Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Curvas de Peano, Lineabilidade, Espaçabilidade e Algebrabilidade

Sérgio Romero Vital dos Santos Filho

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Curvas de Peano, Lineabilidade, Espaçabilidade e Algebrabilidade

por

Sérgio Roméro Vital dos Santos Filho

sob a orientação do

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F481c Filho, Sérgio Roméro Vital Dos Santos.
Curvas de Peano, Lineabilidade, Algebrabilidade e Espaçabilidade / Sérgio Roméro Vital Dos Santos Filho. - João Pessoa, 2018.
83 f.

Orientação: Nacib André Gurgel e Albuquerque.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/Ciências exatas.

1. Lineabilidade. 2. Espaçabilidade. 3. Algebrabilidade. 4. Curvas de Peano. I. Albuquerque, Nacib André Gurgel e. II. Título.

UFPB/CCEN

Curvas de Peano, Lineabilidade, Espaçabilidade e Algebrabilidade

por

Sérgio Roméro Vital dos Santos Filho [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovado em 23 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque - UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Vladimir Pestov - University of Ottawa
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo – UEPB
(Examinador Externo)

[1] O autor foi bolsista do CAPES/CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

Dedicatória

Dedico esta dissertação,
Aos meus pais, irmã, avós e tios por tudo que representam na minha vida. A minha esposa Andressa e meus filhos Beatriz e Benjamim por serem o que me motiva a sempre continuar. A Toda minha família, desculpa pelas ausências nos momentos festivos. A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para que eu concluise esta etapa tão bonita da minha vida.

Agradecimentos

Em meio a tantas pessoas a quem quero agradecer por esta conquista, prefiro iniciar agradecendo a Deus, que deve ser o grande responsável não apenas por eu ter conseguido realizar este sonho, mas, principalmente, por eu ter tido coragem de ir buscá-lo, trilhando um caminho novo, desconhecido e desafiador, e que só tem me dado alegrias e realizações.

A toda minha família pelo amor, carinho e incentivo nas horas mais difíceis. Ao meu pai Sérgio, por sua inteligência, por sempre me inspirar e sempre estar ao meu lado nos momentos mais importantes da minha vida. A minha mãe Josefa, por ser esse exemplo de força e perseverança em que me espelho, que nunca me deixou desistir e sempre me dá apoio em todos os sentidos. A minha irmã Susana, por ser tão especial na minha vida, suas palavras sinceras e verdadeiras sempre são muito importantes para mim.

Ao meu irmão João Paulo, que sempre me incentiva a continuar nessa trajetória, suas palavras de incentivo e de orgulho por mim sempre me motivam e inspiram. A minha esposa Andressa e meus filhos Beatriz e Benjamim por trazerem luz e alegria à minha vida. Por contribuir para que eu alcançasse esse objetivo, por suportarem as ausências e as chatices e por estarem ao meu lado nessa conquista. O meu amor e minha gratidão. Vocês são eternos em meu coração.

Aos professores Drº. Flank David Morais Bezerra, Drª. Miriam da Silva Pereira, Drº. Adriano Alves de Medeiros, Drª. Evelina Shamarova, Drº. Ricardo Burity Croccia Macedo, por seus ensinamentos e palavras de incentivo. Em especial ao professor Drº. Nacib André Gurgel e Albuquerque por me orientar nesse trabalho, por sua paciência e palavras de incentivo nos momentos em que estive em dificuldade, por sua boa vontade e gentileza, por sua dedicação e coragem em aceitar o desafio de me orientar, o senhor foi extremamente importante para a realização desse trabalho. Obrigado.

Aos meus colegas de turma Adelson, Bosoerg, César, Douglas, Fagner, Rubens e Rafael, nossos momentos de estudos em grupo, nossos cafezinhos entre as aulas e nossas refeições em grupo serão sempre lembrados por mim com muito carinho. Obrigado pela ajuda nas resoluções das listas de exercícios e para o estudo para as avaliações. Gostaria de agradecer também ao amigo Renato por sempre me ajudar nos momentos difíceis, por nossos cafezinhos e por suas dicas, ensinamentos e seus conselhos valiosíssimos.

Gostaria de agradecer a todos que de alguma forma contribuíram e estiveram presentes nesta jornada tão difícil, porém ao mesmo tempo prazerosa. Por fim, gostaria de agradecer a CAPES/CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, voltamos nossas atenções para o espaço das sobrejeções contíuas entre espaços euclidianos. Construímos uma curva de Peano, também conhecida como curva de preenchimento do espaço, e provamos um resultado de lineabilidade ótimo do ponto de vista de dimensão. Em seguida, provamos algumas propriedades sobre a ordem de crescimento de funções inteiras e lidamos com o problema de algebrabilidade, provando que o espaço das sobrejeções contínuas com valores complexos é fortemente maximal algebrável. Posteriormente, provamos a espaçabilidade do espaço das curvas de Peano entre espaços euclidianos e finalizamos nosso trabalho trazendo algumas generalizações dos resultados apresentados para espaços vetoriais topológicos que são imagem contínua da reta real.

Palavras-chave: lineabilidade, espaçabilidade, algebrabilidade, curvas de Peano.

Abstract

In this dissertation, we turn our attention to the space of the continuous surjections between euclidean spaces. We constructed a Peano curve, also known as a space fill curve, and proved a result of optimal lineability from the point of view of dimension. Then we prove some properties on the order of growth of whole functions and we deal with the problem of algebrability, proving that the space of continuous surjections with complex values is strongly maximal algebrable. Subsequently, we prove the spaceability of the Peano curves between euclidean spaces andwe finalize our work by bringing some generalizations of the presented results to topological vector spaces that are continuous image of the real line.

Keywords: lineability, spaceability, algebrability, Peano curves.

Sumário

Introdução **2**

1 Lineabilidade das curvas de Peano **10**

1.1 Construindo uma curva de Peano em espaços Euclideanos 10

1.2 Lineabilidade do conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 13

1.3 Lineabilidade de mapas injetivos 17

2 Algebrabilidade das curvas de Peano **20**

2.1 Resultados relacionados a ordem de crescimento de funções inteiras . . 20

2.2 Algebrabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ 25

3 Espaçabilidade das curvas de Peano **29**

3.1 Critérios de Espaçabilidade 29

3.2 Espaçabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 35

4 Curvas de Peano em Espaços Vetoriais Topológicos **40**

4.1 Motivação 40

4.2 Curvas σ-Peano 41

A Topologia Geral **47**

B Números Cardinais **61**

C Análise Complexa **67**

Referências **73**

Introdução

Ao longo da história da matemática surgiram objetos que quebraram algumas noções intuitivas, chegando a ser denominados (infelizmente) de "patológicos" ou "exóticos", como por exemplo o número $\sqrt{2}$ e sua irracionalidade ou o fato de existirem "mais" números transcendentes do que números algébricos. Com o cálculo diferencial e integral não foi diferente, uma vez que o surgimento do cálculo infinitesimal trouxe várias novas questões e indagações que foram investigações por parte da comunidade matemática. Muitas eram questões conceituais, como pode ser visto em [25], e outras eram questões relacionadas com a existência de funções com certas propriedades.

Uma das indagações naturais era a seguinte: *existe alguma função que não é diferenciável em nenhum ponto?* Sabemos que a resposta é positiva: a *função de Dirichlet*, definida por $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$, ou $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, é um exemplo de função que não é diferenciável em nenhum ponto, como também descontínua em todo ponto. A existência de uma função com essa propriedade motiva a próxima pergunta: *existe alguma função contínua que não seja diferenciável em infinitos pontos?* Naturalmente, a resposta também é positiva: basta estender por periodicidade a função $f(x) = |x|$, com $x \in [-1, 1]$, para toda a reta. Seguindo adiante nessa linha de raciocínio, é esperado questionar se o pior cenário de "não diferenciabilidade" pode ocorrer:

> *Existe uma função contínua que não seja diferenciável em todos os pontos da reta?*

Esse tipo de problema motivou o nascimento de uma moderna, recente e frutífera área de pesquisa em análise funcional: *lineabilidade*. Este trabalho enquadra-se nesse tema de pesquisa.

É fácil percebermos que continuidade não implica diferenciabilidade, que existem funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto, e que existem funções contínuas que não são diferenciáveis em infinitos pontos, mas nossa intuição pode falhar quando nos perguntamos se existe alguma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto de seu domínio. De fato, até o início do século XIX, baseados em suas noções intuitivas, muitos matemáticos acreditavam que as funções contínuas tinham derivadas num número "significativo" de pontos e alguns tentaram dar justificativas teóricas deste

fato, como por exemplo A. M Àmpere (1775-1836) em um trabalho publicado em 1806 (ver [9]).

Porém, até o início do século XIX, os principais conceitos do cálculo ainda não tinham uma fundamentação lógica adequada, a própria definição de número real ainda não estava estabelecida. Assim, o trabalho de Àmpere (1775-1836) falhava em alguns pontos, dadas as limitações das definições de seu tempo. Daí, em 1872, K. Weierstrass (1815-1897) publicou um trabalho que "chocou" a comunidade matemática, pois continha um objeto "exótico" que provava que a conjectura, que funções contínuas possuem derivadas num número significativo de pontos, era falsa.

Mais precisamente, ele construiu um exemplo de uma função contínua que não era diferenciável em nenhum ponto. A função em questão, que mais tarde viria a ser conhecida como *monstro de Weierstrass*, foi definida por

$$w(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k cos(b^k \pi x)$$

onde $0 < a < 1$ e b é um número ímpar tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. O gráfico da função de Weierstrass pode ser visto na figura e cujo gráfico pode ser visto na figura 1 abaixo, disponível em [15].

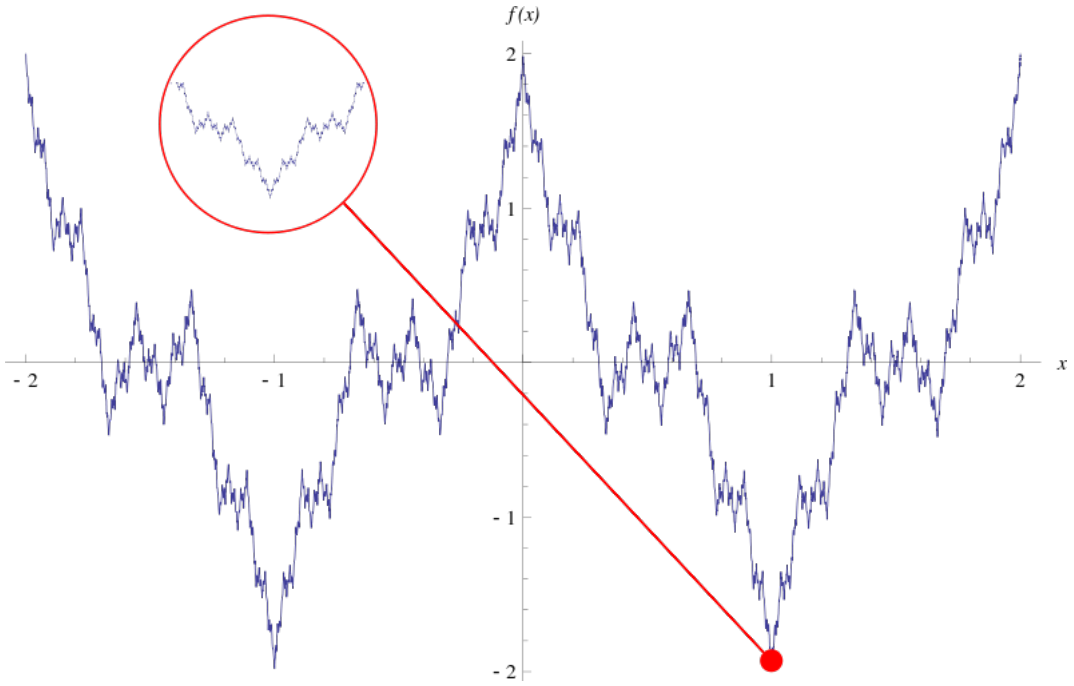

Figura 1: Função de Weierstrass no intervalo $[-2, 2]$.

É importante destacar que este não foi o primeiro exemplo de uma função com tal propriedade. Com o tempo foram encontrados documentos datados de antes da publicação de K. Weierstrass (1815-1897) contendo exemplos de outras funções com tal "patologia". Um exemplo criado pelo matemático Tcheco B. Bolzano (1781-1848),

em torno de 1830 e um exemplo do criado pelo matemático Suiço Ch. Cellérier, em torno de 1860.

O estudo de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto é importante não só por ser um problema clássico do cálculo, mas também por estar conectado com vários outros ramos da matemática. Além disso, vários outros resultados interessantes foram obtidos para a classe de tais funções utilizando teoremas clássicos da topologia. Um exemplo surpreendente, que é obtido usando o Teorema de Baire, é o seguinte teorema:

Teorema 0.1. *O conjunto das funções contínuas e não diferenciáveis em ponto algum em* $[0,1]$ *é denso no conjunto das funções contínuas em* $[0,1]$.

Isto significa que toda função contínua definida em $[0,1]$ pode ser escrita como o limite de uma sequência de funções em $[0,1]$, contínuas e não diferenciáveis em nenhum ponto. Utilizando este resultado, S. Banach (1892-1945) provou que existem "muito mais" funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto (no sentido de categoria de Baire) do que funções contínuas que são diferenciáveis. Além disso, V. I. Gurariy (1935 -2005) provou o seguinte e surpreendente resultado que motiva o nosso trabalho e toda uma área de pesquisa.

Teorema 0.2 (Gurariy, 1966)**.** *O conjunto das funções contínuas e não diferenciáveis em ponto algum em* $[0,1]$ *contém um espaço linear de dimensão infinita.*

Isto é, em um conjunto não muito "atraente" de se estudar, podemos encontrar um subespaço vetorial linear com dimensão infinita, que é uma estrutura muito rica do ponto de vista algébrico. Este fato nos leva a concluir que fenômenos isolados podem, aparentemente, possuir estruturas algébricas interessantes como espaços vetoriais lineares, álgebras de Banach e etc. Desta forma, trazemos a seguinte classificação, quanto ao tipo de estrutura encontrada:

Definição 0.1 (Lineabilidade e Espaçabilidade)**.** Seja X um espaço vetorial topológico e M um subconjunto de X. Seja μ um número cardinal.

1. M é dito μ-lineável (μ-espaçável) se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial (resp. um espaço vetorial fechado) de dimensão μ. Às vezes, devemos nos referir ao conjunto M como simplesmente lineável ou espaçável se o subespaço existente for infinito dimensional.

2. Quando o espaço linear acima pode ser escolhido para ser denso em X dizemos que M é μ-denso-lineável.

Além disso, L. Bernal introduziu a noção de *Maximal Lineável* (e o de Maximal-denso-lineável) em X. Isto significa que, mantendo a notação acima, a dimensão do

espaço vetorial linear existente é igual a dimensão de X. Além de espaços lineares, poderíamos também estudar outras estruturas.

Definição 0.2. Dada uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$, um subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ e um número cardinal μ. Dizemos que $\mathcal{B}$ é:

1. *Algebrável* se existe uma subálgebra $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ com $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$ e a cardinalidade de qualquer conjunto de geradores de $\mathcal{C}$ é infinito.

2. *μ-algebrável* se existe uma subálgebra μ-gerada $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ com $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$.

3. *fortemente μ-algebrável* se existe uma álgebra livre μ-gerada $\mathcal{C}$ contida em $\mathcal{B} \cup \{0\}$.

Ser fortemente algebrável implica ser algebrável. Quando em (3), da definição acima, pode-se considerar μ como o supremo das cardinalidades de todos os sistemas algebricamente livres em $\mathcal{A}$, então $\mathcal{B}$ será chamado *Maximal fortemente algebrável em* A. Desta forma, podemos destacar que temos uma diversidade de direções a investigar sobre a existência de tais estruturas algébricas. Dentre elas, podemos citar:

- Subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- Funções contínuas diferenciáveis em nenhum ponto em $[0, 1]$;
- Funcionais que atingem a norma;
- Hiperciclicidade de operadores;
- Séries e somabilidade;
- Espaços L_p e l_p;
- Zeros de polinômios em espaços de Banach;
- Operadores não absolutamente somantes;
- Análise complexa e holomorfia;
- Funções mensuráveis e não-mensuráveis.

Nos últimos anos muitos autores tem se interessado pelo estudo do conjunto das sobrejeções em $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. A partir desses estudos, diferentes classes de funções têm sido recuperadas/introduzidas. Por exemplo: dizemos que $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é

1. *Sobrejetiva em toda Parte* ($ES(\mathbb{R})$) se $f(I) = \mathbb{R}$, para todo intervalo não-degenerado $I \subseteq f(I) = \mathbb{R}$.

2. *Fortemente sobrejetiva em toda parte* ($SES(\mathbb{R})$) se f leva os valores $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ é a cardinalidade de $\mathbb{R}$) vezes em todo intervalo, isto é, para todo $I \subseteq \mathbb{R}$ não-degenerado, para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se card $(f^{-1}(a) \cap I) = \mathfrak{c}$.

3. *Perfeitamente sobrejetiva em toda parte* ($PES(\mathbb{R})$) se $f(P) = \mathbb{R}$, para todo conjunto perfeito P.

4. Função de *Jones* ($f \in J(\mathbb{R})$), se seu gráfico intersecta todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ com inúmeras projeções no eixo x.

As classes de funções acima definidas satisfazem as seguintes inclusões estritas: $J(\mathbb{R}) \subset PES(\mathbb{R}) \subset SES(\mathbb{R}) \subset ES(\mathbb{R})$. Alguns dos resultados de lineabilidade obtidos para tais as classes de funções são enunciados abaixo e suas respectivas provas podem ser vistos em [33].

Teorema 0.3 (Aron, Gurariy, Seoane, 2004)**.** *$ES(\mathbb{R})$ é maximal lineável.*

Teorema 0.4 (Gámez, Muñoz, Sánchez, Seoane, 2010)**.** *$PES(\mathbb{R})$ e $SES(\mathbb{R})$ são maximal lineáveis.*

Teorema 0.5 (Gámez, 2011)**.** *$J(\mathbb{R})$ é maximal lineável.*

Ou seja, todos os espaços acima citados contém um subespaço vetorial linear com a mesma dimensão do espaço todo, o que são resultados ótimos do ponto de vista dimensional.

Definição 0.3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Diremos que f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudemos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Sejam $f \in ES(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, para todo $\delta > 0$ tem-se $f(I) = \mathbb{R}$, onde $I = (a-\delta, a+\delta)$. Logo, $|x-a| < \delta$ não implica $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Portanto, como tomamos a arbitrariamente, podemos concluir que f é descontínua em todo ponto. Isto mostra que todas as classes acima descritas são compostas por funções que, embora sobrejetivas, são descontínuas em todo ponto do seu domínio, como esperado. Logo, uma questão natural de lineabilidade surge ao adicionarmos a condição de continuidade ao conjunto das sobrejeções. Isto é, o conjunto

$$\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ é contínua e sobrejetiva}\}$$

é lineável? Ou melhor, o conjunto acima descrito é maximal lineável?

Em nosso trabalho investigamos essa situação em um ambiente mais geral que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. A saber, investigamos a lineabilidade do conjunto das sobrejeções contínuas entre espaços euclidianos quaisquer, dado por

$$\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; f \text{ é contínua e sobrejetiva}\}.$$

onde m e n são inteiros positivos quaisquer.

Estrutura do texto

O capítulo 1 tem por objetivo provar que o espaço das sobrejeções contínuas entre quaisquer espaços euclidianos contém, a menos do vetor nulo, um espaço vetorial de dimensão máxima. Para isso construímos, a partir de um caso ja conhecido, curvas de preenchimento do espaço, chamadas curvas de Peano. A partir desta conclusão, apresentamos e provamos um importante lema, conhecido como "Técnica do vetor mãe", que é fortemente utilizado na demonstração do teorema principal do capítulo. O mesmo encerra-se apresentando resultados já obtidos para mapas injetivos entre espaços euclidianos.

O segundo capítulo tem o intuito de demonstrar a Algebrabilidade das curvas de Peano. Iniciamos provando que tal resultado só é possível no ambiente complexo. Com isso apresentamos uma versão, em ambiente complexo, da técnica do vetor mãe, que também será utilizada na prova do principal resultado do capítulo. Consideramos o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de funções inteiras de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{C}$ e investigamos propriedades a respeito da ordem de crescimento de elementos de tal espaço. Tais propriedades foram usadas para a construção do conjunto $\mathcal{X}$ utilizado no lema da técnica do vetor mãe e posteriormente no resultado principal do capítulo.

O capítulo 3 tem o objetivo de provar a Espaçabilidade das curvas de Peano. Inicia-se o capítulo com a apresentação de alguns critérios de Espaçabilidade. É introduzida uma importante classe de espaços, a saber os espaços de Fréchet. Em seguida, utilizamos a caracterização de Nikolskii para sequências básicas para demonstrar um importante critério de espaçabilidade, utilizado na prova do teorema principal do capítulo.

O quarto e último capítulo tem o objetivo de generalizar os resultados obtidos no capítulo 1. Neste, são apresentados os espaços σ-Peanos. São provadas proposições e apresentados exemplos que demonstram que os resultados de Lineabilidade obtidos neste capítulo generalizam os resultados obtidos no capítulo 1. O capítulo encerra-se com a prova do teorema principal.

Notações

Listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

• $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Um espaço normado X é chamado um *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

• Seja X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. Por X' e $L(X)$ denotemos, respectivamente, o espaço topológico dual de X e o espeço vetorial de todos os operadores lineares contínuos em X.

• Seja X um espaço de Banach. Por $L_{1-1}(X)$ denotemos o espaço dos mapas injetivos lineares e contínuos de X em X.

• Por $\mathbb{R}^+$ denotemos o conjunto dos números reais positivos.

• Para dois conjuntos não vazios A, B, $B^A := \mathfrak{F}(A, B)$ denotará o conjunto das funções $f : A \to B$. Em particular, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto das sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com entradas escalares.

• $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$;

• Por $\operatorname{card}(A)$ denotemos a cardinalidade do conjunto A. Em particular denotemos por $\aleph_0 := \operatorname{card}(\mathbb{N})$ e $\mathfrak{c} := \operatorname{card}(\mathbb{R})$;

• Dados m e n inteiros positivos, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ denotarão o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ e o conjunto das funções contínuas e sobrejetivas de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

• Para quaisquer espaços topológicos X e Y, $\mathcal{C}(X, Y)$ denotará o conjunto das funções contínuas de X em Y, $\mathcal{CS}(X, Y)$ denotará o conjunto das funções contínuas e sobrejetivas de X em Y e, para um inteiro positivo m dado, temos

$$\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, X) := \{f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, X); f^{-1}(\{a\}) \text{ é ilimitado para cada } a \in X\}.$$

• Seja E um espaço vetorial e $F \subseteq E$. $\mathrm{Span}(F)$ denotará o subespaço vetorial de E formado por todas as combinações lineares finitas entre os elementos de F.

Capítulo 1

Lineabilidade das curvas de Peano

Neste capítulo, temos como principal objetivo provar que o espaço das sobrejeções contínuas entre quaisquer espaços euclidianos contém, a menos do vetor nulo, um espaço vetorial de dimensão máxima. Nosso ponto de partida é construir uma curva que preencha o plano, chamada curva de Peano (ver [30], [31]). Provaremos que o conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é maximal lineável. Por fim, trazemos resultados já obtidos sobre a lineabilidade de espaços de funções injetivas.

1.1 Construindo uma curva de Peano em espaços Euclideanos

Para investigarmos a existência de estruturas algébricas em $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ uma questão que naturalmente surge é se existe uma sobrejeção contínua de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é não vazio? De fato, só faz sentido investigar a existência de tais estruturas se, independente dos inteiros positivos m e n dados, o espaço $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ for não-vazio. Giuseppe Peano (1858 - 1932) construiu a mais famosa curva de preenchimento de um espaço, também conhecida como *Curva de Peano* (ver figura 1.1). Ou seja, Peano provou que existe $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$ contínua sobrejetiva e, assim, provou que $[0, 1]^2$ pode ser coberto por uma curva.

Mais tarde, o Teorema de Hahn-Mazurkiewicz ajudou em caracterizar os espaços de Hausdoff que são a imagem contínua de um intervalo $I = [0, 1]$, os quais são chamados *Espaços de Peano*. A partir da curva de Peano, podemos facilmente construir funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. Inicialmente, vejamos algumas definições e resultados importantes para a construção da curva desejada.

Lema 1.1 (Lema da Colagem)**.** Sejam $X = A \cup B$, com A e B conjuntos fechados em X, $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ aplicações contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$. Então a aplicação $h : X \to Y$, definida por $h(x) = f(x)$, para $x \in A$, e $h(x) = g(x)$, para $x \in B$, é contínua.

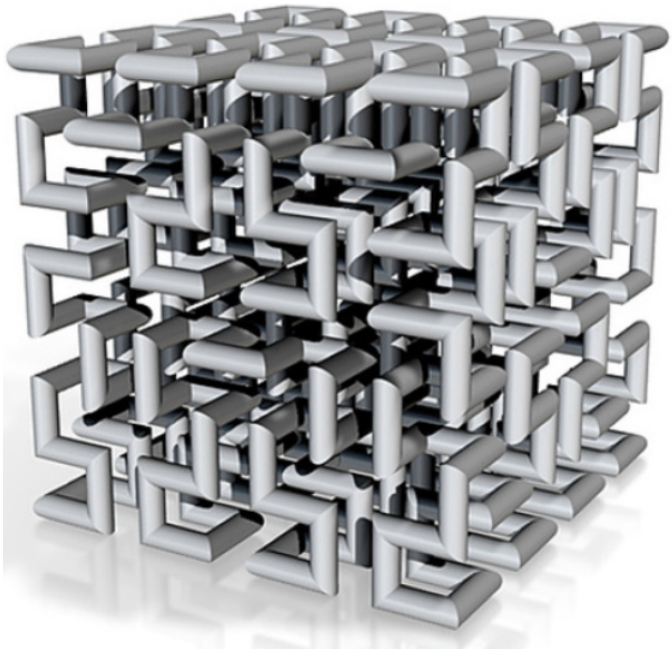

Figura 1.1: Esboço de uma curva de preenchimento de espaço tridimensional.

Diremos que a aplicação h do Lema 1.1 é a *"colagem"* das aplicações f e g. Quando uma aplicação for obtida por este procedimento, representá-la-emos por $h := f \vee g$.

Definição 1.1. Uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é *localmente finita* se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U_x de x que intercepta apenas uma quantidade finita de elementos da família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Lema 1.2 (Lema da Colagem Generalizado)**.** Sejam $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ e $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família localmente finita de subconjuntos fechados do espaço topológico X e $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ mapas contínuos, com $\alpha \in I$, tais que $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$, para todo $x \in A_\alpha \cap A_\beta$, com $\alpha, \beta \in I$. Definamos $f : X \to Y$ pondo $f(x) = f_\alpha(x)$ para $x \in A_\alpha$. Então, f é contínua.

As provas dos Lemas 1.1 e 1.2 podem ser vistas nos Lemas A.2 e A.4, do Anexo A, respectivamente. Sejam a e b números reais tais que $a < b$, provemos que dada uma curva de Peano $\phi : I \to I^2$, com $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e dois pontos arbitrários $P_1, P_2 \in I^2$, podemos supor, sem perda de generalidade, que ϕ inicia em P_1 e termina em P_2.

Proposição 1.3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $I = [a, b]$, $P_1, P_2 \in I^2$ e $\phi : I \to I^2$ uma curva de Peano. Então, existe uma curva de Peano $\Phi : I \to I^2$ que começa em P_1 e termina em P_2.

Demonstração. Sejam $P_a := \phi(a)$ e $P_b := \phi(b)$ em I^2 os pontos em que a curva ϕ inicia e termina, respectivamente. Escolhamos $\alpha, \beta \in (a, b)$, com $\alpha < \beta$, e tomemos um homeomorfismo $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ com $h(\alpha) = a$ e $h(\beta) = b$ (tal homeomorfismo existe, pois duas bolas fechadas em um espaço euclidiano são sempre homeomorfas). Daí, veja

que $\phi_1 = \phi \circ h : [\alpha, \beta] \to I^2$ é uma curva de Peano. Agora, denotemos por $f : [a, \alpha] \to I^2$ o segmento de reta em I^2 que liga $f(a) := P_1$ à $f(\alpha) := \phi_1(\alpha) = \phi(h(\alpha)) = \phi(a)$.

Analogamente, denotemos por $g : [\beta, b] \to I^2$ o segmento de reta em I^2 que liga $g(\beta) := \phi_1(\beta) = \phi(h(\beta)) = \phi(b)$ ao ponto $g(b) = P_2$. Desta forma, definindo o mapa $\Phi : [a, b] \to I^2$ por $\Phi := g \vee \phi_1 \vee f$, pelo Lema da colagem podemos concluir que Φ é uma curva de Peano, começa em P_1 e termina em P_2, como queríamos. □

Utilizando os resultados acima, podemos provar que o conjunto das sobrejeções contínuas entre espaços euclidianos quaisquer é sempre não-vazio. Para isso, iniciaremos com o caso mais delicado, da reta no plano, dado pelo lema a seguir.

Lema 1.4. A família $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ é não-vazia.

Demonstração. Fixemos uma curva de Peano $\phi : I \to I^2$, onde $I = [0, 1]$. Pela Proposição 1.3, podemos assumir que a curva ϕ começa e termina na origem de $\mathbb{R}^2$. Agora, para cada inteiro positivo n, os intervalos I e $I_n = [n, n+1]$ são homeomorfos, assim como I^2 e $[-n, n]^2$, pois são bolas fechadas em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Além disso, para cada inteiro positivo n, consideremos o mapa $h_n : I_n \to [-n, n]^2$ definido por $h_n(t) := n \cdot \phi(t - n)$, e para $n = 0$ façamos $h_0 = \phi$. Desta forma, cada mapa h_n é contínuo, sobrejetivo e começa e termina na origem de $\mathbb{R}^2$.

Assim, colando como no Lema 1.2 os mapas os mapas h_n com $n \geq 0$, obtemos um mapa contínuo e sobrejetivo $H : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ da seguinte forma

$$H(t) := \bigvee_{n \geq 0} h_n(t)$$

Daí, podemos tomar uma extensão $\tilde{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de H, mapeando todo $(-\infty, 0]$ na origem do $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\tilde{H}|_{(-\infty,0]} \equiv 0$. Desta forma, construímos o mapa contínuo e sobrejetivo $\tilde{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\tilde{H}(t) := \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in (-\infty, 0]; \\ H(t), & \text{se} \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Portanto, concluímos que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \neq \emptyset$. □

O próximo resultado garante que existe uma sobrejeção contínua entre espaços euclidianos quaisquer.

Proposição 1.5. Para cada par (m, n) de inteiros positivos, existe uma sobrejeção contínua de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Usando indução sobre n, podemos assegurar que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, pelo exposto acima, tal resultado vale para $n = 2$. Agora,

assuma que $\mathcal{CS}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ e tome $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Então definindo $(id_{\mathbb{R}} \times f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+1}$, por $(id_{\mathbb{R}} \times f)(t,s) := (t, f(s))$ temos uma aplicação contínua e sobrejetiva, pois cada função coordenada é contínua e sobrejetiva. Como a composição de sobrejeções contínuas é uma sobrejeção contínua, tem-se que $(id_{\mathbb{R}} \times f) \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um mapa de Peano, onde $g \in \mathcal{CS}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$. Logo, $\mathcal{CS}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n+1}) \neq \emptyset$. Portanto, $\mathcal{CS}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por fim, provemos que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, para qualquer par de inteiros (m,n). Com efeito, definamos $\pi_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como a projeção da primeira coordenada, e tomemos $g \in \mathcal{CS}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Daí, a função $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x) := g \circ \pi_1(x)$ é contínua e sobrejetiva, pois é a composta de aplicações contínuas e sobrejetivas. Portanto, para todo par (m,n) de inteiros positivos dados, tem-se $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$. □

1.2 Lineabilidade do conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$

Na tentativa de provar a lineabilidade maximal de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, ou seja, a $\mathfrak{c}$-lineabilidade, faremos uso do Lema seguinte, que indica um método para obter nosso resultado principal. Essa técnica é informalmente conhecida como *Técnica do vetor mãe.*

Lema 1.6. Sejam $m,n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$. Suponha que temos $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ um subconjunto com cardinalidade $\mathfrak{c}$, de funções linearmente independentes tais que cada elemento não-nulo de $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$ é uma sobrejeção contínua. Então, $Y := \{F \circ f\}_{F\in\mathcal{X}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, é linearmente independente, é formado por sobrejeções contínuas e $\mathrm{Span}\,(Y) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \cup \{0\}$, obtendo a $\mathfrak{c}$-lineabilidade de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Defina o mapa $\Phi : \mathcal{X} \to Y$ pondo $\Phi(F) := F \circ f$, para todo $F \in \mathcal{X}$. Φ é, obviamente, sobrejetiva e assim $\mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(\mathcal{X}) = \mathfrak{c}$. Por outro lado, dados $F_1 \neq F_2$ em $\mathcal{X}$, tem-se $F_1 \circ f \neq F_2 \circ f$ em Y. Desta forma, Φ é injetiva e $\mathfrak{c} = \mathrm{card}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{card}(Y)$. Portanto, $\mathrm{card}(Y) = \mathfrak{c}$. Agora, seja $\{F_1 \circ f, ..., F_k \circ f\}$ um subconjunto finito de Y tal que, para alguma escolha de escalares $\lambda_1, ..., \lambda_k$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \cdot (F_1 \circ f) + \cdots + \lambda_k \cdot (F_k \circ f) \\ &= (\lambda_1 \cdot F_1) \circ f + \cdots + (\lambda_k \cdot F_k) \circ f \\ &= (\lambda_1 \cdot F_1 + \cdots + \lambda_k \cdot F_k) \circ f \end{aligned}$$

Desta forma, $\lambda_1 \cdot F_1 + \cdots + \lambda_k \cdot F_k = 0$. Assim, como $\{F_1, \ldots, F_k\} \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{X}$ é linearmente independente, tem-se $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Portanto, $Y := \{F \circ f\}_{F\in\mathcal{X}}$ é linearmente independente. Agora, como $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$ é formado por sobrejeções contínuas, tem-se que $Y := \{F \circ f\}_{F\in\mathcal{X}}$ contém apenas sobrejeções contínuas. Por fim, dado $\phi \in \mathrm{Span}(Y)$, tem-se $\phi = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (F_j \circ f) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, com $k \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{R}$, para cada $J \in \{1, \ldots, k\}$ e $\{F_1, \ldots, F_k\} \subset \mathcal{X}$. Com isso, temos que ϕ é contínua, pois é a

combinação linear de mapas contínuos. Por fim, veja que

$$\phi = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (F_j \circ f) = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j F_j) \circ f.$$

Assim, como $\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_k F_k \in \mathrm{Span}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, temos que ϕ é também sobrejetiva, pois é a composta de aplicações sobrejetivas. Portanto,

$$\mathrm{Span}(Y) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}.$$

□

Para usar o Lema 1.6, precisamos de dois objetos. O primeiro é a função $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, que provamos sempre existir, e o segundo é o conjunto $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, o qual iremos construir a seguir. Consideremos, para $r > 0$, o homeomorfismo $\phi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\phi_r(t) := e^{rt} - e^{-rt}$. Inicialmente, veja que, como ϕ_r é diferenciável em todo $t \in \mathbb{R}$, temos ϕ_r contínua em toda a reta. Como

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_r(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{rt} - \lim_{t \to +\infty} e^{-rt} = +\infty$$

e

$$\lim_{t \to -\infty} \phi_r(t) = \lim_{t \to -\infty} e^{rt} - \lim_{t \to -\infty} e^{-rt} = -\infty,$$

temos que ϕ_r é sobrejetiva. Além disso, como a derivada de ϕ_r é estritamente positiva, podemos afirmar que ϕ_r é injetiva e, assim, uma bijeção. Portanto, pelo Lema A.5, temos que ϕ_r é homeomorfismo, para todo $r > 0$. Agora, vejamos o seguinte resultado.

Lema 1.7. O subconjunto $\mathfrak{U} := \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}^+}$ é linearmente independente, tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, e cada elemento não-nulo do $\mathrm{Span}(\mathfrak{U})$ é contínuo e sobrejetivo.

Demonstração. Inicialmente, provemos que cada elemento não-nulo $\phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \phi_{r_i} \in \mathrm{Span}(\mathfrak{U})$ é sobrejetivo. Podemos supor que $r_1 > r_2 > ... > r_k$ e $\alpha_1 \neq 0$ (basta ordenar os r_i acima convenientemente). Daí, escreva

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \alpha_1\phi_{r_1}(t) + \cdots + \alpha_k\phi_{r_k}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \phi_{r_i}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \left(e^{r_i t} - e^{-r_i t}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot e^{r_i t} - \alpha_i \cdot e^{-r_i t} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot e^{r_i t} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot e^{-r_i t} = \alpha_1 \cdot e^{r_1 t} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \cdot e^{r_i t} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot e^{-r_i t} \\
&= \alpha_1 \cdot e^{r_1 t} + e^{r_1 t} \cdot \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \cdot e^{(r_i - r_1)t} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot e^{-r_i t} \\
&= e^{r_1 t} \cdot \left(\alpha_1 + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \cdot e^{(r_i - r_1)t}\right) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot e^{-r_i t}
\end{aligned}
$$

Desta forma podemos concluir que $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \text{sign}(\alpha_1) \cdot \infty$ e $\lim_{t\to-\infty} \phi(t) = -\text{sign}(\alpha_1) \cdot \infty$ (onde $\text{sign}(\alpha_1)$ representa o sinal de α_1). Logo, a continuidade de ϕ assegura sua sobrejetividade (lembrando que ϕ é contínua, por ser a combinação linear de aplicações contínuas). Agora, provemos que $\mathfrak{U}$ é linearmente independente. Com efeito, seja $\psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \phi_{s_i} = 0$. Suponha que existam alguns $\lambda_j \neq 0$. Podemos supor que $s_1 > ... > s_n$ e $\lambda_1 \neq 0$. Repetindo o argumento acima, obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \text{sign}(\lambda_1) \cdot \infty$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} \psi(t) = -\text{sign}(\lambda_1) \cdot \infty$$

que contradiz $\psi \equiv 0$. Portanto, $\mathfrak{U}$ é linearmente independente. Por fim, como $\mathfrak{U} := \{\phi_r\}_{r\in\mathbb{R}^+}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, $\text{Span}(\mathfrak{U})$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ e todo elemento de $\text{Span}(\mathfrak{U})$ é contínuo e sobrejetivo. □

Agora, vamos estender os resultados acima para o $\mathbb{R}^n$. Para cada $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, seja $\varphi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o homeomorfismo definido por $\varphi_r := (\phi_{r_1}, \ldots, \phi_{r_n})$ dados por

$$\varphi_r(x_1, \ldots, x_n) = (\phi_{r_1}(x_1), \ldots, \phi_{r_n}(x_n))$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Trabalhando com cada coordenada, e usando o Lema anterior, obtemos o resultado a seguir:

Lema 1.8. O subconjunto $\mathcal{X} = \{\varphi_r\}_{r\in(\mathbb{R}^+)^n}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é linearmente independente,

tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, e cada elemento não-nulo de $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$ é contínuo e sobrejetivo.

Demonstração. Iniciaremos provando que $\mathcal{X} = \{\varphi_r\}_{r\in(\mathbb{R}^+)^n}$ é linearmente independente. Com efeito, tome um conjunto arbitrário $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_k}\}$ em $\mathcal{X}$ e considere os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $\lambda_1 \cdot \varphi_{s_1} + \ldots + \lambda_k \cdot \varphi_{s_k} = 0$. Logo,

$$\lambda_1 \cdot (\phi_{s_{11}}, \ldots, \phi_{s_{1n}}) + \ldots + \lambda_k \cdot (\phi_{s_{k1}}, \ldots, \phi_{s_{kn}}) = 0,$$

donde

$$(\lambda_1\phi_{s_{11}} + \cdots + \lambda_k\phi_{s_{k1}}, \ldots, \lambda_1\phi_{s_{1n}} + \cdots + \lambda_k\phi_{s_{kn}}) = 0.$$

Como cada coordenada é uma combinação linear nula de elementos de $\mathfrak{U} := \{\phi_r\}_{r\in\mathbb{R}^+}$, que é L.I., temos $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ em todas as coordenadas. Desta forma, podemos concluir que $\mathcal{X} = \{\varphi_r\}_{r\in(\mathbb{R}^+)^n}$ é linearmente independente. Por fim, veja que cada elemento de $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$ é contínuo e sobrejetivo. Com efeito, cada elemento do $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$ é da forma $\psi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ onde $\phi_i \in \mathrm{Span}(\mathfrak{U})$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como cada função coordenada de ψ é contínua e sobrejetiva, temos que ψ é contínua e sobrejetiva. Portanto, o resultado segue. □

O lema seguinte garante que o resultado da lineabilidade que provaremos a seguir é ótimo, isto é, o resultado é o melhor possível em termos de dimensão e sua prova pode ser vista no Lema B.11 do Anexo B.

Lema 1.9. $\dim \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathfrak{c}$

Enfim, provaremos o principal resultado de Lineabilidade do capítulo. Tal resultado foi provado em [31].

Teorema 1.10 (Albuquerque, 2014)**.** *Para cada par $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é maximal lineável.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Usando a notação do Lema 1.8 e o resultado do Lema 1.6, com o conjunto $Y := \{F \circ f\}_{F\in\mathcal{X}}$, obtemos a lineabilidade maximal de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. □

O teorema 1.10 acima pode ser "otimizado" considerando o conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n); f^{-1}(\{a\})$ é ilimitado, para cada $a \in \mathbb{R}^n\}$, para quaisquer inteiros positivos m e n dados. De fato, inicialmente vejamos que $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é sempre não-vazio. Com efeito, dados $m, n \in \mathbb{N}$, definamos $\pi_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como projeção da primeira coordenada dos vetores $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e assim, temos $\pi_1 \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

Agora, tomemos $g \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (na Proposição 1.5, provamos que g sempre existe). Desta forma, $f := g \circ \pi_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. De fato, inicialmente vejamos que f é contínua e sobrejetiva, pois é a composição de mapas contínuos e sobrejetivos. Daí, dado $a \in \mathbb{R}^n$, tem-se $g^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Logo, $f^{-1}(\{a\}) = \pi_1^{-1}(g^{-1}\{a\})$ é ilimitado. Agora, consideremos a seguinte versão do lema 1.6.

Lema 1.11. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Suponha que temos $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ um subconjunto com cardinalidade $\mathfrak{c}$, linearmente independente e cada elemento não-nulo de $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$ é sobrejeção contínua. Então, $Y := \{F \circ f\}_{F \in \mathcal{X}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, é linearmente independente e é formado por sobrejeções contínuas. Além disso, $\mathrm{Span}(Y) \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$, obtendo a $\mathfrak{c}-$lineabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Utilizando os argumentos do Lema 1.6, observamos que nos resta apenas provar que $\mathrm{Span}(Y) \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$. Com efeito, dada $\phi \in \mathrm{Span}(Y)$ tem-se $\phi = \sum_{j=1}^k \lambda_j (F_j \circ f) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, com $k \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{R}$, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ e $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{X}$. Desta forma, dado $a \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, tem-se que $\phi^{-1}(\{a\}) = f^{-1}\left(\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j F_j\right)^{-1}(\{a\})\right)$ é ilimitado. Portanto, $\phi \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$. □

Teorema 1.12. *Para cada par $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é maximal lineável.*

Demonstração. Considere qualquer $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e conjunto $\mathcal{X}$ dado no Lema 1.8. Usando o Lema 1.11, com o conjunto $Y := \{F \circ f\}_{F \in \mathcal{X}}$, obtemos a lineabilidade maximal de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. □

1.3 Lineabilidade de mapas injetivos

O caso de funções injetivas merece alguns comentários. Em $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ o conjunto de todas as sobrejeções é $2^\mathfrak{c}$-lineável, enquanto que o conjunto das funções injetivas é apenas 1-lineável. Consequentemente, o mesmo para as funções bijetivas em $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

Teorema 1.13. *O conjunto das funções injetivas de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ não é 2-lineável.*

Demonstração. De fato, dada duas funções injetivas, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tome $x \neq y$ em $\mathbb{R}$ e $\alpha = \dfrac{f(x) - f(y)}{g(y) - g(x)} \in \mathbb{R}$. Então, a função $h = f + \alpha \cdot g \in \mathrm{Span}(f, g)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x) + \frac{f(x) - f(y)}{g(y) - g(x)} \cdot g(x) \\
&= \frac{f(x)g(y) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(y)g(x)}{g(y) - g(x)} \\
&= \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{g(y) - g(x)} \\
&= \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y) - f(y)g(y)}{g(y) - g(x)} \\
&= \frac{f(y) \cdot (g(y) - g(x)) + (f(x) - f(y)) \cdot g(y)}{g(y) - g(x)} \\
&= f(y) + \frac{f(x) - f(y)}{g(y) - g(x)} \cdot g(y) \\
&= h(y),
\end{aligned}$$

ou seja, h não é injetiva. $\square$

Este argumento é facilmente adaptável para uma função de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}$, basta tomar a combinação linear com o α dado acima. Isto significa que, dada duas aplicações injetivas, no espaço gerado por elas sempre podemos encontrar um elemento que não é injetivo. Quanto às dimensões mais elevadas, reunimos no próximo Teorema uma série de afirmações, que foram comprovadas recentemente por Jimenez, Maghsoudi, Muñoz e Seoane em [33] no cenário de espaços vetoriais euclidianos.

Teorema 1.14. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Então as seguintes afirmações seguem:*

1. *O conjunto $\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; f$ é injetiva$\}$ é m-lineável, mas não $(m+1)$-lineável.*
2. *O conjunto $\{f : \mathbb{R}^{2^n m} \to \mathbb{R}^{2^n m}; f$ é linear e bijetiva$\}$ é 2^n-lineável.*
3. *Se $m \geq 3$ é ímpar então o conjunto $\{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m; f$ é linear e bijetivo$\}$ não é m-lineável.*

Somente recentemente, um número de afirmações foi estabelecido no caso real. Se X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então X' e $L(X)$ vão representar, respectivamente, o espaço topológico dual de X e o espeço vetorial de todos os operadores lineares contínuos em X. Ou seja,

$$X' = \{f : X \to \mathbb{K}; f \text{ é linear e contínuo}\}$$

e

$$L(X) = \{T : X \to X; T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Lembre-se que $L(X)$ se torna uma álgebra linear (na verdade uma álgebra de Banach) se dotarmos esse espaço vetorial com a lei interna de composição de operadores. Se $T \in L(X)$ então o espectro e o espectro pontual de T são denotados por $\sigma(T)$ e $\sigma_p(T)$, respectivamente. Relembre que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K}; T - \lambda I \text{ não é invertível}\}$ (I é a identidade) e $\sigma_p(T)$ é o conjunto dos autovalores de T, isto é, $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K}; T - \lambda I \text{ não é injetivo}\}$ ($\subset \sigma_p(T)$). O adjunto de T é o operador $T' \in L(X') = \{T : X' \to X'\}$ dado por $(T'\varphi)(x) = \varphi(T(x))$ ($\varphi \in X'$, $x \in X$).

Lembre que se X é um espaço de Banach de dimensão finita então qualquer mapa linear $T : X \to X$ é contínuo e qualquer mapa linear injetivo $T : X \to X$ é bijetivo. Consequentemente, para um espaço de Banach geral, consideremos a família

$$\begin{aligned} L_{1-1}(X) &= \{\text{Mapas injetivos lineares contínuos } X \to X\} \\ &= \{T \in L(X) : \ker(T) = \{0\}\}. \end{aligned}$$

É sabido que o grupo de operadores bijetivos em um espaço de Banach (ou, equivalentemente, pelo Teorema da Aplicação Aberta, o grupo de operadores inversíveis)

é um conjunto não-aberto e não-vazio. Logo, $L_{1-1}(X)$ contém um conjunto aberto não-vazio, então não é um conjunto muito pequeno, no sentido topológico. Assim, é natural levantar a questão de se $L_{1-1}(X)$ também é grande no sentido algébrico.

O Teorema 1.14 acima, nos forneceu uma resposta parcial no domínio de espaços reais de dimensão finita.

Definição 1.2. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E é chamada de *base de Schauder* de E se cada $x \in E$ tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Para finalizar este capítulo, destacamos que em [33], temos os seguintes teoremas:

Teorema 1.15. *Seja X um espaço de Banach real com uma base de Schauder. Então, $L_{1-1}(X)$ é lineável.*

Considerando os operadores injetivos em espaços de Banach de dimensão finita, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.16. *Seja $m \in \mathbb{N}$ e S um conjunto com card$(S) \leq \mathfrak{c}$. Temos:*

1. *Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o conjunto $\{f : S \to \mathbb{K}^m; f$ é injetivo$\}$ é m-lineável, mas não $(m+1)$-lineável.*

2. *O conjunto $\{f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m; f$ é linear e bijetivo$\}$ é m-lineável se, e somente se $m = 1$.*

Por fim, considerando os operadores injetivos em espaços de Banach com dimensão infinita, L. Bernal obteve em [22] que a família $L_{1-1}(X)$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrizável.

Capítulo 2

Algebrabilidade das curvas de Peano

Neste capítulo, investigamos diversas propriedades, que dizem respeito a ordem de crescimento das funções inteiras. Provamos um importante resultado que fornece a ordem de crescimento do produto e da soma de funções inteiras. Por fim, utilizamos tais resultados para a prova do principal resultado do capítulo, a saber, a algebrabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$.

2.1 Resultados relacionados a ordem de crescimento de funções inteiras

Uma vez resolvida o problema da lineabilidade, no Teorema 1.10, uma questão natural é indagar sobre a algebrabilidade do conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Claramente a algebrabilidade não pode ser obtida no contexto real já que, para qualquer $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, f^2 é sempre não-negativa, logo não é sobrejetiva. Isto significa que dada qualquer $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a álgebra gerada por f contém uma função que não é sobrejetiva. Contudo, no ambiente complexo é possível obter algebrabilidade, como veremos no principal resultado desse capítulo.

Para provar a algebrabilidade de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ utilizaremos a *Tecnica do vetor mãe*, dada pela seguinte versão do Lema 1.11. A prova é obtida seguindo argumentos análogos aos utilizados nos Lemas 1.6 e 1.11.

Lema 2.1. Seja $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$. Suponha que $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ é um subconjunto com cardinalidade $\mathfrak{c}$, linearmente independente e cada elemento não-nulo do $\mathrm{Span}(\mathcal{X})$ é uma sobrejeção contínua. Então, $Y := \{F \circ f\}_{F \in \mathcal{X}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, é linearmente independente e é formado por sobrejeções contínuas. Além disso, $\mathrm{Span}(Y) \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n) \cup \{0\}$, obtendo a $\mathfrak{c}-$lineabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$.

Primeiramente, destacamos que ao trabalhar com o subconjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ obteremos um resultado refinado, pois provaremos a algebrabilidade de um

subconjunto "menor" de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$. Para utilizar o Lema 2.1, precisamos da função f e do conjunto $\mathcal{X}$ satisfazendo as condições acima. Podemos assumir que a função $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ sempre existe. Assim, nos resta apenas construir o conjunto $\mathcal{X}$.

Para isso, denotemos por $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ o espaço de todas as funções inteiras de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, ou seja, $\mathcal{H}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; f \text{ é inteira}\}$. Para $r > 0$ e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, denotemos por $M(f, r)$ o máximo absoluto da função f no disco fechado de raio r. É simples verificar que a função $M(f, \cdot)$ é monótona não-decrescente. Alem disso, o Princípio do módulo máximo (Teorema C.10) garante que o máximo de $|f|$ restrita a um disco fechado é atingido em algum ponto da fronteira. Desta forma, podemos concluir que $M(f, \cdot)$ é estritamente crescente e

$$M(f, r) := \max_{|z| \leq r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)| .$$

Definição 2.1. Seja $f : \mathbb{C} \to C$ uma função inteira. Definamos a ordem de crescimento de f por

$$\rho(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(f, r)}{\log r}.$$

Por conveniência, quando não houver risco de ambiguidade, representaremos a ordem de crescimento $\rho(f)$, de uma função inteira f, apenas por ρ. A ordem de crescimento $\rho(f)$, de uma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pode ser dada como o ínfimo dos números reais ρ tais que

$$M(f, r) \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

para todo $\varepsilon > 0$, quando r for suficientemente grande. De fato, veja que $M(f, r) \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$ implica

$$\frac{\log \log M(f, r)}{\log r} \leq \frac{\log \log e^{r^{\rho+\varepsilon}}}{\log r} = \rho + \varepsilon.$$

Portanto, aplicando $\limsup_{r \to +\infty}$ obtemos $\rho(f) \leq \rho + \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ concluímos que $\rho(f) \leq \rho$. A seguir, veremos vejamos algumas propriedades da ordem de crescimento de uma função inteira.

Proposição 2.2. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um polinômio. Então $\rho(f) = 0$.

Demonstração. Como f é um polinômio, existem $n \in \mathbb{N}_0$ e $a_0, a_1, a_{,2}, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tais que $f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$. Lembremos que dado um número complexo z, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ tem-se $|z^m| = |z|^m$. Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} M(f, r) = \max_{|z|=r} |f(z)| &= \max_{|z|=r} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \right| \leq \max_{|z|=r} \sum_{j=0}^{n} |a_j z^j| \\ &= \max_{|z|=r} \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot |z^j| = \max_{|z|=r} \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot |z|^j = \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot r^j. \end{aligned}$$

Daí,

$$\rho = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(f,r)}{\log r} \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot r^j}{\log r}.$$

Usando a regra de L'Hospital, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty} \frac{\log\log \sum_{j=1}^{n} |a_j| r^j}{\log r} &\leq \lim_{r\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} j|a_j|r^{j-1}}{\sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j \log \sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j} \cdot \frac{1}{r^{-1}} \\
&= \lim_{r\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} j|a_j|r^j}{\sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j \log \sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j} \\
&= \lim_{r\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} j|a_j|r^j}{\sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j} \cdot \frac{1}{\log \sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\rho \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j}{\log r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\log\log \sum_{j=0}^{n} |a_j|r^j}{\log r} = 0.$$

Como $\rho \in [0,\infty)$, podemos concluir que $\rho = 0$. □

Em particular, destacamos que a ordem de crescimento de uma função inteira constante é zero.

Lema 2.3. Se $0 \leq \delta \leq \infty$, então existe uma função inteira f tal que $\rho(f) = \delta$.

Demonstração. O caso em que $\delta = 0$ foi provado na Proposição 2.2. Seja $0 < \delta < \infty$ e tome $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^{z^\delta}$. Desta forma, f é uma função inteira, pois é uma função exponencial, e vale $M(f;r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = e^{|z|^\delta} = e^{r^\delta}$. Daí, veja que

$$\frac{\log\log M(f;r)}{\log r} = \frac{\log\log e^{|r|^\delta}}{\log r} = \frac{\log r^\delta}{\log r} = \delta.$$

Portanto,

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(f;r)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \delta = \delta.$$

Por fim, consideremos o caso em que $\delta = \infty$. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^{e^z}$. logo, $M(f;r) = \max_{|z|=r} |e^{e^z}| = e^{e^r}$. Desta forma,

$$\frac{\log\log M(f;r)}{\log r} = \frac{\log e^r}{\log r} = \frac{r \cdot \log e}{\log r}.$$

Como $\lim_{r\to+\infty} \frac{r}{\log r} = +\infty$, podemos concluir que

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(f;r)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{r \cdot \log e}{\log r} = \infty.$$

□

Em seguida provaremos algumas propriedades a respeito da ordem de crescimento de uma função inteira, que serão úteis na prova de um Lema essencial para a demonstração do principal resultado do capítulo.

Proposição 2.4. Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de ordens ρ_1 e ρ_2, respectivamente, com $\rho_1 \neq \rho_2$, $N \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então valem as propriedades:

1. $\rho(f_1 + f_2) = \text{máx}\{\rho_1, \rho_2\}$.
2. $\rho(f_1 \cdot f_2) = \text{máx}\{\rho_1, \rho_2\}$.
3. $\rho\left(\alpha f_1^N\right) = \rho(f_1)$.

Demonstração. (1) Suponhamos inicialmente que $\rho_1 < \rho_2$ e $\rho_2 < +\infty$. Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned} M(f_1 + f_2, r) &= \text{máx}_{|z|=r}|(f_1 + f_2)(z)| \\ &= \text{máx}_{|z|=r}|(f_1(z) + f_2(z))| \\ &\leq \text{máx}_{|z|=r}|f_1(z)| + \text{máx}_{|z|=r}|f_2(z)|. \end{aligned}$$

Com isso, para todo $\varepsilon > 0$ dado, tem-se

$$M(f_1 + f_2, r) \leq e^{r^{\rho_1+\varepsilon}} + e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} < e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} + e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} = 2e^{r^{\rho_2+\varepsilon}}.$$

Por outro lado, vejamos que $2e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} = 2e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} \cdot e^{r^{\rho_2+2\varepsilon}} \cdot e^{-r^{\rho_2+2\varepsilon}} = 2 \cdot e^{r^{\rho_2+\varepsilon}\cdot(1-r^{\varepsilon})} \cdot e^{r^{\rho_2+2\varepsilon}}$ como $r^{\rho_2+\varepsilon} \cdot (1 - r^{\varepsilon}) \to -\infty$, quando $r \to +\infty$, temos $r^{\rho_2+\varepsilon} \cdot (1 - r^{\varepsilon}) < \log(\frac{1}{2})$, para r suficientemente grande. Portanto,

$$2 \cdot e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} = 2 \cdot e^{[r^{\rho_2+\varepsilon}\cdot(1-r^{\varepsilon})]} \cdot e^{r^{\rho_2+2\varepsilon}} \leq 2 \cdot e^{\log(\frac{1}{2})} \cdot e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} \leq e^{r^{\rho_2+2\varepsilon}}$$

e, desta forma, $M(f_1 + f_2, r) \leq e^{r^{\rho_2+2\varepsilon}}$, para $r > r_0(\varepsilon)$. Daí, representando por ρ a ordem de crescimento de $F := f_1 + f_2$, temos $\rho \leq \rho_2 + 2\varepsilon$ e, assim, fazendo $\varepsilon \to 0$, temos $\rho \leq \rho_2$. Por outro lado, existe uma sequência de números $(r_n)_n$ tal que $r_n \to +\infty$ e $M(f_2, r_n) > e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}$. Logo,

$$\begin{aligned} M(f_1 + f_2, r) &= \text{máx}_{|z|=r}|(f_1 + f_2)(z)| \\ &\geq \text{máx}_{|z|=r}|f_2(z)| - \text{máx}_{|z|=r}|f_1(z)| \\ &\geq e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}} - e^{r_n^{\rho_1-\varepsilon}} \\ &= e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}} \cdot \left(1 - e^{r_n^{\rho_1-\varepsilon} - r_n^{\rho_2-\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Como $e^{r_n^{\rho_1-\varepsilon} - r_n^{\rho_2-\varepsilon}} \to 0$ quando $r_n \to +\infty$, temos $1 - e^{r_n^{\rho_1-\varepsilon} - r_n^{\rho_2-\varepsilon}} > \frac{1}{2}$, para n suficien-

temente grande. Desta forma, $M(f_1+f_2,r) > \frac{1}{2}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}$. Agora, vejamos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}} &= \frac{1}{2}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}\cdot e^{r_n^{\rho_2-2\varepsilon}}\cdot e^{-r_n^{\rho_2-2\varepsilon}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}-r_n^{\rho_2-2\varepsilon}}\cdot e^{r_n^{\rho_2-2\varepsilon}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}\cdot\left(1-r_n^{-\varepsilon}\right)}\cdot e^{r_n^{\rho_2-2\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Para n suficientemente grande temos $r_n^{\rho_2-\varepsilon}\cdot(1-r_n^{-\varepsilon}) > \log 2$. Com isso, $\frac{1}{2}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}} > \frac{1}{2}\cdot e^{\log 2}\cdot e^{r_n^{\rho_2-2\varepsilon}} = e^{r_n^{\rho_2-2\varepsilon}}$, ou seja, $M(f_1+f_2,r) > e^{r_n^{\rho_2-2\varepsilon}}$ e, assim, $\rho \geq \rho_2 - 2\varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, tem-se $\rho \geq \rho_2$ e, portanto, $\rho = \rho_2$. O caso $\rho_2 < \rho_1$ é análogo ao caso exposto acima.

(2) Dado $\varepsilon > 0$ e r suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}M(f_1\cdot f_2,r) &= \text{máx}_{|z|=r}|(f_1\cdot f_2)(z)|\\ &= \text{máx}_{|z|=r}|(f_1(z)\cdot f_2(z)|\\ &\leq \text{máx}_{|z|=r}|f_1(z)|\cdot \text{máx}_{|z|=r}|f_2(z)|\\ &\leq e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}\cdot e^{r^{\rho_2+\varepsilon}}\\ &\leq e^{r^{\rho_2+\varepsilon}}\cdot e^{r^{\rho_2+\varepsilon}}\\ &= e^{2r^{\rho_2+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Logo, $\rho \leq \rho_2+\varepsilon$ e, fazendo $\varepsilon \to 0$, temos $\rho \leq \rho_2$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe uma sequência de números $(r_n)_n$ com $r_n \to +\infty$, tais que $M(f_2,r) > e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}$. Daí,

$$M(f_1\cdot f_2,r_n) \geq e^{r_n^{\rho_1-\varepsilon}}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}} \geq e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}\cdot e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}} \geq e^{2r_n^{\rho_2-\varepsilon}}.$$

Assim, temos $\rho \geq \rho_2-\varepsilon$ e, desta forma $\rho \geq \rho_2$. Portanto, $\rho = \rho_2$.

(3) Considere $F := g\cdot h$, onde $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é dada por $g(z)\equiv\alpha$, para todo $z\in\mathbb{C}$ e $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é dada por $h(z) = f_1^N(z)$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\rho\left(\alpha\cdot f_1^N\right) &= \text{máx}\left\{\rho(g),\rho(h)\right\}\\ &= \rho(h)\\ &= \text{máx}\left\{\rho(f_1),\rho(f_1),\ldots,\rho(f_1)\right\}\\ &= \rho(f_1).\end{aligned}$$

As provas acima também se aplicam sem mudanças significativas quando $\rho_2 = +\infty$. $\square$

Deve-se notar que, quando $\rho_1 = \rho_2$, podemos ter $\rho(f_1+f_2) \leq \text{máx}\{\rho_1,\rho_2\}$. Com efeito, considere $f_1(z) = e^z$ e $f_2(z) = -e^z$. Daí, temos $\rho_1 = \rho_2 = 1$ e $\rho(f_1+f_2) = 0$, pois

$f_1 + f_2 \equiv 0$. Portanto, de foma geral, temos $\rho(f_1 + f_2) \leq \text{máx}\{\rho_1, \rho_2\}$. Além disso, por um raciocínio análogo ao exposto acima, podemos concluir que $\rho(f_1 \cdot f_2) \leq \text{máx}\{\rho_1, \rho_2\}$. Agora, seja $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot z^n, a_n \to 0$ a série de MaLaurin da função inteira f (se a_n não tende a zero, f não é inteira). A propriedade a seguir, cuja prova pode ser vista em [38] (theorem 2.2.2) também é relevante.

Proposição 2.5. Uma função inteira $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot z^n$ possui ordem ρ finita se, e somente se,

$$\mu := \limsup_{n \to +\infty} \frac{n \cdot \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} < +\infty. \tag{2.1}$$

Neste caso, $\rho = \mu$.

2.2 Algebrabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$

O próximo resultado é conhecido como Corolário do Teorema de Hadamard, cuja prova pode ser vista em [8].

Proposição 2.6. Toda função inteira não-constante f que possui ordem de crescimento finita, não inteira e positiva é sobrejetiva.

Como consequência das propriedades anteriores, obtemos o seguinte resultado quanto à ordem de um polinômio de várias variáveis avaliadas em funções inteiras, com ordens diferentes. Primeiro, precisamos estabelecer a seguinte notação: para um polinômio não-constante em M variáveis complexas, $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_M]$, seja $\mathcal{I}_P \subset \{1, ..., M\}$ o conjunto dos índices k tal que a variável z_k aparece explicitamente em algum monômio (com coeficiente não-nulo) de P, isto é,

$$\mathcal{I}_P = \left\{ n \in \{1, \ldots, M\} \ : \ \frac{\partial P}{\partial z_n} \not\equiv 0 \right\}.$$

Lema 2.7. Sejam $f_1, \ldots, f_M \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tais que $\rho(f_i) \neq \rho(f_j)$ sempre que $i \neq j$. Então,

$$\rho(P(f_1, \ldots, f_M)) = \max_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k)$$

para todo polinômio não-constante $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_M]$. Além disso, os elementos de $(f_k)_{k=1}^M$ são algebricamente independentes e geram uma álgebra livre.

Demonstração. A segunda afirmação segue de forma direta da primeira. Para provar a primeira parte podemos assumir, sem perda de generalidade, que $M > 1$ e as funções inteiras $f_1, \ldots, f_M$ satisfazem $\rho(f_1) < \rho(f_2) < \ldots < \rho(f_M)$. Com efeito, se $M = 1$ então o resultado decorre da Proposição 2.4 e se $\rho(f_i) > \rho(f_j)$ para algum $i \neq j$, podemos reorganizar as funções inteiras de forma a satisfazer as condições impostas

para a ordem de crescimento. Dado um polinômio $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_M]$, a Proposição 2.4 também assegura que $\rho(P(f_1, \ldots, f_M)) \leq \text{máx}_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k)$.

Portanto, resta provar que $\rho(P(f_1, \ldots, f_M)) \geq \text{máx}_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k)$. Seja $N = \text{máx}\, \mathcal{I}_P$ (temos que, pela ordem de crescente, $\text{máx}_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k) = \rho(f_N) := \rho_N$). Podemos escrever

$$P(f_1, \ldots, f_M) = \sum_{i=0}^{m} P_i(f_1, \ldots, f_{N-1}) \cdot f_N^i \tag{2.2}$$

para algum $m > 0$ e $P_m \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{N-1}] \setminus \{0\}$. Como $\rho(f_{N-1}) < \rho(f_N) := \rho_N$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\rho(f_{N-1}) < \rho(f_N) - 2\varepsilon < \rho(f_N) := \rho_N$. Agora, pelas propriedades provadas na Proposição 2.4, podemos estimar a ordem de cada um dos termos da soma (2.2): $\rho(P_i(f_1, \ldots, f_{N-1})) \leq \rho(f_{N-1}) < \rho_N$, $\forall i = 0, \ldots, m-1$ e $\rho(P_m(f_1, \ldots, f_{N-1}) \cdot f_N) = \rho(f_N) = \rho_N$.

Pela definição de ordem, temos a existência de uma sequência de números reais positivos $(r_n)_n$, tendendo para $+\infty$ e números complexos z_n, de módulos r_n tais que, para n suficientemente grande, vale:

$$\begin{aligned} P(f_1, \ldots, f_M)(z_n) &= \left(\sum_{i=0}^{m} P_i(f_1, \ldots, f_{N-1}) \cdot f_N^i \right)(z_n) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} P_i(f_1, \ldots, f_{N-1})(z_n) \cdot f_N^i(z_n) \right). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$|P_m(f_1, \ldots, f_{N-1})(z_n) \cdot f_N(z_n)| = |P_m(f_1, \ldots, f_{N-1})(z_n)| \cdot |f_N(z_n)| > e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}}$$

e

$$|P_i(f_1, \ldots, f_{N-1})(z_n)| < e^{r_n^{\rho_N - 2\varepsilon}}$$

para todo $i = 0, \ldots, m$. Portando, $|P_m(f_1, \ldots, f_{N-1})(z_n)| \cdot |f_N(z_n)| > e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}}$ implica, para n grande, que

$$|f_N(z_n)| > \frac{e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}}}{|P_m(f_1, \ldots, f_{N-1}(z_n))|} > e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon} - r_n^{\rho_N - 2\varepsilon}}. \tag{2.3}$$

Logo, pela desigualdade triangular temos

$$
\begin{aligned}
|P(f_1,\dots,f_M)(z_n)| &= \left|\sum_{i=0}^{m} P_i(f_1,\dots,f_{N-1})(z_n)\cdot f_N^i(z_n)\right| \\
&= \left|P_m(f_1,\dots,f_{N-1})(z_n)\cdot f_N^m(z_n) + \sum_{i=0}^{m-1} P_i(f_1,\dots,f_{N-1})(z_n)\cdot f_N^i(z_n)\right| \\
&\geq |P_m(f_1,\dots,f_{N-1})(z)|\cdot|f_N(z)|^m - \sum_{i=0}^{m-1}|P_i(f_1,\dots,f_{N-1})(z_n)|\cdot|f_N(z_n)|^i \\
&= |P_m(f_1,\dots,f_{N-1})(z_n)|\cdot|f_N(z_n)|\cdot|f_N(z_n)|^{m-1} - \dots \\
&\qquad \dots - \sum_{i=0}^{m-1}|P_i(f_1,\dots,f_{N-1})(z_n)|\cdot|f_N(z_n)|^i \\
&\geq e^{r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\cdot|f_N(z_n)|^{m-1} - e^{r_n^{\rho_N-2\varepsilon}}\cdot\sum_{i=0}^{m-1}|f_N(z_n)|^i \\
&= e^{r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\cdot|f_N(z_n)|^{m-1}\cdot\left[1 - e^{r_n^{\rho_N-2\varepsilon}-r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\cdot\sum_{i=0}^{m-1}|f_N(z_n)|^{i-(m-1)}\right]. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Note que a expressão dentro dos colchetes na última fórmula tende para 1 quando $n\to+\infty$ pois $\lim_{n\to+\infty} e^{r_n^{\rho_N-2\varepsilon}-r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\to 0$. Desta forma, pela relação (2.3),

$$\lim_{n\to+\infty}|f_N(z_n)|^{-1} < \lim_{n\to+\infty} e^{r_n^{\rho_N-2\varepsilon}-r_n^{\rho_N-\varepsilon}} = 0,$$

pois $r_n^{\rho_N-2\varepsilon} - r_n^{\rho_N-\varepsilon} < 0$ e para $n\to\infty$, tem-se $r_n\to+\infty$. Logo, a expressão dentro dos colchetes em (2.4) é maior que alguma constante $C\in(0,1)$ para n suficientemente grande. Além disso, da relação (2.3), tem-se

$$
\begin{aligned}
e^{r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\cdot|f_N(z_n)|^{m-1} &> e^{r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\cdot\left(e^{r_n^{\rho_N-\varepsilon}-r_n^{\rho_N-2\varepsilon}}\right)^{m-1} \\
&= e^{r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\cdot\left(e^{(m-1)r_n^{\rho_N-\varepsilon}-(m-1)r_n^{\rho_N-2\varepsilon}}\right) \\
&= e^{mr_n^{\rho_N-\varepsilon}-(m-1)r_n^{\rho_N-2\varepsilon}} \\
&= e^{mr_n^{r_n^{\rho_N-\varepsilon}}\cdot\left[1-\frac{m-1}{m}\cdot r_n^{-\varepsilon}\right]} \\
&> e^{(\frac{m}{2})\cdot r_n^{\rho_N-\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

para n suficientemente grande. Consequentemente, temos para n grande que (2.4) implica

$$M(P(f_1,\dots,f_M),r_n) = \text{máx}_{|z|=r_n}|P(f_1,\dots,f_M(z)| \geq C\cdot e^{\frac{m}{2}\cdot r_n^{\rho_N-\varepsilon}}, \qquad (2.5)$$

donde

$$\begin{aligned}\rho(P(f_1,\dots,f_M)) &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log M(P(f_1,\dots,f_M),r)}{\log r}\\ &\geq \limsup_{n\to+\infty}\frac{\log\log M(P(f_1,\dots,f_M),r_n)}{\log r_n}\\ &\geq \limsup_{n\to+\infty}\frac{\log\log(C\cdot e^{\frac{m}{2}r_n^{\rho_N-\varepsilon}})}{\log r_n}\\ &= \rho_N-\varepsilon.\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon\to 0$, a inequação acima prova que $\rho(P(f_1,\dots,f_M))\geq\rho_N=\text{máx}_{k\in I_P}\rho(f_k)$, como queríamos. □

A partir deste Lema podemos provar que $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{C}^n)$ é fortemente $\mathfrak{c}$-Algebrável e, portanto, fortemente maximal algebrável.

Teorema 2.8. *Para cada $m,n\in\mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{C}^n)$ é fortemente maximal algebrizável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m,\mathbb{C}^n)$.*

Demonstração. É suficiente considerarmos o caso $n=m=1$. De fato, o caso $m>1$ segue direto do caso $m=1$ considerando o mapa projeção de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}$. O caso $n>1$ é obtido de $n=1$ trabalhando em cada coordenada. Para cada $s>0$, selecione uma função inteira, $\varphi_s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ de ordem s. Seja $A:=(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$. O Lema 2.7 assegura que o conjunto $\mathcal{X}=\{\varphi_s\}_{s\in A}$ é um sistema de cardinalidade $\mathfrak{c}$, gerando uma álgebra livre $\mathcal{A}$.

Agora, note que um elemento $\varphi\in\mathcal{A}\setminus\{0\}$, pode ser inscrito como um polinomial P sem termo constante avaliados em alguns $\varphi_{s_1},\varphi_{s_2},\dots,\varphi_{s_N}$, isto é, $\varphi=P(\varphi_{s_1},\varphi_{s_2},\dots,\varphi_{s_N})=\sum_{|\alpha|\leq m}C_\alpha\cdot\varphi_{s_1}^{\alpha_1}\cdot\varphi_{s_2}^{\alpha_2}\cdots\varphi_{s_N}^{\alpha_N}$. Pelo Lema 2.7, existe $j\in\{1,\dots,N\}$ tal que $\rho(\varphi)=\rho(\varphi_{s_j})=s_j\notin\mathbb{N}_0$. Logo, o Corolário do Teorema de Hadamard (Proposição 2.6) garante que φ é sobrejetivo. Finalmente, para qualquer $f\in\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, considere $Y:=\{\varphi\circ f\}_{\varphi\in A}$. Então, pelo Lema 2.1, Y é a álgebra procurada. Isso conclui a demonstração do teorema. □

Capítulo 3

Espaçabilidade das curvas de Peano

Neste capítulo definimos uma importante classe de espaços, a saber, os espaços de Fréchet. Em seguida, utilizamos a caracterização de Nikolskii para sequências básicas para provar um importante critério de espaçabilidade. Por fim, devido a Bernal e Ordóñez usamos esse critério para provar o principal resultado do capítulo, a espaçabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

3.1 Critérios de Espaçabilidade

Nas ultimas duas décadas ocorreu um crescente interesse na busca de boas estruturas algébricas-topológicas em conjuntos (principalmente conjuntos de funções e de sequências) que possuem propriedades exóticas. Provaremos um resultado que garante a existência de uma "grande" estrutura topológica. Mais precisamente, após provarmos que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é lineável (Teorema 1.10) e $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ é algebrável no Teorema 2.8 resolveremos a seguinte indagação natural: $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é espaçável? Ou seja, contém, a menos do vetor nulo, um espaço vetorial fechado com dimensão infinita?

Atualmente, não existe algum critério geral de existência de um grande subespaço fechado dentro de um conjunto de um espaço vetorial topológico. De fato, a maioria das provas da espaçabilidade nas especificas configurações tem sido feitas diretamente e construtivamente. É preciso voltar para A. Wilansky ([6], 1975), para encontrar o que poderia ter sido o primeiro critério geral de espaçabilidade. Definindo a *codimensão* de um subespaço Y de um espaço de Banach X como $\dim(X \setminus Y)$, A. Wilansky provou o seguinte critério de espaçabilidade.

Proposição 3.1. Se Y é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Banach X, então $X \setminus Y$ é espaçável se, e somente se, Y tem codimensão infinita.

Seja V um espaço vetorial complexo com uma métrica $d : V \times V \to \mathbb{R}$, suponha

que d é *invariante por translação* no sentido de que

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

para todo $x, y, z \in V$ (note que esta propriedade é válida para as métricas induzidas pelas normas). Damos a V a topologia induzida pela métrica. Uma base local em $v \in V$ consiste em bolas abertas centradas em $v : \{w \in V; d(v, w) < r\}$. A translação invariante implica que as bolas centradas em v são nada menos que as translações

$$v + B_r = \{v + b; b \in B_r\}$$

onde B_r é a bola aberta de raio r centrada na origem, ou seja, devido a translação invariante, a topologia na origem determina a topologia em todo o espaço vetorial. Uma topologia em V é *localmente convexa* se existe uma base local em zero (portanto em cada ponto) consistindo de conjuntos convexos.

Definição 3.1. Um espaço vetorial topológico E é dito metrizável se existe uma métrica em E que define sua topologia. Todo espaço localmente convexo, metrizável e completo será chamado de *Espaço de Fréchet*.

Uma versão melhorada da Proposição 3.1, onde X é permitido ser um espaço de Fréchet, acima definido, é atribuído a Kitson e Timoney ([11], Theorem 3.3).

Teorema 3.2. *Sejam $Z_n (n \in \mathbb{N})$ espaços de Banach e X um espaço de Fréchet. Sejam $T_n : Z_n \to X$ mapas lineares contínuos e Y o Span linear de $\bigcup_n T_n(Z_n)$. Se Y não é fechado em X então o complemento $X \setminus Y$ é espaçável.*

Entre outras aplicações, o último resultado é usado em [11] para mostrar a espaçabilidade do conjunto $A(D)$ das séries de potências não-absolutamente convergentes no disco da família de operadores não-absolutamente p-somantes entre certos pares de espaços de Banach. Recentemente, os autores de [23] [Theorem 2.2, [23]] tem estabelecido uma condição suficiente para espaçabilidade em função de espaços de Banach. Com isso, este resultado é aplicado para provar a espaçabilidade de

$$L^p_{r-\text{estrito}}, \ (\text{se}\, p \geq 1)$$

$$L^p_{l-\text{estrito}}, \ (\text{se}\, p > 1)$$

$$L^p_{\text{estrito}}, \ (\text{se}\, p > 1).$$

Definição 3.2. Uma F-norma $\|\cdot\|$ em um espaço vetorial X é um funcional $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ satisfazendo, para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2. $\|\lambda x\| \leq \|x\|$, se $\|\lambda\| \leq 1$

3. $\|\lambda x\| \to 0$, se $\lambda \to 0$

4. $\|x\| = 0$, somente se $x = 0$.

Um F-espaço é um espaço vetorial topológico completo metrizável com uma F-norma.

Veja que se $d(x, y) = \|x - y\|$, onde $\|.\|$ é uma F-norma, então $d(x, y)$ é invariante por translação pois, dados $x, y, z \in X$ tem-se $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$. O ingrediente principal na prova destes resultados é o Teorema de Nikolskii da caracterização de sequências básicas, definidas a seguir, que também revela-se verdadeiro no cenário de F-espaços.

Definição 3.3. Uma sequência $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ em um espaço de Banach X é chamado uma *Sequência Básica* se é uma base de Schauder para $[e_k]$, o fecho do subespaço gerado por $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$.

Como sabemos, as sequências básicas são de fundamental importância na teoria dos espaços de Banach e serão explorados ao longo deste texto. Para reconhecer uma sequência de elementos em um espaço de Banach, usamos o seguinte teste, conhecido como *Critério de Banach-Grunblum / Caracterização de Nikolskii.* Para provar tal resultado, vamos utilizar o Lema a seguir, cuja prova pode ser vista no Lema A.6 do Apêndice A.

Lema 3.3. Suponha $S_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de projeções lineares limitadas em um espaço de Banach X tais que

1. $\dim S_n(X) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $S_n S_m = S_m S_n = S_{\min\{m,n\}}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

3. $S_n(x) \to x, \forall x \in X$.

Então cada sequência de vetores não-nulos $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ em X escolhida indutivamente para que $e_1 \in S_1(X)$ e $e_k \in S_k(X) \cap S_{k-1}^{-1}(0)$, se $k \geq 2$, é um base para X com projeções das somas parciais $(S_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Proposição 3.4 (*Caracterização de Nikolskii*)**.** Uma sequência $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ de elementos não-nulos de um espaço Banach X é básica se, e somente se, existe uma constante k tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq k \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \tag{3.1}$$

para cada sequência finita de escalares (a_k) e todos os inteiros m, n tais que $m \leq n$.

Demonstração. Assuma que $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ é uma sequência básica e sejam $S_m : [e_k] \to [e_k]$, $m = 1, 2, \ldots$ as projeções das somas parciais, isto é, dado $x \in [e_k] = \overline{Span}\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$, existe uma sequência $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ de escalares tais que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot e_k.$$

Desta forma, dado um inteiro $1 \leq m \leq n$, vale

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot e_k.$$

Daí, se $m \leq n$, temos

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot e_k \right\| = \left\| S_m \left(\sum_{k=1}^{m} a_k \cdot e_k \right) \right\| \leq \sup_m \|S_m\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k \right\|$$

pois cada $S_m : [e_k] \to [e_k]$ é um operador linear contínuo. Assim, temos (3.1) com $k = \sup_m \|S_m\|$. Por outro lado, seja $E = [e_k] = Span\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$. A condição (3.1) implica que os vetores $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ são linearmente independentes. Isto nos permite definir inequivocamente para cada m, o operador de classificação finita

$$s_m : E \to [e_k]_{k=1}^{m}$$

por

$$s_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k \right) = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} a_k \cdot e_k, \; m, n \in \mathbb{N}.$$

Por densidade, cada s_m estende-se a $S_m : [e_k] \to [e_k]_{k=1}^{m}$ com $\|S_m\| = \|s_m\| \leq k$. Notemos que para cada $x \in E$ tem-se

$$S_n S_m(x) = S_m S_n(x) = S_{\min\{m,n\}}(x) \tag{3.2}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Então, por densidade, (3.2) é válido para todo $x \in [e_k]$. Para cada $x \in [e_k]$ a sequência $(S_m(x))_{m=1}^{+\infty}$ converge para x, como o conjunto $\{x \in [e_k]; S_m(x) \to x\}$ é fechado e contém E, que é denso em $[e_k]$, o Lema 3.3 assegura que $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ é uma base para $[e_k]$ com projeções de somas parciais $(S_m)_{m=1}^{+\infty}$. □

O Teorema da caracterização de Nikolskii para sequências básicas em espaços de Banach também é válido no contexto dos F-espaços (como pode ser visto em [34, Theorem 5.1.8]).

Definição 3.4. O suporte de um funcional $f : \Omega \to \mathbb{K}$, onde Ω é um conjunto não-

vazio, é o conjunto

$$\sigma(f) = \{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}.$$

O próximo critério de espaçabilidade, obtido por Bernal e Ordóñez em [24] será utilizado para provar o principal resultado do capítulo.

Teorema 3.5. *Seja Ω um conjunto não-vazio e Z um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{K}$. Assuma que X é um F-espaço sobre $\mathbb{K}$ consistindo de funcionais de Ω assumindo valores em Z e que $\|\cdot\|$ é uma F-norma definindo a topologia de X. Suponha, além disso, que S é um subconjunto não-vazio de X e que $\mathcal{S} : P(\Omega) \to P(\Omega)$ é uma função conjunto com $A \subset \mathcal{S}(A)$ para todo $A \subset P(\Omega)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Se $(g_n) \subset X$ satisfaz $g_n \to g$ em X então existe uma subsequência $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \Omega$, $g_{n_k}(x) \to g(x)$.*

2. *Existe uma constante $C \in (0, +\infty)$ tal que $\|f + g\| \geq C\|f\|$, para todo $f, g \in X$ com $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset$.*

3. *$\alpha f \in S$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $f \in S$.*

4. *Se $f, g \in X$ são tais que $f + g \in S$ e $\mathcal{S}(\sigma(f)) \cap \sigma(g) = \emptyset$ então $f \in S$.*

5. *Existe uma sequência de funcionais $(f_n)_n \subset X \setminus S$ tal que $\mathcal{S}(\sigma(f_m)) \cap \sigma(f_n) = \emptyset$, para todo m, n, com $m \neq n$.*

então, $X \setminus S$ é espaçável em X.

Demonstração. Mostremos que $(f_n)_n$ é uma sequência básica. De fato, Por (3), temos que $0 \in S$, então de (5) temos $f_n \neq 0$, para todo n. Além disso, para cada par $r, s \in \mathbb{N}$ com $s \geq r$ e quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_s$ segue de (2) e (5) (e do fato de $\mathcal{S}(\sigma(f_n)) \supset \sigma(f_n)$ para todo n) que

$$\left\|\sum_{n=1}^{s} a_n f_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{r} a_n f_n + \sum_{n=r+1}^{s} a_n f_n\right\| \geq C \cdot \left\|\sum_{n=1}^{r} a_n f_n\right\|.$$

Agora vejamos que os suportes de $\sum_{n=1}^{r} a_n f_n$ e $\sum_{n=r+1}^{s} a_n f_n$ são disjuntos. Com efeito, veja que para todo $F \subset \mathbb{N}$ finito, tem-se $\sigma\left(\sum_{n\in F} a_n f_n\right) \subset \bigcup_{n\in F} \sigma(f_n)$. De fato, dado $z \in \sigma\left(\sum_{n\in F} a_n f_n\right)$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in F} a_n f_n(z) \neq 0 &\Rightarrow \exists k \in F \text{ tal que } f_k(z) \neq 0 \\
&\Rightarrow (z \in \sigma(f_k)) \subset \left(\bigcup_{n\in F} \sigma(f_n)\right) \\
&\Rightarrow \sigma\left(\sum_{n\in F} a_n f_n\right) \subset \left(\bigcup_{n\in F} \sigma(f_n)\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z \in \bigcup_{n\in F} \sigma(f_n) &\Rightarrow \exists k \in F \text{ tal que } f_k(z) \neq 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n\in F} a_n f_n(z), \text{ onde } a_k = 1, \text{ e } a_j = 0, \forall j \neq k. \\ &\Rightarrow z \in \sigma\left(\sum_{n\in F} a_n f_n\right). \end{aligned}$$

Daí, por

$$\sigma\left(\sum_{n=1}^{r} a_n f_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{r} \sigma(f_n) = A,$$

$$\sigma\left(\sum_{n=r+1}^{s} a_n f_n\right) \subset \bigcup_{n=r+1}^{s} \sigma(f_n) = B$$

e $\mathcal{S}(\sigma(f_m)) \cap \sigma(f_n) = \emptyset$, pela hipótese (5), podemos concluir que $\sigma(f_m) \cap \sigma(f_n) = \emptyset$, para todo $m \neq n$. Portanto, $A \cap B = \emptyset$ e desta forma, os suportes de $\sum_{n=1}^{r} a_n f_n$ e $\sum_{n=r+1}^{s} a_n f_n$ não se intersectam. De acordo com a caracterização de Nikolskii, $(f_n)_n$ é uma sequência básica (com constante básica $k = 1 \setminus C$). Desta forma, temos que as funções $f_n (n \geq 1)$ são linearmente independentes e desta forma, podemos considerar o espaço

$$M = \overline{Span\{f_n; n \in \mathbb{N}\}}.$$

É claro que M é um subespaço vetorial fechado infinito dimensional de X. É suficiente provar que $M \setminus \{0\} \subset X \setminus S$. Para este fim, fixe uma função $F \in M \setminus \{0\}$. Então, temos uma sequência unicamente determinada $(c_n) \subset \mathbb{K}$ tal que

$$F = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n f_n = \|\cdot\| - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f_k$$

onde $\|\cdot\| - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f_k$ significa o limite de $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k f_k$ na topologia $\|\cdot\|$ (que é uma F-norma). Seja $N = \min\{n \in \mathbb{N}, c_n \neq 0\}$. Então, $F = C_N f_N + h$, com $h = \|\cdot\| - \lim_{n\to+\infty} h_n$ e $h_n := \sum_{k=N+1}^{n} C_k f_k \, (n \geq k+1)$. Note que $\sigma(f_N) = \sigma(C_N f_N)$ então, pela hipótese (5), $x \notin \sigma(f_k)$ para todo $k > N$.

Como $h_n(x) = 0$, para todo $n > N$, do item (1) temos existência de uma subsequência $(n_k) \subset \mathbb{N}$ com $h_{n_k} \to h$ particularmente. Logo, $h(x) = 0$, ou seja, $x \notin \sigma(h)$. Portanto, $\mathcal{S}(\sigma(C_N f_N)) \cap \sigma(h) = \emptyset$. A título de contradição, assuma que $f_N = C_N^{-1}(C_N f_N) \in S$. Como $F = C_N f_N + h$, obtemos de (4) que $c_N f_N \in S$. Aplicando o item (3), temos $f_N = C_N^{-1}(C_N f_N) \in S$, que contradiz a hipótese (5). Consequentemente, $F \in X \setminus S$, como queríamos. Portanto, $X \setminus S$ é espaçável. $\square$

3.2 Espaçabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Nosso objetivo é usar o critério provado acima para provar que o conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é maximal espaçável, isto é, contém um subespaço vetorial fechado com dimensão $\mathfrak{c}$. Para isso, precisamos responder a duas questões: a primeira referente à topologia usada no espaço $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e a segunda referente ao subespaço conveniente para ser fechado com a topologia escolhida.

Em relação a primeira pergunta, no Apêndice A mostramos que o espaço $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ munido com a topologia compacto-aberta é um Espaço de Fréchet, logo é um $F-$espaço e verifica as condições do critério de espaçabilidade provado acima. Em relação a segunda pergunta, utilizaremos o subespaço

$$\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n); f^{-1}(\{y\}) \text{ é ilimitado para cada } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

para investigar a espaçabilidade de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Para isso trazemos no Apêndice A algumas ferramentas importantes, como pro exemplo o Lema de Urysohn e o Teorema da Extensão de Tietze, cujas respectivas provas podem ser vistas em [3].

Agora, podemos voltar nossas atenções ao resultado principal desta seção. Inicialmente, consideremos o conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ das sobrejeções contínuas de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^n$ e tomemos uma família ainda menor:

$$\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n); f^{-1}(\{y\}) \text{ é ilimitado para cada } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Claramente $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Agora provemos o principal resultado do capítulo.

Teorema 3.6. *Para cada par (m, n) de números naturais, o conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (como o conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$) é maximal denso-lineável e espaçável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Faremos uso do fato bem conhecido de que o conjunto $\mathcal{P}$ dos polinomiais $p = (p_1, \ldots, p_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ cujos componentes $p_1, \ldots, p_n$ são polinomiais de m variáveis é denso em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Tal fato decorre do Teorema da aproximação de Weierstrass. Agora, fixe $k \in \mathbb{N}$ e $p = (p_1, \ldots, p_n)$ como acima. Por uma construção direta obtemos e fixemos funções contínuas $p_1[k], \ldots, p_n[k] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tais que $p_j[k] = p_j$ em $B_k := \{(x_1, \ldots, x_m); x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq k\} = B_{(x_1,\ldots,x_m)}(k) \subset \mathbb{R}^m$ e $p_j[k] = 0$ em $\mathbb{R}^m \setminus B^0_{k+1}$.

Considere $p[k] = (p_1[k], \ldots, p_n[k])$. Como cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ está contido em algum B_K e a topologia é a topologia da convergência uniforme compacta, temos que o conjunto $p_0 := \{p[k]; p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Provemos agora a espaçabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Para isso, nós vamos usar o critério apresentado no Teorema 3.5 com $\Omega = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{S} : P(\Omega) \to P(\Omega)$ uma função dada por $\mathcal{S}(A) = \bar{A}$ (isto é, $\mathcal{A}$ é o fecho de $A \subset \mathbb{R}^m$, de modo que $\mathcal{S}(\sigma(h)) = \sigma(h)$, o *suporte topológico*

de uma função $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$), $X = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{R}^n$ (um espaço topológico sobre $\mathbb{K}$), $S = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. A $F-$norma definindo a topologia de $X = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ será dada por

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\sup_{x \in B_k} \|f(x)\|_2}{1 + \sup_{x \in B_k} \|f(x)\|_2}$$

onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^n$. No anexo A, provamos que a topologia gerada pela F-norma e a topologia compacto-aberta coincidem. Vamos verificar as condições $(1) - (5)$ do Teorema 3.5. Com efeito,

1. Dada uma sequência $(g_n) \subset X = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo $g_n \to g \in X$ então, como a convergência uniforme em compactos implica na convergência pontual, tem-se que para cada $x \in \Omega = \mathbb{R}^m$, $g_n(x) \to g(x)$, verificando o primeiro item.

2. Tome $C = 1$. Considere o mapa $t : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dado por $t(x) = \frac{x}{1+x}$. O mapa t é contínuo e crescente. Agora, dadas $f, g \in X = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tais que $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset = \{x \in \mathbb{R}^m; f(x) \neq 0 \text{ e } g(x) \neq 0\}$, temos:

   - Se $x \in \sigma(f)$ e $x \notin \sigma(g)$, então $f(x) \neq 0$ e $g(x) = 0$. Logo, $\|f(x) + g(x)\| = \|f(x)\|$.
   - Se $x \notin \sigma(f)$ e $x \in \sigma(g)$ então $f(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$. Logo, $\|f(x) + g(x)\| = \|g(x)\| > \|f(x)\| = 0$.
   - Se $x \notin \sigma(f)$ e $x \notin \sigma(g)$ então $f(x) = g(x) = 0$. Logo, $\|f(x) + g(x)\| = \|f(x)\| = 0$.

   Portanto, em ambas as hipóteses temos

   $$\|f(x) + g(x)\| \geq C \cdot \|f(x)\|.$$

3. Dado $\alpha \in \mathbb{R} = \mathbb{K}$ e $f \in S = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Então, se $\alpha = 0$, temos $\alpha f \equiv 0$ e, assim , temos $\alpha f \in S$. Agora, suponhamos $\alpha \neq 0$. Inicialmente, vejamos que $\alpha f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{\alpha^{-1} y\})$. Com efeito, vejamos que

   $$x \in \alpha f^{-1}(\{y\}) \Leftrightarrow (\alpha f)(x) = y \Leftrightarrow \alpha f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = \alpha^{-1} y \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{\alpha^{-1} y\})$$

   Portanto,

   $$\alpha f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{\alpha^{-1} y\}). \tag{3.3}$$

   Agora, como $f \in S = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ temos a existência de um $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R}^M; f(x) = y\}$ é limitado, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$\|x\|_2 = \|(x_1, \ldots, x_m)\|_2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2 < \lambda$, $\forall x = (x_1, \ldots, x_m) \in f^{-1}(\{y\}) \subset \mathbb{R}^m$. Daí, considerando o mesmo $y \in \mathbb{R}^n$ acima, pela relação (3.3), podemos concluir que o conjunto

$$\alpha f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{\alpha^{-1}y\}) = \{x \in \mathbb{R}^m; f(x) = \alpha^{-1}y\}$$

é limitado. Portanto, $\alpha f \in S = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

4. Agora, assuma que $f, g \in X = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\sigma(f)) = \overline{\sigma(f)} \cap \sigma(g) = \emptyset$. Como $\sigma(f) \subset \overline{\sigma(f)} = \mathcal{S}(\sigma(f))$ temos, em particular, que $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset$. Desta forma, temos que $(f+g)^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\})$, para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Com efeito, dado $x \in (f+g)^{-1}(\{y\})$, temos $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = y$. Desta forma, temos três casos a considerar:

   - $x \in \sigma(f)$ e $x \notin \sigma(g)$;
   - $x \notin \sigma(f)$ e $x \in \sigma(g)$;
   - $x \notin \sigma(f)$ e $x \notin \sigma(g)$;

   Agora, perceba que o ultimo caso não pode acontecer pois isso forçaria $y = 0$. O que não pode acontecer, pois tomamos $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} x \in \sigma(f) \,\mathrm{e}\, x \notin \sigma(g) &\Rightarrow f(x) + g(x) = f(x) = y \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(\{y\}) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\}). \end{aligned}$$

   Por outro lado,

$$\begin{aligned} x \notin \sigma(f) \,\mathrm{e}\, x \in \sigma(g) &\Rightarrow f(x) + g(x) = g(x) = y \\ &\Rightarrow x \in g^{-1}(\{y\}) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\}). \end{aligned}$$

   Portanto, em ambos os casos, temos que

$$(f+g)^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\}).$$

   Por fim, vejamos que $x \in f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\})$ implica $x \in f^{-1}(\{y\})$ ou $x \in g^{-1}(\{y\})$. Daí, observe que o "ou" acima é exclusivo. Com efeito, se $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap g^{-1}(\{y\})$ então $f(x) = y$ e $g(x) = y$. Como, por hipótese, temos $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset$, temos $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$. O que implica $y = 0$. Absurdo, pois tomamos $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Desta forma, temos que $x \in f^{-1}(\{y\})$ ou (exclusivo) $g^{-1}(\{y\})$. Logo, $(f(x) = y \neq 0$ e $g(x) = 0)$ ou(exclusivo) $(f(x) = 0$ e

$g(x) = y \neq 0$). Assim, $f(x) + g(x) = y$ em ambas as hipóteses. Com isso,

$$\begin{aligned} x \in (f+g)^{-1}(\{y\}) &\Rightarrow f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\}) \subset (f+g)^{-1}(\{y\}) \\ &\Rightarrow (f+g)^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus 0$. Agora, suponha que $f+g \in S$. Então, temos duas hipóteses a considerar:

(a) Existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $(f+g)^{-1}(\{y\})$ é limitado.

(b) $(f+g)^{-1}(\{y\})$ é ilimitada para todo $y \neq 0$, mas $(f+g)^{-1}(\{0\})$ é limitada.

No primeiro caso, a igualdade $(f+g)^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \cup g^{-1}(\{y\})$ força que $f^{-1}(\{y\})$ é limitado. Portanto,

$$f \in S = \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Com isso, assuma que $(f+g)^{-1}(\{y\})$ é ilimitada para todo $y \neq 0$, mas $(f+g)^{-1}(\{0\})$ é limitada. Assim, vamos supor que $f^{-1}(\{y\})$ é ilimitada para todo $y \neq 0$ (caso contrário, existiria $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $f^{-1}(\{y\})$ é limitado e, desta forma, teríamos $f \in S$ e nada teríamos a provar). Portanto, $\sigma(f)$ é também ilimitado. Provemos que $f^{-1}(\{0\})$ é limitado (neste caso $f \in S$). Por contradição, assuma que $f^{-1}(\{0\})$ é ilimitado. Então, df^{-1} é também ilimitado (de fato, se $df^{-1}(\{0\})$ é limitado então existe um $\alpha > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo x com $\|x\|_2$ devido a não limitação de $\sigma(f)$ e $f^{-1}(\{0\})$ ser fechado; como $f^{-1}(\{0\})$ seria ilimitada, teríamos um absurdo).

Agora, temos: $df^{-1}(\{0\}) = d(\mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(\{0\})) = d(\sigma(f)) \subset \overline{\sigma(f)} \subset \mathbb{R}^m \setminus \sigma(g) = g^{-1}(\{0\})$. Derivamos isso se $x \in df^{-1}(\{0\})$ então (desde $f^{-1}(\{0\})$ é fechado) $f(x) = 0 = g(x)$, assim $(f+g)(x) = 0$. Assim, $df^{-1}(\{0\}) \subset (f+g)^{-1}(\{0\})$. Logo, $(f+g)^{-1}(\{0\})$ também é ilimitado, o que contradiz nossa suposição. O que prova o item (4).

5. Inicialmente, vamos considerar a seguinte função: Consideramos o espaço de Fréchet separável $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ de todas as funções contínuas $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sob a topologia compacto-aberta. Pelo Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, para cada espaço topológico X metrizável, compacto, conexo e localmente conexo existe uma sobrejeção contínua $f : [0,1] \to X$. Em particular, se I_n denota o n-cubo $I_n = [0,1]^n$, existe um mapa contínuo

$$\varphi : [0,1] \to I_n$$

com $\varphi([0,1]) = I_n$. Portanto, o mapa

$$\Phi : (x_1, \ldots, x_m) \in S_0 \mapsto \varphi(x_1) \in I_n \tag{3.4}$$

é contínuo e satisfaz $\Phi(S_0) = I_n$, onde S_0 denota a "faixa" $S_0 = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_1 \leq 1\} = [0,1] \times \mathbb{R}^{m-1}$, significando $S_0 = [0,1]$, se $m = 1$. Primeiramente, é claro que existe uma sequência de pontos $(a_j) \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\mathbb{R}^n = \cup_{j\geq 1}(a_j + I_n)$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ e cada $a \in \mathbb{R}^n$ consideremos o mapa

$$\Phi_{k,a} : \left(\{k, k+1\} \cup \left[k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3}\right]\right) \times \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^n$$

dada por $\Phi_{k,a} = 0$ em $\{k, k+1\} \times \mathbb{R}^{m-1} = d(k + S_0)$ e $\Phi_{k,a}(x_1, \ldots, x_m) = a + \varphi(3(x_1 - k) - 1)$ se $(x_1, \ldots, x_m) \in [k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3}] \times \mathbb{R}^{m-1}$.

O Teorema da extensão de Tietze vem em nossa ajuda para fornecer uma extensão contínua $\Phi_{k,a} : k + S_0 \to \mathbb{R}^n$ (observe que o Teorema de Tietze pode ser aplicado a cada componente de $\Phi_{k,a}$). Note que $\Phi_{k,a}(k + S_0) \supset a + I_n$ para todo $k \geq 0$. Como $\text{card}(\mathbb{N}^3) = \text{card}(\mathbb{N})$, podemos selecionar $\mathbb{N}^2$ sequências, disjuntas duas a duas, $\{p(N, M, 1) < p(N, M, 2) < \ldots < p(N, M, j) < \ldots\}$ $(N, M \in \mathbb{N})$ de números naturais. Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina $f_N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ por

$$f_N(x) = \Phi_{p(N,M,j),a_j}(x), \text{ se } x \in p(N, M, j) + S_0, \quad (M, j \in \mathbb{N})$$

ou $f_N(x) = 0$, caso contrário.

Desde que $f_n = 0$ em cada limitado $d(p(N, M, j) + S_0)$, temos que cada f_N é bem definido e contínuo. Além disso, para cada $N \in \mathbb{N}$ e cada $y \in \mathbb{R}^n = \bigcup_{j\geq 1}(a_j + I_n)$, o conjunto $f_N^{-1}(\{y\})$ possui pelo menos um ponto em cada conjunto $\cup_{j\geq 1}(p(N, M, j) + S_0)$ $(M, 1, 2, \ldots)$. Assim, $f_N^{-1}(\{y\})$ é ilimitado e $f_N \in S_{m,n,\infty}$. Finalmente, o suporte das funções $f_N (N = 1, 2, \ldots)$ satisfaz $\overline{\sigma(f_k)} \cap \sigma(f_N) \neq \emptyset$ para todo $k \neq N$, pois

$$\sigma(f_N) \subset \cup_{M,j\geq 1}(p(N, M, j) + S_0)$$

e os números $p(N, M, j)$ são dois a dois diferentes. Isto conclui a demonstração.

□

Capítulo 4

Curvas de Peano em Espaços Vetoriais Topológicos

Apresentamos algumas generalizações dos resultados obtidos no capítulo 1 e apresentados em [32], que é um trabalho conjunto entre os autores L. Bernal, D. Pellegrino, N. G. Albuquerque e J. Seoane sobre curvas de Peano em espaços vetoriais topológicos. O Teorema de Hahn-Mazurkiewicz nos permite investigar espaços vetoriais topológicos que são imagens contínua da reta real, a partir da qual fornecemos um resultado ótimo de lineabilidade.

4.1 Motivação

Este capítulo generaliza os resultados anteriores para espaços vetoriais topológicos que são, em um sentido natural que explicaremos posteriormente, cobertos por espaços de Peano. Introduzimos a noção de espaços σ-Peano e a usamos para mostrar (entre outros resultados) que dado qualquer espaço vetorial topológico $(\mathcal{X}, \tau)$ que também é um espaço σ-Peano, então o conjunto

$$\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{X}) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X}); f^{-1}(\{a\}) \text{ é ilimitado para cada } a \in \mathcal{X}\}$$

é $\mathfrak{c}$-lineável e, portanto, maximal lineável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})$. Além disso, mostraremos como obter espaços σ-Peano a partir de espaços normados separáveis.

Teorema 4.1 (Hahn-Mazurkiewicz)**.** *Um espaço topológico de Hausdorff não-vazio é uma imagem contínua de intervalos unitários se, e somente se, é um compacto, conexo, localmente conexo e metrizável.*

Espaços de Hausdorff que são a imagem contínua do intervalo unitário serão chamados de *espaços de Peano*, portanto um *espaço de Peano* é um espaço topológico de Hausdorff, compacto, conexo, localmente conexo e metrizável.

4.2 Curvas σ-Peano

Conforme mencionado na introdução, o Teorema de Hanh-Mazurkiewicz prova uma caracterização topológica dos espaços vetoriais topológicos que são a imagem contínua do intervalo unitário $I := [0,1]$, são precisamente os espaços de Peano. Nesta seção investigamos espaços topológicos que são imagem contínua da reta real. Para esta tarefa, consideremos os seguintes espaços:

Definição 4.1. Um espaço topológico X é um espaço σ-Peano se existe uma sequência crescente de subconjuntos

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots \subset X$$

tal que cada um deles é um espaço de Peano (dotado da topologia herdada de X), e sua união resulta em todo espaço, isto é,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$$

Proposição 4.2. Seja X um espaço topológico de Hausdorff. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é um espaço σ-Peano.
2. $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, X) \neq \emptyset$.
3. $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, X) \neq \emptyset$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Seja X um espaço σ-Peano. Então, existe uma uma sequência crescente de espaços de Peano em X, $K_1 \subset K_2 \subset K_n \subset \cdots$ tais que esta união é todo o espaço X, isto é, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$. Fixe um ponto $x_0 \in X$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_0 \in K_n$, para todo $n \geq 1$ (com efeito, fixado $x_0 \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_0 \in X_{n_0}$. Daí, como a sequência $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, podemos fazer $K_{n_o} = Y_1$, $K_{n_0+1} = Y_2$, ..., $K_{n_o+z} = Y_n$, ..., isto é, temos uma sequência de compactos $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_0 \in Y_n, \forall n \geq 1$).

Como espaços de Peano são conexos por arcos (Ver [39], Theorem 31.2), para cada $n \geq 1$, existe um mapa de Peano $f_n : [n, n+1] \to K_n$, que começa e termina em x_0, isto é, $f_n(n) = x_0 = f_n(n+1)$. Colando-se todos estes mapas de Peano com o caminho constante $t \in (-\infty, 1] \to x_0 \in K_1$, obtemos, pelo Lema 1.2, um mapa contínuo sobrejetivo $F : \mathbb{R} \to X$.

(2) $\Rightarrow$ (3) É óbvio pois $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, X)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja f um mapa em $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, X)$. Portanto,

$$X = f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f\left([-n,n]\right). \tag{4.1}$$

Como f é contínua e

$$f([-1,1]) \subset f([-2,2]) \subset \cdots \subset f([-n,n]) \subset \cdots$$

é uma sequência crescente de espaços de Peano, temos que X é σ-Peano. □

Para exemplos de espaços que são σ-Peano e de espaços que não são σ-Peano, consideremos, para cada número real $p \geq 1$, o espaço de Banach

$$\ell_p := \left\{(a_j)_{j=1}^{\infty}; a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\right\}.$$

dotado com a norma $\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ e para $p = \infty$, consideremos o espaço de Banach

$$\ell_\infty := \left\{(a_j)_{j=1}^{\infty}; a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty\right\}$$

dotado com a norma $\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 4.1. (Espaços σ-Peano)
(a) Trivialmente, espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e espaços de Peano são σ-Peano. Para cada $1 < p \leq \infty$, o Cubo de Hilbert

$$C_p := \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset \ell_p,$$

considerado com um subespaço topológico de ℓ_p, é um espaço métrico, então é um espaço de Peano, logo também é σ-Peano.
(b) Seja $\mathcal{X}$ um espaço vetorial topológico separável e $\mathcal{X}'$ seu dual topológico dotado da topologia fraca-$*$. Se $\mathcal{X}'$ é coberto por uma sequência crescente de subconjuntos compactos (fracos-$*$), então é um espaço σ-Peano. Na verdade, quando o dual topológico é todato da topologia fraca, seus subconjuntos compactos fracos-$*$ são metrizáveis. Portanto, são espaços σ-Peano. Claramente, isso se mantém no dual topológico (dotado da topologia fraca-$*$).

Exemplo 4.2. (Espaços que não são σ-Peano)
(a) Todo espaço σ-Peano é separável. De fato, a continuidade preserva a separabilidade. Em particular, ℓ_∞ não é σ-Peano.
(b) Nenhum F-espaço infinito dimensional é σ-compacto (i.e, uma união enumerável de

espaços compactos), e, portanto, não é σ-Peano. Esta é uma consequência do Teorema da categoria de Baire combinado com o fato de que, es espaços vetoriais topológicos de dimensões infinitas, conjuntos compactos têm interior vazio. Em particular, nenhum espaço de Banach infinito dimensional é σ-Peano.

A Proposição 4.2, junto com os exemplos expostos acima, garante que os resultados de lineabilidade obtidos neste capítulo generalizam os resultados obtidos no primeiro capítulo. Além disso, a Proposição 4.2 nos dá uma ferramenta para provar o seguinte Lema:

Lema 4.3. Se $\mathcal{X}$ é um espaço σ-Peano, então $\operatorname{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})) \leq \mathfrak{c}$, para todo inteiro positivo m.

Demonstração. Iniciaremos provando que $\operatorname{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})) \leq \mathfrak{c}$. Com efeito, pela Proposição 4.2, $\mathcal{X}$ ser σ-Peano, implica $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \neq \emptyset$. Isto é, existe uma sobrejeção contínua $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$. Logo, existe um mapa injetivo $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ e, desta forma, $\mathcal{X} \approx g(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathbb{R}$. Portanto,

$$\operatorname{card}(\mathcal{X}) = \operatorname{card}(g(\mathcal{X})) \leq \operatorname{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}.$$

Agora, como $\mathbb{R}$ é separável, existe $D = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso em $\mathbb{R}$, que podemos assumir ser $\mathbb{Q}$. Desta forma, como cada mapa de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ é unicamente determinado pela sequência das imagens racionais, temos bem definido um mapa $\Phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, dado por $\Phi(f) := (f(r_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Daí, vejamos primeiramente que Φ é injetiva. Com efeito, dados $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, tem-se

$$\begin{aligned}\Phi(f) = \Phi(g) &\Leftrightarrow (f(r_n))_n = (g(r_n))_n \\ &\Leftrightarrow f = g \quad \text{em} \quad D = \mathbb{Q} \quad (\text{denso em } \mathbb{R})\end{aligned}$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, existe uma subsequência $r_{n_k} \to x$, com $f(r_{n_k}) \to f(x))$ e $g(r_{n_k}) \to g(x)$. Desta forma,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(r_{n_k})| + |f(r_{n_k}) - g(r_{n_k})| + |g(r_{n_k}) - g(x)| = 0.$$

Portanto, Φ é injetiva. Com isso, temos $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \approx \Phi(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})) \subset \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$. Portanto, tem-se

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})) = \operatorname{card}(\Phi(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X}))) \leq \operatorname{card}\left(\mathcal{X}^{\mathbb{N}}\right) = \operatorname{card}\left(\mathcal{X}^{\aleph_0}\right) \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Agora, por argumentos análogos, podemos concluir que o caso geral, em que $m > 1$, também vale. De fato, veja que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \neq \emptyset$ implica $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X}) \neq \emptyset$. Daí, sendo R^m separável, existe um conjunto $D = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso e enumerável em $\mathbb{R}^m$. Desta forma, como cada mapa de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})$ é unicamente determinado pelas suas imagens racionais,

temos bem definido um mapa $\Phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, definido por $\Phi(F) := (F(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Assim, é fácil ver que Φ é injetiva e, desta forma, temos $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X}) \approx \Phi(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})) \subset \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$. Portanto,

$$\text{card}\,(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})) \leq \text{card}\,\left(\mathcal{X}^{\mathbb{N}}\right) \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

□

Agora, enunciamos e provamos o principal resultado desta seção, que fornece a maximal lineabilidade de curvas de Peano em espaços vetoriais topológicos arbitrários que são, além disso, espaços de Peano. Como em [24], nós trabalhamos com alguns mapas de Peano *particulares*, nomeadamente, com quelas sobrejeções contínuas assumindo cada valor em conjunto ilimitado. É conveniente recordar um fato bem conhecido da teoria dos conjuntos: Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ é chamada *quase disjunta* se $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$ é finito sempre que $\lambda \neq \lambda'$.

O procedimento usual para gerar tal família é o seguinte (ver, por exemplo,[1]): denote por $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos números racionais. Para cada irracional α, escolhemos uma subsequência $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} q_{n_k} = \alpha$ e defina $A_\alpha := \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por construção, obtemos que $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ é uma família incondicional de subconjuntos quase disjuntos de $\mathbb{N}$.

Teorema 4.4. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço vetorial topológico σ-Peano. Então $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})$ é maximal lineável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})$.*

Demonstração. É suficiente provar que o resultado vale para $m = 1$, pois o caso geral segue deste trabalhando em cada coordenada. Tomemos $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uma bijeção (um exemplo de uma bijeção deste tipo pode ser visto no anexo A, Lema B.1). Agora, consideremos o conjunto

$$I_{k,n} := \left[g^{-1}(k,n), g^{-1}(k,n) + 1\right]$$

para todo $k, n \in \mathbb{N}$. Logo $\{I_{k,n}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ é uma família de intervalos compactos de $[0, +\infty)$ tais que $\bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} I_{k,n} = [0, +\infty)$ e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n}$ é ilimitada para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado. Com efeito, fixando $n \in \mathbb{N}$ e denotando por $\mathcal{I}_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n}$ temos, por $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ser bijeção, que $\{g^{-1}(k,n)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é infinito. Logo, dado $L > 0$ existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^{-1}(k,n) > L$. Consequentemente, $\mathcal{I}_n$ é ilimitado. Além disso, os intervalos $I_{k,n}$ possuem, dois a dois, interiores disjuntos.

Com efeito, vejamos que $\operatorname{diam} I_{k,n} = 1$, para todo $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Daí, dados (k_1, n_1), $(k_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$ e denotemos por $\mathcal{I} := \operatorname{int} I_{k_1,n_1} \cap \operatorname{int} I_{k_2,n_2}$. Daí, se $\mathcal{I} \neq \emptyset$ então, como as extremidades dos intervalos $I_{k,n}$ são números inteiros não-negativos consecutivos e g é uma bijeção, temos $I_{k_1,n_1} = I_{k_2,n_2}$ e, equivalentemente, $(k_1, n_1) = (k_2, n_2)$. Além disso, também podemos concluir que dados dois intervalos I_{k_1,n_1} e I_{k_2,n_2}, com $(k_1, n_1) \neq$

(k_2, n_2), sua interseção possui no máximo uma das extremidades em comum. Com isso, dados (k_1, n_1), (k_2, n_2), $(k_3, n_3) \in \mathbb{N}^2$ diferentes, tem-se

$$I_{k_1,n_1} \cap I_{k_2,n_2} \cap I_{k_3,n_3} = \emptyset.$$

Com efeito, pelo que vimos acima, os intervalos $I_{k,n}$ possuem, dois a dois, interiores disjuntos e possuem no máximo uma extremidade em comum. Assim, como tomamos os inteiros distintos, podemos concluir que sua interseção é vazia. Agora, procedendo como na construção apresentada na Proposição 4.2, para cada n, podemos construir um mapa contínuo sobrejetivo $f_n : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, com as seguintes propriedades:

1. Fixado $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n}\right) = \mathcal{X}$;
2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, no intervalo $I_{k,n}$, f_n começa e termina na origem $0_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$ e cobre o k-ésimo subconjunto de Peano de $\mathcal{X}$;
3. $f_n \equiv 0$ em $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,m}$, para todo $m \neq n$.

Note que cada $f_n \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. De fato, dado qualquer $a \in \mathcal{X}$, como $\mathcal{X} = f_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n}\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_k$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $a \in f_n(I_{k_0,n}) \subset f_n(I_{k_0+1,n}) \subset \cdots$. Logo, para cada inteiro não-negativo p existe $x_{k_0+p} \in I_{k_0+p,n}$ tal que $f_n(x_{k_0+p}) = a$. Portanto, $f^{-1}(a) \supset \{x_{k_0}, x_{k_0+1}, \ldots, x_{k_0+p}, \ldots\} = A$. Por fim, veja que A é ilimitado pois, caso contrário, existiria x_{k_0+p} pertencente a infinitos $I_{k,n}$ o que, pelo que expomos acima, não ocorre.

Agora, seja $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família quase disjunta com cardinalidade $\mathfrak{c}$ consistindo de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Defina, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$F_\lambda := \sum_{n\in J_\lambda} f_n : \mathbb{R} \to \mathcal{X}.$$

Como os intervalos $I_{k,n}$, dois a dois, interiores disjuntos (juntamente com as propriedades de f_n acima) podemos concluir que F_λ está bem definido, bem como é contínuo. Afirmamos que o conjunto $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ fornece a maximal lineabilidade desejada. O ponto crucial é o seguinte argumento: Sejam $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_N}$, distintos e $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, com $\alpha_N \neq 0$. Como $J_{\lambda_N} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{N-1} J_{\lambda_i}\right)$ é infinito, podemos fixar $n_0 \in J_{\lambda_N} \setminus \left(\cup_{i=1}^{N-1} J_{\lambda_i}\right)$. Note que

$$F_{\lambda_1} = \cdots = F_{\lambda_{N-1}} = 0 \quad \text{e} \quad F_{\lambda_N} = f_{n_0} \quad \text{em} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n_0}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot F_{\lambda_k} = \alpha_N \cdot f_{n_0} \quad \text{em} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n_0}.$$

Então, $F := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot F_{\lambda_k}$ é um elemento de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ porque a imagem de $\mathbb{R}$ por F contém $\alpha_N \cdot f_{n_0}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n_0}\right) = \alpha_N \mathcal{X} = \mathcal{X}$ e cada vetor $a \in \mathcal{X}$ é tal que $f_{n_0}^{-1}(a)$ é um conjunto ilimitado. Desta forma, o conjunto $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tem $\mathfrak{c}$ elementos linearmente independentes, e cada elemento não-nulo do *Span linear* também pertence a $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. A maximal lineabilidade segue do Lema 4.3, pois se um espaço A é tal que $\operatorname{card}(A) \leq \mathfrak{c}$, e um subespaço B de A tem $\mathfrak{c}$ elementos linearmente independentes, então podemos concluir que $\dim A = \dim B$. Portanto, $\dim \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{X}) = \dim \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})$. □

Vejamos que este resultado recupera o Teorema 1.10 e a segunda parte de

Teorema 4.5 (Bernal and Ordóñez, 2014)**.** *Para cada par $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é maximal denso-lineável e espaçável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Em particular, é maximal lineável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.*

Além disso, junto com os exemplos dos espaços que não são σ-Peano apresentados em [31], páginas 45 e 46, temos

Corolário 4.6. Seja N o espaço normado separável e N' o dual topológico dotado com a topologia fraca-$*$. Então $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, N')$ é maximal lineável.

Note que este resultado é válido num contexto mais geral: se X é um espaço vetorial topológico separável e X' o dual topológico (dotado da topologia fraca-$*$) está coberto por uma sequência crescente de subconjuntos (fracos-$*$) compactos, então $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{X}')$ é maximal lineável.

Apêndice A

Topologia Geral

Apresentaremos noções e resultados topológicos que foram usados no decorrer do texto.

Definição A.1. Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados *conjuntos abertos*, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Qualquer união de elementos de τ é um elemento de τ;
2. Qualquer interseção finita de elementos de τ pertence à τ;
3. X e $\emptyset$ pertencem à τ.

Neste caso, dizemos que (X, τ) é um *espaço topológico*, que naturalmente abreviaremos para X quando não houver perigo de ambiguidade ou de imprecisão. Um subconjunto F de X é chamado de *conjunto fechado* se seu complemento for aberto, isto é, se $F^c = X - F \in \tau$.

Lema A.1. Seja X um espaço topológico. Suponha que $B \subseteq A \subseteq X$, B é fechado em A e A é fechado em X. Então, B é fechado relativo à X.

Demonstração. B é fechado em A, logo existe um fechado $F_1 \subseteq A$ tal que B $= F_1 \cap A$. Como A é fechado em X, existe um fechado $F_2 \subseteq X$ tal que $A = F_2 \cap X$. Desta forma, $B = F_1 \cap (F_2 \cap X) = (F_1 \cap F_2) \cap X$. Portanto B é fechado em X. □

Lema A.2 (Lema da Colagem)**.** Sejam X e Y espaços topológicos, $X = A \cup B$, com A e B conjuntos fechados em X, $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ aplicações contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$. Então a aplicação $h : X \to Y$, definida por $h(x) = f(x)$, para $x \in A$, e $h(x) = g(x)$, para $x \in B$, é contínua.

Demonstração. Se F um conjunto fechado em Y, então, $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$. Como f é contínua, $f^{-1}(F)$ é fechado em A e pelo Lema A.1 $f^{-1}(F)$ é fechado em X. Analogamente, $g^{-1}(F)$ é fechado em X. Como a união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado, $h^{-1}(F)$ é fechado em X e, portanto, h é contínua. □

Lema A.3. Sejam $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma família localmente finita de subconjuntos de um espaço topológico X. Então $\cup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} = \overline{\cup_{\alpha\in I}A_\alpha}$.

Demonstração. Inicialmente vejamos que a inclusão $\cup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\cup_{\alpha\in I}A_\alpha}$ é sempre válida. Com efeito, $x \in \cup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$ implica $x \in \overline{A_\alpha}$ para algum $\alpha \in I$. Assim, para toda vizinhança aberta V de x, temos $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$. Desta forma, para toda vizinhança aberta V de x, tem-se $V \cap (\cup_{\alpha\in I}A_\alpha) \neq \emptyset$. Com isso, $x \in \overline{\cup_{\alpha\in I}A_\alpha}$. Portanto, $\cup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\cup_{\alpha\in I}A_\alpha}$. Por outro lado, fixemos $x \in \overline{\cup_{\alpha\in I}A_\alpha}$ e como a família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é localmente finita, existe uma vizinhança V de x que intersecta apenas uma quantidade finita de elementos da família, digamos $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, ..., A_{\alpha_n}$. Suponhamos que $x \notin \left(\overline{A_{\alpha_1}} \cup \cdots \cup \overline{A_{\alpha_n}}\right)$. Então, $V \cap (\overline{A_{\alpha_1}} \cup \cdots \cup \overline{A_{\alpha_n}})^c$ é uma vizinhança de x que não intersecta $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, ..., A_{\alpha_n}$. Contradição pois por hipótese, V intercepta tais conjuntos. Desta forma, $\overline{\cup_{\alpha\in I}A_\alpha} \subseteq \cup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$. Portanto, vale a igualdade enunciada. □

Lema A.4 (Lema da Colagem Generalizado)**.** Sejam $X = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ e Y espaços topológicos, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma família localmente finita de subconjuntos fechados e $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ mapas contínuos, com $\alpha \in I$, tais que $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$, para todo $x \in A_\alpha \cap A_\beta$, com $\alpha, \beta \in I$. Definamos $f : X \to Y$ por $f(x) = f_\alpha(x)$ para $x \in A_\alpha$. Então, f é contínuo.

Demonstração. Sejam F um conjunto fechado em Y. Inicialmente, temos $f^{-1}(F) = \cup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F)$. Com efeito, $x \in f^{-1}(F)$ implica $f(x) = f_\alpha(x) \in F$ para algum $\alpha \in I$. Logo, como $x \in \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F)$ tem-se $f^{-1}(F) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F)$. Por outro lado, $x \in \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F)$ implica $x \in f_\alpha^{-1}(F)$ para algum $\alpha \in Y$. Daí, $f(x) = f_\alpha(x) \in F$ implica $x \in f^{-1}(F)$. Desta forma, $\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(F)$. Portanto, $f^{-1}(F) = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F)$

Agora, provemos que $f^{-1}(F)$ é fechado. Fixado $\alpha \in I$, como f_α é contínua em A_α para todo $\alpha \in I$, $f_\alpha^{-1}(F)$ é fechado em A_α. Pela Proposição A.1, $f^{-1}(F)$ é fechado em X . Como $f_\alpha^{-1}(F) \subseteq A_\alpha$, e $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é localmente finita, podemos afirmar que $\{f_\alpha^{-1}(F)\}_{\alpha\in I}$ é localmente finita. Assim, pelo Lema A.3 tem-se

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F) = \bigcup_{\alpha\in I} \overline{f_\alpha^{-1}(F)} = \overline{\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(F)} = \overline{f^{-1}(F)}.$$

Portanto, $f^{-1}(F)$ é fechado e f é contínuo. □

Lema A.5. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injetiva. Então $f^{-1} : J = f(I) \to I$ é contínua.

Demonstração. Com efeito, pela injetividade de f podemos afirmar que f é monótona. Podemos supor, sem perda de generalidade, que f é monótona crescente. Seja $y \in J = f(I)$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ tal que $y_n \to y$. Devemos mostrar que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, se $p, z \in I$ são tais que

$$f^{-1}(y) - \frac{\varepsilon}{2} < p < f^{-1}(y) < z < f^{-1}(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

então, $f(p) < y < f(z)$. Como $y_n \to y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $f(p) < y_n < f(z)$. Neste caso,

$$f^{-1}(y) - \frac{\varepsilon}{2} < p < f^{-1}(y_n) < z < f^{-1}(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Desta forma, $n > n_0$ implica $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$. Portanto, $f^{-1} : J = f(I) \to I$ é contínua. Os demais casos são provados utilizando argumentos análogos aos usados acima. □

Definição A.2. Seja X um espaço topológico. Uma *cisão* de X é um par de subconjuntos não-vazios U, V de X, abertos e disjuntos, tais que $U \cup V = X$. Um espaço topológico é dito *desconexo* se admite uma cisão. Caso contrário o espaço topológico X é dito *conexo*. Um conjunto $S \subset X$ é dito *desconexo* se S, com a topologia induzida por X, é um espaço desconexo. Caso contrário S é dito *conexo*. Um espaço topológico X é dito *localmente conexo* se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças abertas e conexas.

Definição A.3. Dados dois pontos x e y do espaço topológico X, um *caminho* em X de x para y é um mapa contínuo $f : [a, b] \to X$ de algum intervalo fechado da reta em X tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$. Um espaço X é dito *conexo por caminhos* se cada par de pontos de X podem ser ligados por um caminho em X. Além disso, um espaço topológico X é dito *conexo por arcos* quando dado dois pontos quaisquer $x, y \in X$, o caminho $f : [a, b] \to X$, ligando x a y é um homeomorfismo.

Lema A.6. Suponha $S_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de projeções lineares limitadas em um espaço de Banach X tais que

1. $\dim S_n(X) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $S_n S_m = S_m S_n = S_{\min\{m,n\}}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.
3. $S_n(x) \to x, \forall x \in X$.

Então cada sequência de vetores não-nulos $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ em X escolhida indutivamente para que $e_1 \in S_1(X)$ e $e_k \in S_k(X) \cap S_{k-1}^{-1}(0)$, se $k \geq 2$, é um base para X com projeções das somas parciais $(S_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Demonstração. Seja $0 \neq e_1 \in S_1(X)$ e defina $e_1^* : X \to X$ por $e_1^*(x)e_1 = S_1(x)$. Agora, escolha $0 \neq e_2 \in S_2(X) \cap S_1^{-1}(0)$ e defina o funcional $e_2^* : X \to X$ por $e_2^*(x)e_2 = S_2(x) - S_1(x)$. Isso nos dá por indução um procedimento para extrair a base e suas funcionais biortogonais: Para cada número inteiro n, escolha $0 \neq e_n \in S_n(X) \cap S_{n-1}^{-1}(0)$ e defina o funcional $e_n^* : X \to X$ por $e_n^*(x)e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$. Logo,

$$\|e_n^*(x)\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \cdot \|e_n\|^{-1} \leq 2 \cdot \sup_n \|S_n\| \cdot \|e_n\|^{-1} \cdot \|x\|$$

com $e_n^* \in X^*$. Por outro lado, se deixarmos $S_0(x) = 0$, para todo x, podemos escrever

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (S_k(x) - S_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$$

que, pelo item (3) de nossas hipóteses, converge para x, para cada $x \in X$. Portanto, a sequencia $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ é uma base e $(S_n)_{n=1}^{+\infty}$ são projeções naturais. $\square$

A seguir, mostramos que o espaço das funções contínuas definidas num aberto $G \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$, munido da topologia compacto-aberta é um espaço de Fréchet. Tal desenvolvimento pode ser feito para o espaço $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ para todo par $(m, n) \in \mathbb{N}$. Para provar a afirmação acima, que $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ é um espaço de Fréchet, recordemos que, sendo E um espaço topológico, um subconjunto $A \subset E$ será dito *convexo* se não existirem abertos V e W disjuntos de E tais que $A \cap V = \emptyset$, $A \cap W = \emptyset$ e $A \subset V \cup W$. Um subconjunto convexo maximal de A será chamado *componente convexa de* A.

Proposição A.7. Seja G um aberto em $\mathbb{C}$. Então, existe uma sequência $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de G tal que $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$. Mais ainda, os conjuntos K_n podem ser escolhidos de tal forma que satisfaçam as seguintes condições:
(a) $K_n \subset Int K_{n+1}$.
(b) Se K for um conjunto compacto de G, então $K \subset K_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

A Prova do resultado acima pode ser vista [10]. Agora, seja G um aberto em $\mathbb{C}$ tal que $G = \cup_{n=1}^{+\infty} K_n$, onde cada K_n é compacto e $K_n \subset Int\,(K_{n+1})$. Para cada n, definamos

$$\rho_n(f, g) = \sup_{z \in K_n} \|f(z) - g(z)\|,$$

com $f, g \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$. Definamos também

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}, \tag{A.1}$$

para $f, g \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ quaisquer. Note que a série (A.1) é dominada pela série $\sum \frac{1}{2^n}$, que converge.

Lema A.8. A função $\rho : \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \to [0, +\infty)$ definida em (A.1) é uma métrica em $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$.

A prova do Lema cima pode ser vista em [10].

Definição A.4. Seja E um espaço vetorial. Uma função $\rho : E \to \mathbb{R}$ é chamado de *seminorma* se verifica os seguintes axiomas:

1. $\rho(x) \geq 0, \forall x \in E$;

2. $\rho(\lambda x) = |\lambda| \cdot \rho(x)$, $\forall x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;

3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\forall x, y \in E$.

Uma seminorma ρ será uma norma se $\rho(x) = 0$ implicar em $x = 0$. Dados E um espaço vetorial qualquer e $\rho : E \to \mathbb{R}$ uma seminorma, consideremos o conjunto

$$U_{\rho,\varepsilon} = \{x \in E; \rho(x) < \varepsilon\},$$

onde $\varepsilon > 0$. Consideremos agora P uma família de seminormas em E e o conjunto

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{\rho \in P_0} U_{\rho,\varepsilon}; P_o \subset P \text{ finito}, \varepsilon > 0 \right\}$$

pode-se mostrar que existe uma única topologia localmente convexa τ_0 em E que admite $\mathcal{B}$ como base de vizinhança de zero. Essa topologia é a mais fraca em E tal que cada $\rho \in P$ é contínua. Chamamos τ_P de *topologia localmente convexa* definida por P. Desta forma, sendo E um espaço topológico e consideremos $\mathcal{C}(E)$ o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ de todas as funções contínuas definidas em E com valores em $\mathbb{C}$. Consideremos a família das seminormas $\rho_k : \mathcal{C}(E) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\rho_K = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$$

onde K é um subconjunto compacto de E. Os conjuntos

$$U_{K,\varepsilon} = \{f \in C(E); \rho_K(f) < \varepsilon\}$$

com $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças abertas convexas de zero e, portanto, induzem uma topologia τ_P localmente convexa. Chamamos essa topologia de *topologia compacto-aberta* em $C(E)$ e a denotamos por τ_0.

Consideremos agora o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ constituído de todas as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas. Claramente, $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{C})$. Mais ainda, se considerarmos a mesma família de seminormas ρ_K onde $K \subset \mathbb{C}$ compacto, os conjuntos

$$U_{K,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}); \rho_K < \varepsilon\}$$

onde $\varepsilon > 0$, tornam-se uma base de vizinhanças de zero na topologia τ_0. Logo, $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é subespaço topológico de $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, munido da topologia compacto-aberta. A seguir vamos mostrar que a *topologia compacto-aberta*, gerada pela família de seminormas $\{\rho_K; K \subset G \text{ compacto}\}$ definidas no espaço $\mathcal{C}(G)$ é equivalente a topologia gerada pela métrica ρ, definida acima.

Lema A.9. Consideremos o espaço $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ munido da métrica ρ definida em (A.1). Dado

$\varepsilon > 0$, exitem um $\lambda > 0$ e um compacto $K \subset G$ tais que, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$,

$$\sup_{z \in K}\{\|f(z) - g(z)\|\} \leq \lambda \Rightarrow \rho(f, g) \leq \varepsilon.$$

Reciprocamente, dados $\lambda > 0$ e $K \subset G$ um compacto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$,

$$\rho(f, g) \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{z \in K}\{\|f(z) - g(z)\|\} \leq \lambda.$$

Demonstração. Como vimos acima, existe uma família de compactos $\{K_n\}$ tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ e K_n satisfaz a Proposição A.7. Então, dado $\varepsilon > 0$, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ e consideremos $K = K_p$. Por outro lado, considere a função $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $F(t) = \frac{1}{1+t}$. Por F ser contínua, existe $\delta > 0$ tal que, $0 \leq t < \delta$ implica

$$\frac{1}{1+t} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tomemos então $f, g \in \mathcal{C}(G)$ tais que $\sup_{z \in K}\{\|f(z) - g(z)\|\} \leq \delta$. Como $K_n \subset K$ para todo n com $1 \leq n \leq p$, segue que $0 \leq \rho_n(f, g) < \delta$, para todo $n = 1, \ldots, p$ e, portanto,

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(f, g) &= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n}\left(\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}\right) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}\right) \\
&< \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam $\delta > 0$ e $K \subset G$ um compacto quaisquer. Como

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} int K_n,$$

pela Proposição A.7, existe um $p > 1$ tal que $K \subset K_p$. Logo,

$$\sup_{z \in K}\{\|f(z) - g(z)\|\} \leq \sup_{z \in K_p}\{\|f(z) - g(z)\|\} = \rho_p(f, g).$$

Consideremos então $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 \leq s < 2^p\varepsilon$, $\frac{s}{1-s} < \delta$ (podemos supor a existência

de tal ε pela continuidade da função $\frac{s}{1-s}$ para $s \in [0,1)$). Assim,

$$\rho(f,g) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho_n(f,g)}{2^n(1+\rho_n(f,g))} < \varepsilon \Rightarrow \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p\varepsilon.$$

Portanto, tomando $s = \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$, temos $\sup_{z\in K}\{f(z)-g(z)\} \leq \rho_p(f,g) \leq \delta$.

□

Lema A.10. (a) Um conjunto $\mathcal{O}$ em $(\mathcal{C}(G),\rho)$ é aberto se, e somente se, para cada $f \in \mathcal{O}$, existirem um compacto $K \subset G$ e um $\delta > 0$ tal que

$$\{g \in \mathcal{C}(G); sup_{z\in K}\|f(z)-g(z)\| < \delta\} \subset \mathcal{O}.$$

(b) Uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(\mathcal{C}(G),\rho)$ converge se, e somente se, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre todos os compactos de G.

Proposição A.11. O espaço métrico $(\mathcal{C}(G),\rho)$ é completo.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(G)$. Então, para cada compacto $K \subset G$ a sequência das funções restritas a K, $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z\in K}\{\|f_n(z)-f_m(z)\|\} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m,n \geq N_\varepsilon. \tag{A.2}$$

Em particular, para cada $z \in G$, a sequência $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é completo, existe $\xi_z \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = \xi_z$. Consideremos então a função $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \xi_z$. Vamos mostrar que f é contínua, e que $f_n|_K \to f|_K$ uniformemente.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que vale a relação (A.2). Dado $z \in K$ qualquer, pela definição de f, existe $m_z > N_z$ para o qual $\|f_n(z)-f(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para todo $n > N_\varepsilon$, temos

$$\|f_n(z)-f(z)\| < \|f_n(z)-f_{m_z}(z)\| + \cdots + \|f_{m_z}(z)-f(z)\| < \varepsilon$$

segue que $\sup_{z\in K}\{\|f_n(z)-f(z)\|\} < \varepsilon$, para todo $n \geq N_\varepsilon$. Como n independe de z, a função $f|_K$ é limite uniforme da sequência $(f_n|_K)\, n \in \mathbb{N}$, implicando f ser contínua em K ([17], pág. 29, Theorem 6.1). Visto que $K \subset G$ foi tomado arbitrariamente, pela Proposição A.7 segue que f é contínua em G e, assim, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos para a função contínua f. Portanto, pelo Lema A.10 $(\mathcal{C}(G),\rho)$ é completo. □

Os resultados anteriores garantem que as topologias compacto-aberta τ_0 e a topologia induzida pela métrica ρ, definida acima, coincidem. Assim, temos que $\mathcal{C}(G)$ é um espaço localmente convexo metrizável completo. Em outras palavras, $\mathcal{C}(G)$ é um espaço de Fréchet. Agora, trazemos um trecho do livro do Munkres [18] que generaliza os conceitos apresentados acima, para espaços topológicos arbitrários. Como sabemos, exitem outras topologias úteis no espaço Y^X e $\mathcal{C}(X,Y)$ em adição a topologia uniforme.

Elas são chamadas a *topologia da convergência pontual, a topologia da convergência compacta* e a *topologia compacto-aberta.* A relação entre elas está indicada no próximo Teorema, cuja prova é direta e pode ser vista em [19] (pág. 285, theorem 46.7).

Teorema A.12. *Seja X um espaço, seja (Y,d) um espaço métrico. Para o espaço de funções Y^X, temos a seguinte inclusão de topologias:*

$$(\textit{uniforme}) \supset (\textit{Convergencia compacta}) \supset (\textit{convergência pontual})$$

Se X é compacto, as duas primeiras coincidem, e se X é discreto, as últimas duas coincidem.

Agora, as definições das topologias uniforme e da convergência compacta fazem uso específico da métrica do espaço Y. Porém, a topologia da convergência pontual não faz e assim é natural perguntar se qualquer uma dessa outras topologias pode ser estendida para o caso em que Y é um espaço topológico arbitrário. Não há uma resposta satisfatória a esta pergunta para o espaço Y^X de todos os funcionais de X para Y.

Porém, para o subespaço $\mathcal{C}(X,Y)$ de funções contínuas, pode-se provar que sim. Verifica-se que existe, em geral, uma topologia em $\mathcal{C}(X,Y)$, chamada de *topologia compacto-aberta*, que coincide com a topologia da convergência compacta quando Y é um espaço métrico. Esta topologia é importante, por direito próprio, como veremos.

Definição A.5. Sejam X e Y espaços topológicos. Se C é um subespaço compacto de X e U é um subconjunto aberto de U, defina

$$S(C,U) = \{f; f \in \mathcal{C}(X,Y) \text{ e } f(C) \subset U\}.$$

Os subconjuntos $S(C,U)$ formam um sub-base para um topologia em $\mathcal{C}(X,Y)$ que é chamada de *topologia compacto-aberta.*

É claro pela definição que a topologia compacto-aberta é mais fina que a convergência pontual. A topologia compacto-aberta pode, de fato, ser definida no espaço das funções Y^X. Ela é, portanto, de interesse apenas para o subespaço $\mathcal{C}(X,Y)$, então devemos considera-lá apenas para esse subespaço.

Teorema A.13. *Sejam X um espaço e (Y, d) um espaço métrico. No conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$, a topologia compacto-aberta e a topologia da convergência compacta coincidem.*

Demonstração. Se A é um subconjunto de Y e $\varepsilon > 0$, faça $U(A, \varepsilon)$ ser a $\varepsilon-$vizinhança de A. Se A é compacto e V é um aberto contendo A, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $U(S, \varepsilon) \subset V$. De fato, o valor máximo do funcional $d(a, X - Y)$ é ε. Primeiramente, provemos que a topologia da convergência compacta é mais fina que a topologia da convergência compacto-aberta. Seja $S(X, U)$ uma sub-base de elementos para a topologia compacto aberta e seja f um elemento de $S(C, U)$.

Como f é contínuo, $f(C)$ é um subconjunto compacto do conjunto aberto U. Portanto, podemos escolher ε tal que a ε-vizinhança de $f(C)$ reside em U. Então, como desejado,

$$B_C(f, \varepsilon) \subset S(C, U).$$

Agora, provemos que a topologia compacto aberta é mais fina que a topologia da convergência compacta. Seja $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Dado um conjunto aberto sobre f na topologia da convergência compacta, contém um elemento de base da forma $B_C(f, \varepsilon)$. Devemos encontrar um elemento base da topologia compacto-aberta que contém f e reside em $B_C(f, \varepsilon)$.

Cada ponto $x \in X$ têm uma vizinhança V_x tal que $f(V_x)$ reside em um conjunto aberto U_x de Y com diâmetro inferior a ε [por exemplo, escolha V_x de modo que $f_(V_x)$ reside na $\dfrac{\varepsilon}{4}$-vizinhança de $f(x)$. Então $f(\tilde{V}_x)$ reside na $\frac{\varepsilon}{3}$-vizinhança de $f(x)$, que têm o diâmetro máximo $\frac{2\varepsilon}{3}$]. Cubra C por um número finito de conjuntos V_x, pra $x = x_1, \ldots, x_n$. Seja $C_x = \tilde{V}_x \cap C$. Então C_x é compacto, e o elemento base

$$S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \cdots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n}).$$

contém f e é mais fino em $B_C(f, \varepsilon)$, como queríamos. □

Corolário A.14. Seja Y um espaço métrico. A topologia da convergência compacta em $\mathcal{C}(X, Y)$ não depende da métrica de Y. Portanto, se X é compacto, a topologia compacta em $\mathcal{C}(X, Y)$ não depende da métrica de Y.

A partir deste ponto, trazemos alguns resultados topológicos que generalizam os resultados apresentados acima. Iniciamos comentando um pouco sobre as convergências Pontual e Compacta. Existem outras topologias úteis no espaço Y^X e $\mathcal{C}(X, Y)$ em adição a topologia uniforme. Consideremos três delas: *topologia da convergência pontual, a topologia da convergência compacta e a topologia compacto-aberta.*

Definição A.6. Dado um ponto x do conjunto X e um aberto $U \subset Y$, definamos

$$S(x, U) := \{f; f \in Y^X \text{e } f(x) \in U\}$$

os conjuntos $S(x, U)$ são uma sub-base para a topologia em Y^X, que é chamada a *topologia da convergência pontual*. O elemento base geral para esta topologia é uma finita interseção de elementos da sub-base $S(x, U)$. Logo, um elemento base típico sobre um funcional f consiste de todos os funcionais g que são "fechados" para f em alguns pontos finitos.

A razão para chamarmos de topologia da convergência pontual é por causa do seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser vista em [18] (página 282, Teorema 46.1).

Teorema A.15. *Uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funcionais converge para a função f na topologia da convergência pontual se, e somente se, para cada $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ de pontos de Y converge para o ponto $f(x)$.*

Sabemos que a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções contínuas que converge na topologia uniforme tem um limite contínuo, e o exemplo da página 283 de [19] de mostra que uma sequência que converge somente na topologia pontual não necessariamente possui limite contínuo. Daí, pode-se perguntar se há uma topologia intermediária entre estas duas topologias que bastará para garantir que o limite de uma sequência convergente de funções contínuas seja em si contínua. A resposta a esse questionamento é afirmativa, assumindo a (leve) restrição que o espaço X seja *compactamente gerado*, bastará se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para f na topologia da convergência compacta, que agora definimos.

Definição A.7. Sejam (Y, d) um espaço métrico e X um espaço topológico. Dado um elemento f de $Y^X = \{f : X \to Y; f \text{ é um funcional}\}$, um subespaço compacto C de X, e um número $\varepsilon > 0$, seja $B_C(f, \varepsilon)$ o conjunto de todos os elementos g de Y^X para o qual

$$\sup_{x \in C}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon.$$

Os conjuntos $B_C(f, \varepsilon)$ formam uma base para uma topologia em Y^X. Esta topologia é chamada a *topologia da convergência compacta*. É fácil ver que os elementos $B_C(f, \varepsilon)$ satisfazem as condições para uma base.

Teorema A.16. *Sejam X e Y espaços métricos. Se a aplicação $f : X \to Y$ é contínua e o espaço X é compacto, então f é uniformemente contínua.*

A topologia da convergência compacta difere da topologia da convergência pontual na medida em que o elemento de base geral contendo f consiste de funcionais que são "fechados" para f, não apenas em um conjunto finito de pontos, mas em todos os pontos de algum conjunto compacto. A justificativa para a escolha desta terminologia segue do seguinte resultado.

Teorema A.17. *Uma sequência $f_n : X \to Y$ de funcionais converge para o funcional f na topologia compacto convergente se, e somente se, para cada subespaço compacto C de X, a sequência $f_n|_C$ converge uniformemente para $f|_C$.*

Definição A.8. Um espaço X é dito ser *compactamente gerado* se satisfaz a seguinte condição: um conjunto A é aberto em X se $A \cap C$ é aberto em C para cada subespaço compacto C de X.

Esta condição é equivalente a requerermos que um conjunto B é fechado em X se $B \cap C$ é fechado em C para cada compacto C. Ela é uma restrição bastante leve sobre o espaço; muitas famílias de espaços são compactamente gerados. Por exemplo, veja o resultado abaixo, cuja prova pode ser vista em [18].

Lema A.18. Se X é localmente compacto, ou se X satisfaz os primeiros axiomas da contabilidade, então X é compactamente gerado

Lema A.19. Se X é compactamente gerado, então uma família de funcionais $f : X \to Y$ é contínua se para cada subespaço compacto C de X, o funcional restrição $f|_C$ é contínuo.

Demonstração. Seja V um subconjunto aberto de Y. Vamos mostrar que $f^{-1}(V) \subset X$ é aberto em X. Dado qualquer subespaço C de X, temos $f^{-1}(V) \cap C = (f|_C)(V)$. Se C é compacto, este conjunto é aberto em C porque $f|_C$ é contínuo. Como X é compactamente gerado, segue que $f^{-1}(V)$ é aberto em X. □

Teorema A.20. *Seja X um espaço compactamente gerado. Sejam (Y, d) um espaço métrico. Então $\mathcal{C}(X, Y)$ é fechado em Y^X na topologia da convergência compacta.*

Demonstração. Seja $f \in Y^X$ um ponto limite de $\mathcal{C}(X, Y)$. Desejamos mostrar que f é contínuo. É suficiente mostrar que $f|_C$ é contínuo para cada subespaço compacto C de X. Para cada n, considere a vizinhança $B_C\left(f, \dfrac{1}{n}\right)$ de f. Ela intersecta $\mathcal{C}(X, Y)$ para que possamos escolher um funcional $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ nesta vizinhança. A sequência de funções $f_n|_C : C \to Y$ converge uniformemente para a função $f|_C$, que pelo Teorema do limite uniforme é contínua. □

Teorema A.21. *Seja X um espaço compactamente gerado, seja (Y, d) um espaço métrico. se uma sequência de funcionais contínuos $f_n : X \to Y$ converge para f na topologia da convergência compacta, então f é contínua.*

Definição A.9. Um espaço topológico X é um espaço T_1 se para cada par de pontos disjuntos $x, y \in X$, então existe um aberto U contendo y tal que $x \notin U$.

Para mostrar que essas definições são realmente significativas, mostramos um fato sobre os espaços T_1:

Lema A.22. Um espaço topológico X é um espaço T_1 se, e somente se, seus pontos são fechados.

Demonstração. Suponha que X é um espaço T_1 e fixe um ponto x. Cada ponto no complemento de $\{x\}$ tem uma vizinhança aberta disjunta de $\{x\}$. Tomando a união destes conjuntos, temos que $X \setminus \{x\}$ é aberto como a união de conjuntos abertos. Logo, $\{x\}$ é fechado. Reciprocamente, suponha que cada ponto de X é fechado. Então, claramente, para cada ponto $y \neq x$, temos $X \setminus \{x\}$ é uma vizinhança aberta de y e X é um espaço T_1. □

Definição A.10. Um espaço topológico X é normal se para cada par E e F de subconjuntos fechados disjuntos de X, existem conjuntos abertos e disjuntos U e V tais que $E \subset U$ e $F \subset V$.

Teorema A.23 (Lema de Urysohn). *Um espaço topológico (X, τ) é normal se, e somente se, para cada par de conjuntos fechados e disjuntos A e B em X, existe uma função $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$.*

Corolário A.24. Um espaço topológico (X, τ) é normal se, e somente se, para cada par de conjuntos fechados disjuntos A e B em X, existe uma função contínua $f : X \to [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) tal que $f(A) = a$ e $f(B) = b$.

Teorema A.25. *Seja S um espaço topológico e X um espaço métrico completo. Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy de funções de S para X na topologia uniforme, então existe uma função $f : S \to X$ tal que (f_n) converge uniformemente para f.*

Teorema A.26. *O limite de uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas de um espaço topológico X para um espaço métrico Y é contínuo.*

Definição A.11. (Hausdorff) Um espaço topológico X é um espaço T_2 se para cada par de pontos distintos $x, y \in X$, existem conjuntos abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $y \in V$.

Definição A.12. O espaço X é regular se para cada subconjunto fechado E de X e cada ponto $x \in X \setminus E$, existem abertos disjuntos U e V tais que $E \subset U$ e $x \in V$. Um espaço T_3 é um espaço T_1 regular. Novamente, é fácil ver que um espaço T_2 é um espaço T_1.

Definição A.13. O espaço X é normal se para cada par E e F de subconjuntos fechados disjuntos de X, existem conjuntos abertos disjuntos U e V tais que $E \subseteq U$ e $F \subseteq V$. Um espaço T_4 é um espaço T_1 normal. Finalmente, vejamos que todo espaço T_4 é um espaço T_3, e notemos que

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$$

Agora, trazemos a seguinte versão do Teorema da extensão de Tietze, que não vale apenas em espaços normados, mas também permite ter o alcance da aplicação em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$, não só a $[0,1]$ e cuja prova pode ser vista no Teorema A.27, no Apêndice A.

Teorema A.27 (Extensão de Tietze)**.** *Seja X um espaço topológico normal, Y um subconjunto fechado e X e $f : Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe uma função $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $h\,|_Y = f$.*

Demonstração. Começaremos considerando o caso em que f é limitado. Seja $C_0 = \sup\{\|f(y)\|; y \in Y\}$, e defina dois subconjuntos de X por

$$E_0 = \left\{y \in Y; f(y) \leq \frac{-c}{3}\right\} \text{ e } F_0 = \left\{y \in Y; f(y) \geq \frac{c}{3}\right\}.$$

É claro que E_0 e F_0 são subconjuntos disjuntos fechados de X (eles são a imagem inversa de um conjunto fechado em $\mathbb{R}$). Tomando uma combinação linear de uma função constante e uma função oriunda do Lema de Urysohn encontramos uma função contínua $g_0 : X \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{-c}{3} \leq g_0 \leq \frac{c}{3}$, $g_0(y) = \frac{-c}{3}$ para todo $y \in E_0$, e $g_0(y) = \frac{c}{3}$ para todo $y \in F_0$. Em particular, $\|g_0 \leq \frac{c}{3}\|$ e $\|f - g_0\| \leq \frac{2c}{3}$ em Y. Agora, consideremos a função $f - g_0$, e sejam

$$E_1 = \left\{y \in Y; (f - g_0)(y) \leq \frac{-2c}{9}\right\} \quad \text{e} \quad F_1 = \left\{y \in Y; (f - g_0)(y) \geq \frac{2c}{9}\right\}.$$

Daí, consideremos outro mapa g_1 (da mesma forma que construímos g_0), tal que

$$\frac{-2c}{9} \leq g_1 \leq \frac{2c}{9}$$

e $g_1|_{E_1} = \frac{-2c}{9}$ e $g_1|_{F_1} = \frac{2c}{9}$. Desta forma, temos $\|g_1\| \leq \frac{2c}{9}$ e $\|f - g_0 - g_1\| \leq \frac{4c}{9}$ em Y. Continuando desta forma, por indução, obtemos uma sequência de funções $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\|g_n\| \leq \frac{2^n c}{3^{n+1}} \tag{A.3}$$

e

$$\|f(y) - g_0(y) - g_1(y) - \cdots - g_{n-1}(y)\| \leq \frac{2^{n+1} c}{3^{n+1}} \quad \text{em} \quad Y. \tag{A.4}$$

Agora, defina $h_n = g_0 + \cdots + g_n,\ n \geq 1$. Se $n \geq m$, então

$$\begin{aligned}
\|h_n - h_m\| &= \|g_0 + \cdots + g_n - g_0 - \cdots - g_m\| \\
&= \|g_{m+1} + \cdots + g_n\| \\
&\leq \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \right) \frac{c_0}{3} \\
&\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} c_0.
\end{aligned}$$

Consequentemente a sequência $(h_n)_n$ é Cauchy onde, pelo Teorema A.25, converge uniformemente para a função $h : X \to \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema A.26, h é contínua. Portanto, h é a extensão desejada. Por fim, suponha que f não é limitada em Y. Então, escolhendo o homeomorfismo $h : (-\infty, +\infty) \to (-1, 1)$, vemos que a função $h \circ f$ é limitada em Y, e assim, pode ser estendida a função $g : X \to \mathbb{R}$. Logo, a função $h^{-1}g$ é contínua em X e é tal que $h^{-1}g|_Y = f$ é a extensão procurada. $\square$

Apêndice B

Números Cardinais

Iniciaremos este apêndice fazendo a construção de uma bijeção entre $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que pode ser usada na prova do Teorema 4.4.

Lema B.1. Exite uma bijeção $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demonstração. Inicialmente, considere a aplicação $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $h(m, n) = 2^{m-1} \cdot (2n - 1)$. Veja que h é uma bijeção. Com efeito, dado um número natural j qualquer, podemos escrever esse número como produto de seus fatores primos

$$j = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1} \cdot \prod_{k=2}^{s} p_k^{\alpha_k}, \text{ com } \alpha_k \geq 0 \text{ e } \alpha_k \in \mathbb{Z}, \ \forall k = 1, \ldots, s.$$

Como primos maiores que 2 são ímpares, e o produto de números ímpares é um número ímpar, temos $\prod_{k=1}^{s} p_k^{\alpha_k} = 2n - 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, se $\alpha_1 = m - 1 = 0$, então m=1 e $j = 2n - 1 = 2^{m-1} \cdot (2n - 1)$. Por outro lado, se $\alpha_1 = m - 1 > 0$ então $m > 1$ e, desta forma, $j = 2^{\alpha_1}(2n - 1) = 2^{m-1}(2n - 1)$. Com isso tem-se que em qualquer hipótese vale $j = 2^{m-1}(2n - 1) = h(m, n)$ e, portanto, vale a sobrejetividade de h. Agora, sejam (m_1, n_1), $(m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $h(m_1, n_1) = h(m_2, n_2)$. Então, vejamos que $m_1 \neq m_2$ não pode acontecer pois os números $h(m_1, n_1)$ e $h(m_2, n_2)$ seriam, pela unicidade da fatoração em números primos diferentes.

Logo, podemos concluir que $m_1 = m_2$. Desta forma, temos $n_1 = n_2$. Com isso, temos a injetividade de h e, portanto, h é uma bijeção. Daí, consideremos a bijeção $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ dada por $t(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1) - 1$ e façamos $g = t^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Mais explicitamente, dado $z \in \mathbb{N}_0$, existem únicos inteiros positivos m e n tais que $z = 2^{m-1}(2n - 1) - 1$. Desta forma, basta definir $g(z) = g\left(2^{m-1}(2n - 1) - 1\right) = (m, n)$ que teremos a bijeção desejada. $\square$

Agora, dizemos que dois conjuntos A e B possuem a mesma *cardinalidade* quando existir um mapa bijetivo de A para B. Isto define uma relação de equivalência na classe

do todos os conjuntos. Um *número cardinal* é pensado como uma classe de equivalência de conjuntos. Em outras palavras, dado um cardinal $\mathfrak{a}$, entende-se que $\mathfrak{a}$ consiste em todos os conjuntos $A \in \mathfrak{a}$. Neste caso, escrevemos $\operatorname{card}(A) = \mathfrak{a}$. Para outro conjunto B escrevemos $\operatorname{card}(B) = \mathfrak{a}$, quando B possui a mesma cardinalidade que A e neste caso escrevemos $\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A)$. A cardinalidade do conjunto vazio é zero, por definição a cardinalidade de um conjunto finito é igual ao seu número de elementos.

Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ números cardinais. Escrevemos $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ se existem conjuntos $A \subseteq B$, com $\operatorname{card}(A) = \mathfrak{a}$ e $\operatorname{card}(B) = \mathfrak{b}$. Isto é equivalente ao fato de que, para quaisquer conjuntos A e B, com $\operatorname{card}(A) = \mathfrak{a}$ e $\operatorname{card}(B) = \mathfrak{b}$, uma das seguintes condições é válida:

- existe $f : A \to B$ injetiva
- existe $g : B \to A$ sobrejetiva

Para dois números cardinais $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, usaremos a notação $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ para indicar que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$.

Teorema B.2 (Cantor-Bernstein-Shrõeder)**.** *Suponha que dois números cardinais $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ satisfaçam $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$. Então $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.*

Teorema B.3 (Ordem total no conjunto dos números cardinais)**.** *Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ números cardinais. Então, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$*

Proposição B.4. Seja $\mathfrak{a} \geq 1$ um número cardinal. Se A é um conjunto com $\operatorname{card}(A) = \mathfrak{a}$ e definindo $P(A) = \{B; B \subseteq A\}$, então $2^{\mathfrak{a}} = \operatorname{card}(P(A))$. Alem disso, $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

Demonstração. Faça

$$P = \{0,1\}^A = \{f; f \text{ é um mapa de A para } \{0,1\}\}.$$

De modo a $2^{\mathfrak{a}} = \operatorname{card}(P)$. Precisamos definir uma bijeção $\phi : P \to P(A)$. Com efeito, definamos

$$\phi(f) = \{a \in A; f(a) = 1\}$$

para todo $f \in P$. É claro que, uma vez que uma função $f : A \to \{0,1\}$ é completamente determinada pelo conjunto $\{a \in A; f(a) = 1\}$, o mapa ϕ é, de fato, bijetivo. Portanto, $2^{\mathfrak{a}} = \operatorname{card}(P)$. Provemos agora a segunda afirmação. Para isso, considere o mapa $\phi : A \to P(A)$ dado por $\phi(a) = \{a\}, \forall a \in A$. Como ϕ é claramente injetivo, temos $\mathfrak{a} \leq 2^{\mathfrak{a}}$. Provemos que $\mathfrak{a} \neq 2^{\mathfrak{a}}$.

Suponha, por contradição, que existe uma bijeção $\xi : A \to P(A)$. Defina o conjunto $B = \{a \in A; a \notin \xi(a)\}$ e escolha $b \in A$ tal que $B = \xi(b)$. Se $b \in B$ então $b \notin \xi(b) = B$, contradição. Agora, se $b \notin \xi(b)$, temos $b \in \xi(b)$, o que força $b \in B$, e mais uma vez temos uma contradição. Portanto, não existe uma bijeção entre A e $P(A)$. Conclusão, $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$. □

Lema B.5. (Propriedades de $\aleph_0$)
(i) Para todo número cardinal infinito $\mathfrak{a}$, temos $\aleph_0 \leq \mathfrak{a}$.
(ii) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
(iii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Demonstração. (i) Seja $\mathfrak{a}$ um número cardinal infinito, e seja A um conjunto infinito com $\operatorname{card}(A) = \mathfrak{a}$. Escolha de forma arbitrária $x_1 \in A$ e $x_2 \in A - \{x_1\}$. Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha, também de forma arbitrária, $x_n \in A - \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ e, desta forma, temos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \neq x_m$ sempre que $m \neq n$. Então, temos uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to A$. Logo,

$$\aleph_0 \leq \operatorname{card}(A) = \mathfrak{a}.$$

(ii) Considere os conjuntos $A_0 = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par}\}$ e $A_1 = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ é impar}\}$. Então claramente $\operatorname{card}(A_0) = \operatorname{card}(A_1) = \aleph_0$, e a relação $A_0 \cup A_1 = \mathbb{N}$ gera

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \operatorname{card}(A_0) + \operatorname{card}(A_1) = \operatorname{card}(A_0 \cup A_1) = \operatorname{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

(iii) Considere o conjunto $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de modo que $\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} = \operatorname{card}(P)$. É óbvio que $\operatorname{card}(P) \geq \aleph_0$. Para provar que $\operatorname{card}(P) \leq \aleph_0$, definamos uma sobrejeção $\varphi : \mathbb{N} \to P$ como segue; Para cada $n \geq 1$, tome $S_n = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$. Considere o conjunto

$$B_n = \{m \in \mathbb{N}; S_n < m < S_{n+1}\}$$

e defina $\phi_n : B_n \to P$ por

$$\phi_n(m) = (n + S_n - m, m - S_n + 1)$$

para todo $m \in B_n$. Veja que

$$\phi_n(B_n) = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; p + q = n + 1\}.$$

Note também que $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \mathbb{N}$, e $B_i \cap B_k = \emptyset, \forall j \neq k \geq 1$, então existe uma (única) função $\phi : \mathbb{N} \to P$ tal que ϕ restrito a B_n é igual a ϕ_n, para todo $n \geq 1$. Pela última relação acima, é claro que ϕ é sobrejetivo. Concluindo a prova. □

Teorema B.6. *Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ números cardinais, com $1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, e $\mathfrak{a}$ infinito. Então,*
(i) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$;
(ii) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

Corolário B.7. Se $\mathfrak{a}$ é um número cardinal infinito e $\mathfrak{b}$ é um número cardinal com $2 \leq \mathfrak{b} \leq 2^{\mathfrak{a}}$, então

$$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}}.$$

Demonstração. Temos

$$2^{\mathfrak{a}} \leq \mathfrak{b}^{\mathfrak{a}} \leq (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}}$$

e a igualdade desejada decorre do Teorema B.2. □

Corolário B.8. Para todo $n \in \mathbb{N}$, valem
(i) $n + \aleph_0 = \aleph_0$.
(ii) $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Proposição B.9. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$T = \{0,1\}^{\aleph_0} = \{a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}; \alpha_n \in \{0,1\}\,, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Assim, $2^{\aleph_0} = \operatorname{card}(T)$. Para cada número real $r \geq 2$, defina o mapa $\phi_r : T \to [0,1]$ por

$$\phi(a) = (r-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{r^n}$$

para todo $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$. Os mapas $\phi_r, r \geq 2$ são "quase" injetivas. Para esclarecer isso, definamos o conjunto

$$T_0 = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T;\ \text{o conjunto}\,\{n \in \mathbb{N}; \alpha_n = 0\}\ \text{é infinito}\}\,.$$

Veja que

$$T - T_0 = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T; \text{existe N} \in \mathbb{N}, \text{tal que} \quad \alpha_n = 1, \forall n \geq N\}\,.$$

Claramente, ϕ é sobrejetiva. Desta forma, ϕ é quase "bijetiva".
Afirmação 1: Fixe $r \geq 2$. Para elementos $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$, as afirmações seguintes são equivalentes:
(i) $\phi_r(a) > \phi_r(b)$.
(ii) Existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha_k > \beta_k$, e $\alpha_j = \beta_j, \forall j \in \mathbb{N}$, com $j < k$.
Primeiramente, provemos que (ii)$\Rightarrow$ (i). Se $a, b \in T_0$ verificam (ii), então

$$\phi_r(a) - \phi_r(b) = \frac{r-1}{r^k} + (r-1)\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\alpha_n - \beta_n}{r^n} \geq \frac{r-1}{r^k} - (r-1)\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\beta_n}{2^n}. \quad \text{(B.1)}$$

Veja agora que existe uma infinidade de índices $n \geq k+1$ tais que $\beta_n = 0$. Isto segue do fato de que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\beta_n}{r^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{r^n} = \frac{1}{(r-1)r^k}.$$

Por isso, pela relação (B.1), temos

$$\phi_r(a) - \phi_r(b) \geq \frac{r-1}{r^k} - (r-1) \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\beta_n}{r^n} > \frac{r-1}{r^k} - \frac{1}{r^k} = \frac{r-2}{r^k} \geq 0.$$

Desta forma, $\phi_r(a) > \phi_r(b)$. Provemos agora que (i) $\Rightarrow$(ii). Com efeito, se $\phi_r(a) > \phi_r(b)$, escolha $k = \min\{n \in \mathbb{N}; \alpha_n \neq \beta_n\}$ usando (ii)$\Rightarrow$(i), vemos que não podemos ter $\beta_k > \alpha_k$, pois isso forçaria $\phi(b) > \phi(a)$ e o resultado segue. Usando a primeira afirmação, vejamos agora que ϕ_r restrito à T_0 e tomando valores em $[0,1]$ é injetivo.
Afirmação 2: $\text{card}\,(T - T_0) = \aleph_0$.
Isto decorre do fato de podermos escrever

$$T - T_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,$$

onde,

$$R_n = \{a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T; \alpha_n = 1, \forall n \geq 1\}.$$

Como cada R_n é finito, o resultado desejado segue. Desta forma, usando a afirmação 2, temos

$$2^{\aleph_0} = \text{card}\,(T) = \text{card}\,(T - T_0) + \text{card}\,(T_0) = \aleph_0 + \text{card}\,(T_0),$$

como $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, a equação acima força que $2^{\aleph_0} = \text{card}\,(T_0)$. Desta forma, para cada $r \geq 2$, temos que $\text{card}\,(\phi_r(T - T_0)) \leq \aleph_0$, o que significa que $\text{card}\,(\phi_r(T) - \phi_r(T_0)) \leq \aleph_0$. Assim, usando a injetividade de ϕ_r restrito a T_0, temos $\text{card}\,(\phi_r(T_0)) = \text{card}\,(T_0) = 2^{\aleph_0}$, então, temos

$$\begin{aligned}
2^{\aleph_0} &= \text{card}\,(\phi_r(T_0)) \\
&\leq \text{card}\,(\phi_r(T)) \\
&= \text{card}\,(\phi_r(T_0)) + \text{card}\,(\phi_r(T) - \phi_r(T_0)) \\
&\leq \text{card}\,(\phi_r(T_0)) + \aleph_0 \\
&= 2^{\aleph_0} + \aleph_0 \\
&= 2^{\aleph_0}.
\end{aligned}$$

Desta forma, $\text{card}\,(\phi_r(T)) = 2^{\aleph_0}$. Daí, o resultado segue, pois para $r = 2$, temos claramente $\phi_2(T) = [0,1]$, e como sabemos, a cardinalidade de qualquer intervalo não degenerado da reta é exatamente a cardinalidade de $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathfrak{c}$. $\square$

Corolário B.10. $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Demonstração.

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

□

Lema B.11. $\dim \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathfrak{c}$.

Demonstração. Desde que cada ponto de $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como uma função constante em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, temos uma injetividade $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. E, assim,

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{c} \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)).$$

Por outro lado, $\mathbb{R}^m$ é separável (pois $\mathbb{Q}^m$ é denso em $\mathbb{R}^m$) e nós podemos enumerar $\mathbb{Q}^m = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definindo um mapa que atribui a cada função contínua $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, sequência de suas imagens de pontos racionais $(f(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos um mapa $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ que é injetivo como consequência da separabilidade de $\mathbb{R}^m$. Desde que

$$\operatorname{card}\left((\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}\right) = \operatorname{card}\left(\mathbb{R}^{n\cdot\mathbb{N}}\right) = \operatorname{card}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} \overset{\text{cor. B.10}}{=} \mathfrak{c}$$

temos $\operatorname{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \leq \mathfrak{c}$ e, portanto, concluímos que $\operatorname{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) = \mathfrak{c}$. □

Apêndice C

Análise Complexa

Apresentaremos alguns conceitos da álgebra abstrata que serão necessários.

Definição C.1. Seja $\mathcal{A}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e suponha que exista uma operação $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que associa cada elemento $(x, y) \in \mathcal{A}^2$ a um elemento $x \cdot y$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo

$$\bullet x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y), \forall x, y, z \in \mathcal{A};$$

$$\bullet (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \forall x, y, z \in \mathcal{A};$$

$$\bullet z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y, \forall x, y, z \in \mathcal{A};$$

$$\bullet \lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y), \forall x, y, \in \mathcal{A} \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Então o espaço vetorial $\mathcal{A}$ munido com tal operação é dito uma *Álgebra* sobre $\mathbb{C}$ ou uma *Álgebra Complexa*. Comumente utilizamos a notação $(\mathcal{A}, \cdot)$ para nos referir à álgebra sobre $\mathbb{C}$ em questão. Diremos que a álgebra complexa $\mathcal{A}$ possui unidade $e \in \mathcal{A}$ quando

$$e \cdot x = x \cdot e = x,$$

para qualquer $x \in \mathcal{A}$. Em uma álgebra com unidade, diremos que $x \in \mathcal{A}$ é invertível se existir $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e,$$

e neste caso x^{-1} é dito ser o elemento *inverso* de x. Observe que o espaço vetorial $\mathcal{A}$ com a nova operação $\cdot$ torna o conjunto $\mathcal{A}$ um anel com as operações $+$ e $\cdot$. A operação "$\cdot$" será comumente chamada de multiplicação da álgebra.

Definição C.2. Seja $(\mathcal{A}, \cdot)$ uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Se $\|.\| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ é uma norma no espaço vetorial $\mathcal{A}$ satisfazendo

1. $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$,
2. Se a álgebra possui unidade e então $\|e\| = 1$,

então diremos que $\|.\|$ é uma norma na álgebra $\mathcal{A}$ e, neste caso, o par $(\mathcal{A}, \|.\|)$ será mencionado como *álgebra normada*. Diremos ainda que $(\mathcal{A}, \|.\|)$ é uma *álgebra de Banach* quando for um espaço de Banach como espaço vetorial normado. Um subconjunto $A_1 \subseteq A$ é uma *subálgebra* se A_1 é uma álgebra com as operações induzidas por A.

Se A tem unidade, é essencial pedirmos que as subálgebras tenham unidade, e a mesma unidade de A. Um homomorfismo de álgebras $f : A \to B$ é um mapa tal que

$$\bullet f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2), \forall a_1, a_2 \in A;$$

$$\bullet f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) \circ f(a_2), \forall a_1, a_2 \in A;$$

$$\bullet f(\lambda \cdot a_1) = \lambda \cdot f(a_1), \forall a_1 \in A \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Quando A e B são álgebras com unidade, um homomorfismo $f : A \to B$ tal que $f(1_A) = 1_B$ é chamado *homomorfismo unitário*. Quando um homomorfismo (unitário) é bijetivo, ele é chamado *isomorfismo (unitário)*, ou simplesmente *isomorfismo*.

Definição C.3. Seja $\mathcal{V}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $\mathcal{F} \in \mathcal{V}$ é uma *álgebra livre* de $\mathcal{V}$ se existe um conjunto $\mathcal{Y}$ gerador de $\mathcal{F}$ tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e toda aplicação $h : \mathcal{Y} \to \mathcal{A}$ existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ estendendo h. $\mathcal{F}$ é então dita ser livremente gerada por $\mathcal{Y}$ e a card($\mathcal{Y}$) do conjunto $\mathcal{Y}$ é chamada de posto de $\mathcal{F}$.

A álgebra dos polinômios $\mathbb{K}[x] = \{P;\ P$ é um polinômio em X com escalares em $\mathbb{K}$ $\}$ é uma álgebra livre gerada por um elemento. De fato, seja $Z = \{X\}$ e seja $f : Z \to A_0$ um mapa de Z para uma álgebra unitária A_0 sobre $\mathbb{K}$. Então, o único homomorfismo unitário g de $\mathbb{K}[x]$ para A_0 que estende f é dado por

$$g(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_1 \cdot 1_{A_0} + a_1f(X) + \cdots + a_nf(X)^n$$

Dado um anel A, denotemos por $A^{\mathbb{N}_0}$ o conjunto de todas as sequencias (a_n) de elementos de A. O subconjunto de $A^{\mathbb{N}_0}$ formado pelas sequencias (a_n) tais que $a_n = 0$, exceto para um número finito de índices, é denotado por $A^{(\mathbb{N}_0)}$. As aplicações

$$+ : A^{\mathbb{N}_0} \times A^{\mathbb{N}_0} \to A^{\mathbb{N}_0}$$

$$\cdot : A^{\mathbb{N}_0} \times A^{\mathbb{N}_0} \to A^{\mathbb{N}_0}$$

dadas, respectivamente, por $((a_n), (b_n)) \mapsto (c_n)$ onde $c_n = a_n + b_n$, e $((a_n), (b_n)) \mapsto (d_n)$ onde $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$, fornecem a $A^{\mathbb{N}_0}$ uma estrutura de anel e $A^{(\mathbb{N}_0)}$ é um subanel de $A^{\mathbb{N}_0}$. A sequência $(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ é a sequência nula e o elemento identidade é $1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Definição C.4. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, $z \in U$ e $f : U \to \mathbb{C}$ um função de U em $\mathbb{C}$. Diremos que f é *diferenciável* em z se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é dita diferenciável se é diferenciável em todo ponto do aberto U. Também diremos que f é *holomorfa* em U. O termo holomorfa é geralmente usado para não ter que especificar a diferenciação complexa como distinta da diferenciação real. A frase "holomorfa em um ponto a" significa não só diferenciabilidade em a, mas diferenciabilidade em algum disco aberto centrado em a, no plano complexo.

Apesar da similaridade com diferenciação real, a definição de holomorfa é muito mais forte. Um exemplo disso é o fato de que se uma função f é holomorfa sua derivada complexa f' também é holomorfa, donde toda função holomorfa é infinitamente diferenciável, em contraste ao fato de que no sentido de derivada real, uma função pode sr k vezes diferenciável sem ser $k+1$ vezes diferenciável. Uma função que seja holomorfa sobre todo o plano complexo se diz uma *função Inteira*. Por $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ denotemos o espaço de todas as funções inteiras de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{C}$, ou seja, $\mathcal{H}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; f \text{ é inteira}\}$.

Definição C.5. Uma série de potência em $z \in \mathbb{C}$ é uma série infinita da forma $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, onde $a_k \in \mathbb{C}$, para todo k.

Lema C.1. Dada uma série de potência $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ existe um disco fechado de centro em 0 tal que a série converge absolutamente em todos os pontos z no interior desse disco e diverge em todos os pontos z exteriores a esse disco.

Definição C.6. O raio R do disco dado pelo Lema acima é chamado de raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Proposição C.2. Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ tal que $a_n \neq 0$ para todo natural n. Então seu raio de convergência R é dado pelas expressões

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{e} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}},$$

desde que esses limites existam.

Proposição C.3. Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

para todo z tal que $|z| < R$, isto é, podemos derivar termo a termo uma série de potências no interior de seu disco de convergência.

Essa Proposição nos diz que uma série de potências define uma função holomorfa no interior de seu disco de convergência.

Definição C.7. Sejam $f : U \to \mathbb{C}$ uma função definida em alguma vizinhança U de $z_0 \in \mathbb{C}$. Diremos que f é *analítica* em z_0 se existe uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ e algum $R > 0$ tal que a série converge absolutamente para $|z - z_0| < R$, de tal forma que, para z, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Diremos que $f : U \to \mathbb{C}$ é analítica em U quando f é analítica em cada ponto de U. Desta forma, ao invés de dizer que f é analítica em $z_0 \in U$, podemos dizer que f têm uma série de potência em z_0 (o que significa que os valores $f(z)$, para z perto de z_0, são dados por uma série de potência absolutamente convergente, como acima).

Definição C.8. Um caminho suave em $\mathbb{C}$ é uma aplicação $\gamma : J \to \mathbb{C}$ com derivada contínua em todos os pontos de J, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo da forma $J = [a, b]$, $a < b$. Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados ponto inicial e ponto terminal, respectivamente. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ dizemos que γ é um caminho fechado. Um caminho suave por partes em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de caminhos suaves $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}, \ldots, \gamma_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{C}$ satisfazendo $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$, para cada $1 \leq i \leq n - 1$. Como para caminhos suaves, dizemos que um caminho suave por partes é fechado se $\gamma_1(a_1) = \gamma_n(b_n)$, isto é, o ponto inicial do primeiro caminho da coleção coincide com o ponto terminal do último.

Definição C.9. Um subconjunto não-vazio $U \subset \mathbb{C}$ é chamado um *domínio* se U é aberto e se, dados dois pontos quaisquer $p, q \in U$, existe um caminho suave por partes, inteiramente contido em U, cujos pontos inicial e terminal são, respectivamente p e q.

Teorema C.4 (Formula da integral de Cauchy)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida no domínio $U \subset \mathbb{C}$. Sejam $\overline{D(z_0, r_0)}$ um disco fechado inteiramente contido em U e Γ sua fronteira, orientada compativelmente. Se z é um ponto qualquer no interior de $\overline{D}(z_0, r_0)$ então*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Corolário C.5 (Estimativas de Cauchy)**.** Seja f uma função holomorfa definida no disco $D(z_0, r_0)$ e suponha que $|f| \leq k$ em $D(z_0, R)$. Então,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!k}{R^n}$$

Teorema C.6. *Sejam $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde U é um domínio em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in U$ um ponto qualquer. Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

ou seja, f é dada por sua série de Taylor de centro em z_0 e, portanto, é uma função analítica. Além disso, essa série converge em qualquer disco (aberto) $D(z_0, r) \subset U$, isto é, o raio de convergência R da série acima é a menor entre as distâncias de z_0 aos pontos da fronteira de U.

Corolário C.7. Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ então em todo ponto $z \in \mathbb{C}$ f admite série de potência

Lema C.8. Sejam $D(a, r)$, $r > 0$, um disco e $f : D(a, r) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se a imagem $f(D(a, r))$ está contida num círculo $|w| = \alpha$, então f é uma função constante.

Lema C.9. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, um caminho suave por partes em U, de comprimento $l(\gamma)$. Seja $K \geq 0$ um número real tal que $|f(\gamma(t))| \leq K$ para todo $a \leq t \leq b$. Então

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq K l(\gamma).$$

Teorema C.10 (Princípio do Módulo Máximo)**.** *Sejam U um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Suponha que exista um ponto $a \in U$ tal que $|f(a)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$. Então f é uma função constante.*

Demonstração. Seja $D(a, r)$ um disco fechado centrado em a cujo fecho $\overline{D}(a, r) \subset U$. A fronteira de $D(a, r)$ é expressa por $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pela fórmula da integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - a}\, dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it}) rie^{it}}{re^{it}}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema C.9 e pela hipótese

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})|\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)|\, dt = |f(a)|$$

mas isso nos diz que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(a)| - |f(a + re^{it})|]\, dt = 0$. Como o integrando é uma função contínua não-negativa obtemos $|f(a)| = |f(a + re^{it})|$, para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Agora, como r é arbitrário e fazendo-o variar, concluímos que a imagem de um disco $D(a, R)$ por f está contida no círculo $|w| = |f(a)|$. Pelo Lema C.8, f é constante.

$\square$

Referências

[1] A. Aizuru, C. Pérez-Eslava, and J.B. Seaone-Sepúlveda, *Linear structure of sets of divergent sequences and series*, Linear Algebra Appl. 418 (2006), n°. 2-3, 595-598.

[2] A. Bartoszewicz, M. Bienias, M. Filipezak, and S. Glab, *Strong c-algebrability of strong Sierpiński-Zygmund, smooth nowhere analytic and other sets of functions*, 2014.

[3] A. Boocher, *A Proof of the Tietze Extension Theorem Using Urysohn?s Lemma.* August 22, 2005.

[4] A. L. Cauchy, *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique.* Paris, 1821. (re-impresso em Ouvres Completès, série 2, v.3. Paris: Gauthier-Villars, 1899).

[5] A. L. Cauchy *Mémoire sur les fonctions continues.* In: C. R. Acad. Sci., v. 18, p.116, 1844. (re-impresso em Ouvres Completès, série 1, v.8. Paris).

[6] A. Wilansky, *Semi-Fredholm maps in FK spaces*, Math. Z, 144 (1975) 9-12.

[7] B. Belhoste, *Cauchy: un mathématicien légitimiste au XIXe siècle Paris: Belin, 1985.*

[8] C. I. Castillo, *Funciones de Variable Compleja: Con aplicaciones a la teoría de números.*

[9] C. B. Boyer, *História da matemática: Tradução: Elza F. Gomide.*, São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[10] D. B. C. Cristina, *Operadores Hipercíclicos em espaços vetoriais topológicos*, São Paulo, USP, 2007.

[11] D. Kitson, end M. Timoney, *Operator ranges and spaceability*, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011) 680-686.

[12] E. L. Lima, *Análise real volume 1. Funções de uma variável/ Elon Lages Lima.* 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[13] G. F. Germano. *Uma Introdução a Álgebras de Banach e C^*-álgebras*/Geilson Ferreira Germano. João Pessoa, 2014.

[14] G. S. S. Figueiredo, e M. O. Friedrich, *As concepções de Euler e Cauchy para o conceito de função contínua na perspectiva de Pierre Boutroux*, X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador-BA, 2010.

[15] *https://analiseaplicada.wordpress.com/2016/06/03/as-funcoes-de-weierstrass-e-de-dirichlet/*. Acesso em : 08 de Dezembro de 2018.

[16] I. F. Pires, *Um estudo sobre bases de Schauder em espaços de Banach e aplicações do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski/ Iego Fernandes Pires*, Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

[17] J. Conway, *Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag*, New York, 1978.

[18] J. Munkres, *Topology, A first course, Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series*, 2ºed, 2000.

[19] J.R. Munkres, *Topology: A first course, 2nd ed., prentice-Hall Inc., Upper Saddle River*, N. J., 2000.

[20] K. Kannam and K. Chandrasekhara Rao. *Pasting lemmas for some Continuous Functions*, Thai Journal of Mathematics, Vol. 12, 2014, Nunmber 1: 245-249.

[21] L. Bernal-González, *The algebraic size of the family of injective operators*, DOI 10.1515/math-2017-0005.

[22] L. Bernal-González, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces, Bull*, Amer. Math. Soc., 2014, 51, 71-130.

[23] L. Bernal-González, M. C. Ordóñez, *Spaceability of strict order intergrability*, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 303-309.

[24] L. Bernal-González, e C. Ordóñez, *Lineability criteria, with applications, J.Funct.* Anal. 266 (2014), no. 6, 3997-4025.

[25] L. Palaro, *A Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue. 2006.* 242*f.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Área de concentração: Matemática. Programa Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo.

[26] L. S. B. Francisco, *Identidades e Polinômios Centrais para Álgebras de Matrizes*, Dissertação, Campina Grande-PB, 2009.

[27] M. F. Pacheco, *Funções de variação limitada/ Maria de Fátima Pacheco.* Universidade do Porto, 2001.

[28] M. G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa/ Mário Gomes Soares.* 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[29] M. I. Gil, *Localization and perturbation of zeros of entire functions Michael Gil.*, ISBN 978-1-4398-0032-4, 2010.

[30] N. G. Albuquerque, *Maximal lineability of the set of continuous surjections*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin 21 (1), 83-87, 2014.

[31] N. G. Albuquerque, *Hardy-Littlewood / Bohnenblust-Hille multilinear inequalities and Peano curves on topological vector spaces*, 2014.

[32] N. G. Albuquerque, L. Bernal-González, D. Pellegrino, end J.B. Seaone-Sepúlveda, *Peano curves on topological vector spaces*, Linear Algebra Appl. 460 (2014), 81-96.

[33] P. Jiménez-Rodrígues, S. Masghsoudi, G.A. Muñoz Fernández, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Injective mappings in* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *and lineability*, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin, (in press).

[34] P.K. Kamtan, end M. Gupta, *Theory of base e cones*, Pitman, Boston, 1985.

[35] R. Aron, V. I. Gurariy, and J. B. Seoane, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 133, Number 3, Pages 795 – 803, 2004.

[36] R. Mamede, *Notas de Análise complexa*, Departamento de Matemática,Universidade de Coimbra, 2015.

[37] R. M. Aron, L. Bernal-González, D. M. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability The Search for Linearity in Mathematics*, International Standard Book Number-13: 978-1-4822-9910-6.

[38] R. P. R. Boas, *Entire Functions*, Academic Press inc., publishers, Sew York, N. Y., volume 5, 1954.

[39] S. Willard, *General Topology, Dover*, New York, 2004.

[40] T. Roque. *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Editora Zahar, Edição digital: setembro 2012.