Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Sequências Espectrais

Rafael Ferreira Holanda

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Sequências Espectrais

por

Rafael Ferreira Holanda

sob a orientação do

Prof. Dr. José Naéliton Marques da Silva

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

H722s Holanda, Rafael Ferreira.
Sobre sequências espectrais / Rafael Ferreira Holanda. - João Pessoa, 2018.
122 f. : il.

Orientação: José Naéliton Marques da Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Sequência espectral. 3. Àlgebra Homológica. I. Silva, José Naéliton Marques da. II. Título.

UFPB/BC

Sobre Sequências Espectrais

por

Rafael Ferreira Holanda [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 26 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

José Naéliton Marques da Silva

Prof. Dr. José Naéliton Marques da Silva – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Aron Simis – UFPE
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista do(a) CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Sequência espectral é uma ferramenta utilizada para calcular, via aproximações sucessivas, as homologias de um complexo de cadeia; é empregada sempre que temos uma filtração do complexo e não conseguimos calcular suas homologias diretamente. Cada filtração de um complexo dá origem a uma sequência espectral e, dependendo das propriedades da filtração, obtemos propriedades da homologia do complexo.

Neste trabalho são apresentados, sob o viés da Teoria das Categorias, conceitos e resultados básicos de Álgebra Homológica, tais como o teorema da sequência exata longa, resoluções e δ-funtores (funtores derivados). Em seguida tratamos da teoria algébrica de sequências espectrais, a aplicamos em bicomplexos e falamos em hiperhomologia, encerrando com a sequência espectral de Grothendieck e aplicações na teoria de módulos.

Palavras-chave: Sequência espectral, Álgebra homológica, complexo de cadeia, homologia.

Abstract

Spectral sequence is a tool used to calculate, via sucessing aproximations, the homologies of a chain complex; is employed whenever have a filtration of the cocmplex and we can not calculate its homologies directly. Each filtration of a chain complex gives rise to a spectral sequence and, depending on the properties of the filtration, we obtain properties of the homology of the complex.

In this work are presented, under the bias of Category Theory, concepts and basic results of Homological Algebra, such as the long exact sequence theorem, resolutions and δ-functors (derived functors). Next we deal with the algebraic theory of spectral sequences, apply it in bicomplexes and speak in hyperhomology, ending with the Grothendieck' spectral sequence and applications in the theory of modules.

Keywords: Spectral sequence, Homological algebra, chain complex, homology.

Sumário

Introdução **vi**

1 Álgebra Homológica **1**

1.1 Complexos de Cadeia 1

1.2 Bicomplexos e totalização 21

1.3 Homotopia 28

1.4 Resoluções 29

1.5 Funtores Derivados 46

1.5.1 δ-Funtores 46

1.5.2 Funtores Derivados à Esquerda 50

1.5.3 Funtores Derivados à Direita 54

2 Sequências Espectrais **60**

2.1 Introdução informal 60

2.2 Aspectos Gerais 62

2.3 Sequência Espectral advinda de um Complexo Filtrado 74

2.4 Aplicações para bicomplexos 83

3 Hiper-homologia **93**

3.1 Hiperfuntor Derivado 93

3.2 Sequência Espectral de Grothendieck 101

A Diagrama da Serpente **105**

B Lema dos 5 **110**

Introdução

Álgebra Homológica nasceu no século 19 através do trabalho de Riemann (1857) e Betti (1871) sobre números de homologia, e do desenvolvimento formal da noção de números de homologia por Poincaré em 1895. Em 1925 Emmy Noether chamou a atenção para os grupos de homologia de um espaço e ferramentas algébricas foram desenvolvidas ao longo dos anos 30 para fins computacionais.

Em seminários sobre fundamentos de homologia e teoria de cohomologia, dados por Cartan entre 1950 e 1951, iniciou-se a colaboração entre Cartan e Eilenberg que culminara no livro [4] cujo título nomeia este novo campo. [4] foi a principal referência para o estudo de Álgebra Homológica até 1970, quando outros materias como *Homology*, de MacLane, Grothendieck [5, 6] e notas de Rotman (depois reunidas em [15]) tornaram-se populares, deixando a área estabelecida.

J. Leray (1906-1998) foi prisioneiro na segunda guerra mundial entre os anos 1940 e 1945. Até então ele trabalhava com matemática aplicada, mas, por não querer que os nazistas fizessem uso de sua pesquisa, decidiu estudar objetos mais abstratos em Topologia Algébrica. Neste período aprisionado organizou uma universidade em sua prisão e chegou a ministrar cursos de Topologia Algébrica; além disso, inventou feixes, cohomologia de feixes e, afim de computar estas cohomologias, criou sequências espectrais. De forma independente, R. C. Lyndon, em sua tese de doutorado, com o intuito de calcular a cohomologia de grupos, desenvolveu as sequências espectrais e notou importantes características suas.

Sequências exatas curtas de complexos de cadeia dão origem a sequências exatas longas nas homologias destes; isto é útil para obtermos informações desejadas sobre as homologias de um complexo $\mathcal{C}_\bullet$. Mas, desta forma, nem sempre conseguimos retirar propriedades das homologias de $\mathcal{C}_\bullet$. Por exemplo, em [15] capítulo 10, a seguinte pergunta é feita: *Seja R um anel comutativo com unidade; dado homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$, onde M é um submódulo de M', quando podemos estender f a um homomorfismo $M' \to N$?* Utilizando o teorema da sequência exata longa podemos ver que uma condição suficiente para se estender qualquer homomorfismo $f : M \to N$ a um homomorfismo $M' \to N$ é $Ext^1_R(M'/M, N) = 0$. Mas daí surge outra questão: como calcular $Ext^1_R(M'/M, N)$? Aqui entra o uso de uma ferramenta para calcular a homologia de objetos: a sequência espectral.

Estrutura do Texto

Esta dissertação possui 3 capítulos e 3 apêndices. Todos os conceitos vistos aqui foram tratados com o maior grau de generalidade possível. Devido a isto é indispensável alguma familiaridade do leitor com a Teoria das Categorias (tudo o que for necessário para ler esta dissertação pode ser visto em [10]). Além disso, o teorema do mergulho (ver [10]) foi evitado nesta dissertação, ou seja, resultados como teorema da sequência exata longa, naturalidade da conexão, conexão do cone (ver capítulo 1), diagrama da serpente e lema dos 5 (ver apêndices) foram provados apenas com o uso de ferramentas básicas da Teoria das Categorias.

Conhecimentos básicos de Álgebra Comutativa também são indispensáveis; tudo o que for inerente a esta área pode ser encontrado em [1, 2, 3, 11, 14]. Todos os aneis aqui serão comutativos com unidade.

No primeiro capítulo serão introduzidos conceitos elementares de álgebra homológica: complexos de cadeia, totalização, cone, homotopia, resoluções e δ-funtores, uma generalização natural de funtores derivados (ver [5]). No capítulo 2 sequências espectrais são apresentadas, inicialmente com um tratamento informal e depois vistas com rigor. Sequências espectrais advindas de complexos filtrados são tratadas aqui e aplicações a bicomplexos são feitas. No capítulo 3 introduzimos hiperfuntores, notamos interessantes propriedades suas e apresentamos a espectral de Grothendieck.

Os apêndices A e B tratam do diagrama da serpente e lema dos 5, respectivamente, para categorias abelianas.

Terminologia e Notações

i) Caso não seja mencionado, todos os diagramas apresentados aqui são diagramas comutativos com unidade.

ii) Conexões advindas do teorema da sequência exata longa ou as flechas dadas na definição de δ-funtores (também ditas conexões) serão denotadas por $\rightsquigarrow$.

iii) Caso não seja mencionado e esteja implícito que um objeto a é subojeto (objeto quociente) de b, o monomorfismo $a \hookrightarrow b$ (epimorfismo $b \twoheadrightarrow a$) será o canônico.

iv) Denotaremos a categoria dual à categoria $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}^*$.

Capítulo 1

Álgebra Homológica

Neste capítulo introduzimos ideias centrais de Álgebra Homológica e necessárias para o desenvolvimento dos capítulos posterioes. Toda a teoria aqui é construída sob o viés da Teoria das Categorias e sem o uso do teorema do mergulho de Mitchell [10].

A primeira seção apresenta as noções centrais de complexo de cadeia e homologia, além de resultados fundamentais, tais como o teorema da sequência exata longa e a naturalidade da conexão. Na segunda seção tratamos de bicomplexos e de totalização, importantes para o estudo de funtores com duas variáveis (produto tensorial, Hom e seus derivados, por exemplo). Nas duas seções seguintes os conceitos de homotopia e resoluções são explorados, conceitos estes fundamentais para a construção e exploração de funtores derivados. Além disso é vista uma caracterização dos objetos projetivos das categorias dos complexos de cadeia (positivos) de uma categoria abeliana fixada. Por fim, a última seção lida com funtores derivados a partir da noção mais geral de δ-funtores e com a condição de Mittag-Leffler, que será importante para o estudo de sequências espectrais.

1.1 Complexos de Cadeia

Definição 1.1.1 (`Complexo`). *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria exata e $\mathcal{C}_\bullet = \{c_n \xrightarrow{d_n} c_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de flechas de $\mathcal{A}$ indexada por $\mathbb{Z}$. Dizemos que $\mathcal{C}_\bullet$ é um complexo de cadeia de $\mathcal{A}$ (ou simplesmente complexo de $\mathcal{A}$) se $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Chamamos as flechas d_n de diferenciais e também denotaremos $\mathcal{C}_\bullet$ por*

$$\cdots \longrightarrow c_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} c_n \xrightarrow{d_n} c_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Exemplo 1.1.1. *Se $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ é uma sequência exata, então fazendo $c_2 = a, c_1 = b, c_0 = c, d_2 = f, d_1 = g, c_i = 0$ se $i \notin \{0,1,2\}$ e $d_i = 0$ se $i \notin \{1,2\}$, $\mathcal{C}_\bullet$ é um complexo de cadeia de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.1.2. *Em $\mathbb{Z}$-Mod, se R é um anel, M um R-módulo e $a \in R$, a sequência de homomorfismos*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{h_a} M \longrightarrow \frac{M}{aM} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

é um complexo de cadeia de $\mathbb{Z}-Mod$, onde $h_a(x) = ax$ para todo $x \in M$. Denotaremos h_a simplesmente por a.

Dado complexo $\mathcal{C}_\bullet = \{c_n \xrightarrow{d_n} c_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, a flecha $\ker(d_n) \hookrightarrow c_n$ é chamada de n-ésimo ciclo do complexo $\mathcal{C}_\bullet$ e a flecha $\mathrm{im}(d_{n+1}) \hookrightarrow c_n$ é chamada de n-ésimo bordo do complexo $\mathcal{C}_\bullet$. Denotaremos $\ker(d_n)$ e $\mathrm{im}(d_{n+1})$ por $Z_n(\mathcal{C}_\bullet)$ e $B_n(\mathcal{C}_\bullet)$, respectivamente. Quando não houver risco de confusão, escreveremos apenas Z_n e B_n. Observe que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ é equivalente a $B_n \subseteq Z_n$ e $\ker(c_n \twoheadrightarrow B_{n-1}) = Z_n$. Desta forma, temos duas sequências exatas

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow \frac{Z_n}{B_n} \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow c_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0.$$

Estas sequências são ditas sequências fundamentais de $\mathcal{C}_\bullet$ e diremos que $\mathcal{C}_\bullet$ cinde se estas sequências cindem para todo inteiro n. Chamamos a flecha $Z_n \twoheadrightarrow \frac{Z_n}{B_n}$ de n-ésima homologia do complexo $\mathcal{C}_\bullet$ e denotaremos $\frac{Z_n}{B_n}$ por $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ ou H_n.

Seja p um inteiro. O complexo $\mathcal{C}'_\bullet = \{c'_n \xrightarrow{d'_n} c'_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $c'_n = c_{n+p}$ e $d'_n = (-1)^p d_{n+p}$ é dito complexo translação de $\mathcal{C}_\bullet$ por p e será denotado por $\mathcal{C}_\bullet[p]$.

Dizemos que um complexo $\mathcal{C}_\bullet$ é exato se $c_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} c_n \xrightarrow{d_n} c_{n-1}$ é exata para todo inteiro n; isso ocorre se, e somente se, $H_n(\mathcal{C}_\bullet) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria exata e sejam $\mathcal{C}_\bullet = \{c_n \xrightarrow{d_n} c_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C}'_\bullet = \{c'_n \xrightarrow{d'_n} c'_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dois complexos. Uma flecha $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ é uma família de flechas $\{c_n \xrightarrow{f_n} c'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & c_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & c'_n \arrow[r, "d'_n"'] & c'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta.

Por convenção, caso não seja mencionado previamente, $\mathcal{C}_\bullet = \{c_n \xrightarrow{d_n} c_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \mathcal{C}'_\bullet = \{c'_n \xrightarrow{d'_n} c'_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C}''_\bullet = \{c''_n \xrightarrow{d''_n} c''_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ serão sempre complexos de cadeia de $\mathcal{A}$ e símbolos da forma $f_\bullet$ denotam flechas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ entre complexos de $\mathcal{A}$.

Lema 1.1.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria exata, $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet$ duas flechas entre complexos de $\mathcal{A}$. Se $g_\bullet \circ f_\bullet = \{c_n \xrightarrow{g_n \circ f_n} c''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, então $g_\bullet \circ f_\bullet$ é uma flecha entre complexos de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Por hipótese o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & c_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & c'_n \arrow[r, "d'_n"'] \arrow[d, "g_n"] & c'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] & c''_n \arrow[r, "d''_n"'] & c''_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta e portanto o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}\circ f_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n\circ f_n"] & c_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}\circ f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] & c''_n \arrow[r, "d''_n"'] & c''_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

também comuta. *Q.E.D.*

Proposição 1.1.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria exata. As flechas entre os complexos de $\mathcal{A}$ formam uma categoria; esta categoria será denotada por $Ch(\mathcal{A})$. Subobjetos serão chamados de subcomplexos e objetos quocientes de complexos quocientes.*

Demonstração. Segue imediatamente do lema anterior. *Q.E.D.*

Note que uma flecha $f_\bullet$ em $(Ch(\mathcal{A}))^*$ é um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & c_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & c'_n \arrow[r, "d'_n"'] & c'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

formado por complexos de cadeia de $\mathcal{A}$ tal que o diagrama, em $\mathcal{A}$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & c'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"] & c'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"'] & c_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta. A comutatividade do último diagrama é equivalente a comutatividade em $\mathcal{A}^*$

do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c_{n-1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & c_n \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_n"] & c_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c'_{n-1} \arrow[r, "d'_n"'] & c'_n \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & c'_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Reindexando os índices verificamos que o diagrama acima é uma flecha entre complexos de $\mathcal{A}^*$. Assim, podemos identificar a categoria $Ch(\mathcal{A}^*)$ com a categoria $(Ch(\mathcal{A}))^*$; chamaremos a categoria $Ch(\mathcal{A})^*$ de categoria das cocadeias de complexos de $\mathcal{A}$ ou categoria dos cocomplexos de $\mathcal{A}$. Devido a esta identificação vamos trabalhar apenas na categoria dos complexos de $\mathcal{A}$.

Teorema 1.1.3. *Se $\mathcal{A}$ é categoria abeliana, então $Ch(\mathcal{A})$ também o é.*

Este teorema segue diretamente dos três lemas seguintes:

Lema 1.1.4. *A categoria $Ch(\mathcal{A})$ é exata.*

Demonstração. Provaremos este lema em quatro passos.

Afirmação. *Se 0 é o objeto nulo de $\mathcal{A}$, então*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

é o objeto nulo de $Ch(\mathcal{A})$; também o denotaremos por 0.

Prova da afirmação. É claro que 0 é um complexo de $\mathcal{A}$. Agora, dado objeto $\mathcal{C}_\bullet$ de $Ch(\mathcal{A})$, para todo inteiro n, existem únicas flechas $c_n \to 0 \to c_n$ e assim

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"'] & c_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d] & c_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] & c_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

são diagramas comutativos e as flechas $\mathcal{C}_\bullet \to 0 \to \mathcal{C}_\bullet$ são únicas.

1. $Ch(\mathcal{A})$ possui núcleos e conúcleos.

Dada flecha $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$, para cada inteiro n seja $\ker(f_n) \xhookrightarrow{u_n} c_n$ o núcleo de f_n. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \ker(f_{n+1}) \arrow[d, "u_{n+1}"'] & \ker(f_n) \arrow[d, "u_n"] & \ker(f_{n-1}) \arrow[d, "u_{n-1}"] & \\
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & c_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & c'_n \arrow[r, "d'_n"'] & c'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Note que, para todo inteiro n, $f_n \circ d_{n+1} \circ u_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1} \circ u_{n+1} = 0$, isto é, $d_{n+1} \circ u_{n+1}$ se fatora pelo núcleo de f_n; seja $\{\widetilde{d}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \ker(f_{n+1}) \arrow[r, "\widetilde{d}_{n+1}"] \arrow[d, "u_{n+1}"'] & \ker(f_n) \arrow[r, "\widetilde{d}_n"] \arrow[d, "u_n"] & \ker(f_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "u_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"'] & c_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta. Como $u_{n-1} \circ \widetilde{d}_n \circ \widetilde{d}_{n+1} = d_n \circ d_{n+1} \circ u_{n+1} = 0$, sendo u_{n-1} monomorfismo tem-se $\widetilde{d}_n \circ \widetilde{d}_{n+1} = 0$. Portanto $\ker(f_\bullet) := \{\ker(f_{n+1}) \xrightarrow{\widetilde{d}_{n+1}} \ker(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um complexo e $u_\bullet := \{\ker(f_n) \xrightarrow{u_n} c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma flecha de $Ch(\mathcal{A})$.

Afirmação. *$u_\bullet$ é o núcleo de $f_\bullet$.*

Prova da afirmação. É claro que $f_\bullet \circ u_\bullet = \{f_n \circ u_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{0\}_{n\in\mathbb{Z}} = 0$. Seja $\mathcal{C}''_\bullet \xrightarrow{v_\bullet} \mathcal{C}_\bullet$ uma flecha de $Ch(\mathcal{A})$ tal que $f_\bullet \circ v_\bullet = 0$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"] \arrow[d, "v_{n+1}"'] & c''_n \arrow[r, "d''_n"] \arrow[d, "v_n"] & c''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "v_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & c_n \arrow[r, "d_n"'] & c_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta e $f_n \circ v_n = 0$ para todo inteiro n. Logo, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe única flecha $c''_n \xrightarrow{\xi_n} \ker(f_n)$ tal que $v_n = u_n \circ \xi_n$. Observe que

$$\begin{aligned} u_n \circ (\xi_n \circ d''_{n+1}) &= (u_n \circ \xi_n) \circ d''_{n+1} \\ &= v_n \circ d''_{n+1} \\ &= d_{n+1} \circ v_{n+1} \\ &= d_{n+1} \circ (u_{n+1} \circ \xi_{n+1}) \\ &= (d_{n+1} \circ u_{n+1}) \circ \xi_{n+1} \\ &= (u_n \circ \widetilde{d}_{n+1}) \circ \xi_{n+1} \\ &= u_n \circ (\widetilde{d}_{n+1} \circ \xi_{n+1}). \end{aligned}$$

Sendo u_n monomorfismo, temos que $\xi_n \circ d''_{n+1} = \widetilde{d}_{n+1} \circ \xi_{n+1}$ e portanto $\xi_\bullet$ é uma flecha de $Ch(\mathcal{A})$.

Concluímos que $v_\bullet = u_\bullet \circ \xi_\bullet$ se fatora por $u_\bullet$. A unicidade desta fatoração segue de u_n ser monomorfismo.

Observação. *O argumento acima nos mostra que o núcleo da flecha $f_\bullet$ é a família formada pelos núcleos das flechas f_n.*

Usando o fato de que $Ch(\mathcal{A}^*) = (Ch(\mathcal{A}))^*$, por dualidade temos que $f_\bullet$ possui conúcleo e este é formado pela família dos conúcleos das f_n.

2. $Ch(\mathcal{A})$ é normal e conormal.

   Suponha que $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ é um monomorfismo. É fácil ver que f_n também é um monomorfismo para todo inteiro n. Sendo $\mathcal{A}$ uma categoria exata e f_n monomorfismo, temos que f_n é o núcleo de alguma flecha; seja h_n tal flecha e considere $h_\bullet$. Da observação concluímos que $f_\bullet$ é o núcleo de $h_\bullet$ e por dualidade temos que $Ch(\mathcal{A})$ é conormal.

3. $Ch(\mathcal{A})$ possui imagens epimórficas.

   Dada flecha $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$, considere $\mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \operatorname{coker}(f_\bullet)$ o conúcleo de $f_\bullet$ e $\ker(\pi_\bullet) \xhookrightarrow{u_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ o núcleo de $\pi_\bullet$. Pela observação temos que u_n é o núcleo de π_n e π_n é o conúcleo de f_n para todo inteiro n; logo, por $\mathcal{A}$ ser exata, u_n é a imagem de f_n e se $f_n = u_n \circ v_n$ é a decomposição de f_n por sua imagem, então v_n é um epimorfismo para todo inteiro n. É imediato verificar que $v_\bullet$ é um epimorfismo e dessa forma concluímos que $Ch(\mathcal{A})$ tem imagens epimórficas.

Q.E.D.

Observação. *Note que a imagem de $f_\bullet$ é a família formada pelas imagens das flechas f_n.*

Corolário 1.1.5. *Uma sequência $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet$ é exata em $Ch(\mathcal{A})$ se, e somente se, $c_n \xrightarrow{f_n} c'_n \xrightarrow{g_n} c''_n$ é exata em $\mathcal{A}$ para todo inteiro n.*

Demonstração. Das observações anteirores temos que se $u_\bullet$ é o núcleo de $g_\bullet$, então $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{g_\bullet}$ é exata se, e somente se $u_\bullet$ é a imagem de $f_\bullet$ se, e somente se, u_n é a imagem de f_n para todo inteiro n se, e somente se, $c_n \xrightarrow{f_n} c'_n \xrightarrow{g_n} c''_n$ é exata para todo inteiro n. *Q.E.D.*

Lema 1.1.6. *Se $\mathcal{A}$ é categoria aditiva, então $Ch(\mathcal{A})$ também o é.*

Demonstração. Dadas duas flechas $f_\bullet$ e $g_\bullet$ entre $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$, defina $f_\bullet + g_\bullet := \{f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$; é fácil ver que $f_\bullet + g_\bullet$ é flecha em $Ch(\mathcal{A})$.

Afirmação. $(Ch(\mathcal{A}), +)$ *é uma categoria.*

Prova da afirmação. Sejam $f_\bullet, g_\bullet$ e $h_\bullet$ flechas de $Ch(\mathcal{A})$.

É claro que $f_\bullet + 0 = f_\bullet, 0 + f_\bullet = f_\bullet$ e, por definição de $+$, $f_\bullet + g_\bullet$ e $g_\bullet + h_\bullet$ estão definidas se, e somente se, $(f_\bullet + g_\bullet) + h_\bullet$ também está. Da mesma forma, $f_\bullet + g_\bullet$ e $g_\bullet + h_\bullet$ estão definidas se, e somente se, $f_\bullet + (g_\bullet + h_\bullet)$ está definida. Neste caso também temos que

$$\begin{aligned}
(f_\bullet + g_\bullet) + h_\bullet &= (\{f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) + \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \{(f_n + g_n) + h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \{f_n + (g_n + h_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} + (\{g_n + h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) \\
&= f_\bullet + (g_\bullet + h_\bullet).
\end{aligned}$$

Agora vamos provar que $(Ch(\mathcal{A}), \circ, +)$ é aditiva:

1. $+$ é comutativa: se $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são tais que $f_\bullet + g_\bullet$ está definida, temos $f_\bullet + g_\bullet = \{f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{g_n + f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = g_\bullet + f_\bullet$.

2. $\circ$ é distributiva em relação à $+$: sejam $f_\bullet, g_\bullet, h_\bullet$ e $i_\bullet$ tais que $g_\bullet \circ f_\bullet, h_\bullet \circ f_\bullet, i_\bullet \circ g_\bullet, i_\bullet \circ h_\bullet$ e $g_\bullet + h_\bullet$ estejam definidas. Temos que $(g_\bullet + h_\bullet) \circ f_\bullet$ está definida e $(g_n \circ h_n) \circ f_n = g_n \circ f_n + h_n \circ f_n$ implica $(g_\bullet + h_\bullet) \circ f_\bullet = g_\bullet \circ f_\bullet + h_\bullet \circ f_\bullet$. Analogamente verificamos que $i_\bullet \circ (g_\bullet + h_\bullet) = i_\bullet \circ g_\bullet + i_\bullet \circ h_\bullet$.

3. Dada flecha $f_\bullet$ em $Ch(\mathcal{A})$ e objeto $\mathcal{C}_\bullet$ de $Ch(\mathcal{A})$, é imediato verificar que o conjunto $Hom(1_{\mathcal{C}_\bullet}, f_\bullet)$ e $Hom(f_\bullet, 1_{\mathcal{C}_\bullet})$ levam identidades em identidades.

4. Para todos objetos $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet$ de $Ch(\mathcal{A})$, $+$ está definida em toda parte do conjunto $Hom_{Ch(\mathcal{A})}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet)$ (por definição).

5. Toda flecha $f_\bullet \in Hom_{Ch(\mathcal{A})}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ é um isomorfismo: sendo $f_\bullet$ isomorfismo, é fácil ver que f_n também o é, para todo $n \in \mathbb{Z}$. A flecha $h_\bullet = \{-f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é tal que $f_\bullet + h_\bullet = h_\bullet + f_\bullet = 0$.

Q.E.D.

Lema 1.1.7. *Se $\mathcal{A}$ admite produtos arbitrários, então $Ch(\mathcal{A})$ também admite.*

Demonstração. Sejam I um conjunto e $\{\mathcal{C}_{\bullet,i}\}_{i\in I}$ uma família de objetos de $Ch(\mathcal{A})$. Para cada $i \in I$ escreva $\mathcal{C}_{\bullet,i} = \{c_{m,i} \xrightarrow{d_{m,i}} c_{m-1,i}\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Fixe inteiro m e considere a família $\{c_{m,i}\}_{i\in I}$; seja $\left\{\prod_{j\in I} c_{m,j} \xrightarrow{p_{m,i}} c_{m,i}\right\}_{i\in I}$ o produto de $\{c_{m,i}\}_{i\in I}$ e considere as composições

$$\prod_{j\in I} c_{m,j} \xrightarrow{p_{m,i}} c_{m,i} \xrightarrow{d_{m,i}} c_{m-1,i}.$$

Assim existe uma única flecha d_m tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{j\in I} c_{m,j} \arrow[r, "d_{m,i}\circ p_{m,i}"] \arrow[d, "d_m"'] & c_{m-1,i} \\ \prod_{j\in I} c_{m-1,j} \arrow[ur, "p_{m-1,i}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

comuta. para todo $i \in I$. Considere a família $\mathcal{C}_\bullet = \{\prod_{j\in I} c_{m,j} \xrightarrow{d_m} \prod_{j\in I} c_{m-1,j}\}_{m\in\mathbb{Z}}$.

Afirmação. *$\mathcal{C}_\bullet$ é um complexo e a família $\{\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{p_{\bullet,i}} \mathcal{C}_{\bullet,i}\}_{i\in I}$ é o produto da família $\{\mathcal{C}_{\bullet,i}\}_{i\in I}$.*

Prova da afirmação. Provaremos a afirmação em duas etapas.

1. $\mathcal{C}_\bullet$ é um complexo.

   De fato, fixado $i \in I$, note que

$$\begin{aligned} p_{m-1,i} \circ (d_m \circ d_{m+1}) &= (p_{m-1,i} \circ d_m) \circ d_{m+1} \\ &= (d_{m,i} \circ p_{m,i}) \circ d_{m+1} \\ &= d_{m,i} \circ (p_{m,i} \circ d_{m+1}) \\ &= d_{m,i} \circ (d_{m+1,i} \circ p_{m+1,i}) \\ &= (d_{m,i} \circ d_{m+1,i}) \circ p_{m+1,i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Da propriedade universal do produto concluímos que

$$d_m \circ d_{m+1} = 0.$$

2. $\{\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{p_{\bullet,i}} \mathcal{C}_{\bullet,i}\}_{i\in I}$ é o produto da família $\{\mathcal{C}_{\bullet,i}\}_{i\in I}$.

   Primeiro note que $p_{\bullet,i}$ é uma flecha em $Ch(\mathcal{A})$ para todo $i \in I$, pois de (1.1.1)

segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \prod_{j\in I} c_{m+1,j} \arrow[r, "d_{m+1}"] \arrow[d, "p_{m+1,i}"'] & \prod_{j\in I} c_{m,j} \arrow[r, "d_m"] \arrow[d, "p_{m,i}"] & \prod_{j\in I} c_{m-1,j} \arrow[r] \arrow[d, "p_{m-1,i}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c_{m+1,i} \arrow[r, "d_{m+1,i}"'] & c_{m,i} \arrow[r, "d_{m,i}"'] & c_{m-1,i} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta.

Agora, seja $\{\mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{f_{\bullet,i}} \mathcal{C}_{\bullet,i}\}_{i\in I}$ uma família de flechas em $Ch(\mathcal{A})$. Fixado inteiro m temos uma família $\{c'_m \xrightarrow{f_{m,i}} c_{m,i}\}_{i\in I}$ e assim existe uma única flecha f_m tal que

$$\begin{tikzcd}
c'_m \arrow[r, "f_{m,i}"] \arrow[d, "f_m"'] & c_{m,i} \\
\prod_{j\in I} c_{m,j} \arrow[ur, "p_{m,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Afirmação. *$f_\bullet$ é uma flecha em $Ch(\mathcal{A})$ e é a única tal que*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}'_\bullet \arrow[r, "f_{\bullet,i}"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & \mathcal{C}_{\bullet,i} \\
\mathcal{C}_\bullet \arrow[ur, "p_{\bullet,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta para todo $i \in I$.

Prova da afirmação. Fixado inteiro m temos

$$\begin{aligned}
p_{m-1,i} \circ (d_m \circ f_m) &= (p_{m-1,i} \circ d_m) \circ f_m \\
&= (d_{m,i} \circ p_{m,i}) \circ f_m \\
&= d_{m,i} \circ f_{m,i} \\
&= f_{m-1,i} \circ d'_{m,i} \\
&= (p_{m-1,i} \circ f_{m-1}) \circ d'_m \\
&= p_{m-1,i} \circ (f_{m-1} \circ d'_m)
\end{aligned}$$

para todo $i \in I$; segue que $d_m \circ f_m = f_{m-1} \circ d'_m$ e portanto $\mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{f} \mathcal{C}_\bullet$ é uma flecha de $Ch(\mathcal{A})$.

Agora, seja $g_\bullet$ uma flecha tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}'_\bullet \arrow[r, "f_{\bullet,i}"] \arrow[d, "g_\bullet"'] & \mathcal{C}_{\bullet,i} \\
\mathcal{C}_\bullet \arrow[ur, "p_{\bullet,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. Temos $p_{m,i} \circ g_m = f_{m,i}$ para todos $m \in \mathbb{Z}$ e $i \in I$. Da unicidade das flechas f_m temos que $f_m = g_m$ para todo inteiro m e portanto $f_\bullet = g_\bullet$.

Q.E.D.

Teorema 1.1.8 (`Sequência Exata Longa`). *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana e $0 \to \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet \to 0$ é uma sequência exata em $Ch(\mathcal{A})$, então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \rightsquigarrow H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{Z}$. Se Z'_n, Z_n, Z''_n são os n-ésimos ciclos e B'_n, B_n, B''_n os n-ésimos bordos das flechas d'_n, d_n e d''_n, respectivamente, temos um diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
 & Z'_n \arrow[d, "i'_n"'] & Z_n \arrow[d, "i_n"] & Z''_n \arrow[d, "i''_n"] & \\
0 \arrow[r] & c'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & c_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & c''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & c'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] \arrow[d, "\pi'_{n-1}"'] & c_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] \arrow[d, "\pi_{n-1}"] & c''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi''_{n-1}"] & 0 \\
 & \frac{c'_{n-1}}{B'_{n-1}} & \frac{c_{n-1}}{B_{n-1}} & \frac{c''_{n-1}}{B''_{n-1}} &
\end{tikzcd}$$

Repare que

$$d_n \circ f_n \circ i'_n = f_{n-1} \circ d'_n \circ i'_n = 0,$$

ou seja, $f_n \circ i'_n$ se fatora pelo núcleo i_n de d_n. Seja $\widehat{f_n}$ a única flecha tal que

$$\begin{tikzcd}
Z'_n \arrow[r, "\widehat{f_n}"] \arrow[d, "i'_n"'] & Z_n \arrow[d, "i_n"] \\
c'_n \arrow[r, "f_n"'] & c_n
\end{tikzcd}$$

comuta. Sendo i'_n e f_n monomorfismos, $\widehat{f_n}$ também o é; dizemos que $\widehat{f_n}$ é uma flecha induzida por f_n.

De forma similar garantimos também a existência de únicas flechas $\widehat{g}_n, \overline{f}_{n-1}$ e $\overline{g}_{n-1}$ tais que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z'_n \arrow[r, "\widehat{f}_n"] \arrow[d, "i'_n"'] & Z_n \arrow[r, "\widehat{g}_n"] \arrow[d, "i_n"] & Z''_n \arrow[d, "i''_n"] & \\
0 \arrow[r] & c'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & c_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & c''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & c'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] \arrow[d, "\pi'_{n-1}"'] & c_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] \arrow[d, "\pi_{n-1}"] & c''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi''_{n-1}"] & 0 \\
 & \frac{c'_{n-1}}{B'_{n-1}} \arrow[r, "\overline{f}_{n-1}"'] & \frac{c_{n-1}}{B_{n-1}} \arrow[r, "\overline{g}_{n-1}"'] & \frac{c''_{n-1}}{B''_{n-1}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo com linhas exatas.

Afirmação. *Existe um diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{c'_n}{B'_n} \arrow[r, "\overline{f_n}"] \arrow[d, "\widetilde{d'}_n"'] & \frac{c_n}{B_n} \arrow[r, "\overline{g}_n"] \arrow[d, "\widetilde{d}_n"] & \frac{c''_n}{B''_n} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d''_n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r, "\widehat{f}_{n-1}"'] & Z_{n-1} \arrow[r, "\widehat{g}_{n-1}"'] & Z''_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

onde $\widetilde{d'}_n, \widetilde{d}_n$ e $\widetilde{d''}_n$ são flechas induzidas por d'_n, d_n e d''_n, respectivamente.

Prova da afirmação. 1. Existência de $\widetilde{d}_n$.

Como $d_{n-1} \circ d_n = 0$, temos que d_n se fatora pelo núcleo de d_{n-1}, isto é, existe única flecha $\widehat{d}_n$ tal que $d_n = i_{n-1} \circ \widehat{d}_n$. De

$$i_{n-1} \circ \widehat{d}_n \circ d_{n+1} = d_n \circ d_{n+1} = 0$$

e, sendo i_{n-1} monomorfismo, segue que $\widehat{d}_n \circ d_{n+1} = 0$; logo $\widehat{d}_n$ se fatora pelo conúcleo de d_{n+1} e, portanto, pelo conúcleo de $B_n \hookrightarrow c_n$, ou seja, existe único $\widetilde{d}_n$ tal que $\widehat{d}_n = \widetilde{d}_n \circ \pi_n$.

2. $\widetilde{d}_n \circ \overline{f}_n = \widehat{f}_{n-1} \circ \widetilde{d'}_n$.

Note que

$$\begin{aligned}
i_{n-1} \circ (\widehat{f}_{n-1} \circ \widetilde{d'}_n) \circ \pi'_n &= (i_{n-1} \circ \widehat{f}_{n-1}) \circ (\widetilde{d'}_n \circ \pi'_n) \\
&= (f_{n-1} \circ i'_{n-1}) \circ \widehat{d'}_n \\
&= f_{n-1} \circ (i'_{n-1} \circ \widehat{d'}_n) \\
&= f_{n-1} \circ d'_n \\
&= d_n \circ f_n \\
&= (i_{n-1} \circ \widehat{d}_n) \circ f_n \\
&= i_{n-1} \circ (\widetilde{d}_n \circ \pi_n) \circ f_n \\
&= (i_{n-1} \circ \widetilde{d}_n) \circ (\pi_n \circ f_n) \\
&= i_{n-1} \circ \widetilde{d}_n \circ \overline{f}_n \circ \pi'_n
\end{aligned}$$

e, sendo i_{n-1} monomorfismo e π'_n epimorfismo, concluímos que $\widetilde{d}_n \circ \overline{f}_n = \widehat{f}_{n-1} \circ \widetilde{d'}_n$.

Segue da afirmação e do diagrama da serpente que existe uma sequência exata

$$\ker(\widetilde{d'}_n) \longrightarrow \ker(\widetilde{d}_n) \longrightarrow \ker(\widetilde{d''}_n) \rightsquigarrow coker(\widetilde{d'}_n) \longrightarrow coker(\widetilde{d}_n) \longrightarrow coker(\widetilde{d''}_n).$$

Afirmação. $\ker(\widetilde{d}_n) \simeq H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ *e* $coker(\widetilde{d}_n) \simeq H_{n-1}(\mathcal{C}_\bullet)$.

Prova da afirmação. 1. $\ker(\widetilde{d}_n) \simeq H_n(\mathcal{C}_\bullet)$.

Lembre que $B_{n-1} \simeq c_n/Z_n$; logo o teorema do isomorfismo nos garante que existe diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\overline{\pi}_n"'] & c_n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d, "\pi_n"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "1_{B_{n-1}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[r, "\overline{i}_n"'] & \frac{c_n}{B_n} \arrow[r, "\overline{\gamma}_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cujas flechas são todas as canônicas. Temos

$$\begin{aligned}
(k_{n-1} \circ \overline{\gamma}_n) \circ \pi_n &= k_{n-1} \circ (\overline{\gamma}_n \circ \pi_n) \\
&= k_{n-1} \circ \gamma_n.
\end{aligned}$$

Se $B_{n-1} \overset{j_{n-1}}{\hookrightarrow} c_{n-1}$ e $B_{n-1} \overset{k_{n-1}}{\hookrightarrow} Z_{n-1}$ são as flechas canônicas, então $j_{n-1} = i_{n-1} \circ k_{n-1}$ e assim

$$\begin{aligned}
i_{n-1} \circ \widehat{d}_n &= d_n \\
&= j_{n-1} \circ \gamma_n \\
&= (i_{n-1} \circ k_{n-1}) \circ \gamma_n \\
&= i_{n-1} \circ (k_{n-1} \circ \gamma_n) \\
&= i_{n-1} \circ ((k_{n-1} \circ \overline{\gamma}_n) \circ \pi_n).
\end{aligned}$$

Daí $\widehat{d}_n = (k_{n-1} \circ \overline{\gamma}_n) \circ \pi_n$. Da unicidade de $\widetilde{d}_n$ segue que $\widetilde{d}_n = k_{n-1} \circ \overline{\gamma}_n$ e, sendo k_{n-1} monomorfismo, concluímos que

$$\ker(\widetilde{d}_n) = \ker\left(k_{n-1} \circ \overline{\gamma}_n\right) \simeq \ker\left(\overline{\gamma}_n\right) = H_n\left(\mathcal{C}_\bullet\right).$$

2. $coker(\widetilde{d}_n) \simeq H_{n-1}\left(\mathcal{C}_\bullet\right)$.

   Seja $\widetilde{d}_n = v_n \circ \mu_n$ a fatoração de $\widetilde{d}_n$ por sua imagem. Temos

$$\begin{aligned} d_n &= i_{n-1} \circ \widehat{d}_n \\ &= i_{n-1} \circ (\widetilde{d}_n \circ \pi_n) \\ &= i_{n-1} \circ (v_n \circ \mu_n) \circ \pi_n \\ &= (i_{n-1} \circ v_n) \circ (\mu_n \circ \pi_n). \end{aligned}$$

   Como $i_{n-1} \circ v_n$ é um monomorfismo e $\mu_n \circ \pi_n$ é um epimorfismo, segue que $i_{n-1} \circ v_n$ é a imagem de d_n, isto é, $B_{n-1} \simeq im(\widetilde{d}_n)$. Como μ_n é epimorfismo, então $coker(v_n) \simeq coker(v_n \circ \mu_n)$ e assim

$$H_{n-1}\left(\mathcal{C}_\bullet\right) = \frac{Z_{n-1}}{B_{n-1}} \simeq \frac{Z_{n-1}}{im(\widetilde{d}_n)} \simeq coker(\widetilde{d}_n).$$

Provamos que para cada inteiro n existe uma sequência exata

$$H_n\left(\mathcal{C}'_\bullet\right) \xrightarrow{\eta_n} H_n\left(\mathcal{C}_\bullet\right) \xrightarrow{\eta'_n} H_n\left(\mathcal{C}''_\bullet\right) \rightsquigarrow H_{n-1}\left(\mathcal{C}'_\bullet\right) \xrightarrow{\theta_{n-1}} H_{n-1}\left(\mathcal{C}_\bullet\right) \xrightarrow{\theta'_{n-1}} H_{n-1}\left(\mathcal{C}''_\bullet\right).$$

Para concluir o teorema resta provar que $\eta_n = \theta_n$ e $\eta'_n = \theta'_n$ para todo inteiro n. É suficiente provar a primeira igualdade, pois o mesmo argumento implicará a segunda. Lembre que η_n e θ_n são as únicas flechas tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} H_n\left(\mathcal{C}'_\bullet\right) \arrow[r, "\eta_n"] \arrow[d, "\overline{i'}_n"'] & H_n\left(\mathcal{C}_\bullet\right) \arrow[d, "\overline{i}_n"] \\ \frac{c'_n}{B'_n} \arrow[r, "\overline{f}_n"'] & \frac{c_n}{B_n} \end{tikzcd} \qquad \text{e} \qquad \begin{tikzcd} Z'_n \arrow[r, "\widehat{f}_n"] \arrow[d, "\overline{\pi'}_n"'] & Z_n \arrow[d, "\overline{\pi}_n"] \\ H_n\left(\mathcal{C}'_\bullet\right) \arrow[r, "\theta_n"'] & H_n\left(\mathcal{C}_\bullet\right) \end{tikzcd}$$

comutam. Repare que

$$\begin{aligned}
(\bar{i}_n \circ \theta_n) \circ \overline{\pi'}_n &= \bar{i}_n \circ (\theta_n \circ \overline{\pi'}_n) = \bar{i}_n \circ (\overline{\pi}_n \circ \widehat{f}_n) \\
&= (\bar{i}_n \circ \overline{\pi}_n) \circ \widehat{f}_n = (\pi_n \circ i_n) \circ \widehat{f}_n \\
&= \pi_n \circ (i_n \circ \widehat{f}_n) = \pi_n \circ (f_n \circ i'_n) \\
&= (\pi_n \circ f_n) \circ i'_n = (\overline{f}_n \circ \pi'_n) \circ i'_n \\
&= \overline{f}_n \circ (\pi'_n \circ i'_n) = \overline{f}_n \circ (\overline{i'}_n \circ \overline{\pi'}_n) \\
&= (\overline{f}_n \circ \overline{i'}_n) \circ \overline{\pi'}_n
\end{aligned}$$

e, como $\overline{\pi'}_n$ é um epimorfismo, segue que

$$\bar{i}_n \circ \theta_n = \overline{f}_n \circ \overline{i'}_n.$$

Logo $\theta_n = \eta_n$. *Q.E.D.*

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias aditivas. Se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um funtor covariante aditivo, então podemos definir um funtor $Ch(T) : Ch(\mathcal{A}) \to Ch(\mathcal{B})$ da seguinte maneira: para cada objeto $\mathcal{C}_\bullet$ de $Ch(\mathcal{A})$ definimos $Ch(T)(\mathcal{C}_\bullet) = \{T(c_n) \xrightarrow{T(d_n)} T(c_{n-1})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e para cada flecha $f_\bullet$ em $Ch(\mathcal{A})$, $Ch(T)(f_\bullet) = \{T(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. É imediato verificar que $Ch(T)(\mathcal{C}_\bullet)$ é um complexo de $\mathcal{B}$ e $Ch(T)(f_\bullet)$ uma flecha em $Ch(\mathcal{B})$. A definição é análoga se T for contravariante.

Afirmação. *$Ch(T)$ é um funtor covariante aditivo.*

Prova da afirmação. Dadas flechas $f_\bullet$ e $g_\bullet$ em $Ch(\mathcal{A})$, se $g_\bullet \circ f_\bullet$ está definida, temos

$$\begin{aligned}
Ch(T)(g_\bullet \circ f_\bullet) &= \{T(g_n \circ f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \{T(g_n) \circ T(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \{T(g_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \circ \{T(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= Ch(T)(g_\bullet) \circ Ch(T)(f_\bullet)
\end{aligned}$$

e, se $g_\bullet + f_\bullet$ está definida, temos

$$\begin{aligned}
Ch(T)(g_\bullet + f_\bullet) &= \{T(g_n + f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \{T(g_n) + T(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \{T(g_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} + \{T(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= Ch(T)(g_\bullet) + Ch(T)(f_\bullet).
\end{aligned}$$

É claro que $Ch(T)(1_{\mathcal{C}_\bullet}) = 1_{Ch(T)(\mathcal{C}_\bullet)}$.

Caso T seja funtor contravariante verificamos de forma similar que $Ch(T)$ também o é. Além disso, de T é exato à direita (à esquerda), então $Ch(T)$ é exato à direita (à esquerda).

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e n inteiro. Provaremos que flechas em $Ch(\mathcal{A})$ induzem flechas nos ciclos, bordos e homologias entre os complexos de $\mathcal{A}$; isto define funtores covariantes aditivos entre $Ch(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}$, ditos funtor ciclo, funtor bordo e funtor homologia e serão denotados por Z_n, B_n e H_n, respectivamente.

Seja $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ flecha em $Ch(\mathcal{A})$.

1. **Funtor ciclo.**

   Se $Z_n \xrightarrow{i_n} c_n$ e $Z'_n \xrightarrow{i'_n} c'_n$ são os n-ésimos ciclos de $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$, respectivamente, note que

$$d'_n \circ (f_n \circ i_n) = (d'_n \circ f_n) \circ i_n = (f_{n-1} \circ d_n) \circ i_n = f_{n-1} \circ (d_n \circ i_n) = 0$$

   e assim existe única flecha $Z_n(f_\bullet)$ tal que

$$\begin{tikzcd} Z_n \arrow[r, "Z_n(f_\bullet)"] \arrow[d, "i_n"'] & Z'_n \arrow[d, "i'_n"] \\ c_n \arrow[r, "f_n"'] & c'_n \end{tikzcd}$$

   comuta.

   Afirmação.

$$\begin{array}{rccc} Z_n : & Ch(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & f_\bullet & \longmapsto & Z_n(f_\bullet) \end{array}$$

   é funtor covariante aditivo.

   A afirmação segue diretamente da unicidade da flecha $Z_n(f_\bullet)$ no diagrama acima.

2. **Funtor bordo.**

   Sejam $B_n \xrightarrow{j_n} c_n$ e $B'_n \xrightarrow{j'_n} c'_n$ os n-ésimos bordos de $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$, respectivamente. Se $d_{n+1} = j_n \circ \widehat{d}_{n+1}$ e $d'_{n+1} = j'_n \circ \widehat{d'}_{n+1}$ são as fatorações de d_{n+1} e d'_{n+1} por suas imagens e $c'_n \xrightarrow{\pi'_n} \frac{c'_n}{B'_n}$ é a projeção canônica, do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} c_{n+1} \arrow[r, "\widehat{d}_{n+1}"'] \arrow[rr, bend left, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "j_n"'] & c_n \arrow[d, "f_n"] & \\ c'_{n+1} \arrow[r, "\widehat{d'}_{n+1}"] \arrow[rr, bend right, "d'_{n+1}"'] & B'_n \arrow[r, "j'_n"] & c'_n \arrow[r, "\pi'_n"'] & \frac{c'_n}{B'_n} \end{tikzcd}$$

   temos que $\pi'_n \circ (f_n \circ j_n) \circ \widehat{d}_{n+1} = 0$ e assim $\pi'_n \circ (f_n \circ j_n) = 0$. Logo existe única

flecha $B_n(f_\bullet)$ tal que

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[r, "B_n(f_\bullet)"] \arrow[d, "j_n"'] & B'_n \arrow[d, "j'_n"] \\ C_n \arrow[r, "f_n"'] & C'_n \end{tikzcd}$$

Segue imediatamente da unicidade da flecha $B_n(f_\bullet)$ que

$$\begin{array}{rccc} B_n: & Ch(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & f_\bullet & \longmapsto & B_n(f_\bullet) \end{array}$$

é um funtor covariante aditivo.

3. **Funtor Homologia.**

Se $B_n \xrightarrow{k_n} Z_n$ e $B'_n \xrightarrow{k'_n} Z'_n$ são as flechas canônicas, então temos

$$\begin{aligned} i'_n \circ (k'_n \circ B_n(f_\bullet)) &= (i'_n \circ k'_n) \circ B_n(f_\bullet) \\ &= j'_n \circ B_n(f_\bullet) \\ &= f_n \circ j_n = f_n \circ (i_n \circ k_n) \\ &= (f_n \circ i_n) \circ k_n = (i'_n \circ Z_n(f_\bullet)) \circ k_n \\ &= i'_n \circ (Z_n(f_\bullet) \circ k_n) \end{aligned}$$

e portanto o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[r, "k_n"] \arrow[d, "B_n(f_\bullet)"'] & Z_n \arrow[d, "Z_n(f_\bullet)"] \\ B'_n \arrow[r, "k'_n"] & Z'_n \end{tikzcd}$$

Sejam $Z_n \xrightarrow{p_n} H_n$ e $Z'_n \xrightarrow{p'_n} H'_n$ as n-ésimas homologias dos complexos $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$, respectivamente. Segue do diagrama acima que existe única flecha $H_n(f_\bullet)$ tal que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_n \arrow[r, "k_n"] \arrow[d, "B_n(f_\bullet)"'] & Z_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "Z_n(f_\bullet)"] & H_n \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f_\bullet)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B'_n \arrow[r, "k'_n"'] & Z'_n \arrow[r, "p'_n"'] & H'_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo com linhas exatas.

A unicidade da flecha $H_n(f_\bullet)$ implica que

$$\begin{array}{rccc} H_n: & Ch(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & f_\bullet & \longmapsto & H_n(f_\bullet) \end{array}$$

é um funtor covariante aditivo.

Observação.

i) Repare que na demonstração do teorema da sequência exata longa $\widehat{f_n} = Z_n(f_\bullet)$ *e* $\theta_n = H_n(f_\bullet)$ *para todo inteiro* n.

ii) Se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *funtor covariante exato, dada flecha* $f_\bullet$ *em* $Ch(\mathcal{A})$ *é imediato verificar que* $T(Z_n(f_\bullet)) = Z_n(Ch(T)(f_\bullet)), T(B_n(f_\bullet)) = B_n(Ch(T)(f_\bullet))$ *e que* $T(H_n(f_\bullet)) = H_n(Ch(T)(f_\bullet))$ *para todo inteiro* n*, e isto significa que o funtor homologia comuta com funtores exatos.*

Corolário 1.1.9 (`Naturalidade da conexão`)**.** *Seja* $\mathcal{A}$ *uma categoria abeliana. Se*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}'_\bullet \arrow[r, "u_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & \mathcal{C}_\bullet \arrow[r, "v_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & \mathcal{C}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}'_\bullet \arrow[r, "u'_\bullet"'] & \mathcal{E}_\bullet \arrow[r, "v'_\bullet"'] & \mathcal{E}''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo com linhas exatas, então para todo inteiro n *o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \arrow[r, squiggly, "\delta"] \arrow[d, "H_n(h_\bullet)"'] & H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet) \arrow[d, "H_{n-1}(f_\bullet)"] \\
H_n(\mathcal{E}''_\bullet) \arrow[r, squiggly, "\delta'"'] & H_{n-1}(\mathcal{E}'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Fixe inteiro n. Os seguintes diagramas surgem na demonstração do teorema da sequência exata longa:

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \arrow[d, "l_n"] & \\
 & \frac{c'_n}{B_n(\mathcal{C}'_\bullet)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{c_n}{B_n(\mathcal{C}_\bullet)} \arrow[r, "\overline{v}_n"] \arrow[d, "\widetilde{d}_n"] & \frac{c''_n}{B_n(\mathcal{C}''_\bullet)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet) \arrow[r, "Z_{n-1}(u_\bullet)"'] \arrow[d, "p_{n-1}"'] & Z_{n-1}(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathcal{C}''_\bullet) & \\
 & H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet) & & &
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_n(\mathcal{E}''_\bullet) \arrow[d, "k_n"] & \\
 & \frac{E'_n}{B_n(\mathcal{E}'_\bullet)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{E_n}{B_n(\mathcal{E}_\bullet)} \arrow[r, "\overline{v'}_n"] \arrow[d, "\widetilde{d}_n"] & \frac{E''_n}{B_n(\mathcal{E}''_\bullet)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathcal{E}'_\bullet) \arrow[r, "Z_{n-1}(u'_\bullet)"'] \arrow[d, "p'_{n-1}"'] & Z_{n-1}(\mathcal{E}_\bullet) \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathcal{E}''_\bullet) & \\
 & H_{n-1}(\mathcal{E}'_\bullet) & & &
\end{tikzcd}$$

Se

$$\begin{tikzcd}
\overline{v}_n^{-1}(H_n(\mathcal{C}''_\bullet)) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \arrow[d, "l_n"] \\
\frac{c_n}{B_n(\mathcal{C}_\bullet)} \arrow[r, "\overline{v}_n"'] & \frac{c''_n}{B_n(\mathcal{C}''_\bullet)}
\end{tikzcd}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{tikzcd}
\overline{v'}_n^{-1}(H_n(\mathcal{E}''_\bullet)) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & H_n(\mathcal{E}''_\bullet) \arrow[d, "k_n"] \\
\frac{E_n}{B_n(\mathcal{E}_\bullet)} \arrow[r, "\overline{v'}_n"'] & \frac{E''_n}{B_n(\mathcal{E}''_\bullet)}
\end{tikzcd}$$

são os pullbacks de $l_n, \overline{v}_n$ e $k_n, \overline{v'}_n$, respectivamente, na demonstração do diagrama da serpente [ver Apêndice A] constrói-se flechas $\xi, \xi', \delta, \delta'$ tais que

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}_n \circ \alpha &= Z_{n-1}(u_\bullet) \circ \xi & \widetilde{d'}_n \circ \alpha' &= Z_{n-1}(u'_\bullet) \circ \xi' \\
\delta \circ \beta &= p_{n-1} \circ \xi & \delta' \circ \beta' &= p'_{n-1} \circ \xi'
\end{aligned}$$

Além disso, $g_\bullet$ e $h_\bullet$ induzem flechas $\overline{g}_n$ e $\overline{h}_n$ tais que

$$\begin{aligned}
\overline{d'}_n \circ \overline{g}_n &= Z_{n-1}(g_\bullet) \circ \overline{d}_n & p'_n \circ Z_n(f_\bullet) &= H_n(f_\bullet) \circ p_n & H_n(h_\bullet) \circ k_n &= \overline{h}_n \circ l_n \\
\overline{h}_n \circ \overline{v}_n &= \overline{v'}_n \circ \overline{g}_n & Z_n(u'_\bullet) \circ Z_n(f_\bullet) &= Z_n(g_\bullet) \circ Z_n(u_\bullet)
\end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned}
H_n(h_\bullet) \circ (k_n \circ \beta) &= (H_n(h_\bullet) \circ k_n) \circ \beta = (\overline{h}_n \circ l_n) \circ \beta \\
&= \overline{h}_n \circ (l_n \circ \beta) = \overline{h}_n \circ (\overline{v}_n \circ \alpha) \\
&= (\overline{h}_n \circ \overline{v}_n) \circ \alpha = (\overline{v'}_n \circ \overline{g}_n) \circ \alpha \\
&= \overline{v'}_n \circ (\overline{g}_n \circ \alpha),
\end{aligned}$$

existe única flecha γ tal que $\overline{g}_n \circ \alpha = \alpha' \circ \gamma$ e $H_n(h_\bullet) \circ \beta = \beta' \circ \gamma$. Daí

$$\begin{aligned}
Z_{n-1}(u'_\bullet) \circ (Z_{n-1}(f_\bullet) \circ \xi) &= (Z_{n-1}(u'_\bullet) \circ Z_{n-1}(f_\bullet)) \circ \xi = (Z_{n-1}(g_\bullet) \circ Z_{n-1}(u_\bullet)) \circ \xi \\
&= Z_{n-1}(g_\bullet) \circ (Z_{n-1}(u_\bullet) \circ \xi) = Z_{n-1}(g_\bullet) \circ (\widetilde{d}_n \circ \alpha) \\
&= (Z_{n-1}(g_\bullet) \circ \widetilde{d}_n) \circ \alpha = (\widetilde{d'}_n \circ \overline{g}_n) \circ \alpha \\
&= \widetilde{d'}_n \circ (\overline{g}_n \circ \alpha) = \widetilde{d'}_n \circ (\alpha' \circ \gamma) \\
&= (\widetilde{d'}_n \circ \alpha') \circ \gamma = (Z_{n-1}(u'_\bullet) \circ \xi') \circ \gamma \\
&= Z_{n-1}(u'_\bullet) \circ (\xi' \circ \gamma)
\end{aligned}$$

e assim $Z_{n-1}(f_\bullet) \circ \xi = \xi' \circ \gamma$. Logo

$$\begin{aligned}
(H_{n-1}(f_\bullet) \circ \delta) \circ \beta &= H_{n-1}(f_\bullet) \circ (\delta \circ \beta) = H_{n-1}(f_\bullet) \circ (p_{n-1} \circ \xi) \\
&= (H_{n-1}(f_\bullet) \circ p_{n-1}) \circ \xi = (p'_{n-1} \circ Z_{n-1}(f_\bullet)) \circ \xi \\
&= p'_{n-1} \circ (Z_{n-1}(f_\bullet) \circ \xi) = p'_{n-1} \circ (\xi' \circ \gamma) \\
&= (p'_{n-1} \circ \xi') \circ \gamma = (\delta' \circ \beta') \circ \gamma \\
&= \delta' \circ (\beta' \circ \gamma) = \delta' \circ (H_n(h_\bullet) \circ \beta) \\
&= (\delta' \circ H_n(h_\bullet)) \circ \beta
\end{aligned}$$

e portanto $H_{n-1}(f_\bullet) \circ \delta = \delta' \circ H_n(h_\bullet)$. *Q.E.D.*

Definição 1.1.3 (`Cone`). *Seja $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ uma flecha entre complexos. Definimos o cone de $f_\bullet$ como sendo o complexo $cone(f_\bullet)$ tal que $cone(f_\bullet)_n = c'_n \oplus c_{n-1}$ e sua n-ésima diferencial é dada por $D_n^{f_\bullet} = \begin{bmatrix} d'_n & f_{n-1} \\ 0 & -d_{n-1} \end{bmatrix}$. Escreveremos $cone(\mathcal{C}_\bullet)_\bullet$ para $cone(1_{\mathcal{C}_\bullet})_\bullet$.*

É fácil ver que $cone(f_\bullet)_\bullet$ é de fato um complexo. Repare que, para cada inteiro n, temos uma sequência exata canônica

$$0 \longrightarrow c'_n \xrightarrow{i_n} cone(f_\bullet)_n \xrightarrow{\pi_n} c_{n-1} \longrightarrow 0$$

onde $i_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\pi_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. As flechas $i_\bullet$ e $\pi_\bullet$ comutam com as diferenciais dos complexos correspondentes e portanto temos uma sequência exata entre complexos

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}'_\bullet \longrightarrow cone(f_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathcal{C}[-1]_\bullet \longrightarrow 0$$

dita sequência exata do cone de $f_\bullet$. Note que $cone(0)_\bullet = \mathcal{C}'_\bullet \oplus \mathcal{C}[-1]_\bullet$.

Corolário 1.1.10 (`Conexão da sequência exata do cone`). *Seja $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ flecha entre complexos. A n-ésima conexão da sequência exata do cone de $f_\bullet$ é $H_n(f_\bullet)$.*

Demonstração. Fixado inteiro n, a partir da sequência exata do cone de $f_\bullet$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} cone(f_\bullet)_\bullet \xrightarrow{v_\bullet} \mathcal{C}[-1]_\bullet \longrightarrow 0.$$

construímos um diagrama da forma (ver demonstração do teorema da sequência exata longa)

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[d, "l_n"] & \\
 & \frac{c'_{n+1}}{B_{n+1}(\mathcal{C}'_\bullet)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{cone(f_\bullet)_{n+1}}{B_{n+1}(cone(f_\bullet)_\bullet)} \arrow[r, "\overline{v}_{n+1}"] \arrow[d, "\widetilde{D^f}_{n+1}"] & \frac{c_n}{B_n(\mathcal{C}_\bullet)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_n(\mathcal{C}'_\bullet) \arrow[r, "Z_n(u_\bullet)"'] \arrow[d, "p_n"'] & Z_n(cone(f_\bullet)_\bullet) \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathcal{C}_\bullet) & \\
 & H_n(\mathcal{C}'_\bullet) & & &
\end{tikzcd}$$

A flecha $\widetilde{D^f}_{n+1}$ é definida da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
cone(f_\bullet)_{n+1} \arrow[r, "D^f"] \arrow[d, "\widehat{D^f}_{n+1}"'] & cone(f_\bullet)_n \\
Z_n(cone(f_\bullet)_\bullet) \arrow[ur, "k_n"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{tikzcd}
cone(f_\bullet)_{n+1} \arrow[r, "\pi'_{n+1}"] \arrow[dr, "\widehat{D^f}_{n+1}"'] & \frac{cone(f_\bullet)_{n+1}}{B_{n+1}(cone(f_\bullet)_\bullet)} \arrow[d, "\widetilde{D^f}_{n+1}"] \\
 & Z_n(cone(f_\bullet)_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Se

$$\begin{tikzcd}
v_{n+1}^{-1}(H_n(\mathcal{C}_\bullet)) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & H_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[d, "l_n"] \\
\frac{cone(f_\bullet)_{n+1}}{B_{n+1}(cone(f_\bullet)_\bullet)} \arrow[r, "\overline{v}_{n+1}"] & \frac{c_n}{B_n(\mathcal{C}_\bullet)}
\end{tikzcd}$$

é o pullback das flechas l_n e $\overline{v}_{n+1}$, existem flechas ξ e δ (ver Apêndice) tais que

$$\widetilde{D^f}_{n+1} \circ \alpha = Z_n(u_\bullet) \circ \xi \qquad \text{e} \qquad \delta \circ \beta = p_n \circ \xi$$

Considere os diagramas

$$\begin{tikzcd}
Z_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "q_n"'] & c_n \arrow[d, "\pi_n"] \\
H_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[r, "l_n"'] & \frac{c_n}{B_n(\mathcal{C}_\bullet)}
\end{tikzcd}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{tikzcd}
cone(f_\bullet)_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\pi'_{n+1}"'] & c_n \arrow[d, "\pi_n"] \\
\frac{cone(f_\bullet)_{n+1}}{B_{n+1}(cone(f_\bullet)_\bullet)} \arrow[r, "\overline{v}_{n+1}"] & \frac{c_n}{B_n(\mathcal{C}_\bullet)}
\end{tikzcd}$$

e

O teorema do isomorfismo nos garante a comutatividade do primeiro e o segundo comuta por $\overline{v}_{n+1}$ ser a flecha induzida por v_{n+1}. Considere também as flechas canônicas $c_n \xrightarrow{u'_n} cone(f_\bullet)_{n+1}$ e $Z_n(\mathcal{C}'_\bullet) \xrightarrow{j_n} c'_n$. Temos

$$\begin{aligned} l_n \circ q_n &= \pi_n \circ i_n \\ &= \pi_n \circ (v_{n+1} \circ u'_n) \circ i_n \\ &= (\pi_n \circ v_{n+1}) \circ u'_n \circ i_n \\ &= (\overline{v}_{n+1} \circ \pi'_{n+1}) \circ u'_n \circ i_n \\ &= \overline{v}_{n+1} \circ (\pi'_{n+1} \circ u'_n \circ i_n) \end{aligned}$$

e assim existe única flecha γ tal que os triângulos

$$\begin{tikzcd} Z_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "\pi'_{n+1}\circ u'_n\circ i_n"'] \arrow[dr, "\gamma"] & H_n(\mathcal{C}_\bullet) \\ \frac{cone(f_\bullet)_{n+1}}{B_{n+1}(cone(f_\bullet)_\bullet)} & v_{n+1}^{-1}(H_n(\mathcal{C}_\bullet)) \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Seja $Z_n(cone(f_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{k_n} cone(f_\bullet)_n$ a flecha canônica. Temos $u_n \circ j_n = k_n \circ Z_n(u_\bullet)$ e assim

$$\begin{aligned} u_n \circ (j_n \circ \xi \circ \gamma) &= (u_n \circ j_n) \circ \xi \circ \gamma = (k_n \circ Z_n(u_\bullet)) \circ \xi \circ \gamma \\ &= k_n \circ (Z_n(u_\bullet) \circ \xi) \circ \gamma = k_n \circ (\widetilde{D^f}_{n+1} \circ \alpha) \circ \gamma \\ &= k_n \circ \widetilde{D^f}_{n+1} \circ (\alpha \circ \gamma) = k_n \circ \widetilde{D^f}_{n+1} \circ (\pi'_{n+1} \circ u'_n \circ i_n) \\ &= k_n \circ (\widetilde{D^f}_{n+1} \circ \pi'_{n+1}) \circ u'_n \circ i_n = k_n \circ \widehat{D^f}_{n+1} \circ u'_n \circ i_n \\ &= (k_n \circ \widehat{D^f}_{n+1}) \circ u'_n \circ i_n = (D^f_{n+1} \circ u'_n) \circ i_n \\ &= (u_n \circ f_n) \circ i_n = u_n \circ (f_n \circ i_n) \end{aligned}$$

e assim $j_n \circ (\xi \circ \gamma) = f_n \circ i_n$. A unicidade de $Z_n(f_\bullet)$ nos garante que $Z_n(f_\bullet) = \xi \circ \gamma$.

Agora, dos quadriláteros do seguinte diagrama comutarem

$$\begin{tikzcd} Z_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[rr, "q_n"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "Z_n(f_\bullet)"'] & & H_n(\mathcal{C}_\bullet) \arrow[dd, "\delta"] \\ & v_{n+1}^{-1}(H_n(\mathcal{C}_\bullet)) \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dl, "\xi"] & \\ Z_n(\mathcal{C}'_\bullet) \arrow[rr, "p_n"'] & & H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \end{tikzcd}$$

concluímos que $p_n \circ Z_n(f_\bullet) = \delta \circ q_n$; da unicidade da homologia temos $\delta = H_n(f_\bullet)$.

Q.E.D.

1.2 Bicomplexos e totalização

Seja $\mathcal{A}$ é uma categoria exata. Visto que $Ch(\mathcal{A})$ é exata, podemos considerar a categoria dos complexos de cadeia de $Ch(\mathcal{A})$, denotada por $Ch_2(\mathcal{A})$. Um objeto $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$

de $Ch_2(\mathcal{A})$ é um complexo

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{m+1,\bullet} \xrightarrow{d^h_{m+1,\bullet}} \mathcal{C}_{m,\bullet} \xrightarrow{d^h_{m,\bullet}} \mathcal{C}_{m-1,\bullet} \longrightarrow \cdots$$

Sendo $\mathcal{C}_{m,\bullet} = \{c_{m,n} \xrightarrow{d^v_{m,n}} c_{m,n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ um complexo e $d^h_{m,\bullet} = \{c_{m,n} \xrightarrow{d^h_{m,n}} c_{m-1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma flecha entre complexos, $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ pode ser representado pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & c_{m+1,n+1} \arrow[r, "d^h_{m+1,n+1}"] \arrow[d, "d^v_{m+1,n+1}"'] & c_{m,n+1} \arrow[r, "d^h_{m,n+1}"] \arrow[d, "d^v_{m,n+1}"] & c_{m-1,n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d^v_{m-1,n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c_{m+1,n} \arrow[r, "d^h_{m+1,n}"] \arrow[d, "d^v_{m+1,n}"'] & c_{m,n} \arrow[r, "d^h_{m,n}"] \arrow[d, "d^v_{m,n}"] & c_{m-1,n} \arrow[r] \arrow[d, "d^v_{m-1,n}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c_{m+1,n-1} \arrow[r, "d^h_{m+1,n-1}"'] \arrow[d] & c_{m,n-1} \arrow[r, "d^h_{m,n-1}"'] \arrow[d] & c_{m-1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

onde as linhas e colunas formam complexos de $\mathcal{A}$. Os objetos de $Ch_2(\mathcal{A})$ serão chamados de bicomplexos, as flechas $d^h_{\bullet,\bullet}$ de diferenciais horizontais e as flechas $d^v_{\bullet,\bullet}$ de diferenciais verticais. Nos referimos às homologias de $H_\bullet(\mathcal{C}_{m,\bullet})$ ($H_\bullet(\mathcal{C}_{\bullet,n})$) por homologias verticais (horizontais) do bicomplexo $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ e as denotamos por $H^v_\bullet(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})$ ($H^h_\bullet(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})$). Note que as diferenciais $d^h_{\bullet,\bullet}$ e $d^v_{\bullet,\bullet}$ induzem diferenciais nas homologias $H^v_\bullet$ e $H^h_\bullet$.

Uma flecha $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet,\bullet}} \mathcal{C}'_{\bullet,\bullet}$ entre bicomplexos é uma família $f_{\bullet,\bullet} = \{f_{m,\bullet}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de flechas entre complexos, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{C}_{m+1,\bullet} \arrow[r, "d^h_{m+1,\bullet}"] \arrow[d, "f_{m+1,\bullet}"'] & \mathcal{C}_{m,\bullet} \arrow[r, "d^h_{m,\bullet}"] \arrow[d, "f_{m,\bullet}"] & \mathcal{C}_{m-1,\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "f_{m-1,\bullet}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{C}'_{m+1,\bullet} \arrow[r, "d'^h_{m+1,\bullet}"'] & \mathcal{C}'_{m,\bullet} \arrow[r, "d'^h_{m,\bullet}"'] & \mathcal{C}'_{m-1,\bullet} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta e $d'^v_{m,n} \circ f_{m,n} = f_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}$ para todos inteiros m e n.

Exemplo 1.2.1. *Sejam R um anel comutativo com unidade e*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{r} N \xrightarrow{s} N'' \longrightarrow 0$$

duas sequências exatas de R-módulos. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(u \otimes 1_{N'}) \arrow[r, "i'"] & M' \otimes N' \arrow[r, "u\otimes 1_{N'}"] \arrow[d, "1_{M'}\otimes r"'] & M \otimes N' \arrow[d, "1_M \otimes r"] \\
0 \arrow[r] & \ker(u \otimes 1_N) \arrow[r, "i"'] & M' \otimes N \arrow[r, "u\otimes 1_N"'] & M \otimes N
\end{tikzcd}$$

onde i e i' são as inclusões canônicas. Como

$$\begin{aligned}
(u \otimes 1_N) \circ [(1_{M'} \otimes r) \circ i'] &= [(u \otimes 1_N) \circ (1_{M'} \otimes r)] \circ i' \\
&= [(1_M \otimes r) \circ (u \otimes 1_{N'})] \circ i' \\
&= (1_M \otimes r) \circ [(u \otimes 1_{N'}) \circ i'] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

existe única flecha tal que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(u \otimes 1_{N'}) \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & M' \otimes N' \arrow[r, "u\otimes 1_{N'}"] \arrow[d, "1_{M'}\otimes r"'] & M \otimes N' \arrow[d, "1_M \otimes r"] \\
0 \arrow[r] & \ker(u \otimes 1_N) \arrow[r, "i"'] & M' \otimes N \arrow[r, "u\otimes 1_N"'] & M \otimes N
\end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo.

Segue que o diagrama cujas flechas são todas as canônicas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker(1_{M'} \otimes r) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(1_M \otimes r) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(1_{M''} \otimes r) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(u \otimes 1_{N'}) \arrow[r] \arrow[d] & M' \otimes N' \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes N' \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(u \otimes 1_N) \arrow[r] \arrow[d] & M' \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(u \otimes 1_{N''}) \arrow[r] \arrow[d] & M' \otimes N'' \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes N'' \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, é fácil verificar que as linhas horizontais e as linhas verticais são complexos de R-Mod e assim temos um bicomplexo em $Ch(R\text{-}Mod)$.

Suponha que a categoria $\mathcal{A}$ seja abeliana e que admite coprodutos enumeráveis. Seja $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ um bicomplexo dado pelo diagrama (1.2). A tal bicomplexo associamos

um complexo $Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})$, definido da seguinte maneira: para cada inteiro k defina $Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_k = \bigoplus_{m+n=k} c_{m,n}$; a diferencial deste complexo é definida da seguinte maneira: para cada par $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $m+n=k$, denote por $c_{m,n} \xrightarrow{i^k_{m,n}} Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_k$ o monomorfismo canônico. Para inteiros m,n tais que $m+n=k+1$, considere a família de flechas

$$c_{m,n} \xrightarrow{i^k_{m-1,n}\circ d^h_{m,n}+(-1)^m i^k_{m,n-1}\circ d^v_{m,n}} Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_k.$$

Faça $j^{k+1}_{m,n} = i^k_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} + (-1)^m i^k_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}$. Temos assim que existe uma única flecha D_{k+1} tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
c_{m,n} \arrow[r, "j^{k+1}_{m,n}"] \arrow[d, "i^{k+1}_{m,n}"'] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet\bullet})_k \\
Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet\bullet})_{k+1} \arrow[ur, "D_{k+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Afirmação. $D_k \circ D_{k+1} = 0$.

Prova da afirmação. Para inteiros m e n tais que $m+n=k+1$ temos

$$\begin{aligned}
(D_k \circ D_{k+1}) \circ i^{k+1}_{m,n} &= D_k \circ (D_{k+1} \circ i^{k+1}_{m,n}) = D_k \circ j^{k+1}_{m,n} \\
&= D_k \circ (i^k_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} + (-1)^m i^k_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}) \\
&= D_k \circ (i^k_{m-1,n} \circ d^h_{m,n}) + (-1)^m [D_k \circ (i^k_{m,n-1} \circ d^v_{m,n})] \\
&= (D_k \circ i^k_{m-1,n}) \circ d^h_{m,n} + (-1)^m [(D_k \circ i^k_{m,n-1}) \circ d^v_{m,n}] \\
&= j^k_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} + (-1)^m j^k_{m,n-1} \circ d^v_{m,n} \\
&= (i^{k-1}_{m-2,n} \circ d^h_{m-1,n} + (-1)^{m-1} i^{k-1}_{m-1,n-1} \circ d^v_{m-1,n}) \circ d^h_{m,n} \\
&+(-1)^m (i^{k-1}_{m-1,n-1} \circ d^h_{m,n-1} + (-1)^m i^{k-1}_{m,n-2} \circ d^v_{m,n-1}) \circ d^v_{m,n} \\
&= (-1)^{m-1} (i^{k-1}_{m-1,n-1} \circ d^v_{m-1,n}) \circ d^h_{m,n} \\
&+(-1)^m (i^{k-1}_{m-1,n-1} \circ d^h_{m,n-1}) \circ d^v_{m,n} \\
&= (-1)^{m-1} i^{k-1}_{m-1,n-1} \circ (d^v_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} - d^h_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

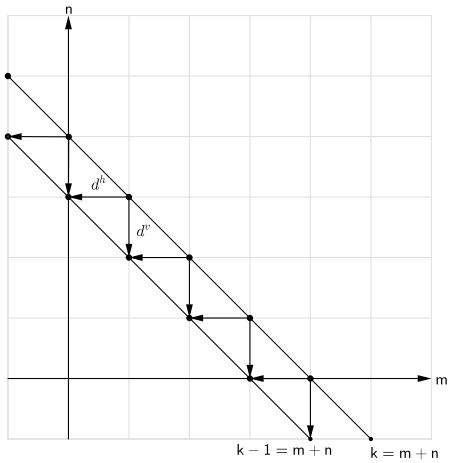
e portanto $D_k \circ D_{k-1} = 0$.

Definição 1.2.1. *O complexo $Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$ é dito totalização do bicomplexo $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$.*

Se $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet,\bullet}} \mathcal{C}'_{\bullet,\bullet}$ é uma flecha entre bicomplexos, defina

$$Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet}) = \left\{ \bigoplus_{m+n=k} f_{m,n} \right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

Vejamos que o diagrama



Totalização

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{k+1} \arrow[r, "D_{k+1}"] \arrow[d, "Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_{k+1}"'] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{k} \arrow[r] \arrow[d, "Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_{k}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet})_{k+1} \arrow[r, "D'_{k+1}"'] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet})_{k} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta. De fato, dados inteiros m e n tais que $m+n=k+1$, temos

$$\begin{aligned}
(Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ D_{k+1}) \circ i^{k+1}_{m,n} &= Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ (D_{k+1} \circ i^{k+1}_{m,n}) = Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ j^{k+1}_{m,n} \\
&= Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ (i^k_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} + (-1)^m i^k_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}) \\
&= Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ (i^k_{m-1,n} \circ d^h_{m,n}) \\
&+(-1)^m Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ (i^k_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}) \\
&= (Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ i^k_{m-1,n}) \circ d^h_{m,n} \\
&+(-1)^m (Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ i^k_{m,n-1}) \circ d^v_{m,n} \\
&= (i'^k_{m-1,n} \circ f_{m-1,n}) \circ d^h_{m,n} + (-1)^m (i'^k_{m,n-1} \circ f_{m,n-1}) \circ d^v_{m,n} \\
&= i'^k_{m-1,n} \circ (f_{m-1,n} \circ d^h_{m,n}) + (-1)^m i'^k_{m,n-1} \circ (f_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}) \\
&= i'^k_{m-1,n} \circ (d'^h_{m,n} \circ f_{m,n}) + (-1)^m i'^k_{m,n-1} \circ (d'^v_{m,n} \circ f_{m,n}) \\
&= [i'^k_{m-1,n} \circ d'^h_{m,n} + (-1)^m (i'^k_{m,n-1} \circ d'^v_{m,n})] \circ f_{m,n} \\
&= j'^{k+1}_{m,n} \circ f_{m,n} \\
&= (D'_{k+1} \circ i'^{k+1}_{m,n}) \circ f_{m,n} \\
&= D'_{k+1} \circ (i'^{k+1}_{m,n} \circ f_{m,n}) \\
&= D'_{k+1} \circ (Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_{k+1} \circ i^{k+1}_{m,n}) \\
&= (D'_{k+1} \circ Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_{k+1}) \circ i^{k+1}_{m,n}
\end{aligned}$$

e portanto $Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k \circ D_{k+1} = D'_{k+1} \circ Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_{k+1}$.

Lema 1.2.1. *A totalização $Tot^{\oplus} : Ch_2(\mathcal{A}) \to Ch(\mathcal{A})$ é um funtor covariante aditivo.*

Demonstração. Que a totalização é funtor covariante segue diretamente da propriedade universal do coproduto e da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
c_{m,n} \arrow[r, "f_{m,n}"] \arrow[d] & c'_{m,n} \arrow[r, "g_{m,n}"] \arrow[d] & c''_{m,n} \arrow[d] \\
Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_k \arrow[r, "Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_k"'] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet})_k \arrow[r, "Tot^{\oplus}(g_{\bullet,\bullet})_k"'] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}''_{\bullet,\bullet})_k
\end{tikzcd}$$

onde $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet,\bullet}} \mathcal{C}'_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{g_{\bullet,\bullet}} \mathcal{C}''_{\bullet,\bullet}$ são flechas dadas e $m+n=k$. De forma similar prova-se que a totalização é funtor aditivo. *Q.E.D.*

O complexo $\mathcal{H}om(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet)$ é definido como a totalização do bicomplexo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & Hom(c_m, c'_n) \arrow[r, "Hom(d_{m+1}, 1_{c'_n})"] \arrow[d, "Hom(1_{c_m}, d'_n)"'] & Hom(c_{m+1}, c'_n) \arrow[r] \arrow[d, "Hom(1_{c_{m+1}}, d'_n)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom(c_m, c'_{n-1}) \arrow[r, "Hom(d_{m+1}, 1_{c'_{n-1}})"'] \arrow[d] & Hom(c_{m+1}, c'_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Sejam $\mathcal{M}_\bullet = \{M_n \xrightarrow{u_n} M_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{N}_\bullet = \{N_n \xrightarrow{v_n} N_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dois complexos de $R-Mod$. O produto tensorial $\mathcal{M}_\bullet \otimes \mathcal{N}_\bullet$ entre estes dois complexos é definido como a totalização do bicomplexo:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1} \otimes N_{n+1} \arrow[r, "u_{m+1}\otimes 1_{N_{n+1}}"] \arrow[d, "1_{M_{m+1}}\otimes v_{n+1}"'] & M_m \otimes N_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_m}\otimes v_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{m+1} \otimes N_n \arrow[r, "u_{m+1}\otimes 1_{N_n}"'] \arrow[d] & M_m \otimes N_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.2.2. *Sejam $f_1, f_2 \in R$. Os complexos*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f_1} R \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f_2} R \longrightarrow 0$$

originam o bicomplexo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R \otimes R \arrow[r, "f_1 \otimes 1_R"] \arrow[d, "1_R \otimes f_2"'] & R \otimes R \arrow[r] \arrow[d, "1_R \otimes f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \otimes R \arrow[r, "f_1 \otimes 1_R"'] \arrow[d] & R \otimes R \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Sendo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f_1"] & R \arrow[d] \\
R \otimes R \arrow[u] \arrow[r, "f_1 \otimes 1_R"'] & R \otimes R
\end{tikzcd}$$

comutativo, onde as flechas verticais são os isomorfismos canônicos $x \otimes y \mapsto xy$ *e sua inversa, os complexos* $0 \to R \xrightarrow{f_1} R \to 0$ *e* $0 \to R \otimes R \xrightarrow{f_1 \otimes 1} R \otimes R \xrightarrow{0}$ *são isomorfos. Da mesma forma os complexos* $0 \to R \xrightarrow{f_2} R \to 0$ *e* $0 \to R \otimes R \xrightarrow{1 \otimes f_2} R \otimes R \to 0$ *são isomorfos e assim concluímos que o bicomplexo acima é isomorfo ao bicomplexo*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

A totalização deste bicomplexo é o complexo

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi} R^2 \xrightarrow{\psi} R \longrightarrow 0$$

onde $\varphi(x) = (f_1 x, -f_2 x)$ *e* $\psi(x, y) = f_1 y + f_2 x$*. As homologias deste complexo nos objetos* R *são* $\ker(\varphi) = (0; f_1, f_2)$ *e* $R/im(\psi) = R/(f_1, f_2)$*. Tal complexo é dito complexo de Koszul.*

1.3 Homotopia

Definição 1.3.1 (`Homotopia`). *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria e $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ uma flecha entre complexos de $\mathcal{A}$. Dizemos que $f_\bullet$ é homotópica a zero se existe uma família $s_\bullet = \{c_n \xrightarrow{s_n} c'_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de flechas em $\mathcal{A}$ tal que*

$$f_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n.$$

para todo inteiro n. Denotaremos isto por $f_\bullet \sim 0$ e a homotopia $s_\bullet$ pode ser representada por um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & c_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, "s_n"'] & c_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & c'_n \arrow[r] & c'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.3.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ uma flecha entre complexos de $\mathcal{A}$. Se $f_\bullet \sim 0$, então $H_n(f_\bullet) = 0$ para todo inteiro n.*

Demonstração. Ao aplicarmos os n-ésimos funtores ciclo, bordo e homologia a $f_\bullet$, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "B_n(f_\bullet)"'] & Z_n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "Z_n(f_\bullet)"] & H_n \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f_\bullet)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B'_n \arrow[r, "j'_n"'] & Z'_n \arrow[r, "\pi'_n"'] & H'_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde B_n, B'_n são os n-ésimos bordos, Z_n, Z'_n são os n-ésimos ciclos e H_n, H'_n são as n-ésimas homologias dos complexos $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$, respectivamente, e todas as flechas no diagrama são as canônicas. Sejam $Z_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} c_n, Z'_n \overset{i'_n}{\hookrightarrow} c'_n$ as flechas canônicas.

Seja $s_\bullet$ uma homotopia entre $f_\bullet$ e zero. Temos

$$i'_n \circ Z_n(f_\bullet) = f_n \circ i_n = (d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n) \circ i_n = d'_{n+1} \circ s_n \circ i_n.$$

Se $d'_{n+1} = k'_n \circ \widehat{d'}_{n+1}$ é a fatoração de d'_{n+1} por sua imagem, então $k'_n = i'_n \circ j'_n$ e

$$i'_n \circ Z_n(f_\bullet) = (i'_n \circ j'_n) \circ \widehat{d'}_{n+1} \circ s_n \circ i_n = i'_n \circ (j'_n \circ \widehat{d'}_{n+1} \circ s_n \circ i_n).$$

Logo $Z_n(f_\bullet) = j'_n \circ \widehat{d'}_{n+1} \circ s_n \circ i_n$ e, consequentemente,

$$H_n(f_\bullet) \circ \pi_n = \pi'_n \circ Z_n(f_\bullet) = \pi'_n \circ (j'_n \circ \widehat{d'}_{n+1} \circ s_n \circ i_n) = (\pi'_n \circ j'_n) \circ \widehat{d'}_{n+1} \circ s_n \circ i_n = 0$$

Daí concluímos que $H_n(f_\bullet) = 0$. *Q.E.D.*

Corolário 1.3.2. *Se $1_{\mathcal{C}_\bullet} \sim 0$, então $\mathcal{C}_\bullet$ é exato.*

Definição 1.3.2. *Duas flechas $f_\bullet$ e $g_\bullet$ entre os complexos $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$ de $\mathcal{A}$ são ditas homotópicas se a flecha $f_\bullet - g_\bullet$ é homotópica a zero; denotamos isto por $f_\bullet \sim g_\bullet$ e escrevemos $s_\bullet : f_\bullet \sim g_\bullet$ para dizer que $s_\bullet$ é uma homotopia entre $f_\bullet$ e $g_\bullet$. Dizemos que $f_\bullet$ é um homotopismo se existe flecha $h_\bullet$ tal que $f_\bullet \circ h_\bullet \sim 1_{\mathcal{C}'_\bullet}$ e $h_\bullet \circ f_\bullet \sim 1_{\mathcal{C}_\bullet}$.*

Dois objetos $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet$ são ditos homotópicos se existe homotopismo $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$.

Proposição 1.3.3. *Se $f_\bullet \sim g_\bullet$, então $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$ para todo inteiro n.*

Lema 1.3.4. *Se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um funtor (covariante ou contravariante) aditivo entre categorias abelianas, então o funtor aditivo $Ch(T)$ preserva homotopias, isto é, se $f_\bullet \sim g_\bullet$, então $Ch(T)(f_\bullet) \sim Ch(T)(g_\bullet)$.*

Demonstração. Suponha T covariante e seja $s_\bullet : f_\bullet \sim g_\bullet$. Assim

$$T(f_n) - T(g_n) = T(f_n - g_n) = T(d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n) = T(d'_{n+1}) \circ T(s_n) + T(s_{n-1}) \circ T(d_n)$$

para todo inteiro n e portanto $Ch(T)(s_\bullet) : Ch(T)(f_\bullet) \sim Ch(T)(g_\bullet)$.

A prova é similar quando T é contravariante. *Q.E.D.*

1.4 Resoluções

Definição 1.4.1. *Dizemos que um complexo $\mathcal{C}_\bullet$ é uma resolução de um objeto a da categoria exata $\mathcal{A}$ se:*

1. *$\mathcal{C}_\bullet$ é positivo, isto é, $c_n = 0$ se $n < 0$.*
2. *$H_0(\mathcal{C}_\bullet) \simeq a$.*
3. *$H_n(\mathcal{C}_\bullet) = 0$ se $n > 0$.*

Denotaremos isto por $\mathcal{C}_\bullet \to a$ e chamamos a flecha $c_0 \to a$ de argumentação. Se c_n é projetivo para cada inteiro n, dizemos que $\mathcal{C}_\bullet$ é uma resolução projetiva de a. Dizemos que um complexo é uma resolução injetiva de a se for uma resolução projetiva na sua categoria dual.

Note que o complexo $\mathcal{C}_\bullet$ ser uma resolução do objeto a equivale a existência de uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow c_2 \xrightarrow{d_2} c_1 \xrightarrow{d_1} c_0 \xrightarrow{\pi} a \longrightarrow 0.$$

Neste caso escreveremos $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{\pi} a$.

Exemplo 1.4.1 (`Todo módulo admite resolução livre`). *Dado R-módulo M, sabemos que existe sequência exata*

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde L_1 é livre (ver [2]). Da mesma forma existe sequência exata

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$$

onde L_2 é livre. Assim a sequência

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é exata em M, L_1 e L_2. Dessa maneira construímos uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e portanto temos uma resolução $L_\bullet \to M$.

Devido a todos os módulos L_n serem livres dizemos que a resolução $L_\bullet \to M$ é uma resolução livre de M. Quando os módulos L_n forem planos diremos que $L_\bullet$ é uma resolução plana.

Por convenção $\mathcal{P}_\bullet = \{p_n \xrightarrow{d_n} p_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \mathcal{P}'_\bullet = \{p'_n \xrightarrow{d'_n} p'_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{P}''_\bullet = \{p''_n \xrightarrow{d''_n} p''_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ denotarão complexos positivos com p_n, p'_n e p''_n projetivos para todo inteiro n em $Ch(\mathcal{A})$. Assim $\mathcal{P}_\bullet \to a$ significa que $\mathcal{P}_\bullet$ é uma resolução projetiva de a e $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} a$ significa que $p_0 \xrightarrow{\epsilon} a$ é o epimorfismo da resolução, chamado de argumentação.

Lema 1.4.1. *A categoria exata $\mathcal{A}$ tem projetivos suficientes se, e somente se, todo objeto admite resolução projetiva.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{A}$ tem projetivos suficientes e seja b objeto de $\mathcal{A}$; assim existem objeto projetivo p_0 em $\mathcal{A}$ e $v_0 \in Hom(p_0, b)$ epimorfismo. Seja u_0 o núcleo de v_0 e tome objeto projetivo p_1 e epimorfismo $\widehat{d_1} \in Hom(p_1, \ker(v_0))$. A flecha $d_1 = u_0 \circ \widehat{d_1}$ é tal que $im(d_1) = \ker(v_0)$.

Agora suponha que construímos uma sequência exata

$$p_n \xrightarrow{d_n} p_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_0 \xrightarrow{v_0} b \longrightarrow 0$$

com p_i projetivo para todo $i \in \{0, ...n\}$. Seja u_n o núcleo de d_n e tome objeto projetivo p_{n+1} e epimorfismo $\widehat{d_{n+1}} \in Hom(p_{n+1}, \ker(d_n))$; definindo $d_{n+1} = u_n \circ \widehat{d_{n+1}}$ temos que $im(d_{n+1}) = \ker(d_n)$ e

$$p_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} p_n \xrightarrow{d_n} p_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_0 \xrightarrow{v_0} b \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Indutivamente obtemos a existência de uma resolução projetiva de b.

A recíproca é clara. *Q.E.D.*

Teorema 1.4.2 (`Teorema da Comparação`). *Seja $\mathcal{A}$ categoria exata. Dados complexo positivo $\mathcal{E}_\bullet = \{e_n \xrightarrow{\delta_n} e_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ em de $\mathcal{A}$ e $f \in Hom(a,b)$, se $\mathcal{E}_\bullet$ é resolução de b, π' sua flecha argumentação e $\mathcal{P}_\bullet$ satisfaz $H_0(\mathcal{P}_\bullet) \simeq a$, então existe flecha $f_\bullet$ entre $\mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{E}_\bullet$ tal que*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & p_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & p_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & p_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & p_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & p_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_0"] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & p_n \arrow[r, "\delta_n"'] & e_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & e_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & e_1 \arrow[r, "\delta_1"'] & e_0 \arrow[r, "\pi'"'] & b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo, onde π é o conúcleo de d_1. Além do mais, se $g_\bullet$ é uma flecha que também satisfaz o diagrama acima, então $f_\bullet \sim g_\bullet$. Diremos que a flecha $f_\bullet$ estende f.

Demonstração. Para cada inteiro n, seja $\delta_n = u_{n-1} \circ \widehat{\delta}_n$ a fatoração de δ_n por sua imagem e escreva $Z_n = Z_n(\mathcal{E}_\bullet)$ e $B_n = B_n(\mathcal{E}_\bullet)$. Como $\mathcal{E}_\bullet$ é uma resolução, temos $Z_n = B_n$ para $n > 0$ e $\ker(\pi') = B_0$.

Sendo π' epimorfismo e p_0 projetivo, existe flecha f_0 tal que o seguite diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
 & p_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "f\circ\pi"] & \\
e_0 \arrow[r, "\pi'"'] & b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta.

Suponha construídas flechas $f_0, ..., f_{n-1}$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
p_n \arrow[r, "d_n"] & p_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & p_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & \cdots \arrow[r] & p_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_0"] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
e_n \arrow[r, "\delta_n"] & e_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"'] & e_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & e_0 \arrow[r, "\pi'"'] & b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta. Note que

$$\delta_{n-1} \circ (f_{n-1} \circ d_n) = (\delta_{n-1} \circ f_{n-1}) \circ d_n = (f_{n-2} \circ d_{n-1}) \circ d_n = f_{n-2} \circ (d_{n-1} \circ d_n) = 0.$$

Logo existe única flecha γ_n tal que $f_{n-1} \circ d_n = u_{n-1} \circ \gamma_n$. Sendo p_n projetivo e $\widehat{\delta}_n$ epimorfismo, existe flecha f_n tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & p_n \arrow[dl, dashed, "f_n"'] \arrow[d, "\gamma_n"] & \\ e_n \arrow[r, "\widehat{\delta}_n"'] & Z_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo. Daí

$$\delta_n \circ f_n = (u_{n-1} \circ \widehat{\delta}_n) \circ f_n = u_{n-1} \circ (\widehat{\delta}_n \circ f_n) = u_{n-1} \circ \gamma_n = f_{n-1} \circ d_n.$$

A existência de uma flecha $f_\bullet$ entre $\mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{E}_\bullet$ é garantida por indução.

Agora suponha que $g_\bullet$ é uma flecha entre $\mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{E}_\bullet$ que também satisfaz o diagrama no enunciado. Para cada inteiro n escreva $\theta_n = f_n - g_n$. Observe que

$$\pi' \circ \theta_0 = \pi' \circ (f_0 - g_0) = f \circ \pi - f \circ \pi = 0$$

e assim existe única flecha μ_0 tal que $\theta_0 = u_0 \circ \mu_0$. Sendo p_0 projetivo e $\widehat{\delta}_1$ epimorfismo, existe flecha s_0 tal que

$$\begin{tikzcd} & p_0 \arrow[dl, dashed, "s_0"'] \arrow[d, "\mu_0"] & \\ e_1 \arrow[r, "\widehat{\delta}_1"'] & \ker \pi' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Daí $\delta_1 \circ s_0 = (u_0 \circ \widehat{\delta}_1) \circ s_0 = u_0 \circ (\widehat{\delta}_1 \circ s_0) = u_0 \circ \mu_0 = \theta_0 = f_0 - g_0$. Definindo $s_{-1} = 0$, temos

$$f_0 - g_0 = \delta_1 \circ s_0 + s_{-1} \circ d_0.$$

Supondo que existem flechas $s_1, ..., s_{n-1}$ tais que $\theta_j = \delta_{j+1} \circ s_j + s_{j-1} \circ d_j$ para $j \in \{0, ..., n-1\}$, segue que

$$\begin{aligned} \delta_n \circ (\theta_n - s_{n-1} \circ d_n) &= \delta_n \circ \theta_n - \delta_n \circ (s_{n-1} \circ d_n) \\ &= \delta_n \circ (f_n - g_n) - (\delta_n \circ s_{n-1}) \circ d_n \\ &= \delta_n \circ f_n - \delta_n \circ g_n - (\delta_n \circ s_{n-1}) \circ d_n \\ &= f_{n-1} \circ d_n - g_{n-1} \circ d_n - (\delta_n \circ s_{n-1}) \circ d_n \\ &= (\theta_{n-1} - \delta_n \circ s_{n-1}) \circ d_n \\ &= (\delta_n \circ s_{n-1} + s_{n-2} \circ d_{n-1} - \delta_n \circ s_{n-1}) \circ d_n \\ &= (s_{n-2} \circ d_{n-1}) \circ d_n \\ &= s_{n-2} \circ (d_{n-1} \circ d_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e assim há única flecha μ_n tal que $\theta_n - s_{n-1} \circ d_n = u_n \circ \mu_n$. Por p_n ser projetivo e $\widehat{\delta}_n$ epimorfismo existe flecha s_n que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & p_n \arrow[dl, dashed, "s_n"'] \arrow[d, "\mu_n"] & \\
e_{n+1} \arrow[r, "\widehat{\delta}_{n+1}"'] & Z_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Temos assim

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1} \circ s_n &= (u_n \circ \widehat{\delta}_{n+1}) \circ s_n \\
&= u_n \circ (\widehat{\delta}_{n+1} \circ s_n) \\
&= u_n \circ \mu_n \\
&= \theta_n - \delta_{n-1} \circ d_n,
\end{aligned}$$

ou seja, $f_n - g_n = \theta_n = \delta_{n+1} \circ s_n + \delta_{n-1} \circ s_n$. O resultado segue por indução. *Q.E.D.*

Corolário 1.4.3. *Duas resoluções projetivas de um objeto são homotópicas.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{P}'_\bullet$ duas resoluções projetivas do objeto a. Pelo Teorema da Comparação, existem flechas $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{P}'_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{P}_\bullet$ que estendem 1_a. Sendo assim, $g_\bullet \circ f_\bullet$ estende 1_a.

Por outro lado, a flecha $1_{\mathcal{P}_\bullet}$ também estende 1_a e assim e o Teorema da Comparação nos garante que $g_\bullet \circ f_\bullet \sim 1_{\mathcal{P}_\bullet}$. De forma análoga provamos que $f_\bullet \circ g_\bullet \sim 1_{\mathcal{P}'_\bullet}$ e daí o resultado segue. *Q.E.D.*

Teorema 1.4.4 (`Lema da Ferradura`)**.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $0 \to a' \xrightarrow{f} a \xrightarrow{g} a'' \to 0$ uma sequência exata em $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{P}'_\bullet \xrightarrow{v'} a'$ e $\mathcal{P}''_\bullet \xrightarrow{v''} a''$ são duas resoluções projetivas, então existem resolução projetiva $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{v} a$ e sequência exata $0 \to \mathcal{P}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathcal{P}''_\bullet \to 0$ tais que*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & p'_1 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "\iota_1"'] & p'_0 \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "\iota_1"] & a' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & p_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & p_0 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi_0"] & a \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & p''_1 \arrow[r, "d''_1"'] \arrow[d] & p''_0 \arrow[r, "v''"'] \arrow[d] & a'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo com linhas e colunas exatas.

Demonstração. Usaremos indução em n. Defina $p_0 = p'_0 \oplus p''_0$ e sejam $p'_0 \overset{\iota_0}{\hookrightarrow} p_0$ e $p_0 \overset{\pi_0}{\twoheadrightarrow} p''_0$ as flechas canônicas. Como g é epimorfismo e p''_0 projetivo, existe γ_0 tal que $v'' = g \circ \gamma_0$; defina assim $v = \begin{bmatrix} f \circ v' & \gamma_0 \end{bmatrix}$. O seguinte diagrama tem linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p_0' \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, "v'"'] & p_0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "v"] & p_0'' \arrow[r] \arrow[d, "v''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & a \arrow[r, "g"'] & a'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Afirmação. *O diagrama acima comuta.*

Prova da afirmação. É imediato que $v \circ \iota_0 = f \circ v'$. Como $\pi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ temos $g \circ v = \begin{bmatrix} g \circ f \circ v & , g \circ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v'' \end{bmatrix} = v'' \circ \pi_0$.

Como $\mathcal{A}$ é abeliana e o diagrama acima é comutativo com linhas exatas, o lema da serpente nos garante que v é epimorfismo e que

$$0 \longrightarrow \ker(v') \xrightarrow{\overline{\iota}_0} \ker(v) \xrightarrow{\overline{\pi}_0} \ker(v'') \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata, onde $\overline{\iota}_0$ e $\overline{\pi}_0$ são as flechas induzidas por ι_0 e π_0, respectivamente.

Como $\mathcal{P}_\bullet'$ e $\mathcal{P}_\bullet''$ são resoluções, então $\ker(v') = im(d_1')$ e $\ker(v'') = im(d_1'')$. Sejam $d_1' = j_1' \circ \widehat{d'}_1$ e $d_1'' = j_1'' \circ \widehat{d''}_1$ as fatorações de d_1' e d_1'' por suas imagens, respectivamente. Sendo $\overline{\pi}_0$ epimorfismo e p_1'' projetivo, existe flecha γ_1 tal que $\widehat{d''}_1 = \overline{\pi}_0 \circ \gamma_1$. Daí, defina $p_1 = p_1' \oplus p_1''$, $\widehat{d}_1 = \begin{bmatrix} \overline{\iota}_0 \circ \widehat{d'}_1 & \gamma_1 \end{bmatrix}$ e sejam $p_1' \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} p_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} p_1''$ as flechas canônicas. O mesmo argumento da afirmação acima nos garante que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p_1' \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\widehat{d'}_1"'] & p_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\widehat{d}_1"] & p_1'' \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{d''}_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(v') \arrow[r, "\overline{\iota}_0"'] \arrow[d] & \ker(v) \arrow[r, "\overline{\pi}_0"'] & \ker(v'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas. Novamente o lema da serpente garante que $\widehat{d}_1$ é epimorfismo. Definindo $d_1 = i \circ \widehat{d}_1$ onde i é o núcleo de v; temos $im(d_1) = \ker(v)$.

Agora, suponha que construímos o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & p'_n \arrow[r, "d'_n"] & p'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & p'_0 \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "\iota_0"] & a' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & & p_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & p_0 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi_0"] & a \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & p''_n \arrow[r, "d''_n"'] & p''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & p''_0 \arrow[r, "v''"'] \arrow[d] & a'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Por hipótese de indução e pelo lema da serpente temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker(d'_{n-1}) \xrightarrow{\bar{\iota}_{n-1}} \ker(d_{n-1}) \xrightarrow{\overline{\pi}_{n-1}} \ker(d''_{n-1}) \longrightarrow 0\ .$$

Sendo $\mathcal{P}'_\bullet$ e $\mathcal{P}''_\bullet$ resoluções temos $\ker(d'_{n-1}) = im(d'_n)$ e $\ker(d''_{n-1}) = im(d''_n)$. Sejam $d'_n = j'_{n-1} \circ \widehat{d'}_n$ e $d''_n = j''_{n-1} \circ \widehat{d''}_n$ as fatorações de d'_n e d''_n por suas imagens. Sendo p''_n projetivo e $\overline{\pi}_{n-1}$ epimorfismo, existe γ_n tal que $\widehat{d''}_n = \overline{\pi}_{n-1} \circ \gamma_n$. Defina $p_n = p'_n \oplus p''_n$, $\widehat{d}_n \begin{bmatrix} \bar{\iota}_{n-1} \circ \widehat{d'}_n & \gamma_n \end{bmatrix}$ e sejam $p'_n \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} p_n \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} p''_n$ as flechas canônicas. Por um argumento análogo ao da afirmação anterior o seguinte diagrama é comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p'_n \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\widehat{d'}_n"'] & p_n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\widehat{d}_n"] & p''_n \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{d''}_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(d'_{n-1}) \arrow[r, "\bar{\iota}_{n-1}"'] \arrow[d] & \ker(d_{n-1}) \arrow[r, "\overline{\pi}_{n-1}"'] & \ker(d''_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

O lema da serpente nos garante que $\widehat{d}_n$ é um epimorfismo e portanto $d_n = i_{n-1} \circ \widehat{d}_n$, onde i_{n-1} é o núcleo de d_{n-1}, é tal que $im(d_n) = \ker(d_{n-1})$. O resultado segue por indução. *Q.E.D.*

Corolário 1.4.5. *Sob as hipóteses do Lema da Ferradura, se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um funtor (covariante ou contravariante) aditivo, onde $\mathcal{B}$ é uma categoria aditiva, então existem resolução projetiva $\mathcal{P}_\bullet \to a$ e uma sequência exata $0 \to T(\mathcal{P}'_\bullet) \to T(\mathcal{P}_\bullet) \to T(\mathcal{P}''_\bullet) \to 0$ entre complexos de cadeia de $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Vimos na demonstração do Lema da Ferradura que a resolução projetiva $\mathcal{P}_\bullet$ é tal que $p_n = p'_n \oplus p''_n$ e $p'_n \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} p_n \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} p''_n$ são as flechas canônicas para todo $n \geq 0$. Sendo T aditivo, T preserva somas diretas, ou seja, $T(p_n) = T(p'_n) \oplus T(p''_n)$ e

$T(\iota_n), T(\pi_n)$ são o monomorfismo e o epimorfismo canônicos, respectivamente. Daí

$$0 \longrightarrow T(p'_n) \xrightarrow{T(\iota_n)} T(p_n) \xrightarrow{T(\pi_n)} T(p''_n) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata para todo $n \geq 0$ e, pelo corolário 1.1.5, temos o resutado. *Q.E.D.*

Observação. *No lema da ferradura, como p_n é uma soma direta, as seguintes flechas têm a seguinte forma: $\iota_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\pi_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $d_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \lambda_n \\ \beta_n & \theta_n \end{bmatrix}$ para certos $\alpha_n, \beta_n, \lambda_n, \gamma_n$. Já que $d_n \circ \iota_n = \iota_{n-1} \circ d'_n$ e $\pi_{n-1} \circ d_n = d''_n \circ \pi_n$, ou seja,*

$$\begin{bmatrix} \alpha_n & \lambda_n \\ \beta_n & \theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d'_n \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n & \lambda_n \\ \beta_n & \theta_n \end{bmatrix} = d''_n \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos $\alpha_n = d'_n, \beta_n = 0$ e $\theta_n = d''_n$; logo $d_n = \begin{bmatrix} d'_n & \lambda_n \\ 0 & d''_n \end{bmatrix}$ com $p''_n \xrightarrow{\lambda_n} p'_{n-1}$.

Lema 1.4.6. *Seja*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & a \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & a'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & b' \arrow[r, "u'"'] & b \arrow[r, "v'"'] & b'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo com linhas exatas. Sejam $\mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} a', \mathcal{C}''_\bullet \xrightarrow{\epsilon''} a'', \mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} a, \mathcal{E}'_\bullet \xrightarrow{\eta'} b', \mathcal{E}''_\bullet \xrightarrow{\eta''} b''$ e $\mathcal{E}_\bullet \xrightarrow{\eta} b$ resoluções tais que c''_n é projetivo e existem sequências exatas $0 \to \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} \mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet \to 0$ e $0 \to \mathcal{E}'_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} \mathcal{E}_\bullet \xrightarrow{q_\bullet} \mathcal{E}''_\bullet \to 0$ tais que

$$0 \longrightarrow c'_n \xrightarrow{i_n} c_n \xrightarrow{p_n} c''_n \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

e

$$0 \longrightarrow E'_n \xrightarrow{j_n} E_n \xrightarrow{q_n} E''_n \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

cindem para todo inteiro n. Se $\mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{f'_\bullet} \mathcal{E}'_\bullet$ e $\mathcal{C}''_\bullet \xrightarrow{f''_\bullet} \mathcal{E}''_\bullet$ estendem f' e f'', respectivamente, então existe flecha $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{E}_\bullet$ estendendo f tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}'_\bullet \arrow[r, "i_\bullet"] \arrow[d, "f'_\bullet"'] & \mathcal{C}_\bullet \arrow[r, "p_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & \mathcal{C}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f''_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}'_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"'] & \mathcal{E}_\bullet \arrow[r, "q_\bullet"'] & \mathcal{E}''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

é comutativo com linhas exatas. Além disso, se $\mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{g'_\bullet} \mathcal{E}'_\bullet$, $\mathcal{C}''_\bullet \xrightarrow{g''_\bullet} \mathcal{E}''_\bullet$ e $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{E}_\bullet$ satis-

fazem as mesmas propriedades de $f'_\bullet, f_\bullet$ e $f''_\bullet$, e se $s'_\bullet$ e $s''_\bullet$ são homotopias entre $f'_\bullet, g'_\bullet$ e $f''_\bullet, g''_\bullet$, respectivamente, então existe homotopia $s_\bullet$ entre $f_\bullet$ e $g_\bullet$ tal que o diagrama com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & c'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "s'_n"'] & c_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "s_n"] & c''_n \arrow[r] \arrow[d, "s''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'_{n+1} \arrow[r, "j_{n+1}"'] & E_{n+1} \arrow[r, "q_{n+1}"'] & E''_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Como as sequências (1.3) e (1.4) cindem, podemos supor que $c_n = c'_n \oplus c''_n, E_n = E'_n \oplus E''_n$ e as flechas i_n, j_n, p_n e q_n são as flechas canônicas. Observe que as diferenciais de $d_\bullet$ e $\delta_\bullet$ de $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{E}_\bullet$ são dadas por $d_n = \begin{bmatrix} d'_n & \lambda_n \\ 0 & d''_n \end{bmatrix}$ e $\delta_n = \begin{bmatrix} \delta'_n & \lambda'_n \\ 0 & \delta''_n \end{bmatrix}$ onde $d'_\bullet, d''_\bullet, \delta'_\bullet$ e $\delta''_\bullet$ são as diferenciais de $\mathcal{C}'_\bullet, \mathcal{C}''_\bullet, \mathcal{E}'_\bullet$ e $\mathcal{E}''_\bullet$, respectivamente, e $\lambda_\bullet, \lambda'_\bullet$ são as flechas vistas na observação do lema da ferradura. Desta mesma observação temos $\epsilon = \begin{bmatrix} u \circ \epsilon' & \zeta \end{bmatrix}$ e $\eta = \begin{bmatrix} u' \circ \eta' & \xi \end{bmatrix}$, onde ζ e ξ são tais que $v \circ \zeta = \epsilon''$ e $v' \circ \xi = \eta''$.

i) Construção de $f_\bullet$: para o diagrama (1.5) comutar, f_n deve ser da forma $f_n = \begin{bmatrix} f'_n & \gamma_n \\ 0 & f''_n \end{bmatrix}$, onde γ_n é uma flecha entre c''_n e E'_n. Determinaremos $\gamma_\bullet$ de tal maneira que $f_\bullet$ seja uma flecha entre complexos e estenda f. Para isso precisamos que $\delta_\bullet \circ f_\bullet - f_\bullet \circ d_\bullet = 0$, isto é, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{bmatrix} \delta'_n & \lambda'_n \\ 0 & \delta''_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_n & \gamma_n \\ 0 & f''_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f'_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & f''_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_n & \lambda_n \\ 0 & d''_n \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\delta'_n \circ \gamma_n = \gamma_{n-1} \circ d''_n - \lambda'_n \circ f''_n + f'_{n-1} \circ \lambda_n \tag{1.6}$$

Também precisamos que $f \circ \epsilon - \eta \circ f_0 = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} & f \begin{bmatrix} u \circ \epsilon' & \zeta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u' \circ \eta' & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_0 & \gamma_0 \\ 0 & f''_0 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} f \circ u \circ \epsilon' - u' \circ \eta' \circ f'_0 & f \circ \zeta - u' \circ \eta' \circ \gamma_0 - \xi \circ f''_0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Note que $f \circ u \circ \epsilon' = u' \circ f' \circ \epsilon' = u' \circ \eta' \circ f'_0$ e assim é suficiente construir γ_0 de modo que $u' \circ \eta' \circ \gamma_0 = f \circ \zeta - \xi \circ f''_0$. Como

$$v' \circ (f \circ \zeta - \xi \circ f''_0) = v' \circ (f \circ \zeta) - v' \circ (\xi \circ f''_0) = (v' \circ f) \circ \zeta - (v' \circ \xi) \circ f''_0 = f'' \circ \epsilon'' - f''_0 \circ \eta'' = 0$$

temos que $f \circ \zeta - \xi \circ f''_0$ se fatora por u' e, sendo η' epimorfismo e p''_0 projetivo, defina γ_0 como sendo a flecha que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & c_0'' \arrow[r, "f\circ\zeta-\xi\circ f_0''"] \arrow[dl, "\gamma_0"'] \arrow[d] & b \\
E_0' \arrow[r, "\eta'"'] & b' \arrow[ur, "u'"'] &
\end{tikzcd}$$

comutar.

Agora, suponha que construímos γ_i, com $0 \leq i < n$ satisfazendo (1.6) e defina $h_n = \gamma_{n-1} \circ d_n'' - \lambda_n' \circ f_n'' + f_{n-1}' \circ \lambda_n$. Temos

$$\begin{aligned}
\delta_{n-1}' \circ h_n &= \delta_{n-1}' \circ (\gamma_{n-1} \circ d_n'' - \lambda_n' \circ f_n'' + f_{n-1}' \circ \lambda_n) \\
&= (\delta_{n-1}' \circ \gamma_{n-1}) \circ d_n'' - \delta_{n-1}' \circ (\lambda_n' \circ f_n'') + (\delta_{n-1}' \circ f_{n-1}') \circ \lambda_n \\
&= (\gamma_{n-2} \circ d_{n-1}'' - \lambda_{n-1}' \circ f_{n-1}'' + f_{n-2}' \circ \lambda_{n-1}) \circ d_n'' \\
&-\delta_{n-1}' \circ (\lambda_n' \circ f_n'') + (f_{n-2}' \circ d_{n-1}') \circ \lambda_n \\
&= -\lambda_{n-1}' \circ (f_{n-1}'' \circ d_n'') + (f_{n-2}' \circ \lambda_{n-1}) \circ d_n'' \\
&-\delta_{n-1}' \circ (\lambda_n' \circ f_n'') + f_{n-2}' \circ (d_{n-1}' \circ \lambda_n) \\
&= -\lambda_{n-1}' \circ (\delta_n'' \circ f_n'') + f_{n-2}' \circ (\lambda_{n-1} \circ d_n'') \\
&-(\delta_{n-1}' \circ \lambda_n') \circ f_n'' + f_{n-2}' \circ (d_{n-1}' \circ \lambda_n) \\
&= f_{n-2}' \circ (\lambda_{n-1} \circ d_n'' + d_{n-1}' \circ \lambda_n) \\
&-(\lambda_{n-1}' \circ \delta_n'' + \delta_{n-1}' \circ \lambda_n') \circ f_n''.
\end{aligned}$$

Como $d_\bullet$ e $\delta_\bullet$ são diferenciais, segue que $\delta_{n-1}' \circ h_n = 0$, ou seja, h_n se fatora pelo núcleo de δ_{n-1}'; sendo $\mathcal{E}_\bullet'$ resolução, temos $im(\delta_n') = \ker(\delta_{n-1}')$ e, como c_n'' é projetivo, definimos γ_n como sendo a flecha que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & c_n'' \arrow[r, "h_n"] \arrow[dl, "\gamma_n"'] \arrow[d] & E_{n-1}' \\
E_n' \arrow[r, "\widehat{\delta_n'}"'] & im(\delta_n') \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

comutar, onde $E_n' \xrightarrow{\widehat{\delta_n'}} im(\delta_n') \hookrightarrow q_{n-1}'$ é a decomposição de δ_n' via sua imagem. É imediato verificar que γ_n satisfaz (1.6).

ii) Construção de $s_\bullet$: por um argumento análogo ao dado no item anterior devemos ter $s_n = \begin{bmatrix} s_n' & t_n \\ 0 & s_n'' \end{bmatrix}$, com t_n flecha entre c_n'' e E_{n+1}'. Para $s_\bullet$ ser homotopia entre $f_\bullet$ e $g_\bullet$ devemos ter

$$f_n - g_n = \delta_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$$

para todo inteiro n, ou, equivalentemente,

$$\delta_{n+1}' \circ t_n = \gamma_n - \gamma_n' - \lambda_{n+1}' \circ s_n'' - s_{n+1}' \circ \lambda - t_{n-1}\lambda_n''. \tag{1.7}$$

Construiremos t_n de forma indutiva. Para $n = 0$ a equação (1.7) tem a forma $\delta'_1 \circ t_0 = \gamma_0 - \gamma'_0 - \lambda'_1 \circ s''_0$. Das formas matriciais das equações $\eta \circ \delta'_1 = 0, \eta \circ f_0 = f \circ \epsilon$ e $\eta \circ g_0 = f \circ \epsilon$, e de $s''_\bullet$ ser homotopia, temos

$$u' \circ (\eta' \circ \gamma_0 - \eta' \circ \gamma'_0) - u' \circ \eta' \circ \lambda'_1 \circ s''_0 = 0$$

e, sendo u' monomorfismo, temos $\eta' \circ (\gamma_0 - \gamma'_0 - \lambda'_1 \circ s''_0) = 0$. Como $\ker(\eta') = im(\delta'_1)$ e c''_0 é projetivo, t_0 é dada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & c''_0 \arrow[r] \arrow[dl, "t_0"'] \arrow[d] & E'_0 \\
E'_1 \arrow[r, two heads] & im(\delta'_1) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Suponha que existe flecha t_{n-1} tal que

$$\delta'_n \circ t_{n-1} = \gamma_{n-1} - \gamma'_{n-1} - \lambda'_n \circ s''_{n-1} - s'_{n-2} \circ \lambda_{n-1} - t_{n-2} \circ d''_{n-1}.$$

De $d_{n-1} \circ d_n = \delta_n \circ \delta_{n+1} = 0, f_{n-1} \circ d_n = \delta_n \circ f_n, g_{n-1} \circ d_n = \delta_n \circ g_n$ e por $s'_\bullet$ e $s''_\bullet$ serem homotopias, temos

$$\delta'_n \circ (\gamma_n - \gamma'_n - \lambda'_{n+1} \circ s''_n - s'_{n-1} \circ \lambda_n - t_{n-1} \circ d''_n) = 0$$

e daí t_n é dada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & c''_n \arrow[r] \arrow[dl, "t_n"'] \arrow[d] & E'_n \\
E'_{n+1} \arrow[r, two heads] & im(\delta'_{n+1}) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Podemos caracterizar os objetos projetivos de $Ch(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana.

Proposição 1.4.7. *Dadas flechas $f_\bullet, g_\bullet$ entre os complexos $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$, existe flecha $cone(f_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} cone(g_\bullet)_\bullet$ que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}'_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & cone(f_\bullet)_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_\bullet"] & \mathcal{C}[-1]_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}'_\bullet \arrow[r] & cone(g_\bullet)_\bullet \arrow[r] & \mathcal{C}[-1]_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comutar se, e somente se, $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Demonstração. Suponha que $\varphi_\bullet$ existe e escreva $\varphi_n = \begin{bmatrix} r_n & s_{n-1} \\ t_n & u_{n-1} \end{bmatrix}$. Como $\varphi_\bullet$ faz o diagrama no enunciado comutar, devemos ter $r_n = 1_{c'_n}, u_{n-1} = 1_{c_{n-1}}$ e $t_n = 0$. Além disso, por $\varphi_\bullet$ ser flecha entre complexos, temos $D^{g_\bullet}_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ D^{f_\bullet}_{n+1}$ para todo inteiro n e tal expressão é equivalente a $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Por outro lado, se $f_\bullet \sim g_\bullet$, defina $\varphi_n = \begin{bmatrix} 1_{c'_n} & s_{n-1} \\ 0 & 1_{c_{n-1}} \end{bmatrix}$ onde $s_\bullet$ é uma homotopia entre $f_\bullet$ e $g_\bullet$. É imediato verificar que $\varphi_\bullet$ satisfaz o enunciado. *Q.E.D.*

Observação. *Segue diretamente do lema da serpente que $\varphi_\bullet$ é isomorfismo.*

Corolário 1.4.8. *$f_\bullet \sim 0$ se, e somente se, a sequência exata do cone de $f_\bullet$ cinde.*

Corolário 1.4.9. *Se $\mathcal{P}_\bullet$ é objeto projetivo de $Ch(\mathcal{A})$, então toda flecha $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}_\bullet$ é homotópica a zero. Em particular temos $1_{\mathcal{P}_\bullet} \sim 0$.*

Proposição 1.4.10. *Seja $\mathcal{P}_\bullet = \{p_n \xrightarrow{0} p_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ um complexo tal que p_n é objeto projetivo para todo inteiro n. Temos que $cone(\mathcal{P}_\bullet)_\bullet$ é objeto projetivo de $Ch(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Considere o diagrama com linha exata

$$\begin{tikzcd} & cone(\mathcal{P}_\bullet)_\bullet \arrow[d, "g_\bullet"] & \\ \mathcal{C}_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"'] & \mathcal{C}'_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

g_n deve ser da forma $g_n = \begin{bmatrix} g'_n & g''_{n-1} \end{bmatrix}$ e de $g_n \circ D^{\mathcal{P}_\bullet}_{n+1} = d'_{n+1} \circ g_{n+1}$ temos $g'_n = d'_{n+1} \circ g''_n$. Sendo p_{n-1} objeto projetivo, existe flecha h''_{n-1} tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & p_{n-1} \arrow[dl, "h''_{n-1}"'] \arrow[d, "g''_{n-1}"] & \\ c_n \arrow[r, "f_n"'] & c'_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta. Daí defina $h'_n = d_{n+1} \circ h''_n$ e $h_n = \begin{bmatrix} h'_n & h''_{n-1} \end{bmatrix}$.

Afirmação. *$h_\bullet$ é flecha em $Ch(\mathcal{A})$ e $f_\bullet \circ h_\bullet = g_\bullet$.*

Prova da afirmação. i) $f_\bullet \circ h_\bullet = g_\bullet$: para todo inteiro n temos

$$\begin{aligned} f_n \circ h_n &= \begin{bmatrix} f_n \circ h'_n & f_n \circ h''_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_n \circ d_{n+1} \circ h''_n & f_n \circ h''_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d'_{n+1} \circ f_{n+1} \circ h''_n & g''_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d'_{n+1} \circ g''_n & g''_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g'_n & g''_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= g_n. \end{aligned}$$

ii) $h_\bullet$ é flecha: para todo inteiro n temos

$$\begin{aligned} d_{n+1} \circ h_{n+1} &= \begin{bmatrix} d_{n+1} \circ h'_{n+1} & d_{n+1} \circ h''_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & h'_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h'_n & h''_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1_{p_n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= h_n \circ D^{\mathcal{P}_\bullet}_{n+1}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposição 1.4.11. *Se $\mathcal{C}_\bullet$ homotópico a zero, então $\mathcal{C}_\bullet \simeq cone(\mathcal{B}_\bullet)_\bullet$, onde $\mathcal{B}_\bullet$ é o subcomplexo bordo de $\mathcal{C}_\bullet$.*

Demonstração. Tome $s_\bullet : 1_{\mathcal{C}_\bullet} \sim 0$. Se j_n denota a flecha canônica $B_n \xrightarrow{j_n} c_n$, de $d_n \circ j_n = 0$ temos $d_{n+1} \circ s_n \circ j_n = j_n$ e $\widehat{d}_{n+1} \circ s_n \circ j_n = 1_{B_n}$. Considere as flechas

$$c_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \oplus B_{n-1} \xrightarrow{\psi_n} c_n$$

onde $\varphi_n = \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \circ s_n \\ \widehat{d}_n \end{bmatrix}$ e $\psi_n = \begin{bmatrix} j_n & s_{n-1} \circ j_{n-1} \end{bmatrix}$.

Afirmação. *As famílias $\varphi_\bullet$ e $\psi_\bullet$ são flechas entre complexos e $\varphi_\bullet = \psi_\bullet^{-1}$.*

Prova da afirmação. Basta verificar que $\varphi_\bullet$ é flecha entre complexos e $\varphi_\bullet = \psi_\bullet^{-1}$.

i) $\varphi_\bullet$ é flecha entre complexos: para todo inteiro n temos

$$D^{\mathcal{B}_\bullet}_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{B_n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+2} \circ s_{n+1} \\ \widehat{d}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\varphi_n \circ d_{n+1} = \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \circ s_n \\ \widehat{d}_n \end{bmatrix} d_{n+1} = \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ii) $\varphi_\bullet = \psi_\bullet^{-1}$: para todo inteiro n temos

$$\begin{aligned}
\psi_n \circ \varphi_n &= \begin{bmatrix} j_n & s_{n-1} \circ j_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \circ s_n \\ \widehat{d}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j_n \circ \widehat{d}_{n+1} \circ s_n & s_{n-1} \circ j_{n-1} \circ \widehat{d}_n \end{bmatrix} \\
&= d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n \\
&= 1_{c_n}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi_n \circ \psi_n &= \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \circ s_n \\ \widehat{d}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_n & s_{n-1} \circ j_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \widehat{d}_{n+1} \circ s_n \circ j_n & \widehat{d}_{n+1} \circ s_n \circ s_{n-1} \circ j_{n-1} \\ \widehat{d}_n \circ j_n & \widehat{d}_n \circ s_{n-1} \circ j_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1_{B_n} & 0 \\ 0 & 1_{B_{n-1}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
j_n \circ (\widehat{d}_{n+1} \circ s_n \circ s_{n-1} \circ j_{n-1}) &= (1_{c_n} - s_{n-1} \circ d_n) \circ s_{n-1} \circ j_{n-1} \\
&= s_{n-1} \circ j_{n-1} - s_{n-1} \circ (1_{c_{n-1}} - s_{n-2} \circ d_{n-1}) \circ j_{n-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 1.4.12. *Se $\mathcal{P}_\bullet$ é objeto projetivo em $Ch(\mathcal{A})$, então p_n é objeto projetivo em $\mathcal{A}$ para todo inteiro n.*

Demonstração. Podemos estender um diagrama com linha exata da forma

$$\begin{tikzcd}
 & p_n \arrow[d, "f_n"] & \\
a \arrow[r, "g"'] & b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

a um diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P}_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] & \\
a_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"'] & b_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde $g_m = g, f_m = f_n$ se $m = n$ e $g_m = f_m = 0$ se $m \neq n$. Daí, existe flecha $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} a_\bullet$ tal que $g_\bullet \circ h_\bullet = f_\bullet$ e, em particular, $g \circ h_n = f_n$. *Q.E.D.*

Lema 1.4.13. *Um complexo cinde e é exato se, e somente se, é homotópico a zero.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}_\bullet$ um complexo que cinde e é exato. Assim, para cada inteiro n, temos $Z_n \simeq B_n$ e $c_n \simeq Z_n \oplus B_{n-1}$; logo $c_n \simeq B_n \oplus B_{n-1}$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & B_n \arrow[d, shift left, "j_n"] & & \\
\cdots \arrow[r] & c_{n+1} \arrow[r] & c_n \arrow[u, bend left, "\pi_n"] \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift left, "\widehat{d}_n"] & c_{n-1} \arrow[r] & \cdots \\
 & & B_{n-1} \arrow[u, bend left, "s'_{n-1}"] \arrow[ur, "j_{n-1}"'] \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

onde $d_n = \widehat{d}_n \circ j_{n-1}$ é a fatoração de d_n por sua imagem e π_n e s'_{n-1} são tais que $1_{c_n} = j_n \circ \pi_n + \widehat{d}_n \circ s'_{n-1}, 1_{B_{n-1}} = \widehat{d}_n \circ s'_{n-1}$ e $1_{B_n} = \pi_n \circ j_n$. Definindo $s_n = s'_n \circ \pi_n$, temos

$$\begin{aligned}
d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n &= (j_n \circ \widehat{d}_{n+1}) \circ (s'_n \circ \pi_n) + (s'_{n-1} \circ \pi_{n-1}) \circ (j_n \circ \widehat{d}_n) \\
&= j_n \circ (\widehat{d}_{n+1} \circ s'_n) \circ \pi_n + s'_{n-1} \circ (\pi_{n-1} \circ j_n) \circ \widehat{d}_n \\
&= j_n \circ \pi_n + s'_{n-1} \circ \widehat{d}_n \\
&= 1_{c_n},
\end{aligned}$$

ou seja, $1_{\mathcal{C}_\bullet} \sim 0$.

Por outro lado, se $\mathcal{C}_\bullet$ é homotópico a zero, o corolário 1.3.2 nos diz que $\mathcal{C}_\bullet$ é exato e, se $h_\bullet$ é uma homotopia entre $1_{\mathcal{C}_\bullet}$ e 0, então

$$d_n = d_n \circ 1_{c_n} = d_n \circ (d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = d_n \circ h_{n-1} \circ d_n;$$

assim

$$j_{n-1} \circ \widehat{d}_n = (j_{n-1} \circ \widehat{d}_n) \circ h_{n-1} \circ (j_{n-1} \circ \widehat{d}_n)$$

e portanto $1_{B_{n-1}} = \widehat{d}_n \circ (h_{n-1} \circ j_{n-1})$, isto é, $\widehat{d}_n$ admite retração. Concluímos assim que $\mathcal{C}_\bullet$ cinde. *Q.E.D.*

Teorema 1.4.14. *i) Um objeto projetivo de $Ch(\mathcal{A})$ é isomorfo ao cone de um complexo cujos objetos são projetivos e diferenciais nulas. Mais precisamente, um objeto projetivo em $Ch(\mathcal{A})$ é isomorfo ao cone do seu subcomplexo bordo.*

ii) Um objeto em $Ch(\mathcal{A})$ é projetivo se, e somente se, é homotópico a zero e seus objetos são todos projetivos.

Demonstração. Os dois itens seguem diretamente das proposições 1.4.7, 1.4.10 e 1.4.11, junto a seus corolários, e dos lemas 1.4.12 e 1.4.13. *Q.E.D.*

Exemplo 1.4.2. *Em $Ch(\mathbb{Z}_4 - Mod)$, o complexo*

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \cdots$$

é projetivo ($\mathbb{Z}_4$ é $\mathbb{Z}_4$-módulo livre), mas não é objeto projetivo, pois caso fosse também homotópico a zero e, em particular, cindido; dessa forma teríamos $\mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Proposição 1.4.15. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Se $\mathcal{A}$ tem projetivos suficientes, então $Ch(\mathcal{A})$ também o tem.*

Demonstração. Dado complexo $\mathcal{C}_\bullet$, para cada inteiro n existe objeto projetivo p_n de $\mathcal{A}$ e epimorfismo $p_n \xrightarrow{\epsilon_n} c_n$. Vimos na proposição (1.4.10) que o cone $cone(\mathcal{P}_\bullet)_\bullet$ do complexo

$$\mathcal{P}_\bullet : \qquad \cdots \xrightarrow{0} p_{n+1} \xrightarrow{0} p_n \xrightarrow{0} p_{n-1} \xrightarrow{0} \cdots$$

é um objeto projetivo em $Ch(\mathcal{A})$. É fácil ver que $cone(\mathcal{P}_\bullet)[1]_\bullet$ é objeto projetivo.

Agora, para cada inteiro n considere a flecha $\varphi_n = \begin{bmatrix} d_{n+1} \circ \epsilon_{n+1} & -\epsilon_n \end{bmatrix}$. Veremos que $cone(\mathcal{P}_\bullet)[1]_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} \mathcal{C}_\bullet$ é um epimorfismo. Primeiro vejamos que $\varphi_\bullet$ é flecha entre complexos. Dado inteiro n temos

$$\begin{aligned} d_{n+1} \circ \varphi_{n+1} &= d_{n+1} \begin{bmatrix} d_{n+2} \circ \epsilon_{n+2} & -\epsilon_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -d_{n+1} \circ \epsilon_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{n+1} \circ \epsilon_{n+1} & -\epsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1_{p_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \varphi_n \circ D^{\mathcal{P}_\bullet}_{n+1}[1]. \end{aligned}$$

Vejamos que $\varphi_\bullet$ é epimorfismo. Se f e g são flechas em $\mathcal{A}$ tais que $f \circ \varphi_n = g \circ \varphi_n$, então $f \circ \epsilon_n = g \circ \epsilon_n$ e portanto $f = g$. *Q.E.D.*

De forma semelhante ao teorema 1.1.3 podemos verificar que as flechas entre complexos positivos de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ formam uma categoria abeliana. Denotamos esta categoria por $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$.

O truncamento de um complexo $\mathcal{C}_\bullet$ é definido como sendo o complexo

$$\mathcal{C}^+_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow c_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} c_n \xrightarrow{d_n} c_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow c_1 \xrightarrow{d_1} c_0$$

Proposição 1.4.16. *Se $\mathcal{A}$ é categoria abeliana com projetivos suficientes, então $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$ também tem projetivos suficientes.*

Demonstração. A proposição (1.4.15) nos garante que $Ch(\mathcal{A})$ tem projetivos suficientes. Se $\mathcal{P}_\bullet$ é um objeto projetivo em $Ch(\mathcal{A})$, provaremos que $\mathcal{P}^+_\bullet$ é objeto projetivo em

$Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$. Considere o diagrama com linha exata de flechas de $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}_\bullet^+ \arrow[d, "f_\bullet"] & \\ \mathcal{C}_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"'] & \mathcal{E}_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Este diagrama pode ser visto como um diagrama em $Ch(\mathcal{A})$ (completamos as flechas com zeros) e assim, por $\mathcal{P}_\bullet$ ser projetivo, existe flecha $h_\bullet$ tal que $g_\bullet \circ h_\bullet = f_\bullet$. *Q.E.D.*

Proposição 1.4.17. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com projetivos suficientes. Todo objeto projetivo de $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$ é truncamento de um objeto projetivo de $Ch(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}_\bullet$ um objeto projetivo em $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$. Podemos considerar $\mathcal{P}_\bullet$ como objeto de $Ch(\mathcal{A})$ e assim seja $\mathcal{Q}_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet$ um epimorfismo com $\mathcal{Q}_\bullet$ objeto projetivo. Daí temos sequência exata $0 \to \mathcal{K}_\bullet \to \mathcal{Q}_\bullet^+ \to \mathcal{P}_\bullet \to 0$. Como $\mathcal{P}_\bullet$ é objeto projetivo, a sequência anterior cinde e, consequentemente, $\mathcal{Q}_\bullet^+ \simeq \mathcal{P}_\bullet \oplus \mathcal{K}_\bullet$. Em particular temos $H_n(\mathcal{Q}_\bullet^+) \simeq H_n(\mathcal{P}_\bullet) \oplus H_n(\mathcal{K}_\bullet)$ para todo inteiro n. Daí

$$H_n(\mathcal{P}_\bullet) \hookrightarrow H_n(\mathcal{Q}_\bullet^+) = H_n(\mathcal{Q}_\bullet) = 0$$

para $n > 0$ e

$$H_0(\mathcal{P}_\bullet) \oplus H_0(\mathcal{K}_\bullet) \simeq H_0(\mathcal{Q}_\bullet^+) = coker(q_1 \to q_0) = \frac{q_0}{\ker(q_0 \to q_{-1})} \simeq im(q_0 \to q_{-1}).$$

O item *ii*) do teorema 1.4.14 nos garante que $im(q_0 \to q_1)$ é objeto projetivo; logo $H_0(\mathcal{P}_\bullet)$ também o é. Concluímos assim que o complexo (cujo truncamento é $\mathcal{P}_\bullet$)

$$\cdots \longrightarrow p_{n+1} \longrightarrow p_n \longrightarrow p_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_0 \longrightarrow H_0(\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow 0$$

é exato e seus objetos são todos projetivos. Além disso, segue por indução que este complexo cinde. Novamente o item *ii*) do teorema 1.4.14 nos diz que este complexo é objeto projetivo. *Q.E.D.*

Observação. *A demonstração da proposição anterior nos mostra que objetos projetivos de $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$ são formados por objetos projetivos, acíclicos, cindem e suas 0-ésimas homologias são objetos projetivos.*

1.5 Funtores Derivados

1.5.1 δ-Funtores

Definição 1.5.1 (`δ-funtor`). *Sejam $\mathcal{A}$ categoria abeliana e $\mathcal{B}$ categoria aditiva. Um δ-funtor covariante de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é uma família $T = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de funtores aditivos covariantes de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ admitindo uma família $\{\delta_n : T_n(c) \rightsquigarrow T_{n-1}(a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de flechas em $\mathcal{B}$ definida para toda e qualquer sequência exata $0 \to a \to b \to c \to 0$ em $\mathcal{A}$. Além disso, mais duas condições são impostas:*

i) Para toda sequência exata $0 \to a \to b \to c \to 0$ em $\mathcal{A}$, a sequência

$$\cdots \longrightarrow T_n(a) \longrightarrow T_n(b) \longrightarrow T_n(c) \rightsquigarrow T_{n-1}(a) \longrightarrow T_{n-1}(b) \longrightarrow \cdots \tag{1.8}$$

é um complexo de $\mathcal{B}$.

ii) Dado diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r] & b' \arrow[r] & c' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

o diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_n(c) \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & T_{n-1}(a) \arrow[d] \\
T_n(c') \arrow[r, squiggly] & T_{n-1}(a')
\end{tikzcd}$$

comuta para todo inteiro n.

As flechas δ_n são chamadas de conexões e também nos referimos a δ-funtores por sequências conectadas. Definimos como δ^*-funtor covariante de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ um δ-funtor covariante de $\mathcal{A}^*$ em $\mathcal{B}^*$; assim os conceitos de δ-funtores covariantes e δ^*-funtores covariantes são duais. De forma análoga definimos δ-funtores contravariantes e δ^*-funtores contravariantes.

Dados dois δ-funtores covariantes $T = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, uma flecha $T \xrightarrow{\varphi} S$ entre estes δ-funtores é uma família de transformações naturais $\{T_n \xrightarrow{\varphi_n} S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que, dada sequência exata $0 \to a \to b \to c \to 0$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_n(c) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\varphi_n(c)"'] & T_{n-1}(a) \arrow[d, "\varphi_n(a)"] \\
S_n(c) \arrow[r, squiggly] & S_{n-1}(a)
\end{tikzcd}$$

comuta para todo inteiro n. Definimos a composição de flechas entre δ-funtores via suas coordenadas; é um exercício rotineiro verificar que as flechas entre δ-funtores formam uma categoria.

Suponha que $\mathcal{B}$ é categoria abeliana. Um δ-funtor (covariante ou contravariante) é dito funtor homológico se para toda sequência exata $0 \to a \to b \to c \to 0$ em $\mathcal{A}$, o complexo associado (1.8) é exato.

Exemplo 1.5.1. *i) Do teorema da sequência exata longa e da naturalidade da conexão temos que a homologia $\{H_n\}_{n\geq 0}$ é funtor homológico.*

ii) Considere $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{Z} - Mod$ e seja n um inteiro. Sendo $(0 :_n G) = \{g \in G : ng = 0\}$, dado homomorfismo de grupos $G \xrightarrow{f} H$ defina $T_0(f) : G/nG \to H/nH$ por $T_0(f)(\overline{x}) = \overline{f(x)}$, $T_1(f) : (0 :_n G) \to (0 :_n H)$ por $T_1(f)(g) = f(g)$ e $T_m = 0$ para $m \neq 0, 1$; é fácil ver que T_0 e T_1 estão bem definidos e T_m é funtor para todo inteiro m. Pelo lema da serpente e do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "n"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "n"] & G \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

obtemos sequência exata

$$0 \to (0 :_n K) \to (0 :_n H) \to (0 :_n G) \overset{\delta}{\rightsquigarrow} K/nK \to H/nH \to G/nG \to 0.$$

Do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"'] & H' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"] & G' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"'] & H \arrow[r, "\eta"'] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e da naturalidade da conexão concluímos que $\{T_n\}_{n\geq 0}$ e δ formam um funtor homológico.

Definição 1.5.2 (`δ-funtor universal`)**.** *Um δ-funtor (covariante ou contravariante) $T = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é dito δ-funtor universal se para todo δ-funtor $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e toda transformação natural $S_0 \xrightarrow{\varphi_0} T_0$ existe única flecha entre δ-funtores $S \xrightarrow{f_\bullet} T$ que estende φ_0, isto é, $\varphi_0 = f_0$. Em particular, δ-funtores universais T e S tais que $S_0 \xrightarrow{\varphi_0} T_0$ é isomorfismo são isomorfos.*

Um funtor aditivo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dito anulável se para todo objeto a em $\mathcal{A}$ existe monomorfismo $a \xrightarrow{u} b$ tal que $T(u) = 0$. Note que se $\mathcal{A}$ possui injetivos suficientes,

então podemos supor que o objeto b é injetivo (basta compor a flecha u com um monomorfismo $b \to I$, onde I é objeto injetivo).

Observação. *Se T é anulável, então T se anula em objetos injetivos. De fato, seja I um objeto injetivo de $\mathcal{A}$ e tome monomorfismo $I \xrightarrow{u} b$ tal que $T(u) = 0$. Do diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1"'] & b \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$

segue que $T(1_I) = 0$. Vale a recíprocra quando $\mathcal{A}$ tem injetivos suficientes.

Proposição 1.5.1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias abelianas e $T = \{T_n\}_{n\geq 0}$ um funtor homológico de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Se T_n é coanulável para todo $n > 0$, então T é δ-funtor universal.*

Demonstração. Por indução é suficiente provar que $T = \{T_0, T_1\}$ é universal. Seja $S = \{S_0, S_1\}$ δ-funtor e seja $S_0 \xrightarrow{\varphi_0} T_0$ transformação natural. Dado objeto a de $\mathcal{A}$, tome epimorfismo $b \xrightarrow{u} a$ tal que $T_1(u) = 0$ e considere a sequência exata $0 \to k \to b \xrightarrow{u} a \to 0$, onde $k \to b$ é o núcleo de u. Temos daí um diagrama

$$\begin{tikzcd} & S_1(a) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, dashed, "\varphi_1^u(a)"'] & S_0(k) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0(k)"] & S_0(b) \arrow[d, "\varphi_0(b)"] \\ T_1(b) \arrow[r, "0"] & T_1(a) \arrow[r, squiggly, "\delta_1"'] & T_0(k) \arrow[r] & T_0(b) \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Como T é funtor homológico, então δ_1 é monomorfismo e é o núcleo da flecha $T_0(k) \to T_0(b)$. Como φ_0 é transformação natural, então a flecha $S_1(a) \rightsquigarrow S_0(k) \xrightarrow{\varphi_0(k)} T_0(k)$ se fatora por δ_1; daí a existência de $\varphi_1^u(a)$. Note que esta flecha depende da escolha de u; vamos provar que $\varphi_1^u(a)$ independe de u, que é transformação natural e $\{\varphi_1, \varphi_0\}$ é a única flecha entre S e T que estende φ_0.

A unicidade segue diretamente do diagrama (1.9). Suponha que existe diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & a' \arrow[r] \arrow[d] & a'' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & b' \arrow[r] & b'' \arrow[r, "v"'] & b \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

com u e v tais que $T_1(u) = T_1(v) = 0$. Temos

$$\begin{tikzcd}
S_1(a) \arrow[rr, "S_1(f)"] \arrow[dr, squiggly] \arrow[dd, "\varphi_1^u(a)"'] & & S_1(b) \arrow[dl, squiggly] \arrow[dd, "\varphi_1^v(b)"] \\
& S_0(a') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0(a')"] & S_0(b') \arrow[d, "\varphi_0(b')"] \\
& T_0(a') \arrow[r] & T_0(b') \\
T_1(a) \arrow[rr, "T_1(f)"'] \arrow[ur, squiggly] & & T_1(b) \arrow[ul, squiggly, "\delta_1"']
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Os quadriláteros superior e inferior comutam por estarmos tratando de δ-funtores, os quadriláteros laterais comutam por construção de $\varphi_1^u(a)$ e $\varphi_1^v(b)$, e o quadrilátero central comuta por φ_0 ser transformação natural. Segue que

$$\delta_1 \circ T_1(f) \circ \varphi_1^u(a) = \delta_1 \circ \varphi_1^v(b) \circ S_1(f).$$

Visto que δ_1 é monomorfismo temos

$$T_1(f) \circ \varphi_1^u(a) = \varphi_1^v(b) \circ S_1(f) \tag{1.11}$$

Usaremos (1.11) para verificar que $\varphi_1^u(a)$ não depende de u e que φ_1 é transformação natural.

Sejam $b \xrightarrow{u} a$ e $c \xrightarrow{v} a$ epimorfismos tais que $T_1(u) = T_1(v) = 0$ e considere o pullback de u e v:

$$\begin{tikzcd}
c \times_a b \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u'"'] & b \arrow[d, "u"] \\
c \arrow[r, "v"'] & a
\end{tikzcd}$$

Temos $T_1(u \circ v') = 0$ e diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d] & c \times_a b \arrow[r, "u\circ v'"] \arrow[d, "u'"'] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & l \arrow[r] & c \arrow[r, "v"'] & a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e assim podemos construímos um diagrama semelhante ao diagrama (1.10). Neste caso, (1.11) tem a forma $\varphi_1^v(a) = \varphi_1^{u\circ v'}(a)$. Analogamente vemos que $\varphi_1^u(a) = \varphi_1^{u\circ v'}(a)$ e portanto φ_1 independe da flecha u.

Agora seja $a \xrightarrow{f} b$ uma flecha em $\mathcal{A}$, tome epimorfismo $d \xrightarrow{w} b$ tal que $T_1(w) = 0$ e considere o pullback de w e f

$$\begin{tikzcd} d \times_b a \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "f'"'] & a \arrow[d, "f"] \\ d \arrow[r, "w"'] & b \end{tikzcd}$$

Também existe epimorfismo $d' \xrightarrow{g} d \times_b a$ tal que $T_1(g) = 0$. Temos assim um diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d] & d' \arrow[r, "w' \circ g"] \arrow[d, "f' \circ g"'] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & l \arrow[r] & d \arrow[r, "w"'] & b \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e $T_1(w' \circ g) = 0$. Logo construímos novamente um diagrama semelhante a (1.10) e, de (1.11), temos $T_1(f) \circ \varphi_1(a) = \varphi_1(b) \circ S_1(f)$.

Resta provar que φ_1 comuta com as conexões. De fato, dada sequência exata $0 \to a \to b \to c \to 0$, tome epimorfismo $d \xrightarrow{u} c$ tal que $T_1(u) = 0$. Temos um diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d] & b \times_c d \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & a \arrow[r] & b \arrow[r] & c \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

tal que T_1 se anula nas flechas $b \times_c d \to c$ e $b \to c$. O resultado segue do diagrama

$$\begin{tikzcd} S_1(c) \arrow[r, squiggly] \arrow[rr, squiggly, bend left] \arrow[d, "\varphi_1(c)"'] & S_0(k) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0(k)"] & S_0(a) \arrow[d, "\varphi_0(a)"] \\ T_1(c) \arrow[r, squiggly] \arrow[rr, squiggly, bend right] & T_0(k) \arrow[r] & T_0(a) \end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Corolário 1.5.2. *A homologia é funtor homológico universal.*

Demonstração. Na caracterização dos objetos projetivos na categoria dos complexos vimos que os objetos projetivos de $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$ são acíclicos e portanto o funtor homológico homologia é coanulável. *Q.E.D.*

1.5.2 Funtores Derivados à Esquerda

Sejam $\mathcal{A}$ categoria abeliana, $\mathcal{B}$ categoria aditiva e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor aditivo. Suponha que $\mathcal{A}$ tem projetivos suficientes, que T é um funtor covariante e seja a um objeto de $\mathcal{A}$. O lema 1.4.1 garante que a admite resolução projetiva $\mathcal{P}_\bullet$. Denotaremos por $L_nT(a)$ a n-ésima homologia do complexo $Ch(T)\,(\mathcal{P}_\bullet)$.

Afirmação. *$L_nT(a)$ independe da resolução projetiva $\mathcal{P}_\bullet \to a$.*

Prova da afirmação. Se $\mathcal{P}'_\bullet$ é outra resolução projetiva de a, o corolário 1.4.3 garante que existe um homotopismo $f_\bullet$); seja $g_\bullet$ flecha tal que $f_\bullet \circ g_\bullet \sim 1_{\mathcal{P}'_\bullet}$ e $g_\bullet \circ f_\bullet \sim 1_{\mathcal{P}_\bullet}$. Pelo lema 1.3.4 temos

$$Ch(T)\left(f_\bullet\right) \circ Ch(T)\left(g_\bullet\right) = Ch(T)\left(f_\bullet \circ g_\bullet\right) \sim Ch(T)\left(1_{\mathcal{P}'_\bullet}\right) = 1_{Ch(T)(\mathcal{P}'_\bullet)}$$

e

$$Ch(T)\left(g_\bullet\right) \circ Ch(T)\left(f_\bullet\right) = Ch(T)\left(g_\bullet \circ f_\bullet\right) \sim Ch(T)\left(1_{\mathcal{P}_\bullet}\right) = 1_{Ch(T)(\mathcal{P}_\bullet)}.$$

Da proposição 1.3.3 segue que $H_n\left(Ch(T)\left(\mathcal{P}_\bullet\right)\right) \simeq H_n\left(Ch(T)\left(\mathcal{P}'_\bullet\right)\right)$.

Agora, sejam $f \in Hom(a,b)$ uma flecha em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}_\bullet \to a, \mathcal{P}'_\bullet \to b$ duas resoluções projetivas. O Teorema da Comparação nos garante que existe flecha $f_\bullet$ que estende f; assim para cada inteiro defina $L_nT(f) = H_n\left(Ch(T)\left(f_\bullet\right)\right)$.

Afirmação. *A flecha $L_nT(f)$ está bem definida.*

Prova da afirmação. Sejam $\widetilde{\mathcal{P}} \to a$ e $\widetilde{\mathcal{P}'} \to b$ duas outras resoluções projetivas de a e b, respectivamente. O Teorema da Comparação nos garante que existe flecha $\widetilde{f}_\bullet$ estendendo f e homotopismos $\zeta_\bullet$ e $\xi_\bullet$ que tornam os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & p_n \arrow[r] \arrow[d, "\zeta_n"'] & p_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\zeta_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & p_1 \arrow[r] \arrow[d, "\zeta_1"] & p_0 \arrow[r] \arrow[d, "\zeta_0"] & a \arrow[r] \arrow[d, "1_a"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \widetilde{p}_n \arrow[r] & \widetilde{p}_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{p}_1 \arrow[r] & \widetilde{p}_0 \arrow[r] & a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{p'}_n \arrow[r] \arrow[d, "\xi_n"'] & \widetilde{p'}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{p'}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_1"] & \widetilde{p'}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_0"] & b \arrow[r] \arrow[d, "1_b"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & p'_n \arrow[r] & p'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p'_1 \arrow[r] & p'_0 \arrow[r] & b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e daí temos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & p_n \arrow[r] \arrow[d, "\xi_n \circ \widetilde{f}_n \circ \zeta_n"'] & p_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_{n-1} \circ \widetilde{f}_{n-1} \circ \zeta_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & p_1 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_1 \circ \widetilde{f}_1 \circ \zeta_n"] & p_0 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_0 \circ \widetilde{f}_0 \circ \zeta_0"] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & p'_n \arrow[r] & p'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p'_1 \arrow[r] & p'_0 \arrow[r] & b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Novamente pelo Teorema da Comparação temos $f_\bullet \sim \xi_\bullet \circ \widetilde{f}_\bullet \circ \zeta_\bullet$ e concluímos que

$$Ch(T)\left(f_\bullet\right) \sim Ch(T)\left(\xi_\bullet\right) \circ Ch(T)(\widetilde{f}_\bullet) \circ Ch(T)\left(\zeta_\bullet\right).$$

Como $\xi_\bullet$ e $\zeta_\bullet$ são homotopismos, então $H_n\left(\xi_\bullet\right)$ e $H_n\left(\zeta_\bullet\right)$ são isomorfismos e portanto $H_n\left(Ch(T)\left(f_\bullet\right)\right) \simeq H_n(Ch(T)(\widetilde{f}_\bullet))$.

Proposição 1.5.3. *$L_nT : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um funtor covariante aditivo.*

Demonstração. 1. L_nT é funtor covariante.

Sejam $f \in Hom(a,b), g \in Hom(b,c)$ duas flechas em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}'_\bullet \to a, \mathcal{P}_\bullet \to b, \mathcal{P}''_\bullet \to c$ resoluções projetivas. Sejam $\mathcal{P}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{P}''_\bullet$ flechas em $Ch(\mathcal{A})$ tais que $L_nT(f) = H_n(Ch(T)(f_\bullet))$ e $L_nT(g) = H_n(Ch(T)(g_\bullet))$. Temos

$$\begin{aligned} L_nT(g \circ f) &= H_n(Ch(T)(g_\bullet \circ f_\bullet)) \\ &= H_n(Ch(T)(g_\bullet)) \circ H_n(Ch(T)(f_\bullet)) \\ &= L_nT(g) \circ L_nT(f). \end{aligned}$$

Além do mais,

$$\begin{aligned} L_nT(1_a) &= H_n(Ch(T)(1_{\mathcal{P}'_\bullet})) \\ &= H_n(1_{Ch(T)(\mathcal{P}'_\bullet)}) \\ &= 1_{H_n(Ch(T)(\mathcal{P}'_\bullet))} \\ &= 1_{L_nT(a)}. \end{aligned}$$

2. L_nT é aditivo.

Dadas flechas $f, g \in Hom(a,b)$ em $\mathcal{A}$ e resoluções projetivas $\mathcal{P}_\bullet \to a$ e $\mathcal{P}'_\bullet \to b$, existem flechas $f_\bullet$ e $g_\bullet$ entre $\mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{P}'_\bullet$ tais que $L_nT(f) = H_n(Ch(T)(f_\bullet))$ e $L_nT(g) = H_n(Ch(T)(g_\bullet))$. Assim $f_\bullet + g_\bullet$ é flecha entre $\mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{P}'_\bullet$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & p_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n+g_n"'] & p_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}+g_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & p_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1+g_1"] & p_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0+g_0"] & a \arrow[r] \arrow[d, "f+g"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & p'_n \arrow[r] & p'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p'_1 \arrow[r] & p'_0 \arrow[r] & b \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta. Assim

$$\begin{aligned} L_nT(f+g) &= H_n(Ch(T)(f_\bullet + g_\bullet)) \\ &= H_n(Ch(T)(f_\bullet)) + H_n(Ch(T)(g_\bullet)) \\ &= L_nT(f) + L_nT(g). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Definição 1.5.3 (`Funtor derivado à esquerda`)**.** *O funtor covariante aditivo L_nT é dito n-ésimo funtor derivado à esquerda de T.*

Observações:

1. Se T é exato à direita, então $L_0T(a) = T(a)$.

2. Se o objeto a é projetivo, então $L_nT(a) = 0$ para todo $n > 0$.

   De fato, sendo a projetivo, o complexo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow a \xrightarrow{1_a} a \longrightarrow 0$$

   é uma resolução projetiva do objeto a e assim $L_nT(a) = 0$ para $n > 0$.

Teorema 1.5.4. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são categorias abelianas com $\mathcal{A}$ tendo projetivos suficientes. Se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um funtor covariante aditivo e $0 \to a' \xrightarrow{f} a \xrightarrow{g} a'' \to 0$ é uma sequência exata em $\mathcal{A}$, então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \to L_2T(a'') \rightsquigarrow L_1T(a') \to L_1T(a) \to L_1T(a'') \to L_0T(a') \to L_0T(a) \to L_0T(a'') \to 0.$$

Demonstração. Se $\mathcal{P}'_\bullet \to a'$ e $\mathcal{P}''_\bullet \to a''$ são resoluções projetivas, do corolário (1.4.5) existe resolução projetiva $\mathcal{P}_\bullet \to a$ e sequência exata $0 \to T(\mathcal{P}'_\bullet) \to T(\mathcal{P}_\bullet) \to T(\mathcal{P}''_\bullet) \to 0$. Do teorema da sequência exata longa temos sequência exata

$$\cdots \to H_1(Ch(T)(\mathcal{P}''_\bullet)) \rightsquigarrow H_0(Ch(T)(\mathcal{P}'_\bullet)) \to H_0(Ch(T)(\mathcal{P}_\bullet)) \to H_0(Ch(T)(\mathcal{P}''_\bullet)) \to 0.$$

Note que cada objeto desta sequência é o n-ésimo funtor derivado à esquerda correspondente. *Q.E.D.*

Proposição 1.5.5. *A família $\{L_nT\}_{n\geq 0}$ é um funtor homológico.*

Demonstração. Dada sequência exata $0 \to a' \to a \to a'' \to 0$ em $\mathcal{A}$, o teorema anterior nos garante a existência de uma sequência exata longa como requer a definição de δ-funtor. Agora considere um diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & a \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & a'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & b' \arrow[r, "u'"'] & b \arrow[r, "v'"'] & b'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

em $\mathcal{A}$. O lema (1.4.6) nos garante a existência de um diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{P}'_\bullet \arrow[r, "i_\bullet"] \arrow[d, "f'_\bullet"'] & \mathcal{P}_\bullet \arrow[r, "\pi_\bullet"] \arrow[d, dashed, "f_\bullet"] & \mathcal{P}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f''_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Q}'_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"'] & \mathcal{Q}_\bullet \arrow[r, "q_\bullet"'] & \mathcal{Q}''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde $\mathcal{P}'_\bullet \to a', \mathcal{P}_\bullet, \mathcal{P}''_\bullet \to a'', \mathcal{Q}'_\bullet \to b', \mathcal{Q}_\bullet$ e $\mathcal{Q}''_\bullet \to b''$ são resoluções projetivas. As linhas deste diagrama são construídas via coproduto e por T ser aditivo a exatidão das linhas

é preservada ao aplicarmos T no diagrama. Daí o resultado segue da naturalidade da conexão. *Q.E.D.*

Proposição 1.5.6. *L_nT é coanulável para todo $n > 0$.*

Demonstração. Dado objeto $a \in \mathcal{A}$, sabemos que existe epimorfismo $p \xrightarrow{v} a$ com p objeto projetivo. Da observação 2. temos $L_nT(p) = 0$ para todo $n > 0$ e portanto $L_nT(v) = 0$. *Q.E.D.*

Corolário 1.5.7. *$\{L_nT\}_{n\geq 0}$ é funtor homológico universal.*

Definição 1.5.4 (`Definição do Tor`)**.** *Sejam M um R-módulo e n um natural. O n-ésimo funtor derivado do funtor $_ \otimes M$ é dito n-ésimo funtor de torção do módulo M e será denotado por $Tor_n^R(_, M)$ (quando não houver risco de confusão omitimos o índice R); similarmente definimos $tor_n^R(M, _) = L_n(M \otimes _)$. Veremos no capítulo 2 que $Tor_n^R(M, N) \simeq tor_n^R(M, N)$.*

1.5.3 Funtores Derivados à Direita

Sejam $\mathcal{A}$ categoria abeliana, $\mathcal{B}$ categoria aditiva e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor aditivo. Suponha que $\mathcal{A}$ tem injetivos suficientes, que T é um funtor covariante e seja a um objeto de $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{I}^\bullet$ uma resolução injetiva de a e defina, para cada inteiro n, o n-ésimo funtor derivado à direita de T por $R^nT(a) = H^n(Ch(T)(\mathcal{I}^\bullet))$. T define um funtor entre as categorias duais $T^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$; sendo $\mathcal{I}_\bullet$ resolução projetiva de a em $\mathcal{A}^*$, temos $(L_nT^*)^*(a) = H^n(Ch(T)(\mathcal{I}^\bullet)) = R^nT(a)$. Portanto todos os resultados sobre funtores derivados à esquerda se aplicam, por dualidade, a funtores derivados à direita. Em particular, R^nT é um funtor covariante aditivo bem definido, $\{R^nT\}_{n\geq 0}$ é funtor cohomológico universal e $R^nT(I) = 0$ para $n > 0$ quando I é objeto injetivo.

Definição 1.5.5 (`Definição do Ext`)**.** *Seja M um R-módulo. Definimos como n-ésimo funtor de extensão do módulo M o n-ésimo funtor derivado à direita do funtor $Hom(M, _0)$ e o denotamos por $Ext_R^n(M, _)$.*

Podemos definir a noção de funtor derivado também para funtores contravariantes. Se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contravariante e $\mathcal{A}$ tem projetivos suficientes, temos um funtor $T^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}$ covariante com $\mathcal{A}^*$ tendo injetivos suficientes. Definimos assim o n-ésimo funtor derivado à direita de T por $R^nT(a) = H^n(Ch(T^*)(\mathcal{P}_\bullet))$, onde $\mathcal{P}_\bullet$ é uma resolução projetiva do objeto a em $\mathcal{A}^*$.

Definição 1.5.6. *Seja M um R-módulo. Para cada natural n definimos $ext_R^n(_, M) = R^nT(M)$, onde $T = Hom(_, M)$.*

Também veremos no capítulo 2 que $Ext_R^n(M, N) \simeq ext_R^n(M, N)$.

Limite 1 e Mittag-Leffler

Sejam $\mathcal{I}$ uma categoria e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana completa com suficientes injetivos suficientes; podemos provar que a categoria abeliana $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ também tem injetivos suficientes (ver [16]) e desta forma podemos estudar o funtor derivado à direita do limite. Nesta seção vamos supor que a categoria $\mathcal{A}$ é abeliana com projetivos suficientes e satisfaz o seguinte axioma, introduzido por Grothendieck, que garante a exatidão do funtor produto:

(AB4*) *$\mathcal{A}$ admite produtos e o produto de quaisquer epimorfismos é epimorfismo.*

Considere $\mathcal{I}$ como sendo os números naturais com a ordem reversa. Chamaremos os objetos de $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ de torres e os denotaremos da seguinte forma

$$(a_n, f_n): \qquad \cdots \longrightarrow a_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} a_n \xrightarrow{f_n} a_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_0$$

Quando não houver risco de confusão escreveremos apenas (a_n). Para $n \leq m$ escreva $f_{n,m} = f_{n+1} \circ \cdots \circ f_m$. Considere o produto dos objetos a_n e sejam $\prod a_n \xrightarrow{p_n} a_n$ e $\varprojlim a_n \xrightarrow{\pi_n} a_n$ as flechas canônicas. Da definição de produto sabemos que existem únicas flechas ϕ e u tais que

$$\begin{tikzcd} \prod a_n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_n - f_{n+1} \circ p_{n+1}"'] & \prod a_n \arrow[dl, "p_n"] \\ a_n & \end{tikzcd} \qquad \text{e} \qquad \begin{tikzcd} \varprojlim a_n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi_n"'] & \prod a_n \arrow[dl, "p_n"] \\ a_n & \end{tikzcd}$$

comutam para todo inteiro n. Da propriedade universal do limite é imediato ver que u é monomorfismo.

Afirmação. *u é o núcleo de ϕ.*

Prova da afirmação. Seja $k \xrightarrow{\gamma} \prod a_n$ o núcleo de ϕ. Temos

$$p_n \circ (\phi \circ u) = (p_n \circ \phi) \circ u = (p_n - f_{n+1} \circ p_{n+1}) \circ u = p_n \circ u - f_{n+1} \circ (p_n \circ u) = \pi_n - f_{n+1} \circ \pi_n = 0$$

e da propriedade universal do produto segue que $\phi \circ u = 0$. Logo existe única flecha φ tal que $u = \gamma \circ \varphi$.

Por outro lado, note que $f_{n,m} \circ p_m \circ \gamma = p_n \circ \gamma$; de fato,

$$\begin{aligned}
f_{n,m} \circ (p_m \circ \gamma) &= (f_{n,m} \circ p_n) \circ \gamma \\
&= f_{n+1} \circ \cdots \circ f_{m-1} \circ (f_m \circ p_m) \circ \gamma \\
&= f_{n+1} \circ \cdots \circ f_{m-1} \circ (p_{m-1} - p_{m-1} \circ \phi) \circ \gamma \\
&= f_{n+1} \circ \cdots \circ f_{m-1} \circ (p_{m-1} \circ \gamma) \\
&= \cdots \\
&= (f_{n+1} \circ p_{n+1}) \circ \gamma \\
&= (p_n - p_n \circ \phi) \circ \gamma \\
&= p_n \circ \gamma.
\end{aligned}$$

Logo existe única flecha η tal que $\pi_n \circ \eta = p_n \circ \gamma$. Vamos provar que $\gamma = u \circ \eta$; de

$$p_n \circ (u \circ \eta) = (p_n \circ u) \circ \eta = \pi_n \circ \eta = p_n \circ \gamma$$

para todo natural n, a igualdade segue e, por u ser monomorfismo, η é única e portanto η e φ são isomorfismos.

Defina $coker\phi = \varprojlim^1 a_n$. Podemos ver a flecha ϕ como um complexo em $Ch(\mathcal{A})$ cuja primeira homologia é $\ker \phi = \varprojlim a_n$ e a 0-ésima homologia é $\varprojlim^1 a_n$.

Lema 1.5.8. *Se todas as flechas f_n são epimorfismos, então $\varprojlim^1 a_n = 0$.*

Demonstração. Provaremos que ϕ é epimorfismo. Seja p um objeto projetivo de $\mathcal{A}$ e defina $(_)^* = Hom(1_p, _)$. Sabemos que $(p_n)^*$ é o produto dos objetos $(a_n)^*$ e, sendo $(_)^*$ funtor aditivo exato, a flecha ϕ^* é a única tal que $(p_n)^* \circ \phi^* = (p_n)^* - (f_{n+1})^* \circ (p_{n+1})^*$ e $(f_n)^*$ é epimorfismo. Provaremos que ϕ^* é epimorfismo e, pela arbitrariedade de p, poderemos concluir que ϕ também o é.

Seja $(y_n) \in \prod (a_n)^*$ e tome $x_0 \in (a_0)^*$; sendo $(f_1)^*$ epimorfismo, deve existir $x_1 \in (a_1)^*$ tal que $(f_1)^*(x_1) = x_0 - y_0$. Indutivamente provamos que para cada n natural existe $x_{n+1} \in (a_{n+1})^*$ tal que $(f_{n+1})^*(x_{n+1}) = x_n - y_n$; logo $(p_n)^* \circ \phi^*((x_n)) = x_n - (f_{n+1})^*(x_{n+1}) = y_n$, ou seja,

$$\phi^*((x_n)) = (y_n).$$

Q.E.D.

O argumento visto na demonstração do lema anterior nos permite tratar da categoria $\mathcal{A}$ como fazemos em Ab.

Lema 1.5.9. *Dada sequência exata entre sequências*

$$0 \to (a_n, f_n) \to (b_n, g_n) \to (c_n, h_n) \to 0$$

existe sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow \varprojlim a_n \longrightarrow \varprojlim b_n \longrightarrow \varprojlim c_n \rightsquigarrow \varprojlim^1 a_n \longrightarrow \varprojlim^1 b_n \longrightarrow \varprojlim^1 c_n \longrightarrow 0$$

Demonstração. Do axioma $(AB4^*)$ temos diagrama com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod a_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \prod b_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \prod c_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod a_n \arrow[r] & \prod b_n \arrow[r] & \prod c_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A definição do produto e sua propriedade universal implicam na comutatividade deste diagrama e o resultado segue do lema da serpente. *Q.E.D.*

Defina $\varprojlim^0 a_n = \varprojlim a_n$ e $\varprojlim^n a_i = 0$ para $n \neq 0, 1$.

Proposição 1.5.10. *Se $\mathcal{A}$ tem injetivos suficientes, então para todo $n \geq 0$ temos $\varprojlim^n = R^n(\varprojlim)$.*

Demonstração. Sendo $\varprojlim$ exato à direita, temos $R^0(\varprojlim) = \varprojlim$. Assim, pelo corolário 1.5.7 e por dualidade, basta provar que $\{\varprojlim^n\}_{n\geq 1}$ é δ-funtor cohomológico e $\varprojlim^n$ é anulável para $n > 0$.

i) $\{\varprojlim^n\}_{n\geq 1}$ é δ-funtor cohomológico.

O lema anterior garante a condição $i)$ da definição de δ-funtor cohomológico. Agora, dado diagrama comutativo com linhas exatas de torres

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (a_n) \arrow[r] \arrow[d] & (b_n) \arrow[r] \arrow[d] & (c_n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (a'_n) \arrow[r] & (b'_n) \arrow[r] & (c'_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ao passarmos o produto, obtemos diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod a_n \arrow[r] \arrow[d] & \prod b_n \arrow[r] \arrow[d] & \prod c_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod a'_n \arrow[r] & \prod b'_n \arrow[r] & \prod c'_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Note que as homologias possivelmente não nulas do complexo $0 \to \prod a_n \xrightarrow{\phi} \prod a_n \to 0$ são $\varprojlim a_n$ e $\varprojlim^1 a_n$. Pelo argumento dado na prova do lema anterior, podemos ver o diagrama acima como um diagrama de complexos em $\mathcal{A}$; daí, pela naturalidade da homologia, concluímos que $\{\varprojlim^n\}_{n\geq 0}$ é δ-funtor cohomológico.

ii) Para $n > 0$ $\varprojlim^n$ é anulável.

Basta provar para $n = 1$. Ao verificarmos que $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ tem injetivos suficientes, vemos que existe monomorfismo de um dado objeto no produto de injetivos (e portanto injetivo) da forma $r_k(E_k)$, onde k é objeto de $\mathcal{I}$, E_k é objeto injetivo de $\mathcal{A}$ e r_k

é o funtor adjunto à direita do funtor coordenada k-th (ver [16]). No nosso caso particular, os injetivos são produtos de torres da forma

$$r_k(E) : \cdots \longrightarrow E \xrightarrow{1} E \xrightarrow{1} E \xrightarrow{1} 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0,$$

onde E é objeto injetivo, pois, dado natural n,

$$r_k(E)(n) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n < k \\ E, & \text{se} \quad n \geq k \end{cases}$$

Do lema 1.5.8 concluímos que $\varprojlim^1$ se anula nestes objetos.

Q.E.D.

Exemplo 1.5.2. *Da sequência exata de torres* $0 \to (p^n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}_{p^n}) \to 0$ *temos*

$$0 \longrightarrow \varprojlim p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_p \rightsquigarrow \varprojlim^1 p^n \longrightarrow \mathbb{Z} \varprojlim^1 \mathbb{Z} \longrightarrow \varprojlim^1 \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow 0$$

onde $\widehat{\mathbb{Z}}_p = \varprojlim \mathbb{Z}_{p^n}$*; do lema* 1.5.8 *temos* $\varprojlim^1 \mathbb{Z} = 0$ *e, como* $\varprojlim p^n\mathbb{Z} = \cap p^n\mathbb{Z} = 0$ *e* $\varprojlim \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$*, temos sequência exata*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_p \rightsquigarrow \varprojlim^1 p^n\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Logo $\varprojlim^1 p^n\mathbb{Z} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}$.

Em certo sentido, como no lema 1.5.9, $\varprojlim^1$ mede quanto o funtor $\varprojlim$ é exato. Definiremos agora a condição de Mittag-Leffler e veremos que torres que satisfazem esta condição são anuladas por $\varprojlim^1$.

Definição 1.5.7 (Mittag-Leffler)**.** *Uma torre de objetos* (a_n) *satisfaz a condição de Mittag-Leffler se dado* $k \geq 0$ *existe* $j \geq k$ *tal que* $im(a_j \to a_k) = im(a_i \to a_k)$ *para todo* $i \geq j$*. Dizemos que a torre* (a_i) *satisfaz a condição trivial de Mittag-Leffler se dado* $k \geq 0$ *existe* $j > k$ *tal que* $im(a_j \to a_k) = 0$.

Exemplo 1.5.3. *Torres* (a_n) *cujas flechas são todas epimorfismos satisfazem a condição de Mittag-Leffler, pois temos* $im(a_j \to a_k) = a_k$ *para todo* $j > k$.

Teorema 1.5.11. *Se a torre* (a_n, f_n) *satisfaz a condição de Mittag-Leffler, então* $\varprojlim^1 a_n = 0$.

Demonstração. Provaremos que ϕ é epimorfismo. Fixe $k \geq 0$ e sejam i e j como na definição acima. Primeiro suponha que a torre satisfaz a condição trivial de Mittag-Leffler. Seja $(y_n) \in \prod a_n$. Note que $f_{k,i}(y_i) = 0$ para $i \geq j$; assim defina

$$x_k = y_k + f_{k+1}(y_{k+1}) + ... + f_{k,j-1}(y_{j-1}).$$

Seja $l > k+1$ tal que $imf_{k+1,l} = 0$. Podemos supor $l = j$, pois $imf_{k,l} = f_{k+1}(imf_{k+1,l}) = 0$ e daí

$$\begin{aligned} x_k - f_{k+1}(x_{k+1}) &= (y_k + f_{k+1}(y_{k+1}) + ... + f_{k,j-1}(y_{j-1})) \\ &-(f_{k+1}(y_{k+1} + f_{k+2}(y_{k+2}) + ... + f_{k+1,j-1}(y_{j-1}))) \\ &= y_k. \end{aligned}$$

Portanto $\phi((x_n)) = (y_n)$.

No caso geral, ponha $b_k = imf_{k,i}$. Assim $b_n \subseteq a_n$ e $f_{n+1}(b_{n+1}) = b_n$ para todo natural n; logo (b_n, f_n) é uma torre de epimorfismos e portanto, pelo lema 1.5.8, $\varprojlim^1 b_n = 0$. Agora, b_n e a_n induzem uma torre (a_n/b_n) que satisfaz a condição trivial de Mittag-Leffler, pois $f_{k,i}(a_i) = 0$ em a_k/b_k. Do argumento acima temos $\varprojlim^1 a_n/b_n = 0$ e o resultado segue do lema 1.5.9 aplicado na sequência exata de torres $0 \to (b_n) \to (a_n) \to (a_n/b_n) \to 0$. *Q.E.D.*

Capítulo 2

Sequências Espectrais

Pode-se pensar em uma sequência espectral como um livro cujas páginas são planos bidimensionais de objetos de uma categoria abeliana. Em cada página há flechas entre estes objetos postas de tal forma que as flechas que jazem sob uma reta formam um complexo e todas estas retas são paralelas. As homologias dos complexos numa página são exatamente os objetos da página sequinte.

Nas primeira seção vemos informalmente como constrói-se uma sequência espectral a partir de um complexo filtrado e sua convergência. Na segunda seção iniciamos a teoria formal e lidamos com aspectos gerais de sequências espectrais e convergência. Na próxima seção vemos como uma filtração de um complexo origina uma sequência espectral e estabelecemos condições suficientes de convergência desta (teoremas da construção e convergência); além disso observamos a funtorialidade das espectrais. Na última seção apresentamos as filtrações canônicas da totalização de um bicomplexo e aplicamos a teoria feita até então desenvolvida.

2.1 Introdução informal

Muitas vezes o teorema da sequência exata longa e outras ferramentas não são suficientes para obtermos informações desejadas sobre as homologias de um complexo de cadeia $\mathcal{C}_\bullet$. Uma tentativa de contornar esta dificuldade é filtrar $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ por objetos

$$\cdots \subseteq \phi_0 \subseteq \phi_1 \subseteq \cdots \subseteq \phi_r \subseteq \phi_{r-1} \subseteq \cdots$$

tais que ϕ_i ou ϕ_i/ϕ_{i-1} sejam conhecidos. Pois assim, a partir das sequências $0 \to \phi_{i-1} \to \phi_i \to \phi_i/\phi_{i-1} \to 0$ podemos obter propriedades de $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$.

Uma maneira natural de filtrarmos $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ é tomar uma filtração de $\mathcal{C}_\bullet$:

$$\cdots \subseteq F^{p-1} \subseteq F^p \subseteq \cdots$$

pois esta induz uma filtração em $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$, dada pelas imagens das flechas

$$\cdots \longrightarrow H_n(F^{p-1}) \longrightarrow H_n(F^p) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{C}_\bullet).$$

Isto pode não ser suficiente já que podemos recair no mesmo problema ao tentarmos calcular $H_n(F^p)$ e, além disso, pode não ser simples a relação entre $H_n(F^{p-1})$ e sua imagem em $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$.

Para contornar isto, consideramos os complexos F^p/F^{p-1} que, num certo sentido, são mais fáceis de se trabalhar. Podemos supor assim que os objetos $H_n(F^p/F^{p-1})$ são calculáveis. Escrevemos ${}^1E_{p,q} = H_n(F^p/F^{p-1})$, onde $q = n - p$, e dizemos que este objeto é uma aproximação de primeira ordem de $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$. As sequências exatas curtas $0 \to F^{p-1} \to F^p \to F^p/F^{p-1} \to 0$ dão origem a sequências exatas longas

$$\cdots \to H_{n+1}(F^{p-1}) \to H_{n+1}(F^p) \to {}^1E_{p,q+1} \rightsquigarrow H_n(F^{p-1}) \to H_n(F^p) \to {}^1E_{p,q} \rightsquigarrow \cdots$$

Podemos reorganizar estas sequências da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(F^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p-1,q+2} \arrow[r] & H_n(F^{p-2}) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p-2,q+2} \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-3}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(F^p) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p,q+1} \arrow[r] & H_n(F^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p-1,q+1} \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(F^{p+1}) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p+1,q} \arrow[r] & H_n(F^p) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p,q} \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

A flecha ${}^1d_{p,q} : {}^1E_{p,q} \to H_n(F^{p-1}) \to {}^1E_{p-1,q}$ define uma diferencial e a aproximação de segunda ordem de $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ é definida como sendo ${}^2E_{p,q} = \ker({}^1d_{p,q})/im({}^1d_{p+1,q})$.

Podemos definir uma diferencial da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
 & & & {}^1Z_{p-2,q+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & {}^2E_{p-2,q+1} \\
 & & H_{n-1}(F^{p-2}) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p-2,q+1} & \\
{}^1Z_{p,q} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & {}^1E_{p,q} \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-1}) & & \\
{}^2E_{p,q} & & & &
\end{tikzcd}$$

onde ${}^1Z_{p,q} = \ker({}^1d_{p,q})$.

Em geral, a aproximação de ordem $r+1$ de $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ é definida por ${}^{r+1}E_{p,q} = \ker({}^rd_{p,q})/im({}^rd_{p+r,q-r+1})$ e as diferenciais ${}^rd_{p,q}$ são definidas de acordo com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & {}^{r-1}Z_{p-r,q+r-1} \arrow[r] \arrow[d] & {}^rE_{p-r,q+r-1} \\
 & & & & & & \vdots \arrow[d] & \\
 & & & & & {}^1Z_{p-r,q+r-1} \arrow[r] \arrow[d] & {}^2E_{p-r,q+r-1} & \\
 & & & & H_{n-1}(F^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p-r,q+r-1} & & \\
 & & & & \vdots \arrow[d] & & & \\
 & & {}^1Z_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & {}^1E_{p,q} \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-1}) & & & \\
 & & \vdots \arrow[d] & & & & & \\
{}^{r-1}Z_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{r-1}E_{p,q} & & & & & & \\
{}^rE_{p,q} & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

onde ${}^iZ_{p,q} = \ker({}^id_{p,q})$.

Se a filtração inicial for limitada (ou seja, $F^{-r} = 0$ e $F^r = \mathcal{C}_\bullet$ para r suficientemente grande) é possível encontrar uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow im(H_n(F^{p-1}) \to H_n(\mathcal{C}_\bullet)) \longrightarrow im(H_n(F^p) \to H_n(\mathcal{C}_\bullet)) \longrightarrow {}^rE_{p,q} \longrightarrow 0,$$

ou seja, $im(H_n(F^p) \to H_n(\mathcal{C}_\bullet))/im(H_n(F^{p-1}) \to H_n(\mathcal{C}_\bullet)) \simeq {}^rE_{p,q}$ que, por sua vez, é calculável.

2.2 Aspectos Gerais

Antes de falar em sequências espectrais falaremos um pouco sobre filtrações.

Definição 2.2.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria e b um objeto de $\mathcal{A}$. Dizemos que uma filtração $\underline{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é:*

i) Hausdorff se $\varprojlim a_n = 0$.

ii) Completa se a flecha canônica $b \to \varprojlim b/a_n$ é epimorfismo.

iii) Exaustiva se a flecha canônica $\varinjlim a_n \to b$ *é isomorfismo.*

Exemplo 2.2.1. *Em* $\mathbb{Z}$*-Mod, a família* $\{2^n\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *uma filtração de* $\mathbb{Z}$*.*

Lema. *Se* $(b, \underline{a})$ *é um objeto filtrado em uma categoria abeliana* $\mathcal{A}$ *com projetivos suficientes, então* $\underline{a}$ *é completa se, e somente se,* $\varprojlim^1 a_n = 0$*.*

Demonstração. A filtração $\underline{a}$ é uma sequência de monomorfismos $\{a_{n+1} \xrightarrow{i_{n+1}} a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e isto induz uma sequência de epimorfismos $\{b/a_{n+1} \xrightarrow{\bar{i}_{n+1}} b/a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$; considerando a sequência $\{b \xrightarrow{1_b} b\}$ obtemos sequência exata $0 \to (a_n, i_n) \to (b, 1_b) \to (b/a_n, \bar{i}_n) \to 0$. Dos lemas 1.5.8 e 1.5.9 temos sequência exata

$$0 \longrightarrow \varprojlim a_n \longrightarrow b \longrightarrow \varprojlim b/a_n \rightsquigarrow \varprojlim^1 a_n \longrightarrow 0$$

e consequentemente o resultado. *Q.E.D.*

Observação. *Na demonstração do lema anterior note que a flecha canônica* $\varprojlim a_n \to b$ *é o núcleo da flecha canônica* $b \to \varprojlim b/a_n$*.*

Definição 2.2.2 (`Sequência Espectral`)**.** *Uma sequência espectral homológica em uma categoria abeliana* $\mathcal{A}$ *consiste de um par de famílias de objetos e flechas*

$$((^rE_{\bullet,\bullet})_{r\geq 1}, (^rd_{\bullet,\bullet})_{r\geq 1})$$

onde, para cada $r \geq 1$*,* $\{^rE_{\bullet,\bullet}, {}^rd_{\bullet,\bullet}\}$ *é uma família de complexos de* $\mathcal{A}$ *com* $^rE_{p,q} \xrightarrow{^rd_{p,q}} {}^rE_{p-r,q+r-1}$ *(*rd *tem grau* $(-r, r-1)$*) tal que*

$$^{r+1}E_{p,q} \simeq \frac{\ker {}^rd_{p,q}}{im^rd_{p+r,q-r+1}}.$$

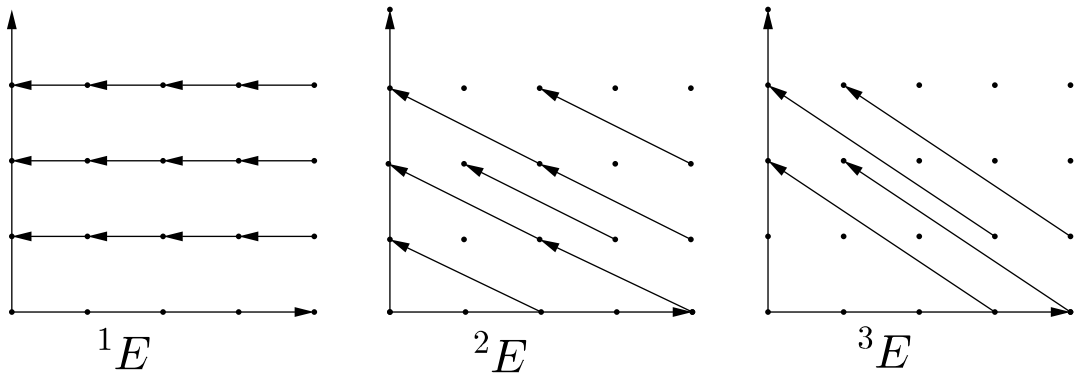
O grau total do termo $^rE_{p,q}$ *é* $n = p + q$*.*

Dualmente definimos sequências espectrais cohomológicas. Ao invés de sequência espectral homológica escreveremos apenas sequência espectral ou espectral. Devido a notação carregada, frequentemente denotaremos a sequência espectral

$$((^rE_{\bullet,\bullet})_{r\geq 1}, (^rd_{\bullet,\bullet})_{r\geq 1})$$

apenas por E.

Para cada $r \geq 1$ podemos identificar o objeto $^rE_{p,q}$ com o ponto do plano $\mathbb{Z}^2$ de coordenadas inteiras (p, q). Por essa razão, vamos nos referir à família de complexos $\{^rE_{p,q}, {}^rd_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ como r-ésima página da espectral. Repare que o objeto $^{r+1}E_{p,q}$ é a (p, q)-ésima homologia do complexo $^rE_{\bullet,\bullet}$ cuja reta na qual ele jaz passa pelo ponto



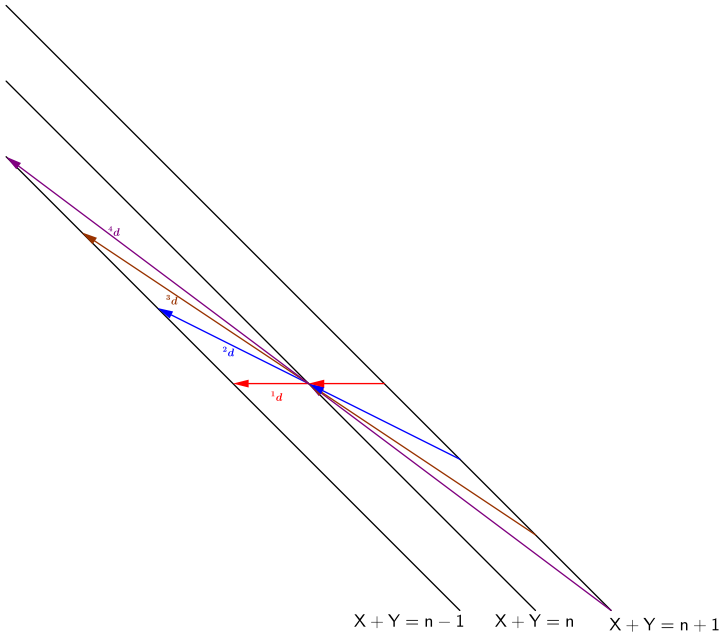
(p, q). Dessa forma passamos da r-ésima página para a $(r + 1)$-ésima página via a homologia dos complexos ${}^rE_{\bullet,\bullet}$.

Além disso, note que na r-ésima página cada complexo ${}^rE_{\bullet,\bullet}$ jaz sob uma reta de equação $(r-1)X+rY = n$ e, como o grau de rd é $(-r, r-1)$, pontos da reta $X+Y = n$ são levados em pontos da reta $X + Y = n - 1$.

Exemplo 2.2.2. *Uma sequência espectral E no primeiro quadrante é da forma ${}^1E_{p,q} = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$ (isto é, os objetos da espectral são possivelmente não nulos apenas nos pontos do primeiro quadrante). Fixados p, q, para r suficientemente grande teremos ${}^rE_{p,q} \simeq {}^{r+1}E_{p,q}$. De fato, se $r > max\{p, q + 1\}$, então $p - r, q - r + 1 < 0$ e portanto ${}^rE_{p-r,q+r-1} = {}^rE_{p+r,q-r+1} = 0$; assim, ${}^rd_{p,q} = {}^rd_{p+r,q-r+1} = 0$ e, consequentemente, ${}^rE_{p,q} \simeq {}^{r+1}E_{p,q}$.*

Quando ${}^rE_{p,q} = {}^{r+1}E_{p,q}$ escrevemos ${}^\infty E_{p,q}$ para ${}^rE_{p,q}$, nos referimos a este objeto como termo no infinito e dizemos que a espectral colapsou no ponto (p, q).

Definição 2.2.3. *Uma flecha $E \xrightarrow{f} E'$ entre sequências espectrais é uma família $\{{}^rf_{\bullet,\bullet}\}_{r\geq 1}$, onde, para cada $r \geq 1$, ${}^rE\bullet,\bullet \xrightarrow{{}^rf_{\bullet,\bullet}} {}^rE'_{\bullet,\bullet}$ é uma família de flechas em $Ch(\mathcal{A})$ tal que ${}^{r+1}f_{p,q} = {}^rH_{p,q}({}^rf_{\bullet,\bullet})$ para todos inteiros p, q (${}^rH_{p,q}$ denota a (p, q)-ésima homologia). Como uma flecha é formada por famílias de flechas em $Ch(\mathcal{A})$, definimos*



a composição entre duas flechas a partir da composição de flechas em $Ch(\mathcal{A})$. Lembrando que a homologia é um funtor, é simples verificar que estas flechas formam uma categoria; denotaremos esta categoria por $SpecSeq(\mathcal{A})$.

Lema 2.2.1. *Seja $E \xrightarrow{f} E'$ uma flecha entre sequências espectrais tal que, para algum $r \geq 1$, ${}^r f_{p,q}$ é isomorfismo para todos inteiros p e q. Temos assim que ${}^s f_{p,q}$ é isomorfismos para todo $s \geq r$.*

Demonstração. Sendo ${}^r d_{\bullet,\bullet}$ e ${}^r d'_{\bullet,\bullet}$ as diferenciais de ${}^r E_{\bullet,\bullet}$ e ${}^r E'_{\bullet,\bullet}$, respectivamente, da hipótese temos $\ker {}^r d_{p,q} \simeq \ker {}^r d'_{p,q}$ e $im^r d_{p,q} \simeq im^r d'_{p,q}$ para todos $p, q \in \mathbb{Z}$; o resultado segue por indução, do lema dos 5 (ver apêndice B) e do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & im^r d_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \ker {}^r d_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & {}^{r+1}E_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "{}^{r+1}f_{p,q}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & im^r d'_{p,q} \arrow[r] & \ker {}^r d'_{p,q} \arrow[r] & {}^{r+1}E'_{p,q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Definição 2.2.4. *Uma sequência espectral E é dita limitada se para todo inteiro n existe apenas um número finito de termos não nulos de grau total n na primeira página.*

Novamente, dados inteiros p e q, para r suficientemente grande, teremos ${}^r E_{p,q} = {}^{r+1}E_{p,q}$ (as diferenciais serão todas nulas).

Uma sequência espectral limitada E converge para um objeto graduado $H_\bullet$ se dado

inteiro n existe uma filtração finita

$$0 = F^{s-1}H_n \subseteq F^sH_n \subseteq \cdots \subseteq F^{t-1}H_n \subseteq F^tH_n = H_n$$

de subobjetos de H_n tal que ${}^\infty E_{p,q} \simeq F^pH_{p+q}/F^{p-1}H_{p+q}$.

Exemplo 2.2.3. *Seja E uma sequência espectral no primeiro quadrante que converge para o objeto $H_\bullet$; assim E é limitada e dado inteiro n, existe filtração finita*

$$0 = F^{s-1}H_n \subseteq F^sH_n \subseteq \cdots \subseteq F^{t-1}H_n \subseteq F^tH_n = H_n.$$

Para $p < 0$ ou $q < 0$, como ${}^1E_{p,q} = 0$ e ${}^\infty E_{p,q}$ é objeto quociente de ${}^1E_{p,q}$, então ${}^\infty E_{p,q} = 0$. Assim, para todo $u \geq 1$ e $v \geq n+1$, temos ${}^\infty E_{-u,n+u} = 0$ e ${}^\infty E_{v,n-v} = 0$, ou seja, $F^{-u}H_n = F^{-u-1}H_n$ e $F^vH_n = F^{v-1}H_n$. Portanto $F^tH_n = F^nH_n$ e $F^{s-1}H_n = F^{-1}H_n$. Provamos assim que a filtração finita de H_n possui $n+1$ termos.

Note que ${}^\infty E_{0,n} = F^0H_n$ e ${}^\infty E_{n,0} = F^nH_n/F^{n-1}H_n$, ou seja, existem sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow {}^\infty E_{0,n} \longrightarrow H_n \qquad e \qquad H_n \longrightarrow {}^\infty E_{n,0} \longrightarrow 0$$

Proposição 2.2.2. *Seja E uma sequência espectral limitada convergindo para $H_\bullet$. O conjunto dos pontos (p,q) que jazem sob a reta $X+Y=n$ tais que ${}^\infty E_{p,q} \neq 0$ está em bijeção com a filtração (finita) com termos distintos de H_n:*

$$0 = F^{s-1}H_n \subset F^sH_n \subset \cdots \subset F^{t-1}H_n \subset F^tH_n = H_n.$$

Demonstração. Como E é limitada, existem $s_0 = min\{p : {}^\infty E_{p,n-p} \neq 0\}$ e $t_0 = max\{p : {}^\infty E_{p,n-p} \neq 0\}$. Provaremos a proposição mostrando que $s = s_0, t = t_0$ e que, cada inteiro m entre s_0 e t_0 se corresponde a um subobjeto F^mH_n da filtração de H_n. Por definição de s_0 temos $F^{s_0}H_n \neq F^{s_0-1}H_n$ e, em particular, $F^{s_0}H_n \neq 0$ e $F^{s_0-1}H_n = H_n$; logo $s \leq s_0 \leq t$. Da mesma forma $s \leq t_0 \leq t$.

Por outro lado, como os termos da filtração são todos distintos, temos ${}^\infty E_{t,n-t} \neq 0$ e ${}^\infty E_{s,n-s} \neq 0$, logo $t \leq t_0$ e $s \geq s_0$. Portanto $t = t_0$ e $s = s_0$. *Q.E.D.*

Observação.

1. *Repare que na demonstração da proposição anterior os pontos (p,q) tais que $p+q=n$ e ${}^\infty E_{p,q} \neq 0$ são todos consecutivos.*

2. *Na seção 2.4 veremos que de bicomplexos induzimos espectrais cujas segundas páginas são conhecidas; assim, relações entre os objetos da segunda página de uma espectral podem ser úteis.*

Exemplo 2.2.4 (`Sequência dos 5 termos`)**.** *Sejam E e $H_\bullet$ sequência espectral e*

objeto filtrado como no exemplo anterior. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker {}^2d_{2,0} \longrightarrow {}^2E_{2,0} \xrightarrow{{}^2d_{2,0}} {}^2E_{0,1} \longrightarrow coker^2 d_{2,0} \longrightarrow 0$$

Segue da espectral estar no primeiro quadrante que $\ker {}^2d_{2,0} \simeq {}^3E_{2,0} \simeq {}^\infty E_{2,0}$, $coker^2_{2,0} \simeq {}^3E_{0,1} \simeq {}^\infty E_{0,1}$ *e* ${}^2E_{1,0} \simeq {}^\infty E_{1,0}$. *Da proposição anterior temos as filtrações*

$$0 \subset F^0H_1 \subset H_1 \quad e \quad 0 \subset F^0H_2 \subset F^1H_2 \subset H_2.$$

Daí ${}^\infty E_{0,1} = F^0H_1$ *e* ${}^2E_{1,0} = H_1/F^0H_1 = H_1/{}^\infty E_{0,1}$*; logo existe sequência exata*

$$0 \longrightarrow {}^\infty E_{0,1} \longrightarrow H_1 \longrightarrow {}^2E_{1,0} \longrightarrow 0$$

e portanto o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & H_2 \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & {}^\infty E_{2,0} \arrow[r] \arrow[d] & {}^2E_{2,0} \arrow[r, "{}^2d_{2,0}"] & {}^2E_{0,1} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & {}^\infty E_{0,1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & & H_1 \arrow[d] & \\
 & & & & {}^2E_{1,0} \arrow[d] & \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

nos dá uma sequência exata entre os objetos H_1, H_2 *e objetos da segunda página da espectral.*

Exemplo 2.2.5 (`2 colunas`). *Seja* E *é uma sequência espectral convergindo para* $H_\bullet$. *Se existe* $t > 0$ *tal que* ${}^2E_{p,q} = 0$ *para* $p \neq 0, t$, *então*

i) ${}^2E = ... = {}^tE$.

ii) ${}^{t+1}E = {}^\infty E$.

iii) Para todo inteiro n *existe sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow {}^{t+1}E_{0,n} \longrightarrow H_n \longrightarrow {}^{t+1}E_{t,n-t} \longrightarrow 0.$$

iv) Existe sequência exata longa

$$\cdots \to H_{n+1} \to {}^2E_{t,n-1+t} \xrightarrow{{}^td} {}^2E_{0,n} \to H_n \to {}^2E_{t,n-t} \xrightarrow{{}^td} {}^2E_{0,n-1} \to \cdots$$

Demonstração. As únicas diferenciais possivelmente não nulas são ${}^t d_{t,q}$ e daí temos $i)$ e $ii)$.

Fixe inteiro n e suponha $t < n$. Para $0 < p < t$ temos $0 = {}^{t+1}E_{p,n-p} = F^p H_n / F^{p-1} H_n$ e portanto $F^{t-1}H_n = ... = F^0 H_n$ e $F^t H_n = ... = F^{n-1}H_n = H_n$; logo ${}^{t+1}E_{0,n} = F^0 H_n$ e ${}^{t+1}E_{t,n-t} \simeq H_n / {}^{t+1}E_{0,n}$.

Caso $t \geq n$ já temos $H_n = F^t H_n$ e assim temos $iii)$.

Para $iv)$, fixado inteiro n, como ${}^t d_{p,q} = 0$ para $p \neq 0, t$, $\ker {}^t d_{t,n+1-t} \simeq {}^{t+1}E_{t,n+1-t}$ e $coker {}^t d_{t,n+1-t} \simeq {}^{t+1}E_{0,n}$. Assim temos sequência exata

$$0 \longrightarrow {}^{t+1}E_{t,n+1-t} \longrightarrow {}^2E_{t,n+1-t} \xrightarrow{{}^t d} {}^2E_{0,n} \longrightarrow {}^{t+1}E_{0,n} \longrightarrow 0.$$

Disto e do item anterior obtemos a sequência exata longa desejada do diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & {}^2E_{0,n+1} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & {}^{t+1}E_{0,n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & \\
 & & H_{n+1} \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & & {}^{t+1}E_{t,n+1-t} \arrow[r] \arrow[d] & {}^2E_{t,n+1-t} \arrow[r, "{}^t d"] & {}^2E_{0,n} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & {}^{t+1}E_{0,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & & & H_n \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
 & & & & 0 \arrow[r] & {}^{t+1}E_{t,n-t} \arrow[r] \arrow[d] & {}^2E_{t,n-t} \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Exemplo 2.2.6 (`2 linhas`). *Se E é uma sequência espectral convergindo para $H_\bullet$ tal que ${}^2E_{p,q} = 0$ a menos que $q = 0$ e $q = 1$, então existe sequência exata longa na segunda página da forma*

$$\cdots \to H_{n+1} \to {}^2E_{n+1,0} \xrightarrow{{}^2d_{n+1,0}} {}^2E_{n-1,1} \to H_n \to {}^2E_{n,0} \xrightarrow{{}^2d_{n,0}} {}^2E_{n-2,1} \to H_{n-1} \to \cdots .$$

Demonstração. Para cada inteiro n temos sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker {}^2d_{n,0} \longrightarrow {}^2E_{n,0} \xrightarrow{{}^2d_{n,0}} {}^2E_{n,2,1} \longrightarrow coker {}^2d_{n,0} \longrightarrow 0 .$$

Temos ${}^3E_{n,0} = \ker {}^2d_{n,0}$ e ${}^3E_{n-2,1} = coker {}^2d_{n,0}$. Também temos, para todos inteiros p e q, ${}^3d_{p,q} = 0$; logo ${}^\infty Ep,q = {}^3Ep,q$. Concluímos assim que para todo inteiro n há

sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow {}^{\infty}E_{n,0} \longrightarrow {}^{2}E_{n,0} \xrightarrow{{}^{2}d_{n,0}} {}^{2}E_{n-2,1} \longrightarrow {}^{\infty}E_{n-2,1} \longrightarrow 0\ .$$

Sendo $(n,0)$ e $(n-1,1)$ os únicos pontos (p,q) sob a reta $X+Y=n$ tais que, possivelmente, ${}^{2}E_{p,q} \neq 0$, a filtração de H_n é da forma $0 \subset F^{n-1}H_n \subseteq H_n$. Portanto

$${}^{\infty}E_{n-1,1} = F^{n-1}H_n \ \text{ e } \ {}^{\infty}E_{n,0} = H_n/{}^{\infty}E_{n-1,1},$$

isto é, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow {}^{\infty}E_{n-1,1} \longrightarrow H_n \longrightarrow {}^{\infty}E_{n,0} \longrightarrow 0$$

O resultado segue do diagrama

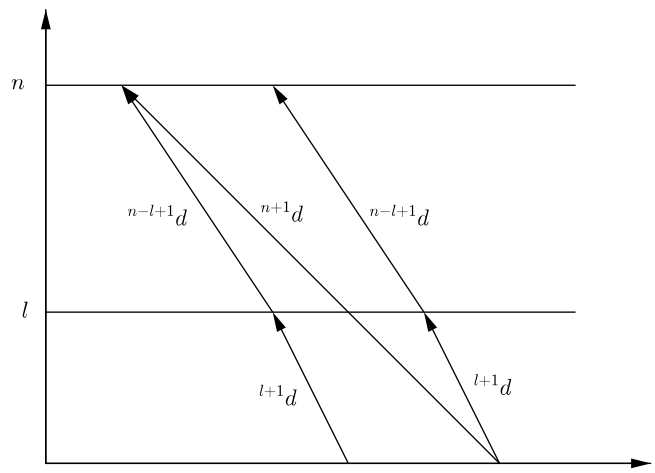
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & & & & & \\
\cdots \arrow[r] & {}^{\infty}E_{n-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & & & & \\
 & H_n \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & & & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & {}^{\infty}E_{n},0 \arrow[r] \arrow[d] & {}^{2}E_{n,0} \arrow[r, "{}^{2}d"] & {}^{2}E_{n-2,1} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & {}^{\infty}E_{n-2,1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & \\
 & 0 & & & H_{n-1} \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & & 0 \arrow[r] & {}^{\infty}E_{n-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{2}E_{n-1,0} \arrow[r, "{}^{2}d"] & {}^{2}E_{n-3,1} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & {}^{\infty}E_{n-3,1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 & & & H_{n-2} \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
 & & & & & & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Exemplo 2.2.7 (`3 linhas`). *Seja E uma sequência espectral convergindo para $H_\bullet$ onde $H_m = 0$ para todo inteiro m e ${}^{2}E_{p,q} = 0$ se $q \neq 0, l, n$ onde $0 < l < n$. Quando $n = 2l$ existe sequência exata longa entre os termos da segunda página da espectral.*

Demonstração. Como as possíveis flechas não nulas são ${}^{l+1}d, {}^{n-l+1}d$ e ${}^{n+1}d$, temos ${}^{n+2}E_{p,q} = {}^{\infty}E_{p,q} = 0$ para todos inteiros p,q; assim $\ker {}^{n+1}d_{p,q} = {}^{n+2}E_{p,q} = 0$ e $coker^{n+1}d_{p,q} = {}^{n+2}E_{p-n-1,q+n} = 0$, ou seja, ${}^{n+1}d$ é isomorfismo. Além disso ${}^{2}E \simeq {}^{l+1}E$.

Temos ${}^{n-l+1}d = {}^{l+1}d$ e, para todo inteiro p, $\ker {}^{l+1}d_{p,0} \simeq {}^{l+2}E_{p,0}, coker^{l+1}d_{p,l} \simeq {}^{l+2}E_{p-l-1,n} \simeq {}^{n+1}E_{p-l-1,n} \simeq {}^{n+1}E_{p+l,0} \simeq {}^{l+2}E_{p+l,0}$ e ${}^{l+2}E_{p,l} \simeq {}^{n+2}E_{p,l} = 0$. Portanto



existe sequência exata

$$0 \longrightarrow {}^{l+2}E_{p,0} \longrightarrow {}^{2}E_{p,0} \xrightarrow{{}^{l+1}d} {}^{2}E_{p-l-1,l} \xrightarrow{{}^{l+1}d} {}^{l+2}E_{p-1,0} \longrightarrow 0.$$

O resultado segue do diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & & & & \\
 & {}^{2}E_{p-n-1,n} \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & {}^{l+2}E_{p,0} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{2}E_{p,0} \arrow[r, "{}^{l+1}d"] & {}^{2}E_{p-l-1,l} \arrow[r, "{}^{l+1}d"] & {}^{2}E_{p-n-2,n} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & {}^{l+2}E_{p-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & & & {}^{2}E_{p-1,0} \arrow[d, "{}^{l+1}d"] & \\
 & & & & & {}^{2}E_{p-l-2,l} \arrow[d, "{}^{l+1}d"] & \\
 & & & & & {}^{2}E_{p-n-3,n} \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
 & & & & 0 \arrow[r] & {}^{l+2}E_{p-2,0} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{2}E_{p-2,0} \xrightarrow{{}^{l+1}d} \cdots \\
 & & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Seja E uma sequência espectral. Para todos inteiros p e q e cada $r \geq 1$, denote por ${}^{r+1}Z_{p,q}$ e ${}^{r+1}B_{p,q}$ os (p,q)-ésimos ciclo e bordo das diferenciais ${}^{r}d_{p,q}$ e ${}^{r}d_{p+r,q-r+1}$, respectivamente. Sendo ${}^{r+1}E_{p,q}$ subquociente de ${}^{r}E_{p,q}$, podemos ver o ciclo (p,q)-ésimo

ciclo de ${}^{r+1}E_{\bullet,\bullet}$ como ${}^{r+1}Z_{p,q}/{}^{r}B_{p,q}$ e o (p,q)-ésimo bordo como ${}^{r+1}B_{p,q}/{}^{r}B_{p,q}$. Assim construímos uma cadeia de subobjetos em ${}^{1}E_{p,q}$ da forma:

$$ {}^{1}B_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq {}^{r}B_{p,q} \subseteq {}^{r+1}B_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{r\geq 1} {}^{r}B_{p,q} \subseteq \bigcap_{r\geq 1} {}^{r}Z_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq {}^{r+1}Z_{p,q} \subseteq {}^{r}Z_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq {}^{1}Z_{p,q} \subseteq {}^{1}E_{p,q}. $$

Defina ${}^{\infty}B_{p,q} = \bigcup_{r\geq 1} {}^{r}B_{p,q}$, ${}^{\infty}Z_{p,q} = \bigcap_{r\geq 1} {}^{r}Z_{p,q}$ e ${}^{\infty}E_{p,q} = {}^{\infty}Z_{p,q}/{}^{\infty}B_{p,q}$. Numa espectral limitada ambas união e interseção são finitas e daí, para r suficientemente grande, ${}^{\infty}B_{p,q} = {}^{r}B_{p,q}$ e ${}^{\infty}Z_{p,q} = {}^{r}Z_{p,q}$; logo ${}^{\infty}E_{p,q} = {}^{r}E_{p,q}$.

Veremos que a partir de um complexo filtrado é possível construir uma sequência espectral que, sob certas condições, *converge* para a homologia do complexo. Para dar sentido a esta *convergência* precisaremos de algumas definições. Algumas outras noções que serão apresentadas coincidem com algumas já definidas.

Note que a partir de uma flecha entre espectrais $E \xrightarrow{f} E'$ podemos induzir naturalmente uma flecha entre ${}^{\infty}E_{p,q}$ e ${}^{\infty}E'_{p,q}$ para todos inteiros p e q. Denotaremos tal flecha por ${}^{\infty}f_{p,q}$ e, sob a hipótese do lema 2.2.1, ${}^{\infty}f_{p,q}$ será um isomorfismo.

Definição 2.2.5. *Seja E uma sequência espectral. Dizemos que E:*

i) colapsa na r-ésima página ($r \geq 2$) se existe exatamente uma reta com coeficiente angular diferente de $1 - r/r$ contendo pontos (p,q) tais que ${}^{\infty}E_{p,q} \neq 0$. Note que todas as diferenciais nesta página são nulas; portanto ${}^{r}E_{p,q} \simeq {}^{r+1}E_{p,q}$ para todos inteiros p e q.

ii) é limitada inferiormente se para cada inteiro n existe inteiro s tal que ${}^{1}E_{p,q} = 0$ para todos $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $p + q = n$ e $p < s$.

iii) é regular se para todos inteiros p e q as diferenciais ${}^{r}d_{p,q}$ são todas nulas para r suficientemente grande. Se existe r sendo o menor natural tal que ${}^{r}d_{\bullet,\bullet} = 0$ dizemos que E estabilizou na página r.

Observação. *i) Segue direto das definições que sequências espectrais limitadas são limitadas inferiormente.*

ii) Sequências espectrais limitadas inferiormente são regulares. De fato, Seja E espectral limitada inferiormente e fixe inteiros p e q. Assim existe inteiro s tal que ${}^{1}E_{p,q} = 0$ para $p < s$. Como todo objeto ${}^{r}E_{p,q}$ é subquociente de ${}^{1}E_{p,q}$, então ${}^{r}E_{p,q} = 0$ e portanto ${}^{r}d_{p,q} = 0$ para $r \geq 1$.

iii) Se E colapsa, então E é regular.

Definição 2.2.6 (`Convergência`). *Sejam E uma sequência espectral e $H_\bullet$ um objeto graduado. Dizemos que E:*

i) converge fraco (ou converge fracamente) para $H_\bullet$ se para todo inteiro n existe filtração (não necessariamente finita)

$$\cdots \subseteq F^{p-1}H_n \subseteq F^pH_n \subseteq \cdots \subseteq H_n$$

tal que ${}^\infty E_{p,q} \simeq F^pH_n/F^{p-1}H_n$, onde $p+q=n$.

ii) aproxima $H_\bullet$ se converge fraco para $H_\bullet$ e a filtração na qual tem-se a convergência fraca é Hausdorff e exaustiva.

iii) converge forte para $H_\bullet$ se E aproxima $H_\bullet$, é regular e a filtração na qual E aproxima $H_\bullet$ é completa (por também ser Hausdorff, temos que a flecha canônica $H_n \to \varprojlim H_n/F^pH_n$ é isomorfismo para todo inteiro n).

Em todos os casos dizemos que $H_\bullet$ é o limite da espectral.

A noção de convergência fraca não é tão boa no sentido de que não temos unicidade do limite (veja o exemplo 2.3.1). Quando dissermos que uma espectral converge (aproxima, converge fraco) para $H_\bullet$, $F = \{F^pH_\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$ denotará a filtração tal que ${}^\infty E_{p,q} \simeq F^pH_n/F^{p-1}H_n$.

Proposição 2.2.3. *Se E aproxima $H_\bullet$ e é limitada inferiormente, então E converge forte para $H_\bullet$.*

Demonstração. Seja $F = \{F^pH_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ filtração tal que ${}^\infty E_{p,q} \simeq F^pH_{p+q}/F^{p-1}H_{p+q}$. Segue da observação anterior que E é regular. Fixe $n \in \mathbb{Z}$ e seja $s \in \mathbb{Z}$ tal que ${}^\infty E_{p,n-p} = 0$ para $p < s$; temos $F^pH_n = F^{p-1}H_n$ e portanto $F^pH_n = F^{s-1}H_n$ para $p < s$. Provamos assim que a filtração F satisfaz a condição de Mittag-Leffler e portanto $\varprojlim^1 F^pH_n = 0$. O resultado segue do primeiro lema do capítulo. *Q.E.D.*

Observação. *As noções de convergência forte para sequências espectrais e convergência para sequências espectrais limitadas coincidem quando a espectral E é limitada. De fato, se E converge forte para $H_\bullet$, então por E convergir fraco para $H_\bullet$ e ser limitada teremos convergência. Por outro lado, se E converge para $H_\bullet$, a filtração F será exaustiva e Hausdorff; assim E aproxima $H_\bullet$ e da proposição anterior converge forte. Por isso, a partir daqui, se a espectral converge forte diremos apenas que a espectral converge e denotaremos isto por*

$${}^2E_{p,q} \Rightarrow_p H_n.$$

O símbolo $\Rightarrow_p$ remete ao grau p da filtração; a razão do índice 2 em ${}^2E_{p,q}$ se dá pelo fato de conseguirmos calcular as segundas páginas de espectrais advindas de bicomplexos (seção 2.4)

A noção de convergência é bastante útil. Com ela garantimos que se duas sequências espectrais têm páginas isomorfas (a partir de algum r), então seus limites devem ser isomorfos. Mais tarde usaremos isto para provar, por exemplo, que $Tor_n^R(M,N) \simeq tor_n^R(M,N)$.

Sejam E e E' duas espectrais que convergem fraco para $H_\bullet$ e $H'_\bullet$, respectivamente. Dizemos que uma flecha $H_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} H'_\bullet$ é compatível com uma flecha $E \xrightarrow{f} E'$ entre as espectrais se $h(F^pH_n) \subseteq F^pH'_n$ para todo inteiro p e, para todos $p,q \in \mathbb{Z}$ tais que $p+q=n$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F^pH_n/F^{p-1}H_n \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & {}^\infty E_{p,q} \arrow[d, "{}^\infty f_{p,q}"] \\ F^pH'_n/F^{p-1}H'_n \arrow[r, "\simeq"'] & {}^\infty E'_{p,q} \end{tikzcd}$$

comuta, onde a flecha na vertical é induzida por h.

Teorema 2.2.4 (`Teorema da Comparação`). *Sejam E e E' sequências espectrais convergindo para $H_\bullet$ e $H'_\bullet$, respectivamente, e sejam $H_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} H'_\bullet$ e $E \xrightarrow{f} E'$ flechas tais que $h_\bullet$ é compatível com f. Se existe $r \geq 1$ tal que ${}^r f_{\bullet,\bullet}$ é isomorfismo (e, pelo lema 2.2.1, ${}^\infty f_{\bullet,\bullet}$ é isomorfismo), então h também é um isomorfismo.*

Demonstração. Fixe inteiro n. Para $s \leq p-1$, o teorema do isomorfismo nos garante a existência de sequência exata

$$0 \longrightarrow F^{p-1}H_n/F^sH_n \longrightarrow F^pH_n/F^sH_n \longrightarrow {}^\infty E_{p,n-p} \longrightarrow 0\,.$$

De h ser compatível com f, temos diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F^{p-1}H_n/F^sH_n \arrow[r] \arrow[d] & F^pH_n/F^sH_n \arrow[r] \arrow[d] & {}^\infty E_{p,n-p} \arrow[r] \arrow[d, "{}^\infty f_{p,q}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F^{p-1}H'_n/F^sH'_n \arrow[r] & F^pH'_n/F^sH'_n \arrow[r] & {}^\infty E'_{p,n-p} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde as duas primeiras flechas na vertical são as induzidas por h.

Agora, fixado $s \in \mathbb{Z}$, segue diretamente por indução e do lema da serpente que $F^pH_n/F^sH_n \simeq F^pH'_n/F^sH'_n$. Daí, como ambas filtrações são exaustivas, também temos $H_n/F^sH_n \simeq H'_n/F^sH'_n$ para todo inteiro s. O teorema segue do fato das filtrações serem completas, pois

$$H_n \simeq \varprojlim H_n/F^sH_n \simeq \varprojlim H'_n/F^sH'_n \simeq H'_n.$$

Q.E.D.

2.3 Sequência Espectral advinda de um Complexo Filtrado

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana satisfazendo o seguinte axioma:

(AB5) *$\mathcal{A}$ admite limites diretos e o funtor limite direto é exato.*

Um complexo $\mathcal{C}_\bullet$ de $\mathcal{A}$ pode ser identificado com um objeto graduado munido de uma diferencial de grau -1: $\bigoplus c_n \xrightarrow{d} \bigoplus c_n$. Desta forma podemos estudar a teoria de sequências espectrais em $Ch(\mathcal{A})$.

Seja $F = \{F^p_\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$ uma filtração de $\mathcal{C}_\bullet$. Escreva $F^\infty_\bullet = \mathcal{C}_\bullet$ e $F^{-\infty}_\bullet = 0$. Defina $E_0(F^\infty_\bullet) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p_0$, onde $E^p_0 = \frac{F^p_\bullet}{F^{p-1}_\bullet}$; $E_0(F^\infty)$ é dito complexo associado a $F^\infty_\bullet$ pela filtração $\{F^p_\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$. Para cada $p, q \in \mathbb{Z}$ escreva $F^{p,q} = F^p_{p+q}$; chamaremos p de grau da filtração e q de grau complementar. Repare que $F^{p-1,q+1} \subseteq F^{p,q}$; assim, definindo $E^{p,q}_0(F^\infty_\bullet) = \frac{F^{p,q}}{F^{p-1,q+1}}$ note que $E_0 \simeq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E^{p,q}_0$. A filtração $\{F^p_\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$ induz uma filtração $FH_n = \{F^pH_n = im(H_n(F^p) \to H_n(F^\infty))\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de $H_n(F^\infty)$. Para simplificar a notação escreveremos F^p ao invés de $F^p_\bullet$. Quando F for exaustiva FH_n, devido ao axioma (AB5) também o será:

$$\begin{aligned}
\varinjlim F^pH_n &= \varinjlim im(H_n(F^p) \to H_n(F^\infty)) \\
&\simeq im(\varinjlim H_n(F^p) \to H_n(F^\infty)) \\
&\simeq im(H_n(\varinjlim F^p) \to H_n(F^\infty)) \\
&= im(H_n(F^\infty) \to H_n(F^\infty)) \\
&= H_n(F^\infty).
\end{aligned}$$

O seguinte lema será bastante útil para a construção de uma espectral a partir de um complexo munido de uma filtração:

Lema 2.3.1. *Seja*

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
a \arrow[ur] \arrow[r, "\alpha"'] & b \arrow[r, "\beta"'] & c
\end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo. Se sua linha é exata, então $\frac{im\gamma}{im\alpha} \simeq im\eta$.

Demonstração. Da comutatividade do diagrama temos $im\alpha \subseteq im\gamma$ e do teorema do isomorfismo e de $\ker\beta = im\alpha$ segue que

$$im\eta = im(\beta\circ\gamma) = \beta(im\gamma) \simeq \frac{im\gamma}{\ker\beta} = \frac{im\gamma}{im\alpha}.$$

Q.E.D.

Teorema 2.3.2 (`Construção`). *A filtração F do complexo $\mathcal{C}_\bullet$ determina uma sequência espectral E tal que ${}^1E_{p,q} = H_n(F^p/F^{p-1})$. Além disso, a construção é natural no sentido de que se $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ é flecha entre complexos filtrados, então $H_\bullet(f_\bullet)$ é compatível com a flecha correspondente nas espectrais advindas das filtrações.*

Demonstração. Fixe inteiros p e q e defina $n = p + q$. Seja $r \geq 1$. Do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^{p-r}/F^{p-r-1} \arrow[r] \arrow[d] & F^p/F^{p-r-1} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & F^p/F^{p-r} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^{p-1}/F^{p-r-1} \arrow[r] & F^p/F^{p-r-1} \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

temos

$$\begin{tikzcd}
H_n(F^p/F^{p-r-1}) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & H_n(F^p/F^{p-r}) \arrow[r, squiggly] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & H_{n-1}(F^{p-r}/F^{p-r-1}) \arrow[d] \\
H_n(F^p/F^{p-r-1}) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r, squiggly] & H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1})
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Defina ${}^rZ_{p,q} = im\,(H_n(F^p/F^{p-r}) \to H_n(F^p/F^{p-1}))$. Agora, de

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & F^{p+r-1}/F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & F^{p+r-1}/F^p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] & F^{p+r}/F^{p-1} \arrow[r] & F^{p+r}/F^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

temos

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(F^{p+r-1}/F^p) \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "1"] & H_n(F^{p+r-1}/F^{p-1}) \arrow[d] \\
H_{n+1}(F^{p+r}/F^p) \arrow[r, squiggly] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r] & H_n(F^{p+r}/F^{p-1})
\end{tikzcd}$$

e assim

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n+1}(F^{p+r}/F^p) \arrow[d, squiggly] \arrow[dr] & \\
H_{n+1}(F^{p+r-1}/F^p) \arrow[ur] \arrow[r, squiggly] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r] & H_n(F^{p+r-1}/F^{p-1})
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Defina ${}^rB_{p,q} = im\,(H_{n+1}(F^{p+r-1}/F^p) \rightsquigarrow H_n(F^p/F^{p-1}))$. Note que dos diagramas (2.1) e (2.2) temos

$${}^rB_{p,q} \subseteq {}^{r+1}B_{p,q} \text{ e } {}^{r+1}Z_{p,q} \subseteq {}^rZ_{p,q}.$$

Agora, do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & F^p \arrow[r] \arrow[d] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^{p-1}/F^{p-r} \arrow[r] & F^p/F^{p-r} \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

obtemos

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(F^p/F^{p-r}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H_n(F^p) \arrow[r] \arrow[ur] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r, squiggly] & H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r})
\end{tikzcd}$$

e daí $im(H_n(F^p) \to H_n(F^p/F^{p-1})) \subseteq {}^rZ_{p,q}$. Já do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & F^{p+r-1}/F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & F^{p+r-1}/F^p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] & F^\infty/F^{p-1} \arrow[r] & F^\infty/F^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

obtemos

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n+1}(F^\infty/F^p) \arrow[d, squiggly] \arrow[dr] & \\
H_{n+1}(F^{p+r-1}/F^p) \arrow[r, squiggly] \arrow[ur] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r] & H_n(F^{p+r-1}/F^{p-1})
\end{tikzcd}$$

e daí ${}^rB_{p,q} \subseteq im(H_{n+1}(F^\infty/F^p) \rightsquigarrow H_n(F^p/F^{p-1}))$. Além disso, do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^p \arrow[r] \arrow[d] & F^\infty \arrow[r] \arrow[d] & F^\infty/F^p \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] & F^\infty/F^{p-1} \arrow[r] & F^\infty/F^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

obtemos

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(F^p) \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
H_{n+1}(F^\infty/F^p) \arrow[r, squiggly] \arrow[ur, squiggly] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r] & H_n(F^\infty/F^{p-1})
\end{tikzcd}$$

Portanto $im(H_{n+1}(F^\infty/F^p) \rightsquigarrow H_n(F^p/F^{p-1})) \subseteq im(H_n(F^p) \to H_n(F^p/F^{p-1}))$ e

$$\frac{im(H_n(F^p) \to H_n(F^p/F^{p-1}))}{im(H_{n+1}(F^\infty/F^p) \rightsquigarrow H_n(F^p/F^{p-1}))} \simeq im(H_n(F^p) \to H_n(F^\infty/F^{p-1})). \tag{2.3}$$

Por r ser arbitrário concluímos que

$$\bigcup_{r\geq 1} {}^{r}B_{p,q} \subseteq im(H_{n+1}(F^{\infty}/F^{p}) \rightsquigarrow H_n(F^p/F^{p-1})) \subseteq im(H_n(F^p) \to H_n(F^p/F^{p-1})) \subseteq \bigcap_{r\geq 1} {}^{r}Z_{p,q}$$

e que existe uma cadeia:

$$\cdots \subseteq {}^{r}B_{p,q} \subseteq {}^{r+1}B_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{r\geq 1} {}^{r}B_{p,q} \subseteq \bigcap_{r\geq 1} {}^{r}Z_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq {}^{r+1}Z_{p,q} \subseteq {}^{r}Z_{p,q} \subseteq \cdots$$

Defina ${}^{r}E_{p,q} = {}^{r}Z_{p,q}/{}^{r}B_{p,q}$.

Novamente de (2.1) e (2.2) repare que

$$\frac{{}^{r}Z_{p,q}}{{}^{r+1}Z_{p,q}} \simeq im\left(H_n(F^p/F^{p-r}) \longrightarrow H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1})\right) \simeq \frac{{}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}}{{}^{r}B_{p-r,q+r-1}}$$

e assim podemos definir, para todos $p, q \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 1$, uma flecha ${}^{r}d_{p,q} :^{r} E_{p,q} \to^{r} E_{p-r,q-r+1}$ da seguinte maneira:

$${}^{r}d_{p,q} : {}^{r}E_{p,q} = \frac{{}^{r}Z_{p,q}}{{}^{r}B_{p,q}} \twoheadrightarrow \frac{{}^{r}Z_{p,q}}{{}^{r+1}Z_{p,q}} \xrightarrow{\simeq} \frac{{}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}}{{}^{r}B_{p-r,q+r-1}} \hookrightarrow \frac{{}^{r}Z_{p-r.q+r-1}}{{}^{r}B_{p-r,q+r-1}} = {}^{r}E_{p-r,q+r-1}.$$

É imediato ver que $\ker {}^{r}d_{p,q} = {}^{r+1}Z_{p,q}/{}^{r}B_{p,q}$ e que $im^{r}d_{p,q} = {}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}/{}^{r}B_{p-r,q+r-1}$.

Afirmação. ${}^{r}d_{p-r,q+r-1} \circ {}^{r}d_{p,q} = 0$.

Prova da afirmação. De fato, como ${}^{r+1}B_{p,q} \subseteq {}^{r+1}Z_{p,q}$ para todos $p, q \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 1$, segue direto da comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{}^{r}E_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "{}^{r}d_{p-r,q+r-1}\circ{}^{r}d_{p,q}"'] \arrow[rrr, bend left, "{}^{r}d_{p,q}"] & \frac{{}^{r}Z_{p,q}}{{}^{r+1}Z_{p,q}} \arrow[r] & \frac{{}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}}{{}^{r}B_{p-r,q+r-1}} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & {}^{r}E_{p-r,q+r-1} \arrow[d, "1"] \\
{}^{r}E_{p+2r,q+2r-2} & \frac{{}^{r+1}B_{p-2r,q+2r-2}}{{}^{r}B_{p-2r,q+2r-2}} \arrow[l] & \frac{{}^{r}Z_{p-r,q+r-1}}{{}^{r+1}Z_{p-r,q+r-1}} \arrow[l] & {}^{r}E_{p-r,q+r-1} \arrow[l] \arrow[lll, bend left, "{}^{r}d_{p-r,q+r-1}"]
\end{tikzcd}$$

Provamos assim que ${}^{r}E = \{{}^{r}E_{p,q} \xrightarrow{{}^{r}d_{p,q}} {}^{r}E_{p-r,q+r-1}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ é um complexo de $\mathcal{A}$ para todo $r \geq 1$. Repare ainda que a (p, q)-ésima homologia ${}^{r}H_{p,q}$ de ${}^{r}E$ é dada por

$${}^{r}H_{p,q} = \ker {}^{r}d_{p,q}/im^{r}d_{p+r,q-r+1} \simeq \frac{{}^{r+1}Z_{p,q}}{{}^{r+1}B_{p,q}} = {}^{r+1}E_{p,q}.$$

Diretamente das definições vemos que ${}^1Z_{p,q} = H_n(F^p/F^{p-1})$ e ${}^1B_{p,q} = 0$; logo ${}^1E_{p,q} = H_n(F^p/F^{p-1})$.

Seja $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ uma flecha entre complexos filtrados compatível com suas filtrações. Sabemos que estes complexos induzem sequências espectrais E e E'. De forma indutiva podemos construir uma flecha entre estas espectrais: para $r = 1$ temos

$$ {}^1E_{p,q} = H_n(F^p(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-1}(\mathcal{C}_\bullet)) $$

e

$$ {}^1d_{p,q} : H_n(F^p(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-1}(\mathcal{C}_\bullet)) \to H_{n-1}(F^{p-1}(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-2}(\mathcal{C}_\bullet)) $$

Da construção de ${}^1d$ e por $f_\bullet$ induzir flechas $F^p(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-1}(\mathcal{C}_\bullet) \to F^p(\mathcal{C}'_\bullet)/F^{p-1}(\mathcal{C}'_\bullet)$ o diagrama

$$ \begin{tikzcd}
{}^1E_{p,q} = H_n(F^p(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-1}(\mathcal{C}_\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "{}^1d_{p,q}"'] & H_n(F^p(\mathcal{C}'_\bullet)/F^{p-1}(\mathcal{C}'_\bullet)) = {}^1E'_{p,q} \arrow[d, "{}^1d'_{p,q}"] \\
{}^1E_{p-1,q} = H_{n-1}(F^{p-1}(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-2}(\mathcal{C}_\bullet)) \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-1}(\mathcal{C}'_\bullet)/F^{p-2}(\mathcal{C}'_\bullet)) = {}^1E'_{p-1,q}
\end{tikzcd} $$

comuta.

Suponha que tenhamos família de flechas $\{{}^if_{\bullet,\bullet}\}_{i=1}^r$ tal que ${}^iE \xrightarrow{{}^if} {}^iE'$ é flecha e $H_n({}^{i-1}f_{p,q}) = {}^if_{p,q}$. Defina ${}^rf_{p,q} = H_n({}^{r-1}f_{p,q})$; note que $H_n({}^{r-1}f_{p,q}) = H_n^{r-1}({}^1f_{p,q})$ e, por estas flechas advirem de $f_\bullet$ segue que os quadriláteros do diagrama

$$ \begin{tikzcd}
{}^rE_{p,q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "{}^rf_{p,q}"'] \arrow[rrr, bend left, "{}^rd_{p,q}"] & im(H_n(F^p(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-r}(\mathcal{C}_\bullet))) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(F^{p-1}(\mathcal{C}_\bullet)/F^{p-r-1}(\mathcal{C}_\bullet)) \arrow[r, hook] \arrow[d] & {}^rE_{p-r,q+r-1} \arrow[d, "{}^rf_{p-r,q+r-1}"] \\
{}^rE'_{p,q} \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend right, "{}^rd'_{p,q}"'] & im(H_n(F^p(\mathcal{C}'_\bullet)/F^{p-r}(\mathcal{C}'_\bullet))) \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-1}(\mathcal{C}'_\bullet)/F^{p-r-1}(\mathcal{C}'_\bullet)) \arrow[r, hook] & {}^rE'_{p-r,q+r-1}
\end{tikzcd} $$

comutam. *Q.E.D.*

Observação. *i) Quando as espectrais advindas dos complexos $\mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{C}'_\bullet$ convergem fraco, $f_\bullet$ também induz uma flecha ${}^\infty E_{p,q} \xrightarrow{{}^\infty f_{p,q}} {}^\infty E'_{p,q}$.*

ii) As flechas entre complexos filtrados de $\mathcal{A}$ formam uma categoria aditiva; é um exercício rotineiro verificar que a associação feita acima define um funtor entre a categoria dos complexos filtrados de $\mathcal{A}$ e a categoria das sequências espectrais de $\mathcal{A}$. Chamamos este funtor de funtor espectral.

`Descrição da flecha` ${}^{r}d_{p,q}$ `na categoria` R`-Mod.`

Vamos entender como funciona o isomorfismo

$$ {}^{r}Z_{p,q}/^{r+1}Z_{p,q} \simeq {}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}/^{r}B_{p-r,q+r-1}. $$

i) O isomorfismo ${}^{r}Z_{p,q}/^{r+1}Z_{p,q} \simeq im\,(H_n(F^p/F^{p-r}) \longrightarrow H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1}))$.

Este isomorfismo é dado pelo diagrama comutativo

$$ \begin{tikzcd} & H_n(F^p/F^{p-r}) \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\ H_n(F^p/F^{p-r-1}) \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r, squiggly] & H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1}) \end{tikzcd} $$

Seja $\widetilde{\overline{x}} \in {}^{r}Z_{p,q}/^{r+1}Z_{p,q}$. A flecha $H_n(F^p/F^{p-1}) \rightsquigarrow H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1})$ é tal que

$$ \overline{x} \in H_n(F^p/F^{p-1}) \longmapsto \overline{(0,...,0,d^h(x))} \in H_n(F^{p-1}/F^{p-r-1}). $$

Logo

$$ \widetilde{\overline{x}} \in {}^{r}Z_{p,q}/^{r+1}Z_{p,q} \mapsto \overline{(0,...,0,d^h(x))} \in im\,(H_n(F^p/F^{p-r}) \longrightarrow H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1}))\,. $$

ii) O isomorfismo

$$ {}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}/^{r}B_{p-r,q+r-1} \simeq im\left(H_n(F^p/F^{p-r}) \longrightarrow H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1})\right). $$

Como em i), o isomorfismo é dado pelo diagrama comutativo

$$ \begin{tikzcd} & H_n(F^p/F^{p-r}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H_n(F^{p-1}/F^{p-r}) \arrow[ur] \arrow[r, squiggly] & H_{n-1}(F^{p-r}/F^{p-r-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1}) \end{tikzcd} $$

Dado $\widetilde{\overline{y}} \in {}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}/^{r}B_{p-r,q+r-1}$, a flecha

$$ H_{n-1}(F^{p-r}/F^{p-r-1}) \longrightarrow H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1}) $$

é tal que $\overline{y} \in H_{n-1}(F^{p-r}/F^{p-r-1}) \longrightarrow \overline{(y,0,...,0)} \in H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1})$. Logo

$$ \widetilde{\overline{y}} \longmapsto \overline{(y,0,...,0)}. $$

De i) e ii), dado $\overline{x} \in {}^rZ_{p,q}/{}^{r+1}Z_{p,q}$ existe único $\overline{y} \in {}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}/{}^rB_{p-r,q+r-1}$ tal que

$$\overline{(0,...,0,d^h(x))} = \overline{(y,0,...,0)}$$

em $H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1})$, ou seja, existe $(t_1,...,t_r) \in (F^{p-1}/F^{p-r-1})_n$ tal que

$$(-y,0,...,0,d^h(x)) = (d^h(t_{r-1})+(-1)^{p-r}d^v(t_r),...,d^h(t_1)+(-1)^{p-2}d^v(t_2),(-1)^{p-1}d^v(t_1)).$$

Assim

$$\begin{aligned} d^h(x) &= (-1)^{p-1}d^v(t_1) \\ d^h(t_1) &= (-1)^{p-3}d^v(t_2) \\ &\vdots \\ d^h(t_{r-2}) &= (-1)^{p-r-2}d^v(t_{r-1}) \\ d^h(t_{r-1}) &= -y+(-1)^{p-r-1}d^v(t_r). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} t_1 &= (-1)^{p-1}(d^v)^{-1}(d^h(x)) \\ t_2 &= (-1)^{(p-3)+(p-1)}(d^v)^{-1}(d^h((d^v)^{-1}(d^h(x)))) \\ &\vdots \\ t_{r-1} &= (-1)^l(d^v)^{-1}(d^h((d^v)^{-1}(d^h(...(d^v)^{-1}(d^h(x)))))) \\ y &= (-1)^{l+1}d^h((d^v)^{-1}(d^h(...(d^v)^{-1}(d^h(x))))) + (-1)^{p-r-1}d^v(t_r), \end{aligned}$$

onde $l = (p-1)+(p-3)+(p-4)+...+(p-r)$. Logo

$$\overline{y} = (-1)^{l+1}\overline{d^h((d^v)^{-1}(d^h(...(d^v)^{-1}(d^h(x)))))}$$

em $H_{n-1}(F^{p-1}/F^{p-r-1})$ e portanto o isomorfismo

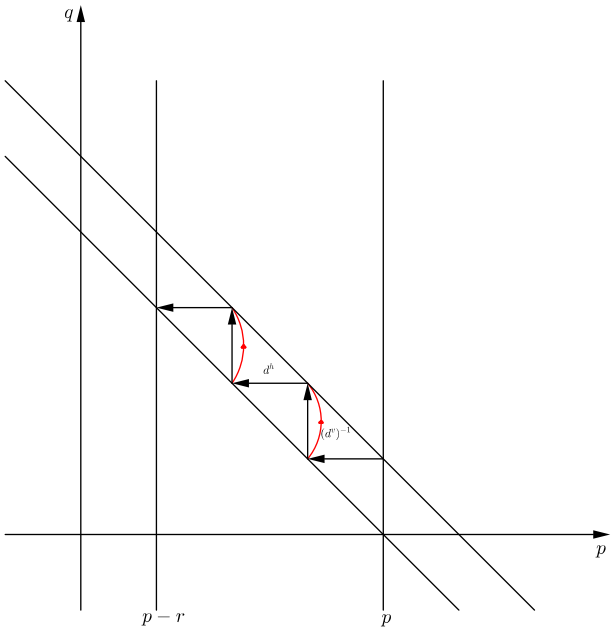
$${}^rZ_{p,q}/{}^{r+1}Z_{p,q} \simeq {}^{r+1}B_{p-r,q+r-1}/{}^rB_{p-r,q+r-1}$$

é tal que

$$\widetilde{\overline{x}} \longmapsto (-1)^{l+1}\overline{d^h((d^v)^{-1}(d^h\widetilde{(...(d^v)^{-1}(d^h(x)))))}}\,.$$

Portanto ${}^rd_{p,q}$ satisfaz

$$\widehat{x} \in {}^rE_{p,q} \longmapsto (-1)^{l+1}d^h((d^v)^{-1}(d^h\widehat{(...(d^v)}^{-1}(d^h(x))))) \in {}^rE_{p-r,q+r-1}.$$



$^r d_{p,q}$

Definição 2.3.1. *Seja F uma filtração do complexo $\mathcal{C}_\bullet$. F é dita:*

i) limitada se dado inteiro n existem inteiros s e t tais que $F^s c_n = 0$ e $F^t c_n = c_n$.

Neste caso existe um número finito de termos de grau n em E e portanto a espectral é limitada.

ii) limitada inferiormente (superiormente) se dado inteiro n existe inteiro s ($t \in \mathbb{Z}$) tal que $F^s c_n = 0$ ($F^t c_n = c_n$).

É claro que filtrações limitadas são limitadas inferior e superiormente; filtrações limitadas superiormente são exaustivas (e portanto as induzidas nas homologias também o são) e filtrações limitadas inferiormente são Hausdorff (portanto as induzidas nas homologias também o são) e dão origem à espectrais limitadas inferiormente.

Uma filtração é dita canonicamente limitada se $F^{-1} c_n = 0$ e $F^n c_n = c_n$ para todo inteiro n. Filtrações deste tipo dão origem à espectrais no primeiro quadrante.

Teorema 2.3.3 (`Convergência`)**.** *Suponha que $\mathcal{A}$ satisfaz o axioma (AB4*) e tem projetivos suficientes. Sejam F uma filtração do complexo $\mathcal{C}_\bullet$ e E a sequência espectral induzida por F.*

i) Se F é limitada, então E é limitada e converge para $H_\bullet(\mathcal{C}_\bullet)$.

ii) Se F é limitada inferiormente e exaustiva, então E é limitada inferiormente e converge para $H_\bullet(\mathcal{C}_\bullet)$.

Demonstração. Em ambos itens $i)$ e $ii)$ temos que F é exaustiva. Além disso, como F é limitada (inferiormente), então E é limitada (inferiormente) e F é Hausdorff; assim, em ambos os casos, devido a proposição 2.2.3, é suficiente provar que E converge fraco para $H_\bullet(\mathcal{C}_\bullet)$.

Fixe $n = p + q$. Temos

$$\begin{aligned} {}^\infty B_{p,q} &= \textstyle\bigcup_{r\geq 1} {}^r B_{p,q} \\ &= \varinjlim im(H_{n+1}(F^{p+r-1}/F^p) \rightsquigarrow H_n(F^p/F^{p-1})) \\ &\simeq im(H_{n+1}(F^\infty/F^p) \rightsquigarrow H_n(F^p/F^{p-1})). \end{aligned}$$

De

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F^{p-r} \arrow[r] \arrow[d] & F^p \arrow[r] \arrow[d, "1"] & F^p/F^{p-r} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F^{p-1} \arrow[r] & F^p \arrow[r] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

temos

$$\begin{tikzcd} & H_n(F^p/F^{p-r}) \arrow[r, squiggly] \arrow[d] \arrow[dr] & H_{n-1}(F^{p-r}) \arrow[d] \\ H_n(F^p) \arrow[r] \arrow[ur] & H_n(F^p/F^{p-1}) \arrow[r, squiggly] & H_{n-1}(F^{p-1}) \end{tikzcd}$$

Para r suficientemente grande temos $F^{p-r} = 0$; logo

$$\frac{{}^r Z_{p,q}}{im(H_n(F^p) \to H_n(F^p/F^{p-1}))} = 0;$$

e, consequentemente, ${}^\infty Z_{p,q} = \bigcap_{r\geq 1} {}^r Z_{p,q} = im(H_n(F^p) \to H_n(F^p/F^{p-1}))$. Assim, de (2.3) temos

$${}^\infty E_{p,q} = \frac{{}^\infty Z_{p,q}}{{}^\infty B_{p,q}} \simeq im(H_n(F^p) \to H_n(F^\infty/F^{p-1})).$$

Por outro lado, do diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & F^p \arrow[r] \arrow[d] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F^{p-1} \arrow[r] & F^\infty \arrow[r] & F^\infty/F^{p-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

obtemos

$$\begin{tikzcd} & H_n(F^p) \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\ H_n(F^{p-1}) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & H_n(F^\infty) \arrow[r] & H_n(F^\infty/F^{p-1}) \end{tikzcd}$$

e assim

$$\frac{F^p H_n}{F^{p-1} H_n} \simeq im(H_n(F^p) \to H_n(F^\infty/F^{p-1})).$$

Q.E.D.

Corolário 2.3.4. *Filtrações canonicamente limitadas originam sequências espectrais limitadas e convergentes.*

Exemplo 2.3.1. *Sejam N um R-módulo e*

$$M_\bullet := \cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

um complexo em $R - Mod$. Seja F filtração de $M_\bullet$ tal que a espectral induzida E converge fraco para $M_\bullet$.

Considere o complexo

$$M_\bullet \oplus N := \cdots \longrightarrow M_{n+1} \oplus N \xrightarrow{d_{n+1}\oplus 0} M_n \oplus N \xrightarrow{d_n \oplus 0} M_{n-1} \oplus N \longrightarrow \cdots$$

As inclusões $M_n \to M_n \oplus N$ definem flecha entre complexos $M_\bullet \to M_\bullet \oplus N$. Da mesma forma, para cada inteiro p, defina

$$\overline{F}^p := \cdots \longrightarrow F^p_{n+1} \oplus N \xrightarrow{d^p_{n+1}\oplus 0} F^p_n \oplus N \xrightarrow{d^p_n \oplus 0} F^p_{n-1} \oplus N \longrightarrow \cdots$$

onde $d^p_\bullet$ é a diferencial de $F^p_\bullet$. É fácil ver que $\overline{F} = \{\overline{F}^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ é filtração de $M_\bullet \oplus N$ e que a flecha $M_\bullet \to M_\bullet \oplus N$ é compatível com as filtrações F e $\overline{F}$. Mais ainda, esta flecha induz isomorfismo $F^p/F^{p-1} \simeq \overline{F}^p/\overline{F}^{p-1}$. Portanto, se $\overline{E}$ é a espectral induzida por $\overline{F}$, temos flecha entre espectrais $E \to \overline{E}$ que induz isomorfismo entre as primeiras páginas e, consequentemente, entre as espectrais (as filtrações F e $\overline{F}$ induzem a mesma espectral).

Agora repare que

$$H_n(M_\bullet \oplus N) \simeq H_n(M_\bullet) \oplus \ \text{ e } H_n(\overline{F}^p) \simeq H_n(F^p) \oplus N.$$

Logo $\overline{F}^p H_n(M_\bullet \oplus N)/\overline{F}^{p-1} H_n(M_\bullet \oplus N) \simeq F^p H_n(M_\bullet)/F^{p-1} H_n(M_\bullet) \simeq {}^\infty E_{p,q}$, ou seja, E converge franco tanto para $M_\bullet$ quanto para $M_\bullet \oplus N$.

2.4 Aplicações para bicomplexos

Seja $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ um bicomplexo de $\mathcal{A}$. Fixe inteiro p e, para cada inteiro n, defina

$${}_I F^p Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n = \bigoplus_{l\leq p} c_{l,n-l}.$$

Semelhante a construção da diferencial da totalização construímos uma diferencial para ${}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$: para todo $l \leq p$ temos

$$c_{l,n-l} \xrightarrow{{}^pi^{n-1}_{l-1,n-l}\circ d^h_{l,n-l}+(-1)^l.{}^pi^{n-1}_{l,n-l-1}\circ d^v_{l,n-l}} {}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1}$$

onde ${}^pi^{n-1}_{l-1,n-l}$ e ${}^pi^{n-1}_{l,n-l-1}$ são os monomorfismos canônicos. Assim, existe única flecha ${}_ID^p_n$ tal que

$$\begin{tikzcd}
c_{l,n-l} \arrow[r, "{}^pi^{n-1}_{l-1,n-l}\circ d^h_{l,n-l}+(-1)^l.{}^pi^{n-1}_{l,n-l-1}\circ d^v_{l,n-l}"] \arrow[d, "{}^pi^{n}_{l,n-l}"'] & {}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1} \\
{}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n \arrow[ur, "{}_ID^p_n"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. A prova de que ${}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet = \{{}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n \xrightarrow{{}_ID^p_n} {}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um complexo de $\mathcal{A}$ é análoga à prova de que a totalização é um complexo.

Segue diretamente da propriedade universal do coproduto que, dados inteiros p e n, os diagramas abaixo comutam

$$\begin{tikzcd}
{}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n \arrow[r, "{}_ID^p_n"] \arrow[d, hook] & {}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1} \arrow[d, hook] \\
Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n \arrow[r, "D_n"'] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1}
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
{}_IF^{p-1}Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n \arrow[r, "{}_ID^{p-1}_n"] \arrow[d, hook] & {}_IF^{p-1}Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1} \arrow[d, hook] \\
{}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n \arrow[r, "{}_ID^p_n"] & {}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1}
\end{tikzcd}$$

e assim ${}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$ é subcomplexo de $Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$ e que ${}_IF^{p-1}Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$ é subcomplexo de ${}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$ para todo inteiro p.

Definição 2.4.1. *A família $\{{}_IF^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$ é dita primeira filtração da totalização do bicomplexo $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$.*

Denotaremos ${}_IF^{\infty}Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet},\bullet)_\bullet = Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$.

Novamente, fixado inteiro p, defina

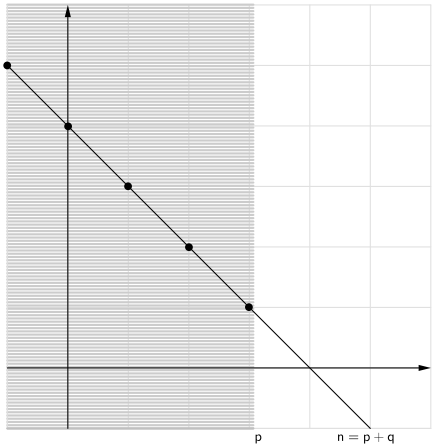
$${}_{II}F^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n = \bigoplus_{l\geq p} c_{n-l,l}.$$

De forma análoga construímos uma flecha ${}_{II}D^p_\bullet$ tal que

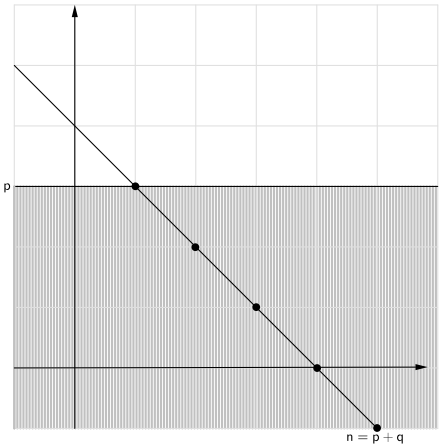
$${}_{II}F^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet = \{{}_{II}F^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_n \xrightarrow{{}_{II}D^p_n} {}_{II}F^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

é um subcomplexo de $Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$ e ${}_{II}F^{p-1}Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet \subseteq {}_{II}F^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$.

Definição 2.4.2. *A família $\{{}_{II}F^pTot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$ é dita segunda filtração da totalização do bicomplexo $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$.*



Primeira filtração



Segunda filtração

Repare que ambas filtrações são exaustivas. Além disso, o teorema da construção nos garante que existem duas sequências espectrais, denotadas por ${}_IE$ e ${}_{II}E$, advindas da totalização do bicomplexo $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ munido da primeira e segunda filtração, respectivamente. Diremos que ${}_IE$ é a primeira espectral de $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ e ${}_{II}E$ é a segunda espectral de $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$.

As duas primeiras páginas destas espectrais são conhecidas; as descreveremos em termos das homologias dos complexos $(\mathcal{C}_{p,\bullet}, d^v_{p,\bullet})$ e $(\mathcal{C}_{\bullet,q}, d^h_{\bullet,q})$. Para simplificar a notação escreva apenas F^p e E para a primeira filtração da totalização de $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ e primeira espectral de $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$.

Fixe $n = p + q$. Como $c_{p,q} \oplus F^{p-1}_n = F^p_n$, existe única flecha $\varphi_{p,q}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^{p-1}_n \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & F^p_n \arrow[r, "\pi^{p,p-1}_n"] \arrow[d, "1"] & F^p_n/F^{p-1}_n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{p,q}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^{p-1}_n \arrow[r] & F^p_n \arrow[r, "v_{p,q}"'] & c_{p,q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta e tem linhas exatas. Note que

$$\varphi^{-1}_{p,q} = \pi^{p,p-1}_n \circ i^n_{p,q}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\overline{D^p_n} \circ \varphi^{-1}_{p,q} &= \overline{D^p_n} \circ \pi^{p,p-1}_n \circ i^n_{p,q} \\
&= \pi^{p,p-1}_{n-1} \circ D^p_n \circ i^n_{p,q} \\
&= \pi^{p,p-1}_{n-1} \circ (i^{n-1}_{p-1,q} \circ d^h_{p,q} + i^{n-1}_{p,q-1} \circ ((-1)^p d^v_{p,q})) \\
&= \pi^{p,p-1}_{n-1} \circ (i^{n-1}_{p,q-1} \circ d^v_{p,q}[-p]_n) \\
&= \varphi^{-1}_{p,q-1} \circ d^v_{p,q}[-p]_n.
\end{aligned}$$

onde $\overline{D_n^p}$ é a diferencial do complexo F^p/F^{p-1}. Provamos assim que $F^p/F^{p-1} \xrightarrow{\varphi_{p,\bullet}} \mathcal{C}_{p,\bullet}[-p]$ é um isomorfismo entre complexos. Em particular temos ${}^1E_{p,q} \simeq H_q^v(\mathcal{C}_{p,\bullet})$, onde $H_q^v(\mathcal{C}_{p,\bullet})$ denota a q-ésima homologia de $\mathcal{C}_{p,\bullet}$.

Similarmente verificamos a existência de um isomorfismo $\varphi_{p,p-1,n}$ tal que

$$F^p/F^{p-2} \xrightarrow{\varphi_{p,p-1,\bullet}} cone(d^h_{p,\bullet}[-p+1])_\bullet$$

é isomorfismo e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^{p-1}/F^{p-2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{p-1,\bullet}[-p+1]"'] & F^p/F^{p-2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{p,p-1,\bullet}"] & F^p/F^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{p,\bullet}[-p]"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}_{p-1,\bullet}[-p+1] \arrow[r] & cone(d^h_{p,\bullet}[-p+1])_\bullet \arrow[r] & \mathcal{C}_{p,\bullet}[-p] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Na demonstração do teorema da construção vemos que a flecha ${}^1d_{p,q}$ é a n-ésima conexão da primeira linha do diagrama acima, a n-ésima conexão do conexão do cone é $H_q(d^h_{p,\bullet})$ e da naturalidade da conexão concluímos que ${}^1d_{p,q} \simeq H_q(d^h_{p,\bullet})$. Segue daí que, se $H_p^h H_q^v(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})$ denota a p-ésima homologia do complexo $H_q^v(\mathcal{C}_{\bullet,q})$, então

$${}^2E_{p,q} \simeq H_p^h H_q^v(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}).$$

De maneira semelhante verifica-se que ${}^2_{II}E_{p,q} \simeq H_q^v H_p^h(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})$.

Um corolário imediato do teorema da convergência é:

Teorema 2.4.1. *Se $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ é bicomplexo no primeiro quadrante, então*

$${}_IE_{p,q} = H_p^h H_q^v(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}) \Rightarrow_p H_n(Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}))$$

e

$${}_{II}E_{p,q} = H_q^v H_p^h(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}) \Rightarrow_p H_n(Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})).$$

Exemplo 2.4.1. *Considere o diagrama de R-módulos*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "i"] \\
N \arrow[r, "j"'] & Q
\end{tikzcd}$$

onde P e N são submódulos de Q e i e j são inclusões canônicas. Podemos ver este diagrama como um bicomplexo no primeiro quadrante: $c_{0,0} = Q, c_{1,0} = N, c_{0,1} = P$ e $c_{1,1} = M$ e portanto suas espectrais ${}_IE$ e ${}_{II}E$ convergem. A totalização deste bicomplexo é

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{(g,-f)} P \oplus N \xrightarrow{j+i} Q \longrightarrow 0$$

e suas homologias são $H_0 = \frac{Q}{P+N}, H_1 = \frac{\ker(j+i)}{im(g,-f)}$ *e* $H_2 = \ker(g,-f) = \ker g \cap \ker f$.

É complicado trabalhar com o módulo $\ker(j+i)/im(g,-f)$*; usaremos a convergência da primeira espectral para identificá-lo com um módulo mais simples (a segunda espectral também pode ser utilizada.) Sua primeira página é dada pelo diagrama*

$$\ker f \xrightarrow{\overline{g}} 0$$

$$coker f \xrightarrow[\overline{j}]{} coker i$$

onde $\overline{g}$ *e* $\overline{j}$ *são as flehas induzidas. Já a segunda página é dada por*

$$\begin{array}{cc} \ker \overline{g} & 0 \\ \\ \ker \overline{j} & coker \overline{j} \end{array}$$

Portanto a espectral estabilizou e assim ${}^{\infty}E_{p,q} = {}^{2}E_{p,q}$*; logo* $H_1 = ker\overline{j}$.

O homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} imi \cap imj & \longrightarrow & \ker \overline{j} \\ z = i(x) = j(y) & \longmapsto & y \end{array}$$

é claramente sobrejetivo e seu núcleo é $im(jf)$*. Segue daí que* $H_1 \simeq imi \cap imj/im(jf)$.

Proposição 2.4.2. *Seja* E *uma sequência espectral no primeiro quadrante convergindo para o objeto* $H_\bullet$.

i) Se E *colapsa, então* ${}^{\infty}E_{p,q} = {}^{2}E_{p,q}$ *para todos* $p, q \in \mathbb{Z}$.

ii) Se E *colapsa no eixo* p*, então* ${}^{2}E_{n,0} \simeq H_n$.

iii) Se E *colapsa no eixo* q*, então* ${}^{2}E_{0,n} \simeq H_n$.

Demonstração. i) Podemos supor, sem perda de generalidade (a menos de rotações no plano), que E colapsa no eixo p. Fixe $r \geq 2$. Para todo inteiro p tem-se ${}^{r}E_{p,q} = 0$ quando $q \neq 0$ e assim ${}^{\infty}E_{p,q} = 0$; além disso ${}^{r}d_{n,0} = 0$ e ${}^{r}d_{n+r,-r+1} = 0$, pois ${}^{r}E_{n-r,+r-1} = {}^{r}E_{n+r,-r+1} = 0$ e portanto ${}^{r}E_{n,0} = {}^{r+1}E_{n,0}$, ou seja, ${}^{\infty}E_{n,0} = {}^{r}E_{n,0}$. Como isto vale para todo $r \geq 2$, temos o resultado.

ii) Note que, para $p \leq n-1$, $F^pH_n/F^{p-1}H_n = {}^{2}E_{p,n-p} = 0$, isto é,

$$0 = F^{-1}H_n = F^0H_n = \cdots = F^{n-1}H_n$$

e portanto ${}^{2}E_{n,0} \simeq H_n$.

iii) Note que, para $q \leq n-1$, $F^{n-q}H_n/F^{n-q-1}H_n = {}^2E_{n-q,q} = 0$, ou seja,

$$H_n = F^{n-1}H_n = \cdots = F^0 H_n$$

e assim ${}^2E_{0,n} \simeq H_n$.

Q.E.D.

Corolário 2.4.3. *Se M e N são R-módulos, então $Tor_n^R(M,N) \simeq tor_n^R(M,N)$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{P}_\bullet \to M$ e $\mathcal{Q}_\bullet \to N$ resoluções projetivas. O bicomplexo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & p_n \otimes q_n \arrow[r, "d_n \otimes 1_{q_n}"] \arrow[d, "1_{p_n} \otimes d'_n"'] & p_{n-1} \otimes q_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & p_o \otimes q_n \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & p_n \otimes q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & p_{n-1} \otimes q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & p_o \otimes q_{n-1} \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \ddots & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & p_n \otimes q_0 \arrow[r] & p_{n-1} \otimes q_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p_0 \otimes q_0
\end{tikzcd}$$

jaz no primeiro quadrante. Veremos que as espectrais ${}_IE$ e ${}_{II}E$ colapsam nos eixos coordenados e portanto

$${}^2_IE_{p,q} \simeq H_n(P_\bullet \bigotimes Q_\bullet) \simeq {}^2_{II}E_{p,q}$$

para todos inteiros p e q tais que $p+q=n$.

Sendo estas resoluções projetivas, os funtores $p_m \otimes _$ e $_ \otimes q_m$ são exatos e assim

$$H_n(\mathcal{P}_\bullet \otimes q_m) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n > 0 \\ M \otimes q_m, & \text{se} \quad n = 0 \end{cases}$$

e

$$H_n(p_m \otimes \mathcal{Q}_\bullet) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n > 0 \\ p_m \otimes N, & \text{se} \quad n = 0. \end{cases}$$

Primeiro vamos calcular ${}_IE$. Sua primeira página é dada pelo bicomplexo

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots \longrightarrow & p_n \otimes N & \longrightarrow p_{n-1} \otimes N & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow p_0 \otimes N
\end{array}$$

O isomorfismo $H_n(p_m \otimes \mathcal{Q}_\bullet) \simeq p_m \otimes H_n(\mathcal{Q}_\bullet)$ garante que a flecha $p_n \otimes N \to p_{n-1} \otimes N$ coincide com $d_n \otimes 1_N$, com $d_\bullet$ sendo a diferencial de $\mathcal{P}_\bullet$, e portanto a segunda página de ${}_IE$ é

$$\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & Tor_n^R(M,N) & Tor_{n-1}^R(M,N) & \cdots & Tor_0^R(M,N)
\end{array}$$

Logo $Tor_n^R(M,N) \simeq H_n(\mathcal{P}_\bullet \bigotimes \mathcal{Q}_\bullet)$.

De forma similar calculamos a segunda página de ${}_{II}E$ e vemos que ela é dada pelo bicomplexo

$$\begin{array}{cccccc}
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & tor_n^R(M,N) \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & tor_{n-1}^R(M,N) \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & tor_0^R(M,N)
\end{array}$$

e assim $tor_n^R(M,N) \simeq H_n(\mathcal{P}_\bullet \otimes \mathcal{Q}_\bullet)$. *Q.E.D.*

Corolário 2.4.4. *Sejam M e N R-módulos e seja $\mathcal{P}_\bullet$ resolução plana de M. Temos*

$$Tor_n^R(M,N) \simeq H_n(\mathcal{P}_\bullet \otimes_R N)$$

para todo natural n (pode-se calcular o Tor via resoluções planas).

Demonstração. Seja $\mathcal{Q}_\bullet$ resolução projetiva de N. Ao calcularmos a primeira página do bicomplexo no primeiro quadrante

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P_m \otimes Q_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{m-1} \otimes Q_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \otimes Q_n \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P_m \otimes Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{m-1} \otimes Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \otimes Q_{n-1} \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P_m \otimes Q_0 \arrow[r] & P_{m-1} \otimes Q_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \otimes Q_0
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

obtemos

$$
\begin{array}{lccccc}
{}^1E: & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & \cdots \longrightarrow & P_m \otimes_R N & \longrightarrow & P_{m-1} \otimes_R N & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_0 \otimes_R N
\end{array}
$$

e portanto ${}^2E$ colapsa no eixo p com n-ésimo termo neste sendo $H_n(\mathcal{P}_\bullet \otimes_R N)$.

Por outro lado, a segunda espectral de (2.4) tem como primeira página

$$
\begin{array}{lccccc}
{}^1E: & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \downarrow \\
 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & M \otimes_R Q_n \\
 & & & & & \downarrow \\
 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & M \otimes_R Q_{n-1} \\
 & & & & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \downarrow \\
 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & M \otimes_R Q_0
\end{array}
$$

e portanto ${}_{II}E$ colapsa no eixo q, cujo n-ésimo termo é $Tor_n^R(M,N)$ e daí o resultado.

Q.E.D.

Todos os resultados obtidos para sequências espectrais no primeiro quadrante valem, pelo princípio da dualidade, para sequências espectrais no terceiro quadrante, isto é, sequências espectrais E tais que ${}^1E_{p,q} = 0$ se $p > 0$ ou $q > 0$.

Corolário 2.4.5. *Se M e N são R-módulos, então $Ext_R^n(M,N) \simeq ext_R^n(M,N)$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{P}_\bullet \to M$ resolução de projetiva e $N \to \mathcal{I}_\bullet$ resolução injetiva. O bicomplexo

$$\begin{tikzcd}
Hom(p_0, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Hom(p_{n-1}, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(p_n, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots \arrow[d] & \ddots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
Hom(p_0, I_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Hom(p_{n-1}, I_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(p_n, I_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Hom(p_0, I_n) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Hom(p_{n-1}, I_n) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(p_n, I_n) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

jaz no terceiro quadrante. Veremos que ${}_IE$ e ${}_{II}E$ colapsam nos eixos coordenados e portanto

$${}^2_IE_{p,q} \simeq H_n(Hom(\mathcal{P}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet)) \simeq {}^2_{II}E_{p,q}$$

para todos inteiros p e q tais que $p + q = n$.

Sendo $\mathcal{P}_\bullet$ resolução projetiva e $\mathcal{I}_\bullet$ resolução injetiva, para todo inteiro m os funtores $Hom(p_m, _)$ e $Hom(_, I_m)$ são exatos e assim

$$H_n(Hom(p_m, \mathcal{I}_\bullet)) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n > 0 \\ Hom(p_m, N), & \text{se} \quad n = 0 \end{cases}$$

e

$$H_n(Hom(\mathcal{P}_\bullet, I_m)) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n > 0 \\ Hom(M, I_m), & \text{se} \quad n = 0. \end{cases}$$

A primeira página de ${}_IE$ é composta por zeros, exceto possivelmente no semieixo negativo p que é formado pelo complexo

$$Hom(p_0, N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Hom(p_{n-1}, N) \longrightarrow Hom(p_n, N) \longrightarrow \cdots$$

cuja n-ésima é $Hom(d_n, 1_N)$. Sendo assim, a primeira espectral colapsa no eixo p cujos objetos no semieixo negativo são $ext^n_R(M, N)$. Daí $ext^n_R(M, N) \simeq H_n(Hom(\mathcal{P}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet))$.

Da mesma forma calculamos a segunda página da segunda espectral e vemos que esta colapsa no eixo q cujos objetos no semieixo negativo são $Ext^n_R(M, N)$. Logo $Ext^n_R(M, N) \simeq H_n(Hom(\mathcal{P}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet))$. *Q.E.D.*

Capítulo 3

Hiper-homologia

No capítulo 1 vimos como resolver objetos e calcular seus funtores derivados. Quando tais objetos são complexos de cadeia, seus funtores derivados são definidos de forma diferente (resolvemos complexos via resoluções de Cartan-Eilenberg, mas veremos que as noções coincidem quando tratamos de objetos na categoria inicial); tais funtores são denominados hiperfuntores derivados.

Na primeira seção construímos o hiperfuntor e vemos algumas propriedades suas. Na segunda conhecemos a sequência espectral de Grothendieck e encerramos com aplicações.

3.1 Hiperfuntor Derivado

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria exata. Uma resolução de Cartan-Eilenberg de um complexo $\mathcal{C}_\bullet$ é uma resolução*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{L}_{m,\bullet} \longrightarrow \mathcal{L}_{m-1,\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}_{1,\bullet} \longrightarrow \mathcal{L}_{0,\bullet} \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{C}_\bullet$ tal que, para todo inteiro n, os complexos

$$\cdots \longrightarrow Z_n(\mathcal{L}_{m,\bullet}) \longrightarrow Z_n(\mathcal{L}_{m-1,\bullet}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_n(\mathcal{L}_{1,\bullet}) \longrightarrow Z_n(\mathcal{L}_{0,\bullet}) \longrightarrow 0,$$

$$\cdots \longrightarrow B_n(\mathcal{L}_{m,\bullet}) \longrightarrow B_n(\mathcal{L}_{m-1,\bullet}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_n(\mathcal{L}_{1,\bullet}) \longrightarrow B_n(\mathcal{L}_{0,\bullet}) \longrightarrow 0$$

e

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{L}_{m,\bullet}) \longrightarrow H_n(\mathcal{L}_{m-1,\bullet}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{L}_{1,\bullet}) \longrightarrow H_n(\mathcal{L}_{0,\bullet}) \longrightarrow 0$$

são resoluções de $Z_n(\mathcal{C}_\bullet), B_n(\mathcal{C}_\bullet)$ e $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$, respectivamente, e, além disso, para todo natural m, os complexos $\mathcal{L}_{m,\bullet}$ cindem.

Para simplificar a notação, denotaremos os ciclos, bordos e homologias referentes as diferenciais verticais de um bicomplexo por $Z^v_\bullet, B^v_\bullet$ e $H^v_\bullet$; da mesma forma, os ciclos, bordos e homologias referentes as diferenciais horizontais de um bicomplexo serão denotados por $Z^h_\bullet, B^h_\bullet$ e $H^h_\bullet$.

Podemos ver uma resolução de Cartan-Eilenberg como um bicomplexo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & L_{m,n} \arrow[r] \arrow[d] & L_{m-1,n} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & L_{1,n} \arrow[r] \arrow[d] & L_{0,n} \arrow[r] \arrow[d] & c_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & L_{m,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & L_{m-1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & L_{1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & L_{0,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & c_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \ddots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & L_{m,1} \arrow[r] \arrow[d] & L_{m-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & L_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & L_{0,1} \arrow[r] \arrow[d] & c_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & L_{m,0} \arrow[r] \arrow[d] & L_{m-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & L_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & L_{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & c_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

cujas linhas são todas exatas e tais que, ao aplicarmos os funtores ciclo, bordo e homologia nas colunas, obtemos outras linhas exatas e as colunas diferentes do complexo $\mathcal{C}_\bullet$ são complexos que cindem.

Observação. *Como os complexos na vertical de uma resolução de Cartan-Eilenberg são tais que suas sequências exatas fundamentais cindem, então funtores aditivos preservam estas sequências e, consequentemente, comutam com a homologia vertical da resolução de Cartan-Eilenberg. Além disso, estas resoluções são, por definição, bicomplexos sob os primeiro e quarto quadrantes; portanto a primeira filtração da sua totalização é limitada inferiormente. Se $\mathcal{C}_\bullet$ é positivo, então $\mathcal{L}_{\bullet,\bullet}$ está no primeiro quadrante.*

Quando $L_{m,n}$ é um objeto projetivo para todos inteiros m, n, por $\mathcal{L}_{\bullet,\bullet}$ cindir nas colunas temos que $Z^v_n(\mathcal{L}_{m,\bullet})$, $B^v_{n-1}(\mathcal{L}_{m,\bullet})$ e $H^v_n(\mathcal{L}_{m,\bullet})$ também são projetivos. Neste caso dizemos que $\mathcal{L}_{\bullet,\bullet}$ é uma resolução projetiva de Cartan-Eilenberg.

Teorema 3.1.1. *Se $\mathcal{A}$ é categoria abeliana com projetivos suficientes, então todo complexo $\mathcal{C}_\bullet$ de $\mathcal{A}$ admite uma resolução projetiva de Carta-Eilenberg.*

Demonstração. Fixe inteiro n e considere as sequências exatas fundamentais de $\mathcal{C}_\bullet$: $0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$ e $0 \to Z_n \to c_n \to B_{n-1} \to 0$. Sejam $B^v_{\bullet,n} \to B_n$ e $H^v_{\bullet,n} \to H_n$ resoluções projetivas; do lema da ferradura sabemos que existem resolução projetiva $Z^v_{\bullet,n} \to Z_n$ e sequência exata $0 \to B^v_{\bullet,n} \xrightarrow{i_{\bullet,n}} Z^v_{\bullet,n} \xrightarrow{\pi_{\bullet,n}} H^v_{\bullet,n} \to 0$. Novamente pelo lema da ferradura, existem resoluções projetivas $\mathcal{P}_{\bullet,n} \to c_n$ e sequência exata $0 \to Z^v_{\bullet,n} \xrightarrow{j_{\bullet,n}} \mathcal{P}_{\bullet,n} \xrightarrow{q_{\bullet,n}} B^v_{\bullet,n-1} \to 0$.

Agora, para todo inteiro m, defina

$$d^v_{m,n} : p_{m,n} \xrightarrow{q_{m,n}} B^v_{m,n-1} \xrightarrow{i_{m,n-1}} Z^v_{m,n-1} \xrightarrow{j_{m,n-1}} p_{m,n-1}.$$

Note que $d^v_{m,\bullet}$ é uma diferencial:

$$\begin{aligned} d^v_{m,n-1} \circ d^v_{m,n} &= (j_{m,n-2} \circ i_{m,n-2} \circ q_{m,n-1}) \circ (j_{m,n-1} \circ i_{m,n-1} \circ q_{m,n}) \\ &= (j_{m,n-2} \circ i_{m,n-2}) \circ (q_{m,n-1} \circ j_{m,n-1}) \circ (i_{m,n-1} \circ q_{m,n}) = 0. \end{aligned}$$

Seja $d^h_{\bullet,n}$ a diferencial de $\mathcal{P}_{\bullet,n}$; vamos provar que $(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}, d^h_{\bullet,\bullet}, d^v_{\bullet,\bullet})$ é uma resolução projetiva de Cartan-Eilenberg. De fato, que $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ é um bicomplexo segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
p_{m,n} \arrow[r] \arrow[d, "d^h_{m,n}"'] \arrow[rrr, bend left, "d^v_{m,n}"] & B^v_{m,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^v_{m,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & p_{m,n-1} \arrow[d, "d^h_{m,n-1}"] \\
p_{m-1,n} \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "d^v_{m-1,n}"'] & B^v_{m-1,n-1} \arrow[r] & Z^v_{m-1,n-1} \arrow[r] & p_{m-1,n-1}
\end{tikzcd}$$

onde as flechas verticais são as diferenciais dos complexos em questão. Também temos $Z^v_n(\mathcal{P}_{m,\bullet}) = \ker(d^v_{m,n}) \simeq \ker(q_{m,n}) = im(j_{m,n}) = Z^v_{m,n}$, $B^v_n(\mathcal{P}_{m,\bullet}) = im(d^v_{m,n+1}) \simeq B^v_{m,n}$ e $H^v_n(\mathcal{P}_{m,\bullet}) \simeq H^v_{m,n}$. *Q.E.D.*

Definição 3.1.2. *Sejam $f_{\bullet,\bullet}$ e $g_{\bullet,\bullet}$ duas flechas entre os bicomplexos $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ e $\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet}$. Dizemos que $f_{\bullet,\bullet}$ é homotópica a $g_{\bullet,\bullet}$, e denotamos isto por $f_{\bullet,\bullet} \sim g_{\bullet,\bullet}$, se existem famílias $s^h_{\bullet,\bullet} = \{c_{m,n} \xrightarrow{s^h m,n} c'_{m+1,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ e $s^v_{\bullet,\bullet} = \{c_{m,n} \xrightarrow{s^v_{m,n}} c'_{m,n+1}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ tais que*

$$f_{m,n} - g_{m,n} = (d'^v_{m,n+1} \circ s^v_{m,n} + s^v_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}) + (d'^h_{m+1,n} \circ s^h_{m,n} + s^h_{m-1,n} \circ d^h_{m,n}),$$

$$d'^v_{m+1,n} \circ s^h_{m,n} = s^h_{m,n-1} \circ d^v_{m,n} \text{ e } d'^h_{m,n+1} \circ s^v_{m,n} = s^v_{m-1,n} \circ d^h_{m,n}.$$

$\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ e $\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet}$ são ditos homotópicos se existe flecha $h_{\bullet,\bullet}$ tal que $f_{\bullet,\bullet} \circ h_{\bullet,\bullet} \sim 1_{\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet}}$ e $h_{\bullet,\bullet} \circ f_{\bullet,\bullet} \sim 1_{\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}}$.

Suponha que $\mathcal{A}$ admite coprodutos enumeráveis. A definição acima implica que se $f_{\bullet,\bullet} \sim g_{\bullet,\bullet}$ então $Tot^{\oplus}(f_{\bullet,\bullet})_\bullet \sim Tot^{\oplus}(g_{\bullet,\bullet})_\bullet$. De fato, se s_k é a única flecha que faz o

diagrama

$$\begin{tikzcd} c_{m,n} \arrow[r, "j^k_{m,n}"] \arrow[d, "i^k_{m,n}"'] & Tot^{\oplus}(\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet})_{k+1} \\ Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_k \arrow[ur, "s_k"'] & \end{tikzcd}$$

comutar, onde $j^k_{m,n} = i'^{k+1}_{m+1,n} \circ s^h_{m,n} + (-1)^m i'^{k+1}_{m,n+1} \circ s^v_{m,n}$, então da propriedade universal do coproduto verifica-se que $s_\bullet$ é uma homotopia entre $Tot^{\oplus}(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})_\bullet$ e $Tot^{\oplus}(\mathcal{C}'_{\bullet,\bullet})_\bullet$.

Proposição 3.1.2. *Se $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ é uma flecha entre complexos e $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{\epsilon_\bullet} \mathcal{C}_\bullet$ e $\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{\epsilon'_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ são resoluções projetivas de Cartan-Eilenberg, então existe flecha $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet,\bullet}} \mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}$ que estende $f_\bullet$, isto é, $f_n \circ \epsilon_n = \epsilon'_n \circ f_{0,n}$ para todo inteiro n. Além disso, se $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicas, então suas extensões também o são.*

Demonstração. Fixe um inteiro n. Do lema 1.4.6, se $\beta_{\bullet,n}$ e $\gamma_{\bullet,n}$ estendem $B_n(f_\bullet)$ e $H_n(f_\bullet)$, sabemos que existe flecha $\alpha_{\bullet,n}$ que estende $Z_n(f_\bullet)$ e é tal que o diagrama com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B^v_n(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\bullet,n}"'] & Z^v_n(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{\bullet,n}"] & H^v_n(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{\bullet,n}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B^v_n(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & Z^v_n(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & H^v_n(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta. O mesmo lema garante a existência de flecha $f_{\bullet,n}$ que estende f_n e o diagrama com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z^v_n(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{\bullet,n}"'] & p_{\bullet,n} \arrow[r] \arrow[d, "f_{\bullet,n}"] & B^v_{\bullet,n-1}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\bullet,n-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z^v_n(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & p'_{\bullet,n} \arrow[r] & B^v_{\bullet,n-1}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta.

Construímos $f_{\bullet,\bullet}$ que estende $f_\bullet$ e comuta com as diferenciais horizontais; para concluir a primeira parte da proposição resta provar que $f_{\bullet,\bullet}$ também comuta com as diferenciais verticais. Isto segue diretamente da comutatividade dos diagramas acima e do diagrama

$$\begin{tikzcd} p_{m,n} \arrow[r] \arrow[d, "f_{m,n}"'] \arrow[rrr, bend left, "d^v_{m,n}"] & B^v_{m,n-1}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{m,n-1}"] & Z^v_{m,n-1}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m,n-1}"] & p_{m,n-1} \arrow[d, "f_{m,n-1}"] \\ p'_{m,n} \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "d'^v_{m,n}"'] & B^v_{m,n-1}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & Z^v_{m,n-1}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & p'_{m,n-1} \end{tikzcd}$$

Agora, se $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicas e $s_\bullet$ é uma homotopia entre estas flechas, para cada inteiro n o teorema da Comparação nos garante a existência de flechas $s^v_{\bullet,n}$ entre $\mathcal{P}_{\bullet,n}$ e $\mathcal{P}'_{\bullet,n+1}$ que estendem s_n. Em particular temos $d'^h_{m,n+1} \circ s^v_{m,n} = s^v_{m-1,n} \circ d^h_{m,n}$.

Defina, para cada par de inteiros m, n,

$$k_{m,n} = g_{m,n} + d'^v_{m,n+1} \circ s^v_{m,n} + s^v_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}.$$

Vejamos que $k_{\bullet,\bullet}$ estende $f_\bullet$:

i) $k_{\bullet,\bullet}$ é flecha entre complexos: dados inteiros m, n temos

$$\begin{aligned} d'^h_{m,n} \circ k_{m,n} &= d'^h \circ g_{m,n} + d'^h_{m,n} \circ d'^v_{m,n+1} \circ s^v_{m,n} + d'^h_{m,n-1} \circ s^v_{m,n-1} \circ d^v_{m,n} \\ &= g_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} + d'^v_{m-1,n+1} \circ d'^h_{m,n+1} \circ s^v_{m,n} + s^v_{m-1,n-1} \circ d^h_{m,n-1} \circ d^v_{m,n} \\ &= g_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} + d'^v_{m-1,n+1} \circ s^v_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} + s^v_{m-1,n-1} \circ d^v_{m-1,n} \circ d^h_{m,n} \\ &= k_{m-1,n} \circ d^h_{m,n}. \end{aligned}$$

e, de forma similar, verificamos que $d'^v_{m,n} \circ k_{m,n} = k_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}$.

ii) $k_{\bullet,\bullet}$ estende $f_\bullet$: dado inteiro n temos

$$\begin{aligned} \epsilon'_n \circ k_{0,n} &= \epsilon'_n \circ g_{0,n} + \epsilon'_n \circ d'^v_{0,n+1} \circ s^v_{0,n} + \epsilon'_n \circ s^v_{0,n-1} \circ d^v_{0,n} \\ &= g \circ \epsilon_n + d_{n+1} \circ \epsilon_{n+1} \circ s^v_{0,n} + s_{n-1} \circ \epsilon_{n-1} \circ d^v_{0,n} \\ &= g \circ \epsilon_n + d_{n+1} \circ s_n \circ \epsilon_n + s_{n-1} \circ d_n \circ \epsilon_n \\ &= f \circ \epsilon_n. \end{aligned}$$

Sendo assim, as flechas $Z^v_n(k_{\bullet,\bullet}), B^v_n(k_{\bullet,\bullet})$ e $H^v_n(k_{\bullet,\bullet})$ estendem as flechas $Z_n(f_\bullet)$, $B_n(f_\bullet)$ e $H_n(f_\bullet)$, respectivamente, e portanto podemos tomar homotopias entre estas flechas e as flechas correspondentes às induzidas por $f_{\bullet,\bullet}$. Daí, tome homotopias $s^B_{\bullet,n}$ e $s^H_{\bullet,n}$ entre as flechas que estendem $B_n(f_\bullet)$ e $H_n(f_\bullet)$, respectivamente, e novamente o lema 1.4.6 garante a existência de homotopia $s^Z_{\bullet,n}$ entre as flechas que estendem $Z_n(f_\bullet)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B^v_{m,n}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "s^B_{m,n}"'] & Z^v_{m,n}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "s^Z_{m,n}"] & H^v_{m,n}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "s^H_{m,n}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B^v_{m+1,n}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & Z^v_{m+1,n}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & H^v_{m+1,n}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo. O mesmo lema nos garante a existência de homotopia $s^h_{\bullet,n}$ entre

as flechas $f_{\bullet,n}$ e $k_{\bullet,n}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^v_{m,n}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "s^Z_{m,n}"'] & p_{m,n} \arrow[r] \arrow[d, "s^h_{m,n}"] & B^v_{m,n-1}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "s^B_{m,n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^v_{m+1,n}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & p'_{m+1,n} \arrow[r] & B^v_{m+1,n-1}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta. Provamos assim que

$$f_{m,n} - k_{m,n} = d'^h_{m+1,n} \circ s^h_{m,n} + s^h_{m-1,n} \circ d^h_{m,n},$$

ou seja,

$$f_{m,n} - g_{m,n} = (d'^v_{m+1,n} \circ s^v_{m,n} + s^v_{m,n-1} \circ d^v_{m,n}) + (d'^h_{m+1,n} \circ s^h_{m,n} + s^h_{m-1,n} \circ d^h_{m,n})$$

e, além disso, da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
p_{m,n} \arrow[r] \arrow[d, "s^h_{m,n}"'] \arrow[rrr, bend left, "d^v_{m,n}"] & B^v_{m,n-1}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "s^B_{m,n-1}"] & Z^v_{m,n-1}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "s^Z_{m,n-1}"] & p_{m,n-1} \arrow[d, "s^h_{m,n-1}"] \\
p'_{m+1,n} \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "d'^v_{m+1,n}"'] & B^v_{m+1,n-1}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & Z^v_{m+1,n-1}(\mathcal{P}'_{\bullet,\bullet}) \arrow[r] & p'_{m+1,n-1}
\end{tikzcd}$$

temos o resultado.

Q.E.D.

Corolário 3.1.3. *Duas resoluções projetivas de Cartan-Eilenberg $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ e $\mathcal{Q}_{\bullet,\bullet}$ de um complexo são homotópicas. Além disso, se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um funtor covariante aditivo entre categorias abelianas com $\mathcal{B}$ admitindo coprodutos, então $Tot^{\oplus}(Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}))_\bullet$ e $Tot^{\oplus}(Ch(T)(\mathcal{Q}_{\bullet,\bullet}))_\bullet$ são homotópicas.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet,\bullet}} \mathcal{Q}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{g_{\bullet,\bullet}} \mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ flechas que estendem a identidade do complexo no qual $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ e $\mathcal{Q}_{\bullet,\bullet}$ são resoluções projetivas de Cartan-Eilenberg; logo $f_{\bullet,\bullet} \circ g_{\bullet,\bullet} \sim 1_{\mathcal{Q}_{\bullet,\bullet}}$ e $g_{\bullet,\bullet} \circ f_{\bullet,\bullet} \sim 1_{\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}}$. O resultado segue por T e $Tot^{\oplus}$ serem funtores. *Q.E.D.*

Definição 3.1.3 (`Hiperfuntor`)**.** *Sejam n um inteiro e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor covariante aditivo exato à direita entre categorias abelianas; suponha que $\mathcal{A}$ possui projetivos suficientes e que $\mathcal{B}$ admite coprodutos enumeráveis. Se $\mathcal{C}_\bullet$ é um complexo de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ é uma resolução de Cartan-Eilenberg de $\mathcal{C}_\bullet$, defina*

$$\mathbb{L}_n T(\mathcal{C}_\bullet) = H_n(Tot^{\oplus}(Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}))_\bullet).$$

Se $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ *é uma flecha entre complexos e* $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet,\bullet}} \mathcal{Q}_{\bullet,\bullet}$ *é uma flecha entre resoluções projetivas de Cartan-Eilenberg que estende* $f_\bullet$*, defina*

$$\mathbb{L}_n T(f_\bullet) = H_n(Tot^{\oplus}(Ch(T)(f_{\bullet,\bullet}))_\bullet).$$

$\mathbb{L}_n T$ *será chamado de* n*-ésimo hiperfuntor derivado à esquerda de* T*.*

Por definição de $\mathbb{L}_n T$ vê-se que este é um funtor covariante aditivo e o corolário anterior garante sua boa definição. Por dualidade construímos o n-ésimo hiperfuntor derivado à direita de T; o denotamos por $\mathbb{R}^n T$.

Observação. *Podemos considerar um objeto* a *da categoria* $\mathcal{A}$ *como um complexo*

$$a_\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow a \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

onde o objeto a *está na* n*-ésima posição; assim* $\mathbb{L}_n T(a_\bullet) = L_n T(a)$*, pois podemos estender uma resolução projetiva de* a *a uma resolução projetiva de Cartan-Eilenberg de* $a_\bullet$ *completando-a com zeros.*

Teorema 3.1.4. *Seja* $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *um funtor covariante aditivo entre categorias abelianas com* $\mathcal{A}$ *admitindo projetivos suficientes e* $\mathcal{B}$ *coprodutos enumeráveis, e seja* $\mathcal{C}_\bullet$ *um complexo de* $\mathcal{A}$*. Se* $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ *é uma resolução projetiva de Cartan-Eilenberg de* $\mathcal{C}_\bullet$*, então as duas espectrais canônicas da totalização de* $Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})$ *são tais que*

i) ${}^2_I E_{p,q} \simeq L_p T(H_q(\mathcal{C}_\bullet)) \Rightarrow_p \mathbb{L}_{p+q} T(\mathcal{C}_\bullet)$*.*

ii) ${}^2_{II} E_{p,q} \simeq H_q(L_p T(\mathcal{C}_\bullet))$ *para todos inteiros* p, q *e, quando* $\mathcal{C}_\bullet$ *é positivo, esta espectral converge para* $\mathbb{L}_{p+q} T(\mathcal{C}_\bullet)$*.*

Demonstração. Segue diretamente da primeira observação, das filtrações canônicas da totalização serem exaustivas e do teorema da convergência. *Q.E.D.*

Corolário 3.1.5. *Suponha* T *exato à direita.*

i) Se $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet$ *é tal que* $H_n(f_\bullet)$ *é isomorfismo para todo inteiro* n*, então* $\mathbb{L}_n T(\mathcal{C}_\bullet) \simeq \mathbb{L}_n T(\mathcal{C}'_\bullet)$*. Em particular, se* $\mathcal{C}_\bullet$ *é exato, então* $\mathbb{L}_n T(\mathcal{C}_\bullet) = 0$ *para todo inteiro* n*.*

ii) Se $L_q T(\mathcal{C}_\bullet) = 0$ *para* $q \neq 0$ *e* $\mathcal{C}_\bullet$ *é positivo, então* $\mathbb{L}_n T(\mathcal{C}_\bullet) \simeq H_n(T(c_0))$ *para todo inteiro* n*.*

Demonstração. i) Segue do fato de que a n-ésima homologia de uma extensão da flecha $f_\bullet$ estende $H_n(f_\bullet)$ e portanto é isomorfismo entre complexos.

ii) A hipótese nos diz que a segunda espectral colapsa no eixo q; logo $\mathbb{L}_n T(\mathcal{C}_\bullet) \simeq H_n(L_0 T(\mathcal{C}_\bullet)) \simeq H_n(T(c_0))$ para todo inteiro n.

Q.E.D.

O teorema da sequência exata longa nos garante que, em $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$, o funtor H_0 é exato à direita. Temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.6. *Seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtor covariante aditivo exato à direita entre categorias abelianas. Para todo complexo positivo $\mathcal{C}_\bullet$ temos $\mathbb{L}_p T(\mathcal{C}_\bullet) \simeq L_p(H_0 \circ Ch(T))(\mathcal{C}_\bullet)$.*

Demonstração. Seja

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{P}_{m,\bullet} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-1,\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{P}_{0,\bullet}$$

uma resolução projetiva de $\mathcal{C}$ em $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$. Sabemos da observação da proposição 1.4.17 que $\mathcal{P}_{m,\bullet}$ cinde, é acíclico e é formado por objetos projetivos; assim

$$H_q^v \circ Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) = Ch(T) \circ H_q^v(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) = \begin{cases} 0, & \text{se } q > 0 \\ H_0 \circ Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}), & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

Portanto a primeira espectral do bicomplexo $Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})$ colapsa no eixo p e assim

$$\begin{aligned} L_p(H_0 \circ Ch(T))(\mathcal{C}_\bullet) &= H_p^h(H_0^v \circ Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})) \\ &\simeq H_p(Tot^{\oplus}(Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}))) \\ &\simeq H_p \circ Ch(T)(Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado, podemos ver $\mathcal{C}_\bullet$ como um bicomplexo $\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$ tal que $\mathcal{C}_{0,\bullet} = \mathcal{C}_\bullet$ e $c_{p,q} = 0$ para $p \neq 0$. Assim temos flecha $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet,\bullet}} \mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$, onde $f_{p,\bullet} = 0$ para $p \neq 0$ e $f_{0,\bullet}$ é a argumentação, tal que $H_\bullet^h(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \xrightarrow{H_\bullet^h(f_{\bullet,\bullet})} H_\bullet^h(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})$ é isomorfismo (repare que $H_0^h(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet}) \simeq \mathcal{C}_{\bullet,\bullet}$) e portanto $H_p^v H_q^h(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}) \simeq H_p^v H_q^h(\mathcal{C}_{\bullet,\bullet})(\simeq H_p(\mathcal{C}_\bullet))$. O lema 2.2.1 nos garante que $H_n(Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})_\bullet) \simeq H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ e do teorema 3.1.4 temos

$$\mathbb{L}_{p+q} T(\mathcal{C}_\bullet) \simeq \mathbb{L}_{p+q} T(Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})_\bullet). \tag{3.2}$$

Para todo inteiro n, sendo $Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})_n$ é objeto projetivo, a segunda espectral de um bicomplexo $Ch(T)(\mathcal{Q}_{\bullet,\bullet})$ colapsa no eixo q, onde $\mathcal{Q}_{\bullet,\bullet}$ é uma resolução projetiva de Cartan-Eilenberg de $Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})_\bullet$; assim temos

$$\mathbb{L}_p T(Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})_\bullet) \simeq H_p(L_0 Ch(T)(Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})_p)) \simeq H_p \circ Ch(T)(Tot^{\oplus}(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})_\bullet). \tag{3.3}$$

O resultado segue de (3.1), (3.2) e (3.3). *Q.E.D.*

Corolário 3.1.7. *Em $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$, o hiperfuntor derivado é funtor homológico universal.*

3.2 Sequência Espectral de Grothendieck

Definição 3.2.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com projetivos suficientes, $\mathcal{B}$ uma categoria abeliana e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor (covariante ou contravariante) aditivo. Um objeto a de $\mathcal{A}$ é dito T-acíclico à esquerda se $L_nT(a) = 0$ para $n > 0$.*

Exemplo 3.2.1. *Seja M um R-módulo. Módulos planos são $(M \otimes _)$-acíclicos à esquerda e módulos injetivos são $Hom(M, _)$-acíclicos à direita.*

A seguinte proposição é uma aplicação imediata da hiper-homologia; ela nos diz que o funtor derivado à esquerda de um funtor exato à direita T pode ser calculado via resoluções formadas por objetos T-acíclicos à esquerda; em particular pode-se calcular o Tor via resoluções planas (verificamos isto no corolário 2.4.4).

Proposição 3.2.1. *Sejam $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor covariante aditivo exato à direita entre categorias abelianas e a um objeto da categoria $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{C}_\bullet$ é uma resolução de a tal que c_n é T-acíclico à esquerda, então $L_nT(a) \simeq H_n(Ch(T)(\mathcal{C}_\bullet))$.*

Demonstração. Do teorema 3.1.4 que ${}^2_I E_{p,q} = L_pT(H_q(\mathcal{C}_\bullet))$ e ${}^2_{II} E_{p,q} = H_q(L_pT(\mathcal{C}_\bullet))$. Além disso, como $\mathcal{C}_\bullet$ é uma resolução formada por objetos T-acíclicos à esquerda temos

$$ {}^2_I E_{p,q} = \begin{cases} L_pT(a), & \text{se } q = 0 \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad {}^2_{II} E_{p,q} = \begin{cases} H_q(T(\mathcal{C}_\bullet)), & \text{se } p = 0 \\ 0, & \text{se } p \neq 0. \end{cases} $$

Portanto ambas espectrais colapsam e, novamente do teorema 3.1.4, concluímos que

$$ L_nT(a) = {}^2_I E_{n,0} \simeq {}^2_{II} E_{0,n} = H_n(T(\mathcal{C}_\bullet)). $$

Q.E.D.

Teorema 3.2.2 (`Sequência Espectral de Grothendieck`). *Sejam $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$ funtores covariantes aditivos exatos à direita entre categorias abelianas com projetivos suficientes. Suponha que T é exato à direita e que $S(p)$ é T-acíclico à esquerda para todo objeto projetivo p em $\mathcal{A}$. Temos assim que para todo objeto a em $\mathcal{A}$ existe uma sequência espectral E no primeiro quadrante com*

$$ {}^2E_{p,q} = (L_pT)(L_qS)(a) \Rightarrow_p L_{p+q}(T \circ S)(a). $$

Esta espectral é dita sequência espectral de Grothendieck.

Demonstração. Dado objeto a em $\mathcal{A}$, tome resolução projetiva $\mathcal{Q}_\bullet$ de a e daí considere resolução projetiva de Cartan-Eilenberg $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ de $S(\mathcal{Q}_\bullet)$. Logo

$$ L_mT(S(q_n)) = \begin{cases} 0, & \text{se } m > 0 \\ T \circ S(q_n), & \text{se } m = 0 \end{cases} $$

para todo natural n. Logo a segunda página da segunda espectral da totalização de $Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})$ é dada por

$$\begin{array}{cccccc}
L_n(T\circ S)(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
L_{n-1}(T\circ S)(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
L_0(T\circ S)(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots
\end{array}$$

e daí temos $\mathbb{L}_n T(Ch(S)(\mathcal{Q}_\bullet)) \simeq L_n(T\circ S)(a)$.

Por outro lado, sendo $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ resolução projetiva de Cartan-Eilenberg, o complexo $H^v_\bullet(\mathcal{P}_{\bullet,n})$ é uma resolução projetiva de $H_n(Ch(S)(\mathcal{Q}_\bullet)) = L_nS(a)$. Da observação do início do capítulo T comuta com H^v e portanto o objeto (p,q) da segunda página da primeira espectral da totalização de $Ch(T)(\mathcal{P}_{\bullet,\bullet})$ é $(L_pT)(L_qS)(a)$. Pelo o que foi visto anteriormente esta espectral também converge para $L_{p+q}(T\circ S)(a)$. *Q.E.D.*

Observação. *Ao modificarmos as hipóteses do teorema anterior (substituindo projetivos suficientes por injetivos suficientes e funtores covariantes por funtores contravariantes, por exemplo) obtemos resultados similares os quais envolvem funtores derivados à direita.*

Aplicaremos o teorema anterior para obtermos alguns resultados a respeito de mudança de aneis, Tor e Ext. Sejam R e S aneis.

Teorema 3.2.3. *Sejam A um R-módulo e B um (R,S)-bimódulo. Se A e B são tais que $Tor^r_n(A, B\otimes_S P) = 0$ para todo $n \geq 1$ quando P é S-módulo projetivo, então existe sequência espectral E no primeiro quadrante tal que*

$$^2E_{p,q} = Tor^R_p(A, Tor^S_q(B,C)) \Rightarrow_p Tor^S_{p+q}(A\otimes_R B, C)$$

para todo S-módulo C.

Demonstração. Considere os funtores

$$S-Mod \xrightarrow{B\otimes_S -} R-Mod \xrightarrow{A\otimes_R -} R-Mod.$$

$A\otimes_R -$ é exato à direita e, por hipótese, $B\otimes_S P$ é $(A\otimes_R -)$-acíclico para todo S-módulo projetivo P. O resultado segue do teorema da sequência espectral de Grothendieck e de $(A\otimes_R B)\otimes_S C \simeq A\otimes_R (B\otimes_S C)$ (ver [1, 3]). *Q.E.D.*

Corolário 3.2.4. *Se B é S-módulo plano, então*

$$Tor_n^S(A \otimes_R B, C) \simeq Tor_n^R(A, B \otimes_S C)$$

para todo natural n e todo S-módulo C.

Demonstração. Seja $\mathcal{Q}_\bullet$ uma resolução projetiva de C e seja $\mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$ uma resolução projetiva de Cartan-Eilenberg de $B \otimes_S \mathcal{Q}_\bullet$. Se Q é um S-módulo projetivo, por B ser S-módulo plano temos $B \otimes_S Q_n$ plano (ver [1, 3]) e portanto $Tor_i^R(A, B \otimes_S Q) = 0$ para todo $i \geq 1$; assim A e B satisfazem as hipóteses do teorema anterior. Além disso, por $B \otimes_S _$ ser funtor exato, $B \otimes_S \mathcal{Q}_\bullet$ é uma resolução plana de $B \otimes_S C$.

Calculemos a segunda espectral de $A \otimes_R \mathcal{P}_{\bullet,\bullet}$:

$$
\begin{array}{lccccc}
{}^1E: & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & \cdots & Tor_m^R(A, B \otimes_S Q_n) & \cdots & Tor_1^R(A, B \otimes_S Q_n) & A \otimes_R (B \otimes_S Q_n) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & \cdots & Tor_m^R(A, B \otimes_S Q_{n-1}) & \cdots & Tor_1^R(A, B \otimes_S Q_{n-1}) & A \otimes_R (B \otimes_S Q_{n-1}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & \cdots & Tor_m^R(A, B \otimes_S Q_0) & \cdots & Tor_1^R(A, B \otimes_S Q_0) & A \otimes_R (B \otimes_S Q_0)
\end{array}
$$

Visto que $B \otimes_S \mathcal{Q}_\bullet$, temos $Tor_i^R(A, B \otimes_S Q_n) = 0$ para todo $i \geq 1$ e $n \geq 0$. Daí temos

$$
\begin{array}{lccccc}
{}^2E: & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Tor_n^R(A, B \otimes_S C) \\
 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Tor_{n-1}^R(A, B \otimes_S C) \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Tor_1^R(A, B \otimes_S C) \\
 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & A \otimes_R (B \otimes_S C)
\end{array}
$$

e, por ${}^2E$ colapsar sob o eixo q, o resultado segue *Q.E.D.*

Por dualidade ao teorema anterior e seu corolário, e considerando a fórmula de adjunção entre tensor e hom (ver [2]), podemos enunciar os seguintes resultados:

Teorema 3.2.5. *Sejam A S-módulo e B (R,S)-bimódulo. Se A e B satisfazem $Ext^n_S(A, Hom_R(B,E)) = 0$ para todo $n \geq 1$ quando E é R-módulo injetivo, então existe sequência espectral no terceiro quadrante tal que*

$$Ext^p_S(A, Ext^q_R(B,C)) \Rightarrow_p Ext^{p+q}_R(A \otimes_S B, C)$$

para todo R-módulo C.

Corolário 3.2.6. *Se B é projetivo como R-módulo e como S-módulo, então*

$$Ext^n_S(A, Hom_R(B,C)) \simeq Ext^n_R(A \otimes_S B, C)$$

para todo natural n e todo R-módulo C.

Teorema 3.2.7. *Dado homomorfismo de aneis $R \to S$ existe sequência espectral tal que*

$$Tor^S_p(Tor^R_q(A,S), B) \Rightarrow_p Tor^R_{p+q}(A,B).$$

Demonstração. Dado R-módulo projetivo P, temos que $P \otimes_R S$ é S-módulo projetivo (ver [15]) e assim $Tor^R_n(P \otimes_R S, B) = 0$ para $n \geq 1$. Considerando a composição

$$R - Mod \xrightarrow{-\otimes_R S} S - Mod \xrightarrow{-\otimes_S N} S - Mod$$

o resultado segue do teorema da sequência espectral de Grothendieck. *Q.E.D.*

Corolário 3.2.8. *Se S é R-módulo plano, então $Tor^S_n(A,B) \simeq Tor^R_n(A,B)$.*

Demonstração. A prova é semelhante à prova do corolário 3.2.4. *Q.E.D.*

Apêndice A

Diagrama da Serpente

Teorema A.0.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Se*

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & c \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "u'"'] & b' \arrow[r, "v'"'] & c' &
\end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo com linhas exatas, então existe sequência exata

$$\ker(f) \xrightarrow{u_1} \ker(g) \xrightarrow{v_1} \ker(h) \overset{\delta}{\rightsquigarrow} coker(f) \xrightarrow{u_1'} coker(g) \xrightarrow{v_1'} coker(h)$$

onde u_1, v_1, u_1' e v_1' são flechas induzidas por u, v, u', v', respectivamente.

Demonstração. Construiremos um diagrama, cujas flechas são todas as canônicas, com a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
 & \ker(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \ker(g) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"] & \ker(h) \arrow[d, "k"] \arrow[dddll, bend left, "\delta"] & \\
 & a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & c \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & b' \arrow[r, "v'"'] \arrow[d, "q"] & c' \arrow[d, "r"] & \\
 & coker(f) \arrow[r, "u_1'"'] & coker(g) \arrow[r, "v_1'"'] & coker(h) &
\end{tikzcd}$$

Como $g \circ u \circ i = u' \circ f \circ i = 0$, $u \circ i$ se fatora unicamente por j; seja u_1 a flecha tal que $u \circ i = j \circ u_1$. De forma análoga construímos v_1 e, por dualidade, construímos u_1' e v_1'.

i) `Construção de` δ. A partir do diagrama anterior construiremos um diagrama

da forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\beta) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\gamma"'] & v^{-1}(\ker(h)) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddl, dashed, "\xi"'] & \ker(h) \arrow[r] \arrow[d, "k"] \arrow[ddll, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & im(u) \arrow[r, "l"'] \arrow[d, "\theta"'] & b \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\delta"'] & c \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & b' \arrow[r, "v'"'] & c' & \\
 & coker(f) & & &
\end{tikzcd} \tag{A.1}$$

cujas linhas são exatas, os quadrados comutam, $u' \circ \xi = g \circ \alpha, \xi \circ \mu = \theta \circ \gamma$ e $p \circ \xi = \delta \circ \beta$. As flechas $\alpha \xleftarrow{\alpha} v^{-1}(\ker(h)) \xrightarrow{\beta} \ker(h)$ é o pullback de $b \xrightarrow{v} c \xleftarrow{k} \ker(h)$ e, por $\mathcal{A}$ ser abeliana, β é epimorfismo; garantimos assim a exatidão da primeira linha de $(A.1)$ e a existência de γ. De $v' \circ g \circ l = h \circ v \circ l = 0$, temos a existência de θ. De $v' \circ g \circ \alpha = h \circ k \circ \beta = 0$, $g \circ \alpha$ se fatora por u'; daí a existência de ξ e $u' \circ \xi = g \circ \alpha$. De $u' \circ \xi \circ \mu = g \circ \alpha \circ \mu = u' \circ \theta \circ \gamma$ temos $\xi \circ \mu = \theta \circ \gamma$.

Se $u = l \circ \widehat{u}$ é a fatoração de u por sua imagem, então $u' \circ \theta \circ \widehat{u} = g \circ l \circ \widehat{u} = u \circ g = u' \circ f$ e portanto $f = \theta \circ \widehat{u}$. Sendo $\widehat{u}$ epimorfismo temos $im(\xi \circ \mu) = im(\theta \circ \gamma) \subseteq im(\theta) = im(f)$; logo $(p \circ \xi) \circ \mu = p \circ (\xi \circ \mu) = 0$, já que o núcleo de p é a imagem de f. Assim $p \circ \xi$ se fatora unicamente pelo conúcleo β de μ; daí a existência de δ.

ii) `Exatidão em` $\ker(h)$. Como $k \circ v_1 = v \circ j$, existe única flecha η tal que os triângulos

$$\begin{tikzcd}
\ker(g) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "\eta"] & \ker(h) \\
b & v^{-1}(\ker(h)) \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

comutam. Note que $u' \circ \xi \circ \eta = g \circ \alpha \circ \eta = g \circ j = 0$ e assim $\xi \circ \eta = 0$. Logo $\delta \circ v_1 = \delta \circ \beta \circ \eta = p \circ \xi \circ \eta = 0$, ou seja, $im(v_1) \subseteq \ker(\delta)$.

Escreva $d = v^{-1}(\ker(h)) \times_{\ker(h)} \ker(\delta)$ e seja λ o núcleo de δ. Do pullback de λ e β

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\widehat{\beta}"] \arrow[d, "\widehat{\lambda}"'] & \ker(\delta) \arrow[d, "\lambda"] \\
v^{-1}(\ker(h)) \arrow[r, "\beta"'] & \ker(h)
\end{tikzcd}$$

temos que $p \circ \xi \circ \widehat{\lambda} = \delta \circ \beta \circ \widehat{\lambda} = \delta \circ \lambda \circ \beta = 0$ e $\widehat{\beta}$ é epimorfismo. Daí existe única

flecha ν tal que

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\xi\circ\widehat{\lambda}"] \arrow[d, "\nu"'] & a' \\ im(f) \arrow[ur, "\widehat{i}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, onde $\widehat{i}$ é a imagem de f. Seja $f = \widehat{i} \circ \widehat{f}$ a fatoração de f por sua imagem. Considere o pullback de $\widehat{f}$ e ν

$$\begin{tikzcd} d \times_{im(f)} a \arrow[r, "\widehat{\nu}"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & a \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ d \arrow[r, "\nu"'] & im(f) \end{tikzcd}$$

Por $\mathcal{A}$ ser abeliana temos que $\widetilde{f}$ é epimorfismo; além disso,

$$g \circ \alpha \circ \widehat{\lambda} \circ \widetilde{f} = u' \circ \xi \circ \widehat{\lambda} \circ \widetilde{f} = u' \circ \widehat{i} \circ \nu \circ \widetilde{f} = u' \circ \widehat{i} \circ \widehat{f} \circ \widehat{\nu} = u' \circ f \circ \widehat{\nu} = g \circ v \circ \widehat{\nu};$$

logo existe única flecha ζ tal que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha\circ\widehat{\lambda}\circ\widetilde{f}-u\circ\widehat{\nu}"] \arrow[d, "\zeta"'] & b \\ \ker(g) \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Assim

$$k \circ v_1 \circ \zeta = v \circ j \circ \zeta = v \circ (\alpha \circ \widehat{\lambda} \circ \widetilde{f} - u \circ \widehat{\nu}) = v \circ \alpha \circ \widehat{\lambda} \circ \widetilde{f} = k \circ \beta \circ \widehat{\lambda} \circ \widetilde{f}$$

e portanto $v_1 \circ \zeta = \beta \circ \widehat{\lambda} \circ \widetilde{f} = \lambda \circ \beta \circ \widetilde{f}$. Sendo λ monomorfismo e $\widehat{\beta} \circ \widetilde{f}$ epimorfismo, temos $\ker(\delta) = im(v_1 \circ \zeta) \subseteq im(v_1)$.

iii) `Exatidão em` $coker(f)$. De $u_1' \circ \delta \circ \beta = u_1' \circ p \circ \xi = q \circ u_1 \circ \xi = q \circ g \circ \alpha = 0$ e por β ser epimorfismo temos $u_1' \circ \delta = 0$, ou seja $im(\delta) \subseteq \ker(u_1')$.

Escreva $d' = \ker(u_1') \times_{coker(f)} a'$ e considere o pullback de p e o núcleo u_2 de u_1'

$$\begin{tikzcd} d' \arrow[r, "u_2'"] \arrow[d, "p'"'] & a' \arrow[d, "p"] \\ \ker(u_1') \arrow[r, "u_2"'] & coker(f) \end{tikzcd}$$

Daí u_2' é monomorfismo, p' é epimorfismo e $q \circ u' \circ u_2' = u_1' \circ p \circ u_2' = u_1' \circ u_2 \circ p' = 0$,

ou seja, existe única flecha φ tal que

$$\begin{tikzcd} d' \arrow[r, "u' \circ u'_2"] \arrow[d, "\varphi"'] & b' \\ im(g) \arrow[ur, "\widehat{j}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Seja $g = \widehat{j} \circ \widehat{g}$ a fatoração de g pela sua imagem e considere o pullback entre $\widehat{g}$ e φ

$$\begin{tikzcd} d' \times_{im(g)} b \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & b \arrow[d, "\widehat{g}"] \\ d' \arrow[r, "\varphi"'] & im(g) \end{tikzcd}$$

Assim $\widetilde{g}$ é epimorfismo e $u' \circ u'_2 \circ \widetilde{g} = \widehat{j} \circ \varphi \circ \widetilde{g} = \widehat{j} \circ \widehat{g} \circ \widetilde{\varphi} = g \circ \widetilde{\varphi}$; logo

$$h \circ v \circ \widetilde{\varphi} = v' \circ g \circ \widetilde{\varphi} = v' \circ u' \circ u'_2 \circ \widetilde{g} = 0,$$

isto é, existe única flecha ψ tal que

$$\begin{tikzcd} d' \times_{im(g)} b \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\psi"'] & b \arrow[d, "v"] \\ \ker(h) \arrow[r, "k"'] & c \end{tikzcd}$$

comuta e, consequentemente, existe única flecha $\widetilde{\psi}$ tal que os triângulos

$$\begin{tikzcd} d' \times_{im(g)} b \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\psi}"] & b \\ \ker(h) & v^{-1}(\ker(h)) \arrow[l, "\beta"] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

comutam. Daí

$$u' \circ u'_2 \circ \widetilde{g} = g \circ \widetilde{\varphi} = g \circ \alpha \circ \widetilde{\psi} = u' \circ \xi \circ \widetilde{\psi}$$

e, sendo u' monomorfismo, temos $u'_2 \circ \widetilde{g} = \xi \circ \widetilde{\psi}$. Segue que

$$\delta \circ \psi = \delta \circ \beta \circ \widetilde{\psi} = p \circ \xi \circ \widetilde{\psi} = p \circ u'_2 \circ \widetilde{g} = u_2 \circ p' \circ \widetilde{g}.$$

Como u_2 é monomorfismo e $p' \circ \widetilde{g}$ é epimorfismo, temos $\ker(u'_1) = im(\delta \circ \psi) \subseteq im(\delta)$.

iv) `Exatidão em` $\ker(g)$`.` sendo k monomorfismo e de $k \circ v_1 \circ u_1 = v \circ u \circ i = 0$ temos $v_1 \circ u_1 = 0$, ou seja, $im(u_1) \subseteq \ker(v_1)$.

Seja $\ker(v_1) \xrightarrow{v_2} \ker(g)$ o núcleo de v_1; temos que $v \circ j \circ v_2 = k \circ v_1 \circ v_2 = 0$, isto é, existe única flecha $\widetilde{u}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \ker(v_1) \arrow[r, "j\circ v_2"] \arrow[d, "\widetilde{u}"'] & b \\ im(u) \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Escreva $\widetilde{d} = a \times_{im(u)} \ker(v_1)$ e tome o pullback entre $\widehat{u}$ e $\widetilde{u}$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{d} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\omega"'] & \ker(v_1) \arrow[d, "\widetilde{u}"] \\ a \arrow[r, "\widehat{u}"'] & im(u) \end{tikzcd}$$

Como u' é monomorfismo, de

$$u' \circ f \circ \omega = g \circ u \circ \omega = g \circ l \circ \widehat{u} \circ \omega = g \circ l \circ \widetilde{u} \circ t = g \circ j \circ v_2 \circ t = 0$$

temos $f \circ \omega = 0$. Logo existe única flecha $\widetilde{\omega}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \widetilde{d} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\widetilde{\omega}"'] & a \\ \ker(f) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Daí

$$j \circ v_2 \circ t = l \circ \widetilde{u} \circ t = l \circ \widehat{u} \circ \omega = u \circ i \circ \widetilde{\omega} = j \circ u_1 \circ \widetilde{\omega}$$

e, por j ser monomorfismo, $v_2 \circ t = u_1 \circ \widetilde{\omega}$. De v_2 ser monomorfismo e t epimorfismo temos $\ker(v_1) = im(u_1 \circ \widetilde{\omega}) \subseteq im(u_1)$.

v) `Exatidão em` $coker(g)$. Segue por dualidade e do item anterior.

Q.E.D.

Apêndice B

Lema dos 5

Teorema B.0.1 (`Lema dos 5`). *Numa categoria abeliana $\mathcal{A}$ considere o diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & b \arrow[r] \arrow[d, "g"] & c \arrow[r] \arrow[d, "h"] & d \arrow[r] \arrow[d, "k"] & e \arrow[d, "l"] \\
a' \arrow[r] & b' \arrow[r] & c' \arrow[r] & d' \arrow[r] & e'
\end{tikzcd}$$

Se f é epimorfismo, l é monomorfismo e g e k são isomorfismos, então h é isomorfismo.

Demonstração. O resultado segue diretamente da próxima afirmação e sua dual:

Afirmação. *Considere seguinte diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & c \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & d \arrow[d, "k"] \\
a' \arrow[r, "u'"'] & b' \arrow[r, "v'"'] & c' \arrow[r, "w'"'] & d'
\end{tikzcd}$$

Se f é epimorfismo, g monomorfismo e k monomorfismo, então h é monomorfismo.

Prova da afirmação. Seja i o núcleo de h. De

$$0 = w' \circ (h \circ i) = (w' \circ h) \circ i = (k \circ w) \circ i = k \circ (w \circ i)$$

temos $w \circ i = 0$, ou seja, existe única flecha tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ker(h) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "l"'] & c \\
im(v) \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. Considere o pullback das flechas l e v:

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \ker(f) \arrow[d, "l"] \\ b \arrow[r, "\widehat{v}"'] & im(v) \end{tikzcd}$$

Por $\widehat{v}$ ser epimorfismo, α também o é. Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= (h \circ i) \circ \alpha = h \circ (i \circ \alpha) = h \circ (j \circ l) \circ \alpha \\ &= (h \circ j) \circ (l \circ \alpha) = (h \circ j) \circ (\widehat{v} \circ \beta) = h \circ (j \circ \widehat{v}) \circ \beta \\ &= (h \circ v) \circ \beta = (v' \circ g) \circ \beta = v' \circ (g \circ \beta), \end{aligned}$$

isto é, existe única flecha γ tal que

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "g \circ \beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & b' \\ im(u') \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Seja

$$\begin{tikzcd} e' \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\zeta"'] & e \arrow[d, "\gamma"] \\ a \arrow[r, "\widehat{u'} \circ f"'] & im(u') \end{tikzcd}$$

o pullback entre γ e $\widehat{u'} \circ f$. Temos que ξ é epimorfismo e

$$\begin{aligned} (g \circ \beta) \circ \xi &= (\eta \circ \gamma) \circ \xi = \eta \circ (\gamma \circ \xi) = \eta \circ (\widehat{u'} \circ f \circ \zeta) \\ &= (\eta \circ \widehat{u'}) \circ f \circ \zeta = (u \circ f) \circ \zeta = (g \circ u) \circ \zeta \\ &= g \circ (u \circ \zeta), \end{aligned}$$

logo $\beta \circ \xi = u \circ \zeta$. Daí

$$\begin{aligned} i \circ (\alpha \circ \xi) &= (j \circ l) \circ (\alpha \circ \xi) = j \circ (l \circ \alpha) \circ \xi = j \circ (\widehat{v} \circ \beta) \circ \xi \\ &= (j \circ \widehat{v}) \circ (\beta \circ \xi) = v \circ (\beta \circ \xi) = v \circ (u \circ \zeta) \\ &= (v \circ u) \circ \zeta = 0 \end{aligned}$$

e, por $\alpha \circ \xi$ ser epimorfismo, concluímos que $i = 0$.

Q.E.D.

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] Bourbaki, N., *Algebra I, Chapters 1-3*, Springer, 1990.

[3] Bourbaki, N. *Commutative Algebra, Chapters 1-7*, Springer, 1991.

[4] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[5] Grothendieck, A., *Sur Quelques Points D'Algèbre Homologique*, Tohoku Mathematical Journal, (1957) 119-183.

[6] Grothendieck, A., Dieudonné, J., *Élements de géométrie algébrique: III*, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S, (1961) 5-167.

[7] Kehrein, A., *Projective objects in the category of chain complexes*, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, Vol. 7 (1999), No. 1, 33-38.

[8] McCleary, J., *A User's Guide to Spectral Sequences*, Cambridge University Press, Second Edition, 2001.

[9] McCleary, J., *A History of Spectral Sequences: Origins to 1953*, em History of Topology, Elsevier, 1999.

[10] Mitchell, B. *Theory of Categories*, Academic Press, 1965.

[11] Naéliton, J. *Sobre o Complexo de Koszul*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2010.

[12] Naéliton, J. *Introdução à Teoria das Categorias*, Notas de aula, 2016.

[13] Naéliton, J. *Introdução à Álgebra Homológica*, Notas de aula, 2017.

[14] Northcott, D. G., *Ideal Theory*, Cambridge University Press, 1953.

[15] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, Second Edition, 2009.

[16] Weibel, C. A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[17] Weibel, C. A., *History of Homological Algebra*, em History of Topology, Elsevier, 1999.