimes Y, Z)$ tal que $A = \widetilde{A} \circ \theta$. Por outro lado, $A = T \circ \theta$. De fato, dados $x \in X$ e $y \in Y$, $(T \circ \theta)(x, y) = T(x \otimes y) = A(x, y)$. Da unicidade de $\widetilde{A}$ e da igualdade $A = \widetilde{A} \circ \theta$ segue que $T = \widetilde{A}$ e portanto $\Phi(A) = \widetilde{A} = T$, provando assim a sobrejetividade da Φ. ■

Como corolário imediato do teorema anterior, segue o importante fato, que discutimos previamente no início dessa seção, que dá conta do dual do espaço produto tensorial.

Corolário 2.11. O dual do produto tensorial de espaços vetoriais X e Y é dado por $(X \otimes Y)^{\#} = B(X \times Y)$.

O próximo resultado nos mostra que, a menos de um isomorfismo, o produto tensorial é o único espaço vetorial onde é possível a linearização de aplicações bilineares.

Teorema 2.12. (Unicidade do produto tensorial) *Sejam X e Y espaços vetoriais. Suponha que existam um espaço vetorial W e uma aplicação bilinear $B\colon X \times Y \longrightarrow W$ com a seguinte propriedade: para todo espaço vetorial Z e cada aplicação bilinear $A\colon X \times Y \longrightarrow Z$, existe uma única aplicação linear $L\colon W \longrightarrow Z$ tal que $A = L \circ B$. Então existe um isomorfismo $J\colon X \otimes Y \longrightarrow W$ tal que $J(x \otimes y) = B(x, y)$, para todo $x \in X$, $y \in Y$.*

Demonstração: Mostraremos que a aplicação $\widetilde{B}$ de $X \otimes Y$ em W é um isomorfismo e fazendo-se $\widetilde{B} = J$, segue o resultado.

Por hipótese, temos que a aplicação $B\colon X \times Y \longrightarrow W$ é bilinear. Assim, pelo Teorema 2.10, existe uma única aplicação $\widetilde{B} \in L(X \otimes Y, W)$ tal que $B = \widetilde{B} \circ \theta$, isto é, $B(x, y) = \widetilde{B}(\theta(x, y)) = \widetilde{B}(x \otimes y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Como a aplicação $\widetilde{B}$ é linear, basta mostrarmos que $\widetilde{B}$ é bijetiva.

Tomando $Z = X \otimes Y$, $A = \theta\colon X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$ e aplicando a propriedade que é dada a W e B por hipótese, temos que existe uma única aplicação linear $L\colon W \longrightarrow X \otimes Y$ tal que $\theta = L \circ B$. Então $L(B(x, y)) = (L \circ B)(x, y) = \theta(x, y) = x \otimes y$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Agora, suponha que $x \otimes y \in \ker(\widetilde{B})$, isto é, $\widetilde{B}(x \otimes y) = 0$. Daí,

$$x \otimes y = L(B(x, y)) = L(\widetilde{B}(x \otimes y)) = L(0) = 0$$

e portanto $\widetilde{B}$ é injetiva. Iremos provar agora que $\widetilde{B}$ é sobrejetiva, mas antes disso, é necessário provarmos que o conjunto $\{B(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ gera W. Suponha, por absurdo, que isso não ocorra. Então existe $w \in W$ tal que $w \notin \operatorname{span}\{B(X \times Y)\}$ e podemos supor $w \neq 0$. É fácil ver que a aplicação identidade em W, $I_W\colon W \longrightarrow W$, satisfaz a condição $B = I_W \circ B$. Tomando $Z = W$ no enunciado do teorema e fazendo temos $A = B$ e $L = I_W$ segue que I_W é a única aplicação linear tal que $B = I_W \circ B$. Se β é uma base para $\operatorname{span}\{B(x, y) : x \in X, y \in Y\}$, então $\beta \cup \{w\}$ é um conjunto linearmente independente. Assim, com o auxílio do Lema de Zorn, podemos considerar uma base γ de W contendo $\beta \cup \{w\}$. Seja $t\colon W \longrightarrow W$ uma aplicação linear definida primeiramente no vetores da base γ por

$$t(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in \beta \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \beta \end{cases}$$

e então estendendo-a por linearidade a todos os vetores de W. Em particular, $t(w) = 0$ e note que $t \neq I_W$, pois $t(w) = 0 \neq w = I_W(w)$. Dados $x \in X$, $y \in Y$, tem-se

$$(t \circ B)(x, y) = t(B(x, y)) = I_W(B(x, y)) = B(x, y),$$

mostrando que $t \circ B = B$, o que contraria a unicidade de I_W. Portanto, $\{B(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ gera W. Assim, para todo $w \in W$, existem um $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ e vetores $x_i \in X$, $y_i \in Y$, com $i = 1, \ldots, k$ tais que

$$w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i B(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{k} B(\lambda_i x_i, y_i).$$

Fazendo $z_i = \lambda_i x_i$, com $i = 1, \ldots, k$, temos

$$w = \sum_{i=1}^{k} B(z_i, y_i) = \widetilde{B}\left(\sum_{i=1}^{k} z_i \otimes y_i\right),$$

onde $\sum_{i=1}^{k} z_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Portanto, $\widetilde{B}$ é sobrejetiva e, consequentemente, um isomorfismo. ■

A seguir, definiremos a aplicação produto tensorial entre dois operadores lineares e provaremos algumas de suas propriedades. Antes disso, definiremos a transposta de um tensor u.

Definição 2.13. Seja $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ um tensor em $X \otimes Y$. A *transposta de u* é o tensor dado por $u^t = (\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i)^t := \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i \in Y \otimes X$.

Note que $u \longmapsto u^t$ é uma aplicação linear bem definida. De fato, basta observar que essa aplicação é simplesmente a linearização da aplicação bilinear $A\colon X \times Y \longrightarrow Y \otimes X$. Além disso, é uma questão simples mostrar que a transposta produz um isomorfismo de $X \otimes Y$ em $Y \otimes X$. Usaremos a mesma ideia para definirmos o produto tensorial de aplicações lineares.

Definição 2.14. Sejam $S\colon X \longrightarrow E$ e $T\colon Y \longrightarrow F$ aplicações lineares. Definimos a aplicação (linear) $S \otimes T\colon X \otimes Y \longrightarrow E \otimes F$, chamada *produto tensorial das aplicações lineares S e T*, como a linearização da aplicação bilinear $A\colon X \times Y \longrightarrow E \otimes F$ dada por $A(x, y) = S(x) \otimes T(y)$. Assim, temos $S \otimes T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Veremos a seguir que a aplicação produto tensorial $S \otimes T$ herda algumas propriedades dos seus componentes.

Proposição 2.15. Sejam $S\colon X \longrightarrow E$, $T\colon Y \longrightarrow F$ aplicações lineares e $S \otimes T\colon X \otimes Y \longrightarrow E \otimes F$ a aplicação produto tensorial de S e T. Se S e T são injetivas (respectivamente, sobrejetivas), então $S \otimes T$ é injetiva (respectivamente, sobrejetiva).

Demonstração: Seja $x \otimes y \in \ker(S \otimes T)$. Então $(S \otimes T)(x \otimes y) = 0$, isto é, $S(x) \otimes T(y) = 0$, onde $S(x) \in E$ e $T(y) \in F$. Dado $\psi \in F^{\#}$, pela Proposição 2.5 temos $S(x)\psi(T(y)) = 0$ e pela linearidade de S

$$S(x\psi(T(y))) = S(x)\psi(T(y)) = 0,$$

Como, por hipótese, S é injetiva, isso implica que $x\psi(T(x)) = 0$, para todo $\psi \in F^{\#}$. Então, para cada $\varphi \in X^{\#}$, temos que $\varphi(x\psi(T(y))) = \varphi(x)\psi(T(y)) = 0$ e da linearidade e injetividade de T segue que $\psi(\varphi(x)y) = 0$. Isso implica em $\varphi(x)y = 0$, para todo $\varphi \in X^{\#}$ e da Proposição 2.5 segue que $x \otimes y = 0$. Logo, $S \otimes T$ é injetiva.

Agora, seja $e \otimes f \in E \otimes F$ e suponha que S e T sejam sobrejetivas. Então existem $x \in X$, $y \in Y$ tais que $S(x) = e$ e $T(y) = f$. Daí, temos

$$e \otimes f = S(x) \otimes T(y) = S \otimes T(x \otimes y),$$

com $x \otimes y \in X \otimes Y$. Portanto, $S \otimes T$ é sobrejetiva. ■

2.3 Tensores como formas bilineares e como aplicações lineares

Inicialmente, definimos o produto tensorial $X \otimes Y$ como um espaço de funcionais lineares sobre o espaço $B(X \times Y)$. Nesta seção, descreveremos duas outras abordagens para os produtos tensoriais. Veremos que os tensores podem ser vistos como formas bilineares e como aplicações lineares.

Para cada $x \in X$ e $y \in Y$ associamos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B_{x,y} \colon X^{\#} \times Y^{\#} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\phi, \psi) &\longmapsto B_{x,y}(\phi, \psi) = \phi(x)\psi(y). \end{aligned}$$

Daí, a aplicação $A \colon X \times Y \longrightarrow B(X^{\#} \times Y^{\#})$, dada por $A(x, y) = B_{x,y}$ é facilmente vista como uma aplicação bilinear. De fato, dados $\phi \in X^{\#}$ e $\psi \in Y^{\#}$, temos que

$$\begin{aligned} A(\lambda x_1 + x_2, y)(\phi, \psi) &= B_{\lambda x_1 + x_2, y}(\phi, \psi) = \phi(\lambda x_1 + x_2)\psi(y) \\ &= [\lambda\phi(x_1) + \phi(x_2)]\psi(y) = \lambda\phi(x_1)\psi(y) + \phi(x_2)\psi(y) \\ &= \lambda B_{x_1,y}(\phi, \psi) + B_{x_2,y}(\phi, \psi) = (\lambda A(x_1, y) + A(x_2, y))(\phi, \psi), \end{aligned}$$

para todos x_1, $x_2 \in X$, $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. A linearidade na segunda coordenada segue de modo análogo. Portanto, pelo Teorema 2.10, existe uma única aplicação linear $\widetilde{A} \colon X \otimes Y \longrightarrow B(X^{\#} \times Y^{\#})$ que aplica $x \otimes y$ em $B_{x,y}$. Para vermos que a aplicação $\widetilde{A}$ é injetiva, suponha que $\sum_{i=1}^{n} B_{x_i,y_i} = 0$. Então $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$, para todos $\varphi \in X^{\#}$, $\psi \in Y^{\#}$ e a Proposição 2.5 assegura que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $X \otimes Y$. Dessa forma, podemos enxergar canonicamente a inclusão

$$X \otimes Y \subset B(X^{\#} \times Y^{\#})$$

por meio da aplicação que associa cada tensor $x \otimes y$ à forma bilinear $B_{x,y}$.

Quando os espaços em questão são duais (espaços X com a propriedade de que $X^{\#\#} =$

X) temos

$$X^{\#} \otimes Y^{\#} \subset B(X^{\#\#} \times Y^{\#\#}) \Rightarrow X^{\#} \otimes Y^{\#} \subset B(X \times Y), \tag{2.6}$$

onde o tensor $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes \psi_i$ é identificado com a forma bilinear que aplica (x, y) em $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(y)$. Dessa forma, devido a essa imersão canônica, poderemos considerar os tensores como formas bilineares quando assim for necessário. Se for preciso distinguir o tensor u da forma bilinear associada a ele, denotaremos a forma bilinear por B_u.

Os tensores também podem ser visualizados como aplicações lineares. Cada tensor $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ gera duas aplicações lineares que as escrevemos como:

$$\begin{aligned} L_u \colon X^{\#} &\longrightarrow Y \\ \varphi &\longmapsto L_u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_u \colon Y^{\#} &\longrightarrow X \\ \psi &\longmapsto R_u(\psi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(y_i). \end{aligned}$$

Note que a Proposição 2.5 garante que as aplicações lineares $u \longmapsto L_u$ e $u \longmapsto R_u$ são injetivas. Daí temos mais duas identificações

$$X \otimes Y \subset L(X^{\#}, Y) \text{ e } X \otimes Y \subset L(Y^{\#}, X).$$

Finalmente, quando os espaços X e Y são duais temos, respectivamente,

$$X^{\#} \otimes Y \subset L(X, Y) \text{ e } X \otimes Y^{\#} \subset L(Y, X). \tag{2.7}$$

Os elementos de $L(X, Y)$ que correspondem a tensores de $X^{\#} \otimes Y$ sob a identificação $\varphi \otimes y \colon X \longrightarrow Y$, dada por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y$, são as *aplicações lineares de posto finito*, isto é, aplicações cuja imagem é um subespaço de dimensão finita em Y. Este fato justifica a notação do operador de posto finito definido em Análise Funcional.

Seja $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes x_i \in L(X, X)$ um operador de posto finito e $u^{\#} \colon X^{\#} \longrightarrow X^{\#}$, dado por $u^{\#}(\psi)(x) = \psi(u(x))$, o adjunto de u. Veremos, na próxima proposição, que o operador adjunto $u^{\#}$ coincide com a transposta de u.

Proposição 2.16. Se $u \colon X \longrightarrow X$ é de posto finito e $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes x_j$ é uma representação de u, então $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varphi_i$ é uma representação de $u^{\#}$. Em outras palavras, encarando u como tensor, temos $u^{\#} = u^t$.

Demonstração: Sejam $\psi \in X^{\#}$ e $x \in X$ quaisquer. Temos

$$\begin{aligned} u^{\#}(\psi)(x) = \psi(u(x)) &= \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi(x_i) = \sum_{i=1}^{n} J_X(x_i)(\psi)\varphi_i(x) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i(\psi)\varphi_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(\psi)\varphi_i\right)(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varphi_i\right)(\psi)(x), \end{aligned}$$

onde em $(*)$ estamos identificando $x_i \in X$ com $J_X(x_i) \in X^{\#\#}$. Portanto $u^{\#} = u^t$, considerando $u^t \in X^{\#\#} \otimes X^{\#}$ pela aplicação J_X. ■

Considere agora a forma bilinear $A\colon X^{\#} \times X \longrightarrow \mathbb{K}$, que leva (φ, x) em $\varphi(x)$. Pelo Teorema 2.10, existe uma única aplicação linear $\widetilde{A}\colon X^{\#} \otimes X \longrightarrow \mathbb{K}$ que lineariza A. Tal aplicação, como sabemos, age da forma

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\colon X^{\#} \otimes X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes x_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Na verdade, esse processo descrito acima generaliza o conceito de traço de uma matriz para espaços (e operadores) de dimensão infinita.

Definição 2.17. Seja $A\colon X^{\#} \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear dada por $A(\varphi, x) = \varphi(x)$. A linearização de A dada em (2.8) é chamada de *traço em* X e denotaremos por tr ou tr_X quando for necessário especificar o espaço X em questão.

Na próxima proposição, apresentaremos algumas das propriedades mais úteis do traço de um espaço vetorial. Em especial, veremos que se uma aplicação linear definida em um espaço vetorial de dimensão finita é representada por uma matriz, então o traço coincide com a definição usual do traço de uma matriz quadrada.

Proposição 2.18. Sejam X e Y espaços vetoriais.

(a) Seja $U\colon X \longrightarrow X$ uma aplicação linear de posto finito. A transposta, $U^{\#}$, também tem posto finito e $\mathrm{tr}_X U = \mathrm{tr}_{X^{\#}} U^{\#}$.

(b) Sejam $S\colon X \longrightarrow Y$ e $T\colon Y \longrightarrow X$ aplicações lineares onde pelo menos uma é de posto finito. Então ST e TS têm posto finito e $\mathrm{tr}_Y ST = \mathrm{tr}_X TS$.

(c) Suponha que X tenha dimensão finita e seja $V\colon X \longrightarrow X$ uma aplicação linear. Se V é representada por uma matriz A em relação a alguma base para X, então $\mathrm{tr}_X V$ é a soma das entradas diagonais de A.

Demonstração: (a) Seja $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes x_i$ uma representação de U. Pela Proposição 2.16 temos que $U^{\#}$ tem posto finito e

$$U^{\#} = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes x_i \right)^t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varphi_i,$$

portanto,

$$\mathrm{tr}_{X^{\#}} U^{\#} = \mathrm{tr}_{X^{\#}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) = \mathrm{tr}_X \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes x_i \right) = \mathrm{tr}_X U.$$

(b) Suponha S de posto finito, isto é, $S = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i$. Então

$$T(S(x)) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) T(y_i)$$

e portanto $TS = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes T(y_i)$ é de posto finito. Analogamente,

$$S(T(y)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(T(y)) y_i = \sum_{i=1}^{n} T^{\#}(\varphi_i)(y) y_i$$

e isso implica em $ST = \sum_{i=1}^{n} T^{\#}(\varphi_i) \otimes y_i$. Além disso, temos

$$\mathrm{tr}_X TS = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(T(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} T^{\#}(\varphi_i)(y_i) = \mathrm{tr}_Y ST.$$

(c) Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para X com funcionais coordenados $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de tal modo que cada $x \in X$ tenha a expansão $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz de V relativamente a essa base, então temos

$$\begin{aligned} V(x) &= V\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) V(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(x) a_{ij} e_j. \end{aligned}$$

Portanto $V = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_i \otimes a_{ij} e_j$ e então

$$\mathrm{tr} V = \mathrm{tr}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_i \otimes a_{ij} e_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_i(a_{ij} e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varphi_i(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

■

2.4 Dualidade tensorial e dualidade de traço

Na presente seção, iremos analisar novamente a teoria da dualidade que desenvolvemos para os produtos tensoriais. Lembre-se que o dual do espaço produto tensorial $X \otimes Y$ é o espaço $B(X \times Y)$ (Corolário 2.11), das formas bilineares em $X \times Y$ e que o produto tensorial $X^{\#} \otimes Y^{\#}$ pode ser visto imerso canonicamente no espaço $B(X \times Y)$ (ver (2.6)), no caso de espaços duais.

Considerando os espaços vetoriais X e Y com dimensão finita, segue da Observação 2.4 que $\dim(X^{\#} \otimes Y^{\#}) = \dim(X^{\#})\dim(Y^{\#}) = \dim(X)\dim(Y) = \dim(X \times Y)$. Portanto $B(X \times Y) = X^{\#} \otimes Y^{\#}$ e então

$$(X \otimes Y)^{\#} = X^{\#} \otimes Y^{\#},$$

com a seguinte relação de dualidade entre os espaços $X \otimes Y$ e $X^{\#} \otimes Y^{\#}$

$$\begin{aligned} \Phi\colon X^{\#} \otimes Y^{\#} &\longrightarrow (X \otimes Y)^{\#} \\ \varphi \otimes \psi &\longmapsto \Gamma\colon X \otimes Y \longrightarrow \mathbb{K} \\ & \qquad\qquad x \otimes y \longmapsto \Gamma(x \otimes y) = \varphi \otimes \psi(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y), \end{aligned}$$

isto é, com a relação de dualidade dada por

$$\varphi \otimes \psi(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Neste caso, cada um dos produtos tensoriais $X \otimes Y$ e $X^{\#} \otimes Y^{\#}$ é o dual do outro, a qual chamaremos de *dualidade tensorial*.

É interessante observar esta dualidade usando espaços de aplicações lineares em vez de produtos tensoriais. Continuando com a suposição de dimensão finita, considere o espaço $L(X, Y)$ das aplicações lineares de X em Y. Podemos identificar este espaço com o produto tensorial $X^{\#} \otimes Y$ cujo dual é $X \otimes Y^{\#}$ (lembre de (2.7)) o qual pode ser interpretado como $L(Y, X)$. Assim, temos

$$(L(X, Y))^{\#} = L(Y, X).$$

Agora, vamos examinar como a dualidade funciona entre esses espaços. Suponha $S \in L(X, Y)$ e $T \in L(Y, X)$. Usando as identificações descritas acima, S e T correspondem a tensores $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i \in X^{\#} \otimes Y$ e $v = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes \psi_j \in X \otimes Y^{\#}$, respectivamente.

Então temos que $T(S) = \langle S, T\rangle = \langle u, v\rangle = \mathrm{tr}_Y ST$. De fato, aplicando S em T temos

$$\begin{aligned}
T(S) &= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes \psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes \psi_j(\varphi_1 \otimes y_1 + \cdots + \varphi_n \otimes y_n) \\
&= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes \psi_j(\varphi_1 \otimes y_1) + \cdots + \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes \psi_j(\varphi_n \otimes y_n) \\
&= x_1 \otimes \psi_1(\varphi_1 \otimes y_1) + \cdots + x_m \otimes \psi_m(\varphi_1 \otimes y_1) + \cdots + \\
&\quad x_1 \otimes \psi_1(\varphi_n \otimes y_n) + \cdots + x_m \otimes \psi_m(\varphi_n \otimes y_n) \\
&= \varphi_1(x_1)\psi_1(y_1) + \cdots + \varphi_1(x_m)\psi_1(y_n) + \cdots + \\
&\quad \varphi_1(x_m)\psi_m(y_1) + \cdots + \varphi_n(x_m)\psi_m(y_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1)\psi_1(y_i) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_m)\psi_m(y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x_1)\psi_1(y_i) + \cdots + \varphi_i(x_m)\psi_m(y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi_i(x_j)\psi_j(y_i).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$S(T(y)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(T(y))y_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{m} x_j\psi_j(y)\right) y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \psi_j(y)\varphi_i(x_j)y_i,$$

isto é,

$$ST = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \psi_j \otimes \varphi_i(x_j)y_i.$$

Logo,

$$\mathrm{tr}_Y ST = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \psi_j(\varphi_i(x_j)y_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi_i(x_j)\psi_j(y_i)$$

e, observando os resultados das contas que acabamos de fazer, a dualidade entre os espaços $L(X, Y)$ e $L(Y, X)$ é dada por

$$\langle S, T\rangle = \mathrm{tr}_Y ST = \mathrm{tr}_X TS.$$

A essa relação chamaremos de *dualidade de traço*. Salientamos que a dualidade tensorial e a dualidade de traço são simplesmente formas diferentes de olhar o mesmo objeto e somos livres para trabalhar com o formalismo que melhor se adequar ao contexto.

Se descartarmos a suposição de que X e Y são de dimensões finitas, então, em nossa descrição de dualidade do tensor, devemos reverter a nossa identificação original do espaço dual de $X \otimes Y$ como o espaço das formas bilineares $B(X \times Y)$. Esse último espaço, em geral, será estritamente maior do que $X^{\#} \otimes Y^{\#}$. Na linguagem de dualidade de traço, devemos substituir o espaço $L(X, Y)$ pelo menor espaço de aplicações lineares de posto finito, que denotaremos por $FL(X, Y)$. Assim, em geral, temos

$$FL(X, Y)^{\#} = (X^{\#} \otimes Y)^{\#} = X^{\#\#} \otimes Y^{\#} = L(Y, X^{\#\#}),$$

com a dualidade dada por $\langle S, T \rangle = \mathrm{tr}_Y ST = \mathrm{tr}_{X^{\#\#}} TS$, como no caso de dimensão finita.

2.5 Alguns exemplos

Nesta seção descreveremos alguns exemplos (de certa forma até, aplicações) do produto tensorial entre espaços vetoriais. Nosso primeiro exemplo descreve um processo pelo qual um espaço vetorial de funções escalares pode ser convertido em um espaço de funções vetoriais.

2.5.1 Funções de valores vetoriais

Seja $F(S)$ o espaço vetorial de todas as funções de um conjunto S no corpo dos escalares $\mathbb{K}$ munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalares. Agora, sejam X um espaço vetorial e $F(S, X)$ o espaço vetorial de todas a funções de S em X. Para cada $f \in F(S)$ e $x \in X$ podemos definir uma função de S em X por

$$\begin{aligned} f \cdot x \colon S &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto f(s)x. \end{aligned}$$

Considere agora a aplicação bilinear

$$\begin{aligned} A \colon F(S) \times X &\longrightarrow F(S, X) \\ (f, x) &\longmapsto f \cdot x. \end{aligned}$$

Linearizando esta aplicação, obtemos a aplicação linear

$$\begin{aligned} A \colon F(S) \otimes X &\longrightarrow F(S, X) \\ \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Mostraremos agora que a aplicação linear (2.9) é injetiva. De fato, suponha que a função $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0$. Então temos que $\sum_{i=1}^{n} f_i(s)x_i = 0$, para todo $s \in S$. Como os funcionais $\varphi\colon F(S) \longrightarrow \mathbb{K}$, $f \longmapsto f(s)$, formam um subconjunto separador de pontos do espaço dual de $F(S)$ (não é difícil mostrar isso), então pela Observação 2.7 tem-se $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i = 0$ em $F(S) \otimes X$. Assim, segue que A é uma imersão de $F(S) \otimes X$ em $F(S, X)$.

Tomando o produto tensorial $F(S) \otimes X$ temos o efeito de juntar valores vetoriais para as funções de $F(S)$. À luz dessa identificação, podemos dispensar a notação apresentada acima, de modo que o tensor $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i$ também pode ser tomado para representar a função $s \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(s)x_i$.

As mesmas ideias podem ser aplicadas a subespaços de $F(S)$. Por exemplo, sejam $P(\mathbb{K})$ o espaço vetorial de funções polinomiais em $\mathbb{K}$ e $P(\mathbb{K}, X)$ um espaço de funções polinomiais em $\mathbb{K}$ com valores no espaço vetorial X. Cada elemento $P \in P(\mathbb{K}, X)$ tem a forma $P(s) = \sum_{k=0}^{n} s^k x_k$, onde $x_k \in X$. Sejam p_k as funções monomiais $p_k(s) = s^k$. Então o polinômio P é dado pelo tensor $\sum_{k=0}^{n} p_k \otimes x_k$. Por outro lado, é fácil ver que cada elemento do produto tensorial $P(\mathbb{K}) \otimes X$ produz uma função polinomial de $\mathbb{K}$ em X. Assim, temos uma representação do espaço $P(\mathbb{K}, X)$ como o produto tensorial $P(\mathbb{K}) \otimes X$.

Agora, vejamos um outro exemplo ainda nesse escopo. Como sequências são funções, seja c_{00} um espaço vetorial de todas as sequências de escalares que são eventualmente nulas. Assim, um elemento de c_{00} tem a forma $\omega = (s_1, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots)$. Então os elementos do produto tensorial $c_{00} \otimes X$ podem ser considerados com sequências em X que são eventualmente nulas, como nos mostra o diagrama a seguir.

$$\begin{tikzcd}
c_{00} \times X \arrow[r, phantom, "="] & c_{00}(\mathbb{N}) \times X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\theta"'] & c_{00}(\mathbb{N}, X) = c_{00}(X) \\
c_{00} \otimes X \arrow[r, phantom, "="] & c_{00}(\mathbb{N}) \otimes X \arrow[ur, "\widetilde{A}"'] &
\end{tikzcd}$$

Desse modo, se $x \in c_{00}(X)$ então $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes x_i$, onde e_i é a sequência de escalares que tem 1 no n-ésima termo e zero nos demais. Assim, identificamos

$$c_{00}(X) = c_{00} \otimes X.$$

2.5.2 Funções de duas variáveis

Já vimos que o produto tensorial de espaços duais pode ser imerso no espaço das formas bilineares $B(X \times Y)$ (ver (2.6)). Podemos generalizar esse processo de forma que o produto tensorial entre dois espaços de funções possa ser interpretado como um espaço de funções de duas variáveis.

Sejam S e T dois conjuntos, $F(S)$ e $F(T)$ espaços vetoriais de funções escalares sobre

S e T, respectivamente, e $A\colon F(S) \times F(T) \longrightarrow F(S \times T)$ uma forma bilinear dada por $A(f,g)(s,t) = f(s)g(t)$. Então, pelo Teorema 2.10, existe uma linearização para A, $\widetilde{A}\colon F(S) \otimes F(T) \longrightarrow F(S \times T)$, que associa o tensor $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$ à função $(s,t) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(s)g_i(t)$. Note que a linearização $\widetilde{A}$ é injetiva. De fato, suponha que $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 0$. Então temos $\sum_{i=1}^{n} f_i(s)g_i(t) = 0$, para todo $s \in S$, $t \in T$. Como os funcionais $\varphi\colon F(S) \longrightarrow \mathbb{K}$, dado por $f \longmapsto f(s)$, e $\psi\colon F(T) \longrightarrow \mathbb{K}$, dado por $g \longmapsto g(t)$, formam subconjuntos separadores de pontos dos espaços duais de $F(S)$ e $F(T)$, respectivamente, então pela Observação 2.7 segue que $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i = 0$ em $F(S) \otimes F(T)$. Portanto, temos uma imersão de $F(S) \otimes F(T)$ em $F(S \times T)$.

Em alguns casos, um espaço de funções de duas variáveis pode ser interpretado exatamente como um produto tensorial de espaços de funções de uma variável. Por exemplo, seja $P(\mathbb{K} \times \mathbb{K})$ um espaço de funções polinomiais de duas variáveis. Considere a forma bilinear $A\colon P(\mathbb{K}) \times P(\mathbb{K}) \longrightarrow P(\mathbb{K} \times \mathbb{K})$ dada por $A(p_s, q_t) = p_s(a)q_t(b)$, onde $p_s(a) = a^s$ e $q_t(b) = b^t$ são funções monomiais. Pelo Teorema 2.10, existe uma linearização $\widetilde{A}\colon P(\mathbb{K}) \otimes P(\mathbb{K}) \longrightarrow P(\mathbb{K} \times \mathbb{K})$ que é injetiva e associa o tensor $\sum_{k=0}^{n} p_s \otimes q_t$ à função $(a,b) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} p_s(a)q_t(b)$. Mostraremos agora que $\widetilde{A}$ é sobrejetiva. De fato, seja $\sum_{k=0}^{n} a^s b^t \in P(\mathbb{K} \times \mathbb{K})$, então existem $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ tal que $p_s(a) = a^s$ e $q_t(b) = b^t$. Logo,

$$\sum_{k=0}^{n} p_s \otimes q_t(a,b) = \sum_{k=0}^{n} p_s(a)q_t(b) = \sum_{k=0}^{n} a^s b^t$$

e assim $\widetilde{A}$ é sobrejetora, donde concluímos que

$$P(\mathbb{K} \times \mathbb{K}) = P(\mathbb{K}) \otimes P(\mathbb{K}).$$

Capítulo 3

Produto tensorial projetivo e injetivo

Neste capítulo, estudaremos duas maneiras de normar o produto tensorial entre espaços de Banach. Inicialmente, abordaremos a norma projetiva, veremos que, assim como o produto tensorial algébrico lineariza as aplicações bilineares, o produto tensorial projetivo lineariza as aplicações bilineares contínuas. Em seguida, dissertaremos sobre o dual do produto tensorial projetivo e estudaremos a norma injetiva. Os livros [5], [17] e o trabalho [20] compõem as principais referências utilizadas nesse estudo.

3.1 A norma projetiva

O objetivo desta seção é estudar como podemos introduzir uma norma no produto tensorial entre espaços de Banach. Inicialmente, definiremos a norma projetiva e provaremos que ela é uma norma no produto tensorial. Em seguida, veremos algumas de suas propriedades.

Sejam X e Y espaços de Banach. Como esperamos continuidade dos tensores, considerando o espaço $(X \otimes Y, \|\cdot\|)$, munido com uma norma $\|\cdot\|$, é natural esperarmos que dado um tensor elementar $x \otimes y \in X \otimes Y$ a desigualdade

$$\|x \otimes y\| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{3.1}$$

seja satisfeita. Agora, considere $u \in X \otimes Y$ um tensor qualquer. Se $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação de u, então decorre da desigualdade triangular que a norma satisfaz

$$\|u\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \, . \tag{3.2}$$

Como a desigualdade (3.2) deve ser válida para qualquer representação de u, tomando o

ínfimo sobre todas representações, segue que

$$\|u\| \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \right\}. \tag{3.3}$$

O fato do zero ser uma cota inferior para o conjunto $\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\|\}$ faz com que o ínfimo tomado acima esteja bem definido. Como utilizamos a desigualdade triangular em (3.2), o lado direito da desigualdade (3.3) se torna o maior candidato possível para uma norma natural em $X \otimes Y$.

Definição 3.1. Sejam X, Y espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada tensor $u \in X \otimes Y$, definimos a *norma projetiva de* u como

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}, \tag{3.4}$$

onde substituiremos a notação $\|\cdot\|$ por $\pi(\cdot)$.

Note que π satisfaz (3.1) e (3.2). Quando for necessário especificar os espaços componentes no produto tensorial, denotaremos a norma projetiva por $\pi_{X,Y}$ ou $\pi(u; X \otimes Y)$. Mais a frente, mostraremos que dada uma outra norma $\|\cdot\|$ em $X \otimes Y$ teremos $\|u\| \leq \pi(u)$.

Veremos agora que π é uma norma no produto tensorial.

Proposição 3.2. Sejam X e Y espaços de Banach. Então π é uma norma em $X \otimes Y$ e $\pi(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Demonstração: Primeiro, mostraremos que π é uma norma em $X \otimes Y$. Seja $u \in X \otimes Y$ um tensor. Suponha que $\pi(u) = 0$. Então pela definição de π, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma representação $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ de u tal que $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| < \varepsilon$. Daí, para todos $\varphi \in X'$, $\psi \in Y'$ temos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)| \, |\psi(y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi\| \, \|\psi\| \, \|x_i\| \, \|y_i\| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \, \varepsilon$$

e portanto

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) \right| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \, \varepsilon.$$

Desde que o valor da soma $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)$ é independente da representação de u, segue que $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$ e como os espaços duais X' e Y' são subconjuntos, respectivamente, dos duais algébricos $X^{\#}$ e $Y^{\#}$ que separam pontos, então, pelo item (a) da Observação 2.7, segue que $u = 0$. Ainda, é claro que se $u = 0$ temos $\pi(u) = 0$.

Mostraremos agora que $\pi(\lambda u) = |\lambda|\,\pi(u)$. Quando $\lambda = 0$ não há o que mostrar. Então suponha $\lambda \neq 0$. Se $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação de u então $\lambda u = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i) \otimes y_i$. Daí, temos

$$\pi(\lambda u) \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda x_i\| \, \|y_i\| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \, .$$

Como isso é válido para toda representação de u, segue que $\pi(\lambda u) \leq |\lambda|\,\pi(u)$. De modo análogo, temos $\pi(u) = \pi(\lambda^{-1}\lambda u) \leq |\lambda|^{-1}\,\pi(\lambda u)$, donde $|\lambda|\,\pi(u) \leq \pi(\lambda u)$. Portanto, $\pi(\lambda u) = |\lambda|\,\pi(u)$.

Agora, provaremos que π satisfaz a desigualdade triangular. Sejam $u, v \in X \otimes Y$ e $\varepsilon > 0$. Decorre da definição de π que existem representações $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ e $v = \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j$ tai que

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \leq \pi(u) + \varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} \|w_j\| \, \|z_j\| \leq \pi(v) + \varepsilon.$$

Então $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j$ é uma representação para $u + v$ e portanto

$$\pi(u+v) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| + \sum_{j=1}^{m} \|w_i\| \, \|z_i\| \leq \pi(u) + \pi(v) + 2\varepsilon. \tag{3.5}$$

Como (3.5) é válido para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\pi(u+v) \leq \pi(u) + \pi(v).$$

Finalmente, provaremos que $\pi(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$. Seja $x \otimes y \in X \otimes Y$ um tensor elementar. Por um lado, é claro que $\pi(x \otimes y) \leq \|x\| \, \|y\|$. Escolha $\varphi \in B_{X'}$ e $\psi \in B_{Y'}$ tais que $\varphi(x) = \|x\|$ e $\psi(y) = \|y\|$. Considere a forma bilinear contínua $A\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por $A(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Pelo Teorema 2.10 existe uma única linearização para A, $\widetilde{A}\colon X \otimes Y \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)$. Temos

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{A}(u)\right| &= \left|\widetilde{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\widetilde{A}(x_i \otimes y_i)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)\psi(y_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)| \, |\psi(y_i)| \\
&\leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \, ,
\end{aligned}$$

o que implica que $\left|\widetilde{A}(u)\right| \leq \pi(u)$ para todo $u \in X \otimes Y$ e para toda representação de u.

Assim, $\widetilde{A}$ é um funcional linear contínuo no espaço normado $(X \otimes Y, \pi(\cdot))$ de norma no máximo 1. Portanto,

$$\|x\| \, \|y\| = \varphi(x)\psi(y) = \widetilde{A}(x \otimes y) \leq \left|\widetilde{A}(x \otimes y)\right| \leq \pi(x \otimes y),$$

o que completa a demonstração. ■

Denotaremos por $X \otimes_\pi Y$ o produto tensorial $X \otimes Y$ munido da norma projetiva π.

O resultado seguinte dá conta de que em dimensão finita a norma projetiva faz do produto tensorial um espaço completo.

Proposição 3.3. Sejam X, Y espaços vetoriais de dimensão finita. Então $X \otimes Y$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Além disso, se X, Y forem espaços normados, então $X \otimes_\pi Y$ é completo.

Demonstração: Sejam $\dim(X) = n$ e $\dim(Y) = m$, com n, $m \in \mathbb{N}$. Portanto, $\dim(B(X \times Y)) = n \cdot m$ e consequentemente $\dim(B(X \times Y))^\# = n \cdot m$. Como $X \otimes Y = B(X \times Y)^\#$ segue que $X \otimes Y$ tem dimensão finita. Agora, considerando que X e Y são normados, segue que $X \otimes_\pi Y$ é normado e tem dimensão finita, logo é completo. ■

Observação 3.4. Se X e Y são espaços vetoriais de dimensão infinita, então o produto tensorial $X \otimes_\pi Y$ não é um espaço completo em geral. Veja, por exemplo, [17, Exercise 2.5]. Assim, denotaremos por $X \hat{\otimes}_\pi Y$ o completamento de $X \otimes_\pi Y$. O espaço de Banach $X \hat{\otimes}_\pi Y$ será chamado *produto tensorial projetivo dos espaços normados X e Y*.

Vimos na demonstração da Proposição 3.2 que, para reconhecer quando um tensor u em $X \otimes Y$ é nulo, é suficiente mostrar que $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$, para todos $\varphi \in X'$, $\psi \in Y'$ e qualquer representação de u. A identificação do tensor nulo no produto tensorial $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é um tanto mais delicada e seu estudo pode ser visto no Capítulo 4 do livro [17]. Não abordaremos esse estudo em nosso trabalho.

Se A e B são subconjuntos de X, Y respectivamente, definimos o subconjunto $A \otimes B \subset X \otimes Y$ por

$$A \otimes B := \{x \otimes y \colon x \in A \ \text{ e } \ y \in B\}. \tag{3.6}$$

Usaremos essa notação com moderação, pois, embora seja conveniente, poderá causar ambiguidade. Note que não necessariamente $A \otimes B$ é um espaço vetorial e que todos os seus elementos são tensores elementares.

Definição 3.5. Seja X um espaço vetorial e $S \subset X$ um subconjunto. A interseção de todos os subconjuntos convexos de X contendo S é chamada de *envoltória convexa de S* e é denotada por $co(S)$.

A envoltória convexa de S, $co(S)$, pode ser caracterizada pelo conjunto abaixo ([20, Proposição 3.8]):

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, i = 1, \ldots, n \right\}$$

e, quando $0 \in S$, por ([20, Corolário 3.9])

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Quando X for um espaço vetorial normado, poderemos considerar o fecho da envoltória convexa e o denotaremos por $\overline{co}(S)$.

Proposição 3.6. Sejam X, Y espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. A bola unitária fechada de $X\hat{\otimes}_\pi Y$ é o fecho da envoltória convexa do conjunto $B_X \otimes B_Y$.

Demosntração: Seja $B_{X\hat{\otimes}_\pi Y}$ a bola unitária fechada de $X\hat{\otimes}_\pi Y$. Como $B_{X\hat{\otimes}_\pi Y} = \overline{B_{X\otimes_\pi Y}}^{X\hat{\otimes}_\pi Y}$ é suficiente provar para o espaço $X \otimes_\pi Y$, isto é, basta mostrar que $B_{X\otimes_\pi Y} = \overline{co}^{X\otimes_\pi Y}(B_X \otimes B_Y)$, pois

$$B_{X\hat{\otimes}_\pi Y} = \overline{B_{X\otimes_\pi Y}}^{X\hat{\otimes}_\pi Y} = \overline{\overline{co}^{X\otimes_\pi Y}(B_X \otimes B_Y)}^{X\hat{\otimes}_\pi Y} = \overline{co}^{X\hat{\otimes}_\pi Y}(B_X \otimes B_Y).$$

Suponha $u \in \mathring{B}_{X\otimes_\pi Y}$. Então, pela definição de π, existe uma representação de u da forma $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, onde x_i e y_i são não-nulos e $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| < 1$. Seja $w_i = \|x_i\|^{-1} x_i$, $z_i = \|y_i\|^{-1} y_i$ e $\lambda_i = \|x_i\| \, \|y_i\|$. Então,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\|x_i\| \, \|x_i\|^{-1} x_i) \otimes (\|y_i\| \, \|y_i\|^{-1} y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \, (\|x_i\|^{-1} x_i) \otimes (\|y_i\|^{-1} y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \otimes z_i, \end{aligned}$$

com $w_i \in B_X$, $z_i \in B_Y$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1$. Assim, $u \in co(B_X \otimes B_Y)$ e então $\mathring{B}_{X\otimes_\pi Y} \subseteq co(B_X \otimes B_Y)$, o que implica em $B_{X\otimes_\pi Y} = \overline{\mathring{B}_{X\otimes_\pi Y}}^{X\otimes_\pi Y} \subseteq \overline{co}^{X\otimes_\pi Y}(B_X \otimes B_Y)$. Por outro lado, temos que $B_X \otimes B_Y \subset B_{X\otimes_\pi Y}$. De fato, dado $u \in B_X \otimes B_Y$, temos $u = x \otimes y$, com $x \in B_X$ e $y \in B_Y$ (lembre que $B_X \otimes B_Y$ é definido como em (3.6)). Daí, $\pi(u) = \|x\| \, \|y\| \leq 1$ e assim $u \in B_{X\otimes_\pi Y}$. Segue que $co(B_X \otimes B_Y) \subseteq B_{X\otimes_\pi Y}$, pois $B_{X\otimes_\pi Y}$

é um conjunto convexo que contém $B_X \otimes B_Y$. Disso tem-se

$$\overline{co}^{X\otimes_\pi Y}(B_X \otimes B_Y) \subseteq \overline{B_{X\otimes_\pi Y}}^{X\otimes_\pi Y} = B_{X\otimes_\pi Y}.$$

■

Consideraremos agora o produto tensorial dos operadores lineares contínuos. Veremos que, na norma projetiva, o produto tensorial de operadores lineares contínuos também é um operador linear contínuo.

Proposição 3.7. Sejam X, Y, W, Z espaços vetoriais normados e $S\colon X \longrightarrow W$, $T\colon Y \longrightarrow Z$ operadores lineares contínuos. Então existe um único operador linear contínuo $S \otimes_\pi T\colon X\hat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow W\hat{\otimes}_\pi Z$ tal que $S \otimes_\pi T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Além disso, $\|S \otimes_\pi T\| = \|S\|\,\|T\|$.

Demonstração: Sejam $S \in \mathcal{L}(X, W)$ e $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Vimos no Capítulo 2 que existe uma única aplicação linear $S\otimes T\colon X\otimes Y \longrightarrow W\otimes Z$ tal que $S\otimes T(x\otimes y) = S(x)\otimes T(y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Sejam $u \in X \otimes Y$ e $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ uma representação de u. Então

$$\begin{aligned}
\pi(S \otimes T(u)) &= \pi\left(\sum_{i=1}^n S(x_i) \otimes T(y_i)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|S(x_i)\|\,\|T(y_i)\| \\
&\leq \|S\|\,\|T\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|\,\|y_i\|
\end{aligned}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as representações de u, temos $\pi(S\otimes T(u)) \leq \|S\|\,\|T\|\,\pi(u)$. Assim, $S\otimes_\pi T\colon X\otimes_\pi Y \longrightarrow W\otimes_\pi Z$ é um operador linear contínuo para a norma projetiva e $\|S \otimes_\pi T\| \leq \|S\|\,\|T\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|S\|\,\|T\| &= \sup_{x\in B_X} \|S(x)\| \sup_{y\in B_Y} \|T(y)\| = \sup_{x\in B_X,\ y\in B_Y} \|S(x)\|\,\|T(y)\| \\
&= \sup_{x\in B_X,\ y\in B_Y} \pi(S(x) \otimes T(y)) = \sup_{x\in B_X,\ y\in B_Y} \pi(S \otimes T(x \otimes y)) \\
&\leq \sup\{\pi(S \otimes T(x \otimes y))\colon u \in X \otimes Y,\ \text{com } \pi(u) \leq 1\} \\
&= \|S \otimes T\|
\end{aligned}$$

e portanto $\|S \otimes T\| = \|S\|\,\|T\|$. Tomando a única extensão contínua do operador $S \otimes T$ aos completamentos de $X \otimes_\pi Y$ e $W \otimes_\pi Z$, segue o resultado. ■

Veremos agora que o produto tensorial projetivo não respeita subespaços, isto é, se W é um subespaço do espaço de Banach X, de tal forma que $W \otimes Y$ seja um subespaço algébrico de $X \otimes Y$, então a norma induzida em $W \otimes Y$ por $X \otimes_\pi Y$ não é, geralmente, a norma projetiva $\pi_{W,Y}(\cdot)$. De fato, considere a definição da norma $\pi(u; W \otimes Y)$ onde $u \in W \otimes Y$. O ínfimo que define essa norma é assumido sobre o conjunto de todas as representações de u em $W \otimes Y$. Se ampliarmos esse espaço W para X, o conjunto das representações de u se torna maior e portanto teremos

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in W \otimes Y \right\} \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y \right\}$$

o que implica em

$$\pi(u; X \otimes Y) \leq \pi(u; W \otimes Y).$$

Embora a norma projetiva não respeite subespaços de modo geral, veremos que isso não acontece para espaços complementados.

Proposição 3.8. Sejam E e F subespaços complementados de X e Y respectivamente. Então

(a) $E \otimes F$ é complementado em $X \otimes_\pi Y$.

(b) A norma em $E \otimes F$ induzida pela norma projetiva de $X \otimes_\pi Y$ é equivalente a norma projetiva $\pi_{E,F}$.

(c) Se E e F são complementados pelas projeções da norma unitária, então $E \otimes_\pi F$ é um subespaço de $X \otimes_\pi Y$ que é também complementado por uma projeção de norma unitária.

Demonstração: (a) Sejam P e Q projeções de X e Y sobre E e F, respectivamente. Então podemos considerar o operador linear contínuo $P \otimes Q \colon X \otimes_\pi Y \longrightarrow X \otimes_\pi Y$ dada por $P \otimes Q(x \otimes y) = P(x) \otimes Q(y)$, para todo $x \in X$, $y \in Y$. Vamos provar que $P \otimes Q$ é uma projeção e $P \otimes Q(X \otimes_\pi Y) = E \otimes F$. Se $x \otimes y \in X \otimes_\pi Y$, então

$$\begin{aligned}(P \otimes Q)^2(x \otimes y) &= (P \otimes Q)(P \otimes Q(x \otimes y)) = P \otimes Q(P(x) \otimes Q(y)) \\ &= P(P(x)) \otimes Q(Q(y)) = P^2(x) \otimes Q^2(y) = P(x) \otimes Q(y) \\ &= P \otimes Q(x \otimes y).\end{aligned}$$

Considere agora $e \otimes f \in E \otimes F$. Então, por hipótese, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que

$P(x) = e$ e $Q(y) = f$. Daí, temos

$$P \otimes Q(x \otimes y) = P(x) \otimes Q(y) = e \otimes f$$

e portanto $P \otimes Q(X \otimes_\pi Y) = E \otimes F$.
(b) Seja $u \in E \otimes F$. Já vimos que $\pi_{X,Y} \leq \pi_{E,F}$. Agora, considere $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ uma representação de u em $X \otimes Y$. Então, $u = P \otimes Q(u)$ e $\sum_{i=1}^n P(x_i) \otimes Q(y_i)$ é uma representação de u em $E \otimes F$. Assim,

$$\pi_{E,F}(u) \leq \sum_{i=1}^n \|P(x_i)\| \, \|Q(y_i)\| \leq \|P\| \, \|Q\| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \, \|y_i\| \, . \tag{3.7}$$

Como (3.7) é válida para toda representação de u em $X \otimes Y$, segue que

$$\pi_{X,Y}(u) \leq \pi_{E,F}(u) \leq \|P\| \, \|Q\| \, \pi_{X,Y}(u).$$

(c) Se E e F são complementados por projeções de normas unitárias, então $\|P\| = \|Q\| = 1$ e portanto $\pi_{X,Y}(u) \leq \pi_{E,F}(u) \leq \pi_{X,Y}(u)$ o que implica em $\pi_{X,Y}(u) = \pi_{E,F}(u)$, para todo $u \in E \otimes F$. Logo, $E \otimes_\pi F$ é um subespaço de $X \otimes_\pi Y$. Além disso, $\|P \otimes Q\| = \|P\| \, \|Q\| = 1$ e portanto $P \otimes Q$ é uma projeção de norma unitária em $E \otimes F$. ■

Observação 3.9. Tomando o completamento dos produtos tensoriais $E \otimes F$ e $X \otimes Y$, os resultados da Proposição 3.8 também são válidos para os produtos tensoriais projetivos completos.

Veremos adiante o porquê da escolha do nome projetivo para a norma π. Antes disso, definiremos o operador quociente, mostraremos que o produto tensorial de operadores quocientes também é um operador quociente e uma consequência desse resultado justificará a nomenclatura da norma π.

Definição 3.10. Seja $Q \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Dizemos que $Q \colon Z \longrightarrow Y$ é um *operador quociente* se Q é sobrejetor e $\|y\| = \inf \{\|z\| : z \in Z, \ Q(z) = y\}$, ou equivalentemente, Q aplica a bola aberta unitária de Z na bola aberta unitária de Y.

Isso significa simplesmente que Y é isometricamente isomorfo ao espaço quociente $Z/\ker Q$.

Proposição 3.11. Sejam $Q \in \mathcal{L}(W, X)$, $R \in \mathcal{L}(Z, Y)$ operadores quocientes. Então $Q \otimes_\pi R \colon W \hat{\otimes}_\pi Z \longrightarrow X \hat{\otimes}_\pi Y$ é um operador quociente.

Demonstração: É suficiente mostrarmos que $Q \otimes R \colon W \otimes_\pi Z \longrightarrow X \otimes_\pi Y$ é um operador quociente, pois obteremos que o resultado é válido para $Q \otimes_\pi R$ por extensão ao

completamento como na demonstração da Proposição 3.7. Para ver que $Q \otimes R$ é sobrejetor, considere $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes_\pi Y$. Então, pela sobrejetividade de Q e R, existem $w_i \in W$ e $z_i \in Z$ tais que $Q(w_i) = x_i$ e $R(z_i) = y_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Daí,

$$Q \otimes R\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Q(w_i) \otimes R(z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i,$$

portanto $Q \otimes R$ é sobrejetor. Agora, seja $u \in X \otimes_\pi Y$. Como $Q \otimes R$ é sobrejetor, existe $v \in W \otimes_\pi Z$ tal que $Q \otimes R(v) = u$ e então para qualquer representação $\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i$ de v temos

$$\pi(u) = \pi(Q \otimes R(v)) \leq \|Q\| \, \|R\| \sum_{i=1}^{n} \|w_i\| \, \|z_i\| \, .$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de v, segue que

$$\pi(u) \leq \|Q\| \, \|R\| \, \pi(v)$$

e como $\|Q\| = \|R\| = 1$ teremos $\pi(u) \leq \pi(v)$.

Dado $\varepsilon > 0$ escolha uma representação $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ de u tal que $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \leq \pi(u) + \varepsilon$. Agora, para cada $i = 1, \cdots, n$, escolha $w_i \in W$ e $z_i \in Z$ tais que $Q(w_i) = x_i$, $R(z_i) = y_i$, $\|w_i\| \leq (1+\varepsilon) \|x_i\|$ e $\|z_i\| \leq (1+\varepsilon) \|y_i\|$. Veremos que de fato as escolhas acima são possíveis. Inicialmente, note que $\frac{x_i}{(1+\varepsilon)\|x_i\|} \in \mathring{B}_X$. Pela definição de operador quociente, existe $q_i \in \mathring{B}_W$ tal que $Q(q_i) = \frac{x_i}{(1+\varepsilon)\|x_i\|}$. Daí, $Q((1+\varepsilon) \|x_i\| \, q_i) = x_i$. Tomando $w_i = (1+\varepsilon) \|x_i\| \, q_i$, temos $Q(w_i) = x_i$ e $\|w_i\| = (1+\varepsilon) \|x_i\| \, \|q_i\| \leq (1+\varepsilon) \|x_i\|$. De forma análoga, obtemos que $R(z_i) = y_i$ e $\|z_i\| \leq (1+\varepsilon) \|y_i\|$. Então

$$Q \otimes R\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Q(w_i) \otimes R(z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = u$$

e além disso

$$\begin{aligned}
\pi\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} \|w_i\| \, \|z_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (1+\varepsilon) \|x_i\| \, (1+\varepsilon) \|y_i\| \qquad (3.8) \\
&= (1+\varepsilon)^2 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \\
&\leq (1+\varepsilon)^2 (\pi(u) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Como (3.8) é válida para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\pi(u) = \inf\{\pi(v) \colon v \in W \otimes_\pi Z, \quad Q \otimes R(v) = u\},$$

o que completa a demonstração. ■

Definição 3.12. Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que Y é um quociente de X se existe um subespaço fechado $W \subseteq X$ tal que $Y = X/W$.

Corolário 3.13. Sejam X_1, X_2, Y_1 e Y_2 espaços normados. Se Y_i é um quociente de X_i para todo $i = 1, 2$, então $Y_1 \otimes_\pi Y_2$ é um quociente de $X_1 \otimes_\pi X_2$.

Demonstração: Desde que, por hipótese, Y_i é um quociente de X_i para todo $i = 1, 2$, existem subespaços fechados $W_i \subseteq X_i$ tais que $Y_i = X_i/W_i$, $i = 1, 2$. Seja $\pi_i \colon X_i \longrightarrow X_i/W_i = Y_i$ as projeções canônicas (que são operadores quocientes). Da Proposição 3.11, segue que $\pi_1 \otimes \pi_2 \colon X_1 \otimes_\pi X_2 \longrightarrow Y_1 \otimes_\pi Y_2$ é um operador quociente. Portanto, $Y_1 \otimes_\pi Y_2 = X_1 \otimes_\pi X_2 / \ker(\pi_1 \otimes \pi_2)$, isto é, $Y_1 \otimes_\pi Y_2$ é um quociente de $X_1 \otimes_\pi X_2$. ■

Vimos que a norma π respeita quocientes e, na demonstração do corolário, ficou evidente que os espaços quocientes estão associados às projeções canônicas. Daí segue a justificativa do nome projetiva para a norma π.

Geralmente, a norma projetiva, $\pi(u)$, de um tensor u pode ser bastante difícil de calcular, pois, pela definição, é necessário examinar todas as representações possíveis de u, e, claramente, isso não é um método prático. No exemplo a seguir mostraremos que isto nem sempre é tão difícil. Além disso, o exemplo mostrará um importante isomorfismo topológico entre um espaço de sequências conhecido e um espaço produto tensorial.

Exemplo 3.14. *O produto tensorial projetivo* $\ell_1 \hat{\otimes}_\pi X$.

Seja X um espaço de Banach. No Capítulo 1, vimos que os elementos de $\ell_1 \otimes X$ podem ser vistos como sequências de valores em X. Sob essa mesma identificação, para cada $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ em ℓ_1 e $x \in X$, o tensor elementar $a \otimes x$ corresponde para a sequência $(a_n x)_{n=1}^\infty$ em X. Agora, note que a sequência $(a_n x)_{n=1}^\infty$ é absolutamente somante, pois

$$\sum_{n=1}^\infty \|a_n x\| = \|x\| \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n| \right).$$

Em outras palavras, $a \otimes x$ pertence ao espaço de Banach $\ell_1(X)$ de todas as sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ absolutamente somantes em x, onde a norma é dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_1 = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|.$$

Assim, existe uma aplicação linear $J\colon \ell_1 \otimes X \longrightarrow \ell_1(X)$ satisfazendo $J(a \otimes x) = (a_n x)_{n=1}^{\infty}$. Agora, se $\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i$ é uma representação de $u \in \ell_1 \otimes X$, onde $a_i = (a_{in})_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, m$, então

$$\begin{aligned} \|J(u)\|_1 &= \left\| \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \|a_{in} x_i\| = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{in}| \right) \|x_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|_1 \|x_i\| , \end{aligned} \tag{3.9}$$

e desde que (3.9) é válida para toda representação de u, tomando o ínfimo sobre todas essas representações, segue que $\|J(u)\|_1 \leq \pi(u)$. Agora, fixe uma representação $\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i$ de u. Então $J(u) = (u_n)_{n=1}^{\infty}$, onde $u_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i$.

Afirmação: A série $\sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes u_n$ converge para u em $\ell_1 \otimes_\pi X$, onde $\{e_n\}$ são os vetores canônicos em ℓ_1.

De fato, seja P_k a projeção de ℓ_1 nas primeiras k coordenadas, de modo que $P_k(a) = \sum_{n=1}^{k} a_n e_n$. Daí, temos $P_k(a) \longrightarrow a$ quando $k \longrightarrow \infty$ e então

$$\begin{aligned} \pi\left(u - \sum_{n=1}^{k} e_n \otimes u_n \right) &= \pi\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i - \sum_{n=1}^{k} e_n \otimes \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i \right) \right) \\ &= \pi\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i - \sum_{n=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} e_n \otimes a_{in} x_i \right) \\ &= \pi\left(\sum_{i=1}^{m} \left(a_i \otimes x_i - \sum_{n=1}^{k} a_{in} e_n \otimes x_i \right) \right) \\ &= \pi\left(\sum_{i=1}^{m} \left(a_i \otimes x_i - P_k(a_i) \otimes x_i \right) \right) \\ &= \pi\left(\sum_{i=1}^{m} (a_i - P_k(a_i)) \otimes x_i \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \|a_i - P_k(a_i)\| \|x_i\| , \end{aligned}$$

segue que $\pi\left(u - \sum_{n=1}^{k} e_n \otimes u_n \right) \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$, provando assim a afirmação. Agora, temos

$$\pi(u) = \pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes u_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| = \|J(u)\|_1 ,$$

portanto a aplicação linear $J\colon \ell_1 \otimes_\pi X \longrightarrow \ell_1(X)$ é uma isometria. Como $\ell_1(X)$ é completo, então J estende para um único operador isométrico do produto tensorial projetivo completo $J\colon \ell_1 \hat{\otimes}_\pi X \longrightarrow \ell_1(X)$.

Os argumentos que foram dados para o espaço ℓ_1 no Exemplo 3.14 se aplica de forma equivalente para o espaço $\ell_1(I)$, onde I é um conjunto de indexação arbitrária, nos fornecendo uma identificação

$$\ell_1(I)\hat{\otimes}_\pi X = \ell_1(I, X), \tag{3.10}$$

onde $\ell_1(I, X)$ é o espaço de Banach de famílias absolutamente somáveis em X indexada por I, com a norma

$$\|(x_i)_i\| = \sum_{i \in I} \|x_i\| .$$

Para provar isso, precisamos apenas lembrar que se $(x_i)_i$ é uma família absolutamente somável, então existe um subconjunto enumerável, I_0, de I tal que $x_i = 0$ se $i \notin I_0$ (Proposição 1.35).

A identificação (3.10) permite algumas conclusões interessantes. Lembre-se que, em geral, o produto tensorial projetivo não respeita subespaços, isto é, se W é um subespaço de X, então, não necessariamente, $W\hat{\otimes}_\pi Y$ é um subespaço de $X\hat{\otimes}_\pi Y$. A próxima proposição nos diz que a situação é diferente se um dos espaços componentes for o $\ell_1(I)$ e sua demonstração (que foge aos objetivos do trabalho) pode ser vista em [17, Proposition 2.7].

Proposição 3.15. Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Então $\ell_1(I)\hat{\otimes}_\pi Y$ é um subespaço de $\ell_1(I)\hat{\otimes}_\pi X$.

A próxima aplicação é uma representação útil dos elementos de um produto tensorial projetivo completo $X\hat{\otimes}_\pi Y$, que complementa bem a representação dos elementos do produto tensorial algébrico $X \otimes Y$. Lembremos que todo espaço de Banach é um quociente de $\ell_1(I)$ para um conjunto de índices I escolhido adequadamente (veja [7, Exercise 5.30])[1].

Proposição 3.16. Sejam X e Y espaços de Banach, $u \in X\hat{\otimes}_\pi Y$ e $\varepsilon > 0$. Então existem sequências limitadas $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ em X e Y, respectivamente, tais que a série

[1] É bem comum encontrar a demonstração desse fato para espaços separáveis e vários autores comentam que a demonstração para o caso geral é muito semelhante. Infelizmente, não encontramos nenhuma demonstração explícita e por questões de escopo do nosso trabalho (e tempo) não fizemos esforços para demonstra-la.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$ converge para u e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| < \pi(u) + \varepsilon.$$

Demonstração: Sejam J um conjunto de índices, $Q\colon \ell_1(J) \longrightarrow X$ um operador quociente e $I_Y\colon Y \longrightarrow Y$ o operador identidade em Y. Como I_Y é um operador quociente, pela Proposição 3.11 o operador produto tensorial $Q \otimes_\pi I_Y\colon \ell_1(J)\hat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow X\hat{\otimes}_\pi Y$ é um operador quociente e então, para cada $u \in X\hat{\otimes}_\pi Y$, existe $v \in \ell_1(J)\hat{\otimes}_\pi Y$ tal que $Q \otimes_\pi I_Y(v) = u$ e $\pi(v) \leq \pi(u) + \varepsilon$. Como $\ell_1(J)\hat{\otimes}_\pi Y = \ell_1(J, Y)$, podemos identificar v como uma família absolutamente somante $(v_j)_{j\in J} \in Y$. Agora, existe um subconjunto enumerável $J_0 = \{j_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ de J tal que $v_j = 0$, se $j \notin J_0$, e assim v pode ser escrito como $\sum_{n=1}^{\infty} e_{jn} \otimes v_{jn}$, com $\pi(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_{jn}\|$. Considere $x_n = Q(e_{jn})$ e $y_n = v_{jn}$. Como

$$\|x_n\| = \inf\{\|e_{jn}\| : e_{jn} \in \ell_1(J),\ Q(e_{jn}) = x_n\} = 1$$

e $(v_{jn})_{j\in J} \in \ell_1(J)$, com $n \in \mathbb{N}$, segue que as sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são limitadas. Então temos

$$u = Q \otimes_\pi I_Y(v) = Q \otimes_\pi I_Y\left(\sum_{n=1}^{\infty} e_{jn} \otimes v_{jn}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(e_{jn}) \otimes I_Y(v_{jn}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_{jn}\| = \pi(v) \leq \pi(u) + \varepsilon.$$

■

Da proposição anterior, resulta que

$$\pi(u) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| < \infty,\ u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n\right\}, \tag{3.11}$$

o ínfimo de todas as representações de $u \in X\hat{\otimes}_\pi Y$ como descrito no enunciado da Proposição 3.1.

Existem variações menores da fórmula (3.11) que são úteis. Por exemplo, podemos reescrever o tensor $u \in X\hat{\otimes}_\pi Y$ na forma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n$ onde $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou mesmo como $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n$, onde $x_n \longrightarrow 0$ e $y_n \longrightarrow 0$. Daí, temos mais

duas fórmulas correspondentes para a norma projetiva

$$\pi(u) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| : u = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n \otimes y_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| < \infty,\ \|x_n\| = \|y_n\| = 1\right\}$$

e

$$\pi(u) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\,\|x_n\|\,\|y_n\| : u = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n \otimes y_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| < \infty,\ x_n, y_n \longrightarrow 0\right\}.$$

3.2 O espaço dual de $X\hat{\otimes}_\pi Y$

No Capítulo 2, vimos que o produto tensorial $X \otimes Y$ lineariza aplicações bilineares em $X \times Y$. Nesta seção, estudaremos como o produto tensorial projetivo $X\hat{\otimes}_\pi Y$ lineariza as aplicações bilineares contínuas e determinaremos o seu espaço dual.

Sabemos que uma aplicação bilinear $B\colon X \times Y \longrightarrow Z$, entre os espaços normados X, Y e Z, é contínua se existe uma constante $c > 0$ tal que $\|B(x,y)\| \leq c\,\|x\|\,\|y\|$, para todo $x \in X$, $y \in Y$. Denotamos por $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ o espaço das aplicações bilineares contínuas de $X \times Y$ em Z, onde a norma é dada por

$$\|B\| = \sup\{\|B(x,y)\| : x \in B_X,\ y \in B_Y\}.$$

Quando $Z = \mathbb{K}$, denotamos esse espaço por $\mathcal{B}(X \times Y)$, espaço das formas bilineares contínuas.

Teorema 3.17. *Seja $B \in \mathcal{B}(X \times Y, Z)$ uma aplicação bilinear contínua. Então existe um único operador linear contínuo $\widetilde{B}\colon X\hat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow Z$, satisfazendo $\widetilde{B}(x \otimes y) = B(x,y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Além disso, a correspondência $B \longleftrightarrow \widetilde{B}$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ e $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\pi Y, Z)$.*

Demonstração: Como B é uma aplicação bilinear, pelo Teorema 2.10, existe uma única aplicação linear $\widetilde{B}\colon X \otimes Y \longrightarrow Z$ tal que $\widetilde{B}(x \otimes y) = B(x,y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$ e a correspondência $B \longleftrightarrow \widetilde{B}$ é um isomorfismo entre os espaços $B(X \times Y, Z)$ e $L(X\hat{\otimes}_\pi Y, Z)$. Mostraremos que $\widetilde{B}$ é contínua para a norma projetiva e que a correspondência $B \longleftrightarrow \widetilde{B}$ é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ e $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\pi Y, Z)$.

Seja $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Temos

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{B}(u)\right\| &= \left\|\widetilde{B}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{B}(x_i \otimes y_i)\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}\|B(x_i, y_i)\| \qquad (3.12)\end{aligned}$$

$$\leq \|B\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \, .$$

Como (3.12) é válido para toda representação de u, segue que $\left\|\widetilde{B}(u)\right\| \leq \|B\| \, \pi(u)$ e assim $\widetilde{B}$ é contínua com $\left\|\widetilde{B}\right\| \leq \|B\|$. Por outro lado,

$$\|B(x,y)\| = \left\|\widetilde{B}(x \otimes y)\right\| \leq \left\|\widetilde{B}\right\| \|x\| \, \|y\| \, .$$

Então, $\|B\| \leq \left\|\widetilde{B}\right\|$ e portanto $\|B\| = \left\|\widetilde{B}\right\|$.

O operador linear contínuo $\widetilde{B}\colon X \otimes_\pi Y \longrightarrow Z$ tem uma única extensão para o operador linear contínuo $\widetilde{B}\colon X \hat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow Z$ com a mesma norma. Agora, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{B}(X \times Y, Z) &\longrightarrow \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\pi Y, Z) \\ B &\longmapsto \widetilde{B}. \end{aligned}$$

A linearidade e continuidade da Φ seguem das definições e do que já fizemos acima. Vamos mostrar que Φ é sobrejetora. Seja $L \in \mathcal{L}(X \otimes_\pi Y, Z)$ e $B\colon X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear (de imediata verificação) contínua dada por $B(x,y) = L(x \otimes y)$. Da continuidade do operador L segue que

$$\|B(x,y)\| = \|L(x \otimes y)\| \leq \|L\| \, \|x\| \, \|y\| \, ,$$

donde B é contínua. Pela unicidade do Teorema 2.10, temos $\widetilde{B} = L$ e portanto Φ é sobrejetora. O Teorema 2.10 também nos dá a injetividade e, consequentemente, Φ é um isomorfismo isométrico. ■

Assim, temos a seguinte identificação canônica

$$\mathcal{B}(X \times Y, Z) = \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\pi Y, Z).$$

Se Z for o corpo dos escalares, temos uma identificação canônica do espaço dual do produto tensorial projetivo com o espaço das formas bilineares contínuas

$$\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\pi Y, \mathbb{K}) = (X \hat{\otimes}_\pi Y)'. \tag{3.13}$$

Com a identificação (3.13), a ação de uma forma bilinear contínua B como um funcional

linear contínuo em $X\hat{\otimes}_\pi Y$ é dada por

$$B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i).$$

Essa dualidade produz uma nova fórmula para a norma projetiva:

$$\pi(u) = \sup\left\{|B(u)| : B \in \mathcal{B}(X \times Y),\ \|B\| \leq 1\right\}. \tag{3.14}$$

A teoria da dualidade que desenvolvemos entre os produtos tensoriais projetivos e os espaços de formas bilineares contínuas pode ser formulada em termos de espaços de operadores lineares contínuos.

A cada forma bilinear contínua $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ existe um operador linear contínuo associado $L_B \in \mathcal{L}(X, Y')$ definido por $L_B(x)(y) = B(x, y)$. Vamos mostrar que a aplicação $B \longmapsto L_B$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços $\mathcal{B}(X \times Y)$ e $\mathcal{L}(X, Y')$. De fato, considere o operador

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{B}(X \times Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(X, Y') \\ B &\longmapsto L_B \end{aligned}$$

e sejam $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} L_{B_1+\lambda B_2}(x)(y) &= (B_1 + \lambda B_2)(x, y) = B_1(x, y) + (\lambda B_2)(x, y) \\ &= B_1(x, y) + \lambda B_2(x, y) = L_{B_1}(x)(y) + \lambda L_{B_2}(x)(y) \end{aligned}$$

e assim tem-se

$$\Phi(B_1 + \lambda B_2) = L_{B_1+\lambda B_2} = L_{B_1} + \lambda L_{B_2} = \Phi(B_1) + \lambda\Phi(B_2)$$

e portanto Φ é linear. Tomando $x \in X$, $y \in Y$, provaremos que a aplicação Φ é uma isometria. Note que pela continuidade de L_B temos

$$|B(x, y)| = |L_B(x)(y)| \leq |L_B(x)|\,\|y\| \leq \|L_B\|\,\|x\|\,\|y\|.$$

Logo $\|B\| \leq \|L_B\|$. Por outro lado, pela continuidade da B temos

$$|L_B(x)(y)| = |B(x, y)| \leq \|B\|\,\|x\|\,\|y\|$$

o que implica em $\|L_B\| \leq \|B\|$ e portanto $\|B\| = \|L_B\|$. Daí $\|\Phi(B)\| = \|L_B\| = \|B\|$. Além disso, é claro que Φ é sobrejetora (basta tomar para cada $S \in \mathcal{L}(X; Y')$ a forma

bilinear contínua $B(x,y) := S(x)(y)$). Assim, temos a identificação:

$$(X\hat{\otimes}_\pi Y)' = \mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{L}(X, Y'), \tag{3.15}$$

através da qual a ação de um operador linear contínuo $S\colon X \longrightarrow Y'$ como um funcional linear em $X\hat{\otimes}_\pi Y$ é dada por

$$S\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)(y_i).$$

Consideremos agora o operador linear contínuo $R_B \in \mathcal{L}(Y, X')$ associado a $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ e definido por $R_B(y)(x) = B(x,y)$. De modo análogo, temos outra identificação

$$(X\hat{\otimes}_\pi Y)' = \mathcal{L}(Y, X'), \tag{3.16}$$

onde a ação de $T \in \mathcal{L}(Y, X')$ em $X\hat{\otimes}_\pi Y$ é dada por

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(y_i)(x_i).$$

Essas identificações, (3.15) e (3.16), produzem mais duas variações na fórmula de dualidade para a norma projetiva de um elemento de $X\hat{\otimes}_\pi Y$:

$$\begin{aligned}\pi(u) &= \sup\left\{|S(u)| : S \in \mathcal{L}(X, Y'),\ \|S\| \leq 1\right\}\\ &= \sup\left\{|T(u)| : T \in \mathcal{L}(Y, X'),\ \|T\| \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

3.3 A norma injetiva

Nesta seção, iremos apresentar uma nova abordagem para definir uma norma no produto tensorial de espaços normados. Estudaremos a norma injetiva, suas propriedades e veremos dois exemplos de produtos tensoriais injetivos.

Vimos, no Capítulo 2, que os elementos do produto tensorial podem ser vistos como formas bilineares sobre o produto $X^\# \otimes Y^\#$ de duais algébricos. Sendo $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ qualquer representação do tensor $u \in X \otimes Y$, a forma bilinear associada é dada por

$$B_u(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i).$$

Mais ainda, a restrição de B_u ao produto $X' \times Y'$ dos espaços duais é contínua. De fato,

sejam $(\varphi, \psi) \in X' \times Y'$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ uma representação qualquer de $u \in X \otimes Y$. Então

$$\begin{aligned}\|B_u(\varphi, \psi)\| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)\psi(y_i)| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|\,|\psi(y_i)| \leq \|\varphi\|\,\|\psi\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\|\,.\end{aligned}$$

Portanto, temos uma imersão topológica canônica de $X \otimes Y$ em $B(X' \times Y')$. Definimos a *norma injetiva em* $X \otimes Y$ como a norma induzida por essa imersão. Denotaremos a norma injetiva de $u \in X \otimes Y$ por $\varepsilon(u)$, ou por $\varepsilon_{X,Y}(u)$, ou $\varepsilon(u; X \otimes Y)$, se for necessário especificar os espaços componentes no produto tensorial. Assim, temos

$$\varepsilon(u) = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)\right| : \varphi \in B_{X'}, \psi \in B_{Y'}\right\} = \|B_u\|, \tag{3.17}$$

onde $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação qualquer de u. Note que a boa definição e as propriedades da norma injetiva $\varepsilon(\cdot)$ seguem da norma $\|\cdot\|$ em $B(X' \times Y')$.

Como visto na Seção 2.3, também podemos visualizar os elementos do produto tensorial $X \otimes Y$ como operadores de X' em Y ou de Y' em X. Assim, os operadores lineares contínuos $L_u \colon X' \longrightarrow Y$ e $R_u \colon Y' \longrightarrow X$ dados, respectivamente, por $L_u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i$ e $R_u(\psi) = \sum_{i=1}^{n} x_i\psi(y_i)$, associados ao tensor u, têm a mesma norma que a forma bilinear B_u (cálculo imediato). Os mesmos argumentos que utilizamos para mostrar que B_u é contínua, nos mostra que L_u e R_u são contínuos. Isso nos dá mais duas fórmulas para a norma injetiva:

$$\begin{aligned}\varepsilon(u) &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i\right\| : \varphi \in B_{X'}\right\} \\ &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\psi(y_i)\right\| : \psi \in B_{Y'}\right\}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

A menos que exista perigo de ambiguidade, utilizaremos a partir de agora o mesmo símbolo para o tensor u e a forma bilinear B_u, ou qualquer um dos operadores associados a u, como apresentados anteriormente.

Observação 3.18. As bolas unitárias fechadas $B_{X'}$ e $B_{Y'}$ podem ser substituídas por conjuntos normantes em qualquer umas das fórmulas (3.17) e (3.18): um subconjunto A de $B_{X'}$ é considerado um *conjunto normante* se tivermos $\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in A\}$, para todo $x \in X$. Por exemplo, a imagem pelo operador J_X da bola unitária fechada de X é um conjunto de normante no bidual X'' e portanto, se $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes \psi_i \in X' \otimes Y'$,

tem-se

$$\varepsilon(u) = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(y)\right| : x \in B_X, y \in B_Y\right\}, \tag{3.19}$$

com variação semelhante em (3.18).

Denotaremos por $X \otimes_\varepsilon Y$ o produto tensorial $X \otimes Y$ com a norma injetiva. O completamento, denotado por $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$, é chamado o *produto tensorial injetivo de X e Y*.

Diferentemente do produto tensorial projetivo, não temos uma representação geral do produto tensorial completo $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$. No entanto, como $X \otimes_\varepsilon Y$ é um subespaço de $\mathcal{B}(X' \times Y')$, o seu completamento $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ é simplesmente o seu fecho em $\mathcal{B}(X' \times Y')$, ou equivalentemente, em $\mathcal{L}(X', Y)$ ou em $\mathcal{L}(Y', X)$. No caso especial em que um dos espaços componentes é dual, por exemplo X, tem-se que $X'\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ é um subespaço de $\mathcal{L}(X, Y)$. Os operadores de X em Y que surgem dessa maneira, com limites na norma do operador de sequências de operadores de posto finito, são conhecidos com *operadores aproximados*.

Resumimos algumas imersões úteis do produto tensorial injetivo em espaços de formas bilineares ou operadores lineares contínuos, algumas delas considerando espaços duais:

$$\begin{aligned} &X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \subset \mathcal{B}(X' \times Y'), \quad \mathcal{L}(X', Y), \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(Y', X) \\ &X'\hat{\otimes}_\varepsilon Y \subset \mathcal{B}(X \times Y'), \quad \mathcal{L}(Y', X'), \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(X, Y) \\ &X'\hat{\otimes}_\varepsilon Y' \subset \mathcal{B}(X \times Y), \quad \mathcal{L}(X, Y'), \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(Y, X'). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Veremos na próxima proposição algumas das propriedades elementares da norma injetiva.

Proposição 3.19. Sejam X e Y espaços de Banach.

(a) $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$, para todo $u \in X \otimes Y$.

(b) $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$, para todos $x \in Y$, $y \in Y$.

(c) Se $\varphi \in X'$, $\psi \in Y'$, então $\varphi \otimes \psi$ é um funcional linear contínuo em $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ e $\|\varphi \otimes \psi\| = \|\varphi\| \, \|\psi\|$.

Demonstração: (a) Seja $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ uma representação qualquer do tensor $u \in X \otimes Y$. Para todo $\varphi \in X'$, temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(x_i)y_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)| \, \|y_i\| \leq \|\varphi\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\|$$

e portanto $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$.

(b) Seja $x \otimes y \in X \otimes Y$ um tensor elementar. Então

$$\varepsilon(x \otimes y) = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|\varphi(x)y\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x)| \, \|y\| = \|x\| \, \|y\| \, .$$

(c) Sejam $\varphi \in X'$ e $\psi \in Y'$ funcionais lineares. Então existe uma única aplicação linear $\varphi \otimes \psi \colon X \otimes Y \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\varphi \otimes \psi(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Daí,

$$\begin{aligned}
|\varphi \otimes \psi(u)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) \right| \\
&= \|\varphi\| \, \|\psi\| \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi}{\|\varphi\|}(x_i) \frac{\psi}{\|\psi\|}(y_i) \right| \\
&\leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \sup_{\varphi' \in B_{X'},\ \psi' \in B_{Y'}} \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi'(x_i)\psi'(y_i) \right| \\
&= \|\varphi\| \, \|\psi\| \, \varepsilon_{X,Y}(u)
\end{aligned}$$

e segue que $\|\varphi \otimes \psi\| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$ e que $\varphi \otimes \psi$ é contínuo. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| \, \|\psi\| &= \sup_{x \in B_X} |\varphi(x)| \sup_{y \in B_Y} |\psi(y)| \\
&= \sup_{x \in B_X,\ y \in B_Y} |\varphi(x)\psi(y)| \\
&\leq \sup_{\varepsilon(x \otimes y) \leq 1} |\varphi(x)\psi(y)| \\
&= \|\varphi \otimes \psi\|
\end{aligned}$$

e assim $\|\varphi \otimes \psi\| = \|\varphi\| \, \|\psi\|$. ■

Proposição 3.20. O produto tensorial injetivo respeita os subespaços, de modo que, se X é um subespaço fechado de W e Y é um subespaço fechado de Z, então $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ é um subespaço fechado de $W \hat{\otimes}_\varepsilon Z$.

Demonstração: Seja $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ uma representação de $u \in X \otimes Y$. Usando o Teorema de Hanh-Banach, para todo $\varphi \in X'$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i \right\|_Y &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i \right\|_Z = \sup_{\psi \in B_{Z'}} \left| \psi \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i \right) \right| \\
&= \sup_{\psi \in B_{Z'}} \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) \right| = \sup_{\psi \in B_{Z'}} \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i \psi(y_i)) \right| \\
&= \sup_{\psi \in B_{Z'}} \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i \right) \right| .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{X,Y}(u) &= \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i \right\| = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sup_{\psi\in B_{Z'}} \left| \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i \right) \right| \\
&= \sup_{\psi\in B_{Z'}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left| \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i \right) \right| = \sup_{\psi\in B_{Z'}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i \right\|_X \\
&= \sup_{\psi\in B_{Z'}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i \right\|_W = \varepsilon_{W,Z}(u).
\end{aligned}$$

■

Observação 3.21. Geralmente, o produto tensorial injetivo não respeita quociente; se X é um espaço quociente de W, então $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ não é, necessariamente, um espaço quociente de $W\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ (veja, por exemplo, [5, Proposition 4.3 (3)]).

Assim como na norma projetiva, veremos que, na norma injetiva, o produto tensorial entre operadores lineares contínuos também é um operador linear contínuo.

Proposição 3.22. Sejam $S \in \mathcal{L}(X, W)$ e $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ operadores lineares contínuos. Então existe um único operador linear contínuo $S \otimes_\varepsilon T \colon X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \longrightarrow W\hat{\otimes}_\varepsilon Z$ tal que $(S \otimes_\varepsilon T)(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$, para todo $x \in X$, $y \in Y$. Além disso, $\|S \otimes_\varepsilon T\| = \|S\| \, \|T\|$.

Demonstração: Sejam $S \colon X \longrightarrow W$ e $T \colon Y \longrightarrow Z$ operadores lineares contínuos. Então, já sabemos, existe um único operador linear $S \otimes T \colon X \otimes Y \longrightarrow W \otimes Z$ tal que $(S\otimes T)(x\otimes y) = S(x)\otimes T(y)$, para todo $x \in X$, $y \in Y$. Se $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação do tensor $u \in X \otimes Y$, então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{W,Z}(S \otimes T(u)) &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(S(x_i)) \psi(T(y_i)) \right| : \varphi \in B_{W'},\ \psi \in B_{Z'} \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} S'(\varphi)(x_i) T'(\psi)(y_i) \right| : \varphi \in B_{W'},\ \psi \in B_{Z'} \right\} \\
&= \|S'\| \, \|T'\| \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{S'(\varphi)}{\|S'\|}(x_i) \frac{T'(\psi)}{\|T'\|}(y_i) \right| : \varphi \in B_{W'},\ \psi \in B_{Z'} \right\} \\
&\leq \|S'\| \, \|T'\| \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \sigma(y_i) \right| : \gamma \in B_{X'},\ \sigma \in B_{Y'} \right\} \\
&= \|S'\| \, \|T'\| \, \varepsilon_{X,Y}(u) = \|S\| \, \|T\| \, \varepsilon_{X,Y}(u).
\end{aligned}$$

Portanto, $S \otimes T$ é contínuo para a norma injetiva e $\|S \otimes T\| \leq \|S\| \, \|T\|$. Por outro lado, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $x \in B_X$ e $y \in B_Y$ tais que $\|S(x)\| \geq (1 - \varepsilon) \, \|S\|$ e

$\|T(y)\| \geq (1-\varepsilon)\|T\|$. Então $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\|\,\|y\| \leq 1$ e

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S \otimes T(x \otimes y)) &= \varepsilon(S(x) \otimes T(y)) \\
&= \|S(x)\|\,\|T(y)\| \\
&\geq (1-\varepsilon)\|S\|\,(1-\varepsilon)\|T\| \\
&= (1-\varepsilon)^2\|S\|\,\|T\|\,.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\|S \otimes T\| \geq \|S\|\,\|T\|$ e portanto $\|S \otimes T\| = \|S\|\,\|T\|$. Agora, o operador $S \otimes T$ tem uma única extensão, que definimos por $S \otimes_\varepsilon T$, com a mesma norma ao produto tensorial completo, o que encerra a demonstração. ■

A seguir, veremos dois exemplos do produto tensorial injetivo: o primeiro em relação ao espaço $c_0(X)$ e o segundo em relação ao espaço $\ell_1^u(X)$.

Exemplo 3.23. *O produto tensorial injetivo $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon X$.*

Neste exemplo, vamos mostrar que o produto tensorial injetivo $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon X$ pode ser identificado com o espaço (de Banach) $c_0(X)$, das sequências em X que convergem para zero, munido da norma $\|(x_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|$.

Considere a aplicação canônica $J\colon c_0 \otimes X \longrightarrow c_0(X)$ que leva o tensor $u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i$ na sequência de valor vetorial em X, $J(u) = (\sum_{i=1}^n a_{ik}x_i)_{k=1}^\infty$, onde $a_i = (a_{ik})_{k=1}^\infty \in c_0$. Mostraremos que $J(u)$ é um elemento de $c_0(X)$. De fato,

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_{ik}x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_{ik}x_i\| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|\,\|x_i\| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_{ik}| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \longrightarrow 0,$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Além disso, não é difícil verificar que a aplicação J é linear. Agora, vamos calcular a norma de $J(u)$. Usando a dualidade entre c_0 e ℓ_1 e o Teorema de Hanh-Banach, temos

$$\begin{aligned}
\|J(u)\|_\infty &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^n a_{ik}x_i\right\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left|\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{ik}x_i\right)\right| \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left|\sum_{i=1}^n a_{ik}\varphi(x_i)\right| = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sum_{i=1}^n a_{ik}\varphi(x_i)\right| \\
&= \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sup_{b=(b_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_1}} \left|\sum_{k=1}^\infty b_k \sum_{i=1}^n a_{ik}\varphi(x_i)\right| \\
&= \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sup_{b\in B_{\ell_1}} \left|\sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^n b_k a_{ik}\varphi(x_i)\right| \\
&= \sup_{b\in B_{\ell_1}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left|\sum_{i=1}^n b(a_i)\varphi(x_i)\right| = \varepsilon(u),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade estamos usando (3.17). Segue que J é uma isometria de $c_0 \otimes_\varepsilon X$ em $c_0(X)$ e, portanto, contínua. Assim, J se estende a uma isometria de $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon X$ em $c_0(X)$. Como $J(c_0 \otimes X)$ é denso em $c_0(X)$ (todo $(b_j)_{j=1}^\infty \in c_0(X)$ é aproximado pela imagem por J da sequência $u_k = \sum_{j=1}^k e_j \otimes b_j$), segue que J é um isomorfismo isométrico.

Exemplo 3.24. *O produto tensorial injetivo $\ell_1 \hat{\otimes}_\varepsilon X$.*

Mostraremos nesse exemplo que $\ell_1^u(X)$ é isometricamente isomorfo ao produto tensorial injetivo $\ell_1 \hat{\otimes}_\varepsilon X$. Iniciaremos com a aplicação canônica $J\colon \ell_1 \otimes X \longrightarrow \ell_1^u(X)$, que aplica o tensor $u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i$, com $a_i = (a_{ik})_{k=1}^\infty$, na sequência $J(u) = (\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i)_{k=1}^\infty$. Note que a boa definição e a linearidade de J parte do Exemplo 3.14. Calculando a norma de $J(u)$, temos

$$\begin{aligned}
\|J(u)\|_{1,w} &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{k=1}^\infty \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{k=1}^\infty \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} \varphi(x_i) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_{b=(b_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}} \left| \sum_{k=1}^\infty b_k \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \varphi(x_i) \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_{b \in B_{\ell_\infty}} \left| \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^n b_k a_{ik} \varphi(x_i) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_{b \in B_{\ell_\infty}} \left| \sum_{i=1}^n b(a_i) \varphi(x_i) \right| = \varepsilon(u).
\end{aligned}$$

Portanto, J é uma isometria e se estende isometricamente a uma aplicação entre $\ell_1 \hat{\otimes}_\varepsilon X$ e $\ell_1^u(X)$. Como as sequências finitas são densas em $\ell_1^u(X)$ e como $J(\ell_1 \otimes X)$ contém todas essas sequências, segue que J é um isomorfismo isométrico.

Capítulo 4

Aplicações

O propósito deste capítulo é apresentar duas aplicações do produto tensorial entre espaços de Banach. A primeira aplicação tem relação com a teoria de ideais e multi-ideais de operadores, mais especificamente com o método de composição que gera multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares. A segunda aplicação apresenta uma caracterização dos operadores absolutamente somantes a partir da continuidade de um operador definido entre espaços produto tensorial.

As principais referências à teoria usada no capítulo estão distribuídas, por conveniência, ao longo do corpo do texto. Gostaríamos de deixar claro que, de acordo com nossos objetivos, não faremos um estudo detalhado da teoria de ideais e nem sobre operadores absolutamente somantes. Também não apresentaremos exemplos ou representantes dos objetos envolvidos. Apenas vamos usar a teoria como background, tomando por foco principal, de fato, as nossas aplicações do produto tensorial a essa teoria.

4.1 Multi-ideais de composição

Inicialmente, apresentaremos algumas definições da teoria dos ideais de operadores lineares, da teoria de multi-ideais de operadores e também o método de composição que gera multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares. Nesta seção, utilizamos como principais referências os trabalhos [1], [5], [14] e [20].

Definição 4.1. Um *ideal* de operadores $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos espaços de Banach E e F, suas componentes $\mathcal{I}(E,F) := \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{I}(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$ que contém os operadores lineares de posto finito.

(ii) A propriedade de ideal: se $T_1 \in \mathcal{L}(F_0, F)$, $T_2 \in \mathcal{I}(E_0, F_0)$ e $T_3 \in \mathcal{L}(E, E_0)$, então a composição $T_1 \circ T_2 \circ T_3$ pertence a $\mathcal{I}(E, F)$.

Embora já tenhamos trabalhado com aplicações bilineares, isto é 2-lineares, vamos definir formalmente o conceito de aplicação n-linear.

Definição 4.2. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais sobre o corpo dos escalares $\mathbb{K}$ com $n \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é dita *n-linear* ou *multilinear* se é linear em cada uma de suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n),$$

para todos x_i, $x_i' \in E_i$, com $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Os resultados que envolvem as aplicações bilineares que estudamos até o presente momento (continuidade, caracterizações, etc) são evidentemente válidos, com as esperadas adaptações, para as aplicações multilineares em geral, sejam eles resultados de Análise Funcional ou relativos ao produto tensorial de espaços vetoriais. Dois exemplos do que estamos falando:

• Uma aplicação n-linear $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é contínua se, e somente se, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\| \leq c \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|,$$

para todos $x_i \in E_i,\ i = 1, \ldots, n$.

• Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços vetoriais. Definimos o produto tensorial $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, de forma semelhante ao produto tensorial de dois espaços, como um subespaço de funcionais lineares sobre $B(E_1 \times \cdots \times E_n)$ da seguinte maneira: dados $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$, denotaremos por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ o funcional dado pela avaliação de uma forma n-linear A no ponto $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, isto é,

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \colon B(E_1 \times \cdots \times E_n) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(A) = A(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Antes de definirmos multi-ideais de operadores, precisamos definir a classe dos operadores de tipo finito.

Definição 4.3. Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Dizemos que A é de *tipo finito* se existem $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_j^i \in E_i'$ e $b_j \in F$, com $j = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^1(x_1) \cdots \varphi_j^n(x_n) b_j,$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

O subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ formados pelos operadores de tipo finito será denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Definição 4.4. Um *ideal de aplicações multilineares* ou *multi-ideal* é uma subclasse $\mathcal{M}$ da classe de todas as aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e F, suas componentes $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$ satisfazem:

(i) $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ que contém as aplicações n-lineares contínuas de tipo finito.

(ii) A propriedade de ideal: se $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $T_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ com $j = 1, \ldots, n$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ A \circ (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{M}(G_1, \ldots, G_n; H)$.

A definição que apresentaremos a seguir trata de um procedimento, chamado ideais de composição, para gerar multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares.

Definição 4.5. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Uma aplicação n-linear contínua $A \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ pertence a $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, nesse caso escrevemos $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$, se existe um espaço de Banach G, uma aplicação n-linear contínua $B \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_n; G)$ e um operador linear $T \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = T \circ B$.

De fato, observando-se o conjunto $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, conclui-se que o procedimento acima gera um multi-ideal. É o que afirma a proposição a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [20, Proposição 4.24].

Proposição 4.6. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares. Então $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal.

Agora apresentamos, de fato, a nossa aplicação. Dada uma aplicação n-linear contínua A, nem sempre é uma tarefa fácil verificar pela definição se ela pertence ou não ao multi-ideal $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$. Essa tarefa envolve apresentar uma fatoração para A, o que pode ser penoso de se obter. O próximo resultado mostra um método capaz de verificar de forma indireta, e geralmente mais simples, se uma aplicação multilinear A pertence ou não ao multi-ideal $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, fazendo o uso do produto tensorial projetivo.

Proposição 4.7. ([1, Proposition 3.2 (a)]). Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares, $A \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ uma aplicação n-linear contínua e A_L a linearização de A com respeito ao produto tensorial projetivo. São equivalentes:

(a) $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

(b) $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Por hipótese, temos que $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então existem um espaço de Banach G, uma aplicação $B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; G)$ e um operador $T \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = T \circ B$. Considerando a linearização de B, denotada por B_L, note que, para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$, temos

$$\begin{aligned}(T \circ B_L)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= T(B_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) \\ &= T(B(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= A(x_1, \ldots, x_n) \\ &= A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).\end{aligned}$$

Como $(T \circ B_L)$ e A_L são lineares, então $(T \circ B_L)(u) = A_L(u)$ para todo $u \in E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$. Levando em consideração que $(T \circ B_L)$ e A_L são operadores lineares contínuos, da unicidade da extensão ao fecho, segue que estes operadores coincidem também em $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n$. Como $T \in \mathcal{I}$, a propriedade de ideal nos dá $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $\theta \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n$ a aplicação n-linear (contínua) universal associada ao produto tensorial. Temos que $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$ por hipótese e que $A = A_L \circ \theta$. Portanto, $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. ■

4.2 Operadores absolutamente p-somantes

O objetivo desta seção é apresentar uma caracterização, utilizando produtos tensoriais, para os operadores absolutamente p-somantes. Inicialmente, faremos uma breve abordagem de conceitos e resultados necessários à demonstração do nosso resultado principal. Alguns dos resultados preliminares serão apenas enunciados e para sua demonstração e aprofundamento indicaremos as devidas referências. Os livros [5] e [6] foram as principais bibliografias utilizadas na construção desse texto.

Comecemos apresentando a classe dos operadores absolutamente somantes e alguns resultados relacionados que serão necessários ao nosso intento.

Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é um *operador absolutamente p-somante* (para $1 \leq p \leq \infty$) se existe uma constante $c \geq 0$ tal que, para toda sequência finita $(x_j)_{j=1}^n$ em E, tem-se

$$\left\|(T(x_j))_{j=1}^n\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{p,w} = c \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1)$$

Denotaremos por $\Pi_p(E, F)$ a classe de todos os operadores absolutamente p-somantes de

E em F e definiremos $\pi_p(T)$ pelo ínfimo das constantes c que satisfazem a desigualdade (4.1). Em símbolos, temos

$$\pi_p(T) = \inf\{c \geq 0\colon (4.1) \text{ é válida, para todos } x_1, \ldots, x_n \in E \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

Não é difícil verificar que $\pi_p(\cdot)$ define uma norma para $T \in \Pi_p(E, F)$ e que a desigualdade (4.1) da definição dos operadores absolutamente p-somantes também é válida para sequências infinitas: T é um operador absolutamente p-somante se existe uma constante $c \geq 0$ tal que, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, se $T\colon E \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo entre os espaços de Banach E e F, a correspondência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \longmapsto (T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ induz os operadores lineares contínuos $T\colon \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p^w(F)$ e $T\colon \ell_p(E) \longrightarrow \ell_p(F)$. Na proposição a seguir, veremos que no caso dos operadores absolutamente somantes essa correspondência também produz um operador linear contínuo de $\ell_p^w(E)$ em $\ell_p(E)$. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [6, Proposition 2.1].

Proposição 4.8. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador linear contínuo. T é um operador absolutamente p-somante se, e somente se, o operador induzido $\hat{T} : \ell_p^w(E) \to \ell_p(F)$ está bem definido, é linear e contínuo.

Vale salientar que o fato de $\ell_p^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$, além de sua definição, torna possível uma outra caracterização aos operadores absolutamente p-somantes: T é um operador absolutamente p-somante se, e somente se, o operador induzido $\hat{T} : \ell_p^u(E) \to \ell_p(F)$ está bem definido, é linear e contínuo (ver [5, Chapter I, Section 11.1]).

Como visto acima, existem diversos tipos de caracterizações para operadores absolutamente somantes, cada uma delas, certamente, útil em determinados contextos e aplicações. Em nossa aplicação, veremos que os operadores absolutamente p-somantes também podem ser caracterizados pela continuidade de um operador definido sobre espaços produto tensorial.

Antes disso, precisamos apresentar uma nova norma conveniente ao produto tensorial $\ell_p \otimes E$, sendo E um espaço de Banach, e estudar uma identificação de $\ell_p^u(E)$ com o espaço $\ell_p \hat{\otimes}_\varepsilon E$.

Seja E um espaço de Banach e considere a aplicação $J\colon \ell_p \otimes E \longrightarrow \ell_p(E)$ dada por $J\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^n (a_{ik} x_i)_{k=1}^{\infty}$, onde $a_i = (a_{ik})_{k=1}^{\infty}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. De modo análogo ao Exemplo 3.14, prova-se que a aplicação J está bem definida, é linear e injetiva.

Assim, a definição

$$\Delta_p(u) = \Delta_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\right) := \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i\right)_{k=1}^{\infty}\right\|_p, \tag{4.2}$$

para todo $1 \leq p < \infty$ e todo $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \ell_p \otimes E$, sugere uma norma para o produto tensorial $\ell_p \otimes E$. Observe que (4.2) satisfaz as condições de norma, pois coincide com a norma $\|\cdot\|_p$ em $\ell_p(E)$. Note também que o último termo da expressão (4.2) pode ser reescrita como $\|\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}x_i)_{k=1}^{\infty}\|_p$. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}x_i)_{k=1}^{\infty} &= \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_i, a_{i2}x_i, \ldots) \\
&= (a_{11}x_1, a_{12}x_1, \ldots) + (a_{21}x_2, a_{22}x_2, \ldots) + \ldots + (a_{n1}x_n, a_{n2}x_n, \ldots) \\
&= ((a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n), (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n), \ldots) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i\right)_{k=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Denotaremos por $\ell_p \otimes_{\Delta_p} E$ o produto tensorial $\ell_p \otimes E$ munido da norma $\Delta_p(\cdot)$ e o seu completamento por $\ell_p \hat{\otimes}_{\Delta_p} E$.

Proposição 4.9. Seja E um espaço de Banach. Então

(a) $\Delta_1(u) = \pi(u)$ para todo $u \in \ell_1 \otimes E$.

(b) $\varepsilon(u) \leq \Delta_p(u) \leq \pi(u)$ para todo $u \in \ell_p \otimes E$.

Demonstração: O item (a) segue do Exemplo 3.14.
(b) Seja $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \ell_p \otimes E$. Pela definição da norma $\Delta_p(\cdot)$ temos

$$\begin{aligned}
\Delta_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\right) &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}x_i)_{k=1}^{\infty}\right\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} \|(a_{ik}x_i)_{k=1}^{\infty}\|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{ik}x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^p \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|(a_{ik})_{k=1}^{\infty}\|_p .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Como (4.3) é válida para qualquer representação de $u \in \ell_p \otimes E$, então $\Delta_p(\cdot) \leq \pi(\cdot)$.

Agora, tome $b = (b_k)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p'}}$ e $\varphi \in B_{E'}$. Daí, dado o tensor $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \ell_p \otimes E$,

temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} b((a_{ik})_{k=1}^{\infty})\varphi(x_i)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} b_k a_{ik}\varphi(x_i)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} b_k a_{ik}\varphi(x_i)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} b_k a_{ik}\varphi(x_i)\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} b_k a_{ik} x_i\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi\|\left\|\sum_{i=1}^{n} b_k a_{ik} x_i\right\| = \|\varphi\|\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} b_k a_{ik} x_i\right\| \qquad (4.4) \\
&= \|\varphi\|\sum_{k=1}^{\infty}\left\|b_k\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i\right)\right\| \\
&\leq \|\varphi\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\varphi\|\,\|(b_k)_{k=1}^{\infty}\|_{p'}\left\|\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}x_i)_{k=1}^{\infty}\right\|_{p}.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em (4.4) com $b \in B_{\ell_{p'}}$ e $\varphi \in B_{E'}$, segue que

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\otimes x_i\right) = \sup_{b\in B_{\ell_{p'}},\ \varphi\in B_{E'}}\left|\sum_{i=1}^{n} b((a_{ik})_{k=1}^{\infty})\varphi(x_i)\right| \leq \Delta_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\otimes x_i\right).$$

Portanto, $\varepsilon(u) \leq \Delta_p(u) \leq \pi(u)$ para todo $u \in \ell_p \otimes E$. ■

No Capítulo 3, vimos que o espaço $\ell_1^u(E)$ é isometricamente isomorfo ao produto tensorial injetivo $\ell_1\hat{\otimes}_\varepsilon E$. Agora, mostraremos que esse isomorfismo isométrico pode ser generalizado para $1 < p < \infty$. Para a demonstração desse resultado precisaremos de algumas caracterizações do dual de um espaço de Banach com a propriedade de aproximação. Primeiro, vejamos a definição de um espaço de Banach com a propriedade de aproximação:

Definição 4.10. Um espaço de Banach E tem a *propriedade de aproximação* se para todo compacto $K \subset E$ e $\varepsilon > 0$, existe um operador de posto finito $T\colon E \longrightarrow E$ tal que $\|x - T(x)\| \leq \varepsilon$, para todo $x \in K$.

Definição 4.11. Um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é chamado *aproximável* se existem $T_1, T_2, \ldots \in \mathcal{F}(E,F)$ com $\lim_n \|T - T_n\| = 0$.

Segue nas duas proposições seguintes, caracterizações de um espaço cujo dual possui propriedade de aproximação. As demonstrações, que fogem ao escopo de nosso trabalho, podem ser vistas, respectivamente, em [17, Proposition 4.12 (b)] e em [5, Proposition 5.3 (2)].

Proposição 4.12. Seja E um espaços de Banach. O dual E' de E tem a propriedade de aproximação se, e somente se, para todo espaço de Banach F, todo operador compacto de E em F é aproximável.

Proposição 4.13. Sejam E, F espaços de Banach. O dual E' de E tem a propriedade de aproximação se, e somente se, $E'\hat{\otimes}_\varepsilon F = \mathcal{K}(E,F)$, para todo F.

Agora, seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ e considere o seguinte operador

$$\begin{aligned} T_x \colon E' &\longrightarrow \ell_p \\ \varphi &\longmapsto T_x(\varphi) := (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Note que a boa definição de T_x segue da definição de $\ell_p^w(E)$. Além disso, não é difícil provar que T_x é linear e, aplicando o Teorema do Gráfico Fechado, que é contínuo. Daí, temos

$$\|T_x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\ell_p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{p,w}.$$

Também são fatos que o operador T_x pode ser identificado como o tensor $\sum_{n=1}^\infty e_n \otimes x_n$, onde $e_n \in \ell_p$ (ver [5, Chapter I, 8.1]), e segue que, na verdade, $\ell_p^w(E) \overset{1}{=} \mathcal{L}(\ell_{p^*}; E)$.

Proposição 4.14. Seja E um espaço de Banach. Então a relação $\mathcal{K}(\ell_{p^*}, E) = \ell_p^u(E) = \ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E$ ocorre isometricamente.

Demonstração: Considere o operador $S := \sum_{n=1}^\infty e_n \otimes x_n$. Como $\ell_{p'}$ tem a propriedade de aproximação, pela Proposição 4.12, S é aproximável. Com isso, a relação entre S e a norma $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w}$ nos diz que S é compacto se $\left\|(x_j)_{j=N}^\infty\right\|_{p,w} \longrightarrow 0$, quando $N \to \infty$, e então $\ell_p^u(E) \hookrightarrow \mathcal{K}(\ell_{p^*}, E)$. Além disso, pela Proposição 4.13, temos que $\mathcal{K}(\ell_{p^*}, E) = \ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E$. Portanto,

$$\ell_p \otimes_\varepsilon E \hookrightarrow \ell_p^u(E) \hookrightarrow \mathcal{K}(\ell_{p^*}, E) = \ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E,$$

onde a primeira inclusão segue do que acabamos de comentar antes da proposição e do fato de S ser aproximável. Como $\ell_p^u(E)$ e $\mathcal{K}(\ell_{p^*}, E)$ são espaços de Banach e $\ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E$ é o completamento de $\ell_p \otimes_\varepsilon E$ segue que $\mathcal{K}(\ell_{p^*}, E) = \ell_p^u(E) = \ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E$. ■

A proposição anterior estabelece uma nova caracterização para a norma $\varepsilon(\cdot)$ no produto tensorial injetivo $\ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E$. Como $\ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E \overset{1}{=} \ell_p^u(E)$, para $u = \sum_{j=1}^n a_j \otimes x_j \in \ell_p\hat{\otimes}_\varepsilon E$, temos

$$\varepsilon(u) := \varepsilon\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\right) := \left\|\sum_{i=1}^n (a_{ik}x_i)_{k=1}^\infty\right\|_{p,w}. \tag{4.5}$$

Agora, estamos em condições de apresentar nossa última aplicação:

Teorema 4.15. *Sejam E e F espaços de Banach. Para cada operador linear contínuo $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $1 \leq p < \infty$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $T \in \Pi_p(E,F)$.

(b) $\mathrm{id}_{\ell_p} \otimes T \colon \ell_p \otimes_\varepsilon E \longrightarrow \ell_p \otimes_{\Delta_p} F$ *é contínuo.*

(c) *Existe um $c \geq 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\left\| \mathrm{id}_{\ell_p} \otimes T \colon \ell_p^n \otimes_\varepsilon E \longrightarrow \ell_p^n \otimes_{\Delta_p} F \right\| \leq c.$$

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Sejam id_{ℓ_p} o operador identidade em ℓ_p e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Já sabemos que o operador produto tensorial $\mathrm{id}_{\ell_p} \otimes T \colon \ell_p \otimes E \longrightarrow \ell_p \otimes F$, dado por $\mathrm{id}_{\ell_p} \otimes T(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes T(x_i)$, para todos $a_i \in \ell_p$ e $x_i \in E$, está bem definido e é linear. Como, por hipótese, $T \in \Pi_p(E,F)$, então existe um $c \geq 0$ tal que, para toda sequência finita $(x_j)_{j=1}^n$ em E, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.6}$$

Usando as identificações (4.2) e (4.5) das normas $\Delta_p(\cdot)$ e $\varepsilon(\cdot)$, respectivamente, de (4.6) temos

$$\Delta_p \left(\sum_{j=1}^n e_j \otimes T(x_j) \right) \leq c \cdot \varepsilon \left(\sum_{j=1}^n e_j \otimes x_j \right), \tag{4.7}$$

para todo $\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i \in \ell_p \otimes_\varepsilon E$. Portanto, $\mathrm{id}_{\ell_p} \otimes T$ é contínuo.
(b) $\Rightarrow$ (c) Segue da desigualdade (4.7).
(c) $\Rightarrow$ (a) Seja $u = \sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i \in \ell_p^n \otimes_\varepsilon E - \{0\}$ e $v = \dfrac{\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i}{\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i\right)} \in B_{\ell_p^n \otimes_\varepsilon E}$. Temos

$$\Delta_p(\mathrm{id}_{\ell_p} \otimes T(v)) = \Delta_p \left(\mathrm{id}_{\ell_p} \otimes T \left(\frac{\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i}{\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i\right)} \right) \right) = \frac{\Delta_p\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes T(x_i)\right)}{\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i\right)} \leq c.$$

Daí, $\Delta_p\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes T(x_i)\right) \leq c \cdot \varepsilon\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i\right)$, e portanto, pelas identificações (4.2) e (4.5) temos que $T \in \Pi_p(E,F)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, **43** (2007), 1139-1155.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[3] G. Botelho e P. Rueda, *The Schur property on projective and injective tensor products*, Proceedings of the American Mathematical Society, **137** (2009), 219-225.

[4] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[5] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, Vol. 176, Elsevier, 1993.

[6] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos e V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2011.

[8] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo, **8** (1956), 1-79.

[9] D. Hinrichsen e A. J. Pritchard, *Mathematical Systems Theory I: modelling, state space analysis, stability and robustness*, vol. 48 of Text in Applied Mathematics, Berlin, 2005.

[10] K. Hoffman e R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd ed., New Jersey, 1971.

[11] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[12] F. J. Murray e J. von Neumann, *On rings of operators*, Annals of Math, **37** (1936), 116-229.

[13] D. F. Nogueira, *Espaços de Sequências Vetoriais e Ideais de Operadores*, Dissertação de mestrado, UFU (2016).

[14] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[15] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Teubner Texte Math, Leipzig, **62** (1983), 185-199.

[16] G. Pisier, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, Providence, 1986.

[17] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag, 2002.

[18] R. Schatten, *On the direct product of Banach spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, **53** (1943), 195-217.

[19] R. Schatten, *On reflexive norms for the direct product*, Transactions of the American Mathematical Society, **54** (1943), 498-506.

[20] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*, Dissertação de mestrado, UFU (2010).