Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estudo de uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser via análise de blow-up

Luan Diego de Oliveira

João Pessoa – PB
Julho de 2013

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estudo de uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser via análise de blow-up

por

Luan Diego de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

João Pessoa – PB
Julho de 2013

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

XXXX Oliveira, Luan Diego de.
título / xxxx xxx xx
xxxxx

xxxxxxxxxxx.
Orientador: Everaldo Souto de Medeiros.
xxxxx.

xxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxx.

BS/CCEN CDU: xxxx(xxx)

Estudo de uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser via análise de blow-up

por

Luan Diego de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado – UnB
(Examinador Externo)

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Suplente)

Agradecimentos

A Deus, pois sem ele nada disso teria sido possível.

Aos meus pais e minha avó pela educação dada durante toda minha vida...

À Gersica por sempre está ao meu lado em todos os momentos...

Ao Professor Everaldo pela orientação e por ter sido um segundo pai durante minha graduação e meu mestrado...

Pelos colegas de convívio em especial ao amigos feitos de durante esses anos, Hudson, Anderson, Luando, e a Família Pedregal Tony, Mariana, Wanderson, Ginaldo, Mônica e Eudes.

"Quanto mais aumenta nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância"

John F. Kennedy

Resumo

Nosso objetivo principal nesta dissertação é melhorar a desigualdade de Trudinger-Moser, mostrando que se $0 \leq \alpha < \lambda_1(\Omega)$, então

$$C_\alpha(\Omega) = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \int_\Omega e^{4\pi u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)} dx < \infty,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e suave e $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet na fronteira. Para isto, usaremos um argumento conhecido como Análise de blow-up.

Palavras-chave: Desigualdade do tipo Trundinger-Moser, Análise de blow-up, Problema Elíptico, Teorema de Lioville, Espaços de Sobolev, Espaços de Orlicz, Função de Green, Crescimento Crítico Uniforme.

Abstract

Our goal in this dissertation is improve the Trudinger-Moser inequality, showing that if $0 \leq \alpha < \lambda_1(\Omega)$, then

$$C_\alpha(\Omega) = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \int_\Omega e^{4\pi u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)} dx < \infty,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a smooth bounded domain and $\lambda_1(\Omega)$ is the first eigenvalue of the Laplacian operator with Dirichlet boundary condition. To do this, we will use an argument knowledge as blow-up analysis.

Keywords: Trundinger-Moser inequality, blow-up analysis, PDE, Lioville Theorem, Sobolev spaces, Orlicz spaces, Green function, uniform critical growth.

Sumário

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e suave. A desigualdade de Trundiger-Moser (ver [13] e [14]) nos garante que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2} dx < +\infty \quad \text{para todo} \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

Além disso, para todo $\varepsilon \geq 0$ tem-se

$$l(\varepsilon) = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \int_\Omega e^{(4\pi - \varepsilon)u^2} dx < +\infty. \tag{2}$$

Por outro lado, para qualquer $p > 4\pi$, existe uma sequência (u_n) de funções em $H_0^1(\Omega)$ com $\|\nabla u_n\|_2 = 1$ tal que

$$\int_\Omega e^{p u_n^2} dx \to +\infty \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Em [12, Teorema I.6], P.-L. Lions obteve o seguinte melhoramento da desigualdade de Trudinger-Moser:

Lema 0.1. *Seja (u_n) uma sequência de funções em $H_0^1(\Omega)$ com $\|\nabla u_n\|_2 = 1$, tal que $u_n \rightharpoonup u_0 \not\equiv 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, então para qualquer $p < \frac{1}{1 - \|\nabla u_0\|_2^2}$*

$$\limsup_{n \to \infty} \int_\Omega e^{4\pi p u_n^2} dx < \infty. \tag{3}$$

Uma pergunta natural é se existe $\alpha > 0$ tal que

$$C_\alpha(\Omega) = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \int_\Omega e^{4\pi u^2 (1 + \alpha \|u\|_2^2)} dx, \tag{4}$$

seja finito? Nesse trabalho, iremos estudar $C_\alpha(\Omega)$ para $\alpha \in [0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ temos (2), ou seja, $C_0(\Omega) < +\infty$.

Baseado no artigo de Adimurthi-Druet [1], o nosso principal objetivo deste trabalho é provar o seguinte resultado:

Teorema 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e suave e $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet em Ω. Então,*

(1) $C_\alpha(\Omega) = +\infty$ *para* $\alpha \geq \lambda_1$.

(2) $C_\alpha(\Omega) < +\infty$ *para* $0 \leq \alpha < \lambda_1$.

A prova do item (1) do teorema acima será baseada no cálculo de **funções testes**, construídas a partir das funções de Moser e faremos isso na primeira seção do Capítulo 2. Na segunda seção do Capítulo 2, iremos provar o segundo item do Teorema 1. Isto será feito via Análise de blow-up e para isso usaremos um resultado auxiliar que será provado no Capítulo 3 deste trabalho.

Para enunciar este resultado auxiliar iremos precisar da seguinte definição:

Definição 0.1. *Seja $\varepsilon > 0$ e $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e defina $f_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)e^{bt^2}$ para algum $b > 0$. Dizemos que (f_ε) é uma sequência de funções com* ***crescimento crítico uniforme****, se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(1) $f_\varepsilon(0) = 0$, $f_\varepsilon(t) > 0$ *e* $f_\varepsilon(t) = -f_\varepsilon(-t)$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *e para todo* $t > 0$.

(2) (f_ε) *é uniformemente limitada em* $C^1_{loc}(\mathbb{R})$.

(3) $f'_\varepsilon(t) > \frac{f_\varepsilon(t)}{t}$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *e para todo* $t > 0$.

(4) *Existem* $M > 0$ *e* $\sigma \in [0, 1)$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$

$$F_\varepsilon \leq M(1 + f_\varepsilon(t)t^\sigma), \quad \forall t > 0,$$

onde

$$F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s)ds,$$

é uma primitiva de f_ε.

(5) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{h'_\varepsilon(t)}{th_\varepsilon(t)} = 0$ *uniformemente em* ε.

Exemplo 0.1. Se $h_\varepsilon(t) = \beta_\varepsilon t$ com $\beta_\varepsilon \to 4\pi$, então claramente a sequência de funções (f_ε) definida por:

$$f_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)e^{bt^2}, \quad b > 0$$

é uma sequência de funções com **crescimento crítico uniforme**.

Agora vamos enunciar o nosso resultado auxiliar que será fundamental na Análise de blow-up.

Teorema 2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e suave. Seja (f_ε) uma sequência de funções com* ***crescimento crítico uniforme****. Suponha que $0 < \alpha < \lambda_1(\Omega)$ e seja (α_ε) uma sequência tal que*

$\alpha_\varepsilon \to \alpha$. Seja também (λ_ε) uma sequência positiva de números reais tal que $\lambda_\varepsilon \to 0$. Seja (v_ε) satisfazendo:

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon - \alpha_\varepsilon v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon) & em \quad \Omega \\ v_\varepsilon > 0 & em \quad \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

e

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \frac{2\pi}{b}, \tag{6}$$

onde

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{\alpha_\varepsilon}{2}\int_\Omega v^2 dx - \lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v) dx.$$

Se x_ε é um ponto onde v_ε atinge o máximo, então a menos de subsequência, vale as seguintes propriedades:

(1) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|v_\varepsilon\|_2 = 0$ *e* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = \dfrac{4\pi}{b}$.

(2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon(x_\varepsilon) = +\infty$.

(3) *temos que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon(x_\varepsilon)(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x) - v_\varepsilon(x_\varepsilon)) = -\frac{1}{b}\ln\left(1 + \frac{b}{4}|x|^2\right) \quad em\ C^2_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

onde

$$\theta_\varepsilon^{-2} = v_\varepsilon(x_\varepsilon)\Delta v_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

(4) *existe $C > 0$ tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno*

$$v_\varepsilon(x_\varepsilon)v_\varepsilon(x) \leq C \ln\left(\frac{C}{|x_\varepsilon - x|}\right), \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_\varepsilon\}.$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar alguns resultados que iremos precisar no decorrer deste trabalho. Aqui iremos assumir conhecimentos das principais definições e resultados da Análise Funcional Linear, dos espaços $L^p(\Omega)$. No que segue, Ω sempre denotará um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^2$.

1.1 Autovalores do laplaciano

Teorema 1.1. *Existe uma base Hilbertiana (φ_n) de $L^2(\Omega)$ e uma sequência (λ_n) de números reais com $\lambda_n > 0$ e $\lambda_n \to +\infty$ tal que*

$$\varphi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \tag{1.1}$$

$$-\Delta\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \ \ em\ \Omega. \tag{1.2}$$

Para cada n, λ_n é chamado de autovalor do laplaciano $-\Delta$ com condição de Dirichlet na fronteira e φ_n é chamada de autofunção associada ao autovalor λ_n.

Demonstração. Dada uma $f \in L^2(\Omega)$ sabemos do Teorema da Representação de Riesz que existe uma única $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

Tomando $\varphi = u$ em (1.3) temos que $\|\nabla u\|_2^2 \le \|f\|_2 \|u\|_2 \le C\|f\|_2\|\nabla u\|_2$, logo

$$\|Tf\| = \|\nabla u\|_2 \le C\|f\|_2,$$

o que mostra que o operador T é limitado. Além disso, como a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, podemos ver nosso operador T como um operador de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ formado pela composição de um operador limitado com um operador compacto, logo T é compacto. Além disso,

T é autoadjunto, pois de (1.3) temos que

$$\int_\Omega (Tf)g dx = \int_\Omega g u dx = \int_\Omega \nabla Tg \nabla u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla Tg dx = \int_\Omega f(Tg) dx.$$

Portanto pelo Teorema Spectral [3, Teorema 6.11], $L^2(\Omega)$ admite uma base hilbertiana (φ_n) de autovetores de T com seus respectivos autoavalores (μ_n). Note que

$$\int_\Omega (Tf)f = \|\nabla u\|_2^2 \geq 0. \tag{1.4}$$

Se $Tf = 0$, então $u = 0$ e por (1.3), $f = 0$, logo $N(T) = \{0\}$. Tomando $f = \varphi_n$ temos que $\mu_n > 0$. Além disso, $\mu_n \to 0$ [3, Teorema 6.8]. Escrevendo $T\varphi_n = \mu_n \varphi_n$, obtemos que

$$-\Delta \varphi_n = \lambda_n \varphi_n,$$

onde $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$. Se Ω for regular então por regularidade [3, Remark 25] temos que $\varphi_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$. $\square$

Uma caracterização do primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega)$ que vamos usar bastante é a seguinte:

Proposição 1.1.

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \min\{\|\nabla u\|_2^2 \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\| = 1\}. \tag{1.5}$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.1 temos que

$$\|\nabla \varphi_k\|_2^2 = \lambda_k \|\varphi_k\|_2^2 = \lambda_k, \tag{1.6}$$

e

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{1.7}$$

para $k, l = 1, 2, \ldots, k \neq l$. Como (φ_k) é uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$, se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\|u\|_2 = 1$, podemos escrever

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \varphi_k, \tag{1.8}$$

onde $d_k = \langle u, \varphi_k \rangle_{L^2(\Omega)}$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \|u\|_2^2 = 1. \tag{1.9}$$

Além disso, de (1.6) e (1.7) temos que $\left\{\frac{\varphi_k}{\lambda_k^{1/2}}\right\}$ também será uma base de $H_0^1(\Omega)$. Consequentemente

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{\varphi_k}{\lambda_k^{1/2}},$$

onde $\mu_k = \left\langle u, \frac{\varphi_k}{\lambda_k^{1/2}} \right\rangle_{H_0^1(\Omega)}$, de (1.8) temos que $\mu_k = d_k \lambda_k^{1/2}$, e portanto a série (1.8) também converge em $H_0^1(\Omega)$, concluindo de (1.6) e de (1.8) que

$$\|\nabla u\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1 \quad \text{por (1.9).}$$

Como a igualdade vale para $u = \varphi_k$ então obtemos a equação (1.5). $\square$

1.2 Forma Alternativa do Lema de Lions

Note que para usar o Lema de Lions 0.1 enunciado na introdução deste trabalho, precisamos ter $p < \frac{1}{1-\|\nabla u_0\|_2^2}$, e para isso, $\|\nabla u_0\|_2$ precisa ser diferente de 1. Mas o que acontece se $\|\nabla u_0\|_2 = 1$? Para responder a essa pergunta, vamos primeiramente enunciar e demonstrar a seguinte recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 1.2. *Seja (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ fortemente convergente. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $h \in H_0^1(\Omega)$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em Ω, para todo $k \geq 1$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, em particular (u_n) é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Vamos então escolher n_1 tal que $\|\nabla u_m - \nabla u_n\|_2 \leq \frac{1}{2}$, $\forall m, n \geq n_1$, depois escolheremos $n_2 \geq n_1$, tal que $\|\nabla u_m - \nabla u_n\|_2 \leq \frac{1}{2^2}$, $\forall m, n \geq n_2$. Consequentemente obtemos uma subsequência (u_{n_k}) que denotaremos por (u_k) tal que

$$\|\nabla u_{k+1} - \nabla u_k\|_2 \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1. \tag{1.10}$$

Seja

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k|,$$

então segue que $g_n \in H_0^1(\Omega)$ e que

$$\|g_n\|_2 \leq C\|\nabla g_n\|_2 \leq C.$$

Logo pelo Teorema da Convergência monótona, $g_n \to g$ quase sempre em Ω para alguma $g \in$

$L^2(\Omega)$, além disso pelo Teorema da Convergência dominada, temos que $\|g_n - g\|_2 \to 0$. Por essa convergência e por $|\nabla g_n|$ ser limitado em $L^2(\Omega)$, concluímos que $g \in H^1(\Omega)$ [[3], pg: 264, Observação 4] como $g_n \in H_0^1(\Omega)$ para todo n, temos que $g \in H_0^1(\Omega)$. Agora para $l > k \geq 2$, temos que

$$|u_l(x) - u_k(x)| \leq |u_l(x) - u_{l-1}(x)| + \ldots + |u_{k+1}(x) - u_k x| \leq g_{l-1}(x) - g_k(x) \leq g_{l-1}(x),$$

fazendo $l \to \infty$, obtemos para qualquer $k \geq 2$ que

$$|u(x) - u_k(x)| \leq g(x),$$

quase sempre em Ω. Portanto

$$|u_k(x)| \leq g(x) + |u(x)| \in H_0^1(\Omega),$$

tomando $h(x) = g(x) + |u(x)|$ concluímos o desejado. □

Como consequência, temos a seguinte forma para o Lema de Lions:

Corolário 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e (u_n) uma sequência de funções em $H_0^1(\Omega)$ com $\|\nabla u_n\|_2 = 1$, tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e $\|\nabla u_0\|_2 = 1$. Então para qualquer $p < \infty$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega e^{4\pi p u_n^2} dx < \infty. \tag{1.11}$$

Demonstração. Como $\|\nabla u_n\|_2 = 1 = \|\nabla u_0\|_2$, temos que u_n converge para u_0 em norma e $u_n \rightharpoonup u_0$ fraco em $H_0^1(\Omega)$, então $u_n \to u_0$ forte em $H_0^1(\Omega)$. Pela Proposição 1.2, existe $h \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n(x) \leq h(x)$ quase sempre em Ω. Portanto, pela desigualdade de Trudinger-Moser (1) temos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega e^{4\pi p u_n^2} dx \leq \int_\Omega e^{4\pi p h^2} < \infty,$$

como queríamos demonstrar. □

1.3 Um Resultado de Convergência em $L^1(\Omega)$

Um outro resultado de convergência que será útil no decorre deste trabalho é o seguinte lema devido a Djairo-Ruf-Miyagaki [6].

Lema 1.1. *Seja $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ uma sequência de funções tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Se $f(x, u_n(x))$*

e $f(x,u(x))$ são funções em $L^1(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega |f(x,u_n(x))u_n(x)| \leq C. \tag{1.12}$$

Então, a menos de subsequência

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Demonstração. É suficiente mostrar que $\int_\Omega |f(x,u_n(x))|dx \to \int_\Omega |f(x,u(x))|dx$. Como $f(x,u(x)) \in L^1(\Omega)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_A |f(x,u(x))|dx \leq \varepsilon \quad \text{se } |A| \leq \delta, \tag{1.13}$$

para todo subconjunto mensurável A de Ω, onde $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A. Além disso, como $u \in L^1(\Omega)$, podemos escolher $M_1 > 0$ tal que

$$|\{x \in \Omega : |u(x)| \geq M_1\} \leq \delta. \tag{1.14}$$

Tomando $M = \max\{M_1, C/\varepsilon\}$, podemos escrever

$$\left| \int_\Omega |f(x,u_n(x))|dx - \int_\Omega |f(x,u(x))| \right| = I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n}, \tag{1.15}$$

onde

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq M\}} |f(x,u_n(x))|dx, \\ I_{2,n} &= \int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<M\}} f|(x,u_n(x))|dx - \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|<M\}} |f(x,u(x))|dx, \\ I_{3,n} &= \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\geq M\}} |f(x,u(x))|dx. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar $I_{1,n}$, $I_{2,n}$ e $I_{3,n}$. Por (1.12), temos

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq M\}} |f(x,u_n(x))|dx \\ &= \int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq M\}} \frac{|u_n||f(x,u_n(x))|}{|u_n|}dx \leq \frac{C}{M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, por (1.13) e (1.14), temos

$$I_{3,n} = \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\geq M\}} |f(x,u(x))|dx \leq \varepsilon.$$

Agora vamos mostrar que a menos de subsequência, $I_{2,n} \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, desde que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, temos que a menos de subsequência $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω, portanto

$$g_n(x) = [f(x, u_n(x))\mathcal{X}_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<M\}}] - [f(x, u(x))\mathcal{X}_{\{x\in\Omega:|u(x)|<M\}}] \to 0,$$

quase sempre em Ω. Além disso $|g_n(x)| \leq |f(x, u(x))|$ se $|u_n(x)| \geq M$ e $|g_n(x)| \leq C_1 + |f(x, u(x))|$, se $|u_n(x)| < M$, onde $C_1 = \sup\{|f(x,t)| : x \in \Omega,\ |t| < M\}$. Portanto pelo Teorema de convergência dominada de Lebesgue, obtemos que $I_{2,n} \to 0$, concluindo que a menos de subsequência

$$I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) \to 0,$$

o que completa a prova do lema. □

1.4 Imersões de Sobolev, regularidade elíptica e função de Green

Nessa seção, vamos enunciar algumas imersões de Sobolev, Teoremas de regularidade e falar um pouco da função de Green que iremos precisar no Capítulo 3 deste trabalho. Não iremos demonstrá-las aqui pois suas demonstrações são técnicas e estão feitas nas referências citadas.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Morrey)**.** *Se $N < p \leq +\infty$, então existe uma constante $C = C(N,p)$, tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\eta}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, onde $\eta = 1 - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Veja Teorema 4, páginas 266-268 em [8]. □

Outro resultado que iremos usar com muita frequência é a seguinte generalização da desigualdade de Morrey.

Teorema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto e limitado com fronteira C^1. Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $k > \frac{N}{p}$, então $u \in C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\eta}(\overline{\Omega})$, onde*

$$\eta = \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p} & \text{se} \quad \dfrac{N}{p} \quad \text{não é um inteiro} \\ \text{qualquer inteiro positivo,} & \text{se} \quad \dfrac{N}{p} \quad \text{é um inteiro.} \end{cases}$$

Além disso, temos a seguinte estimativa

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\eta}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(k, p, N, \eta, \Omega)$ *e* $\left[\frac{N}{p}\right]$ *é o maior inteiro menor do que ou igual a* $\frac{N}{p}$.

Demonstração. Veja Teorema 6, páginas 270-271 em [8]. $\square$

Também iremos precisar da desigualdade Hanarck,

Teorema 1.4 (Desigualdade de Harnack)**.** *Se* $u \in C^2(\Omega)$ *é harmônica, então para todo* $V \subset\subset \Omega$, *existe uma constante* C *tal que*

$$\sup_V u \leq C \inf_V u,$$

a constante C *depende de* c *e de* V.

Demonstração. Veja Teorema 5, página 334 em [8]. $\square$

Os dois principais Teoremas de regularidade que iremos usar são os seguintes:

Teorema 1.5 (Teorema de Schauder)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado de classe* $C^{k+2,\eta}$, $\eta \in (0, 1)$ *e* $f \in C^{k,\eta}(\overline{\Omega})$. *Então existe uma única* $u \in C^{k+2,\eta}(\overline{\Omega})$, *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \quad \Omega \\ \quad u = 0 & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, temos a estimativa

$$\|u\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \right).$$

Demonstração. Veja Teorema 11.2, página 46 em [11]. $\square$

Teorema 1.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado de classe* $C^{1,1}$, $f \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < +\infty$. *Se* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *é tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & em \quad \Omega \\ \quad u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então existe uma constante C *independente de* f *e de* u *tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja Teorema 11.3, página 46 em [11]. $\square$

Para a análise de blow-up que faremos no Capítulo 3, iremos precisar da função de Green para o operador $-\Delta - \alpha_\varepsilon$ onde $\alpha_\varepsilon > 0$ é uma constante.

Teorema 1.7 (Função de Green)**.** *Existe uma única função real positiva* G_{α_ε} *definida em* $\Omega \times \Omega \setminus \{(x,x),\ x \in \Omega\}$ *que satisfaz para* $x \in \Omega$ *no sentido fraco:*

$$\begin{cases} -\Delta_y G_{\alpha_\varepsilon}(x,y) - \alpha_\varepsilon G_{\alpha_\varepsilon}(x,y) = \delta_x & \textit{em} \quad \Omega \\ G_{\alpha_\varepsilon}(x,y) = 0 & \textit{para} \quad y \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde δ_x *representa a massa de Dirac em* x*. Além disso,* G_{α_ε} *pode ser escrita na forma*

$$G_{\alpha_\varepsilon}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right) + \beta_\varepsilon(x,y),$$

para alguma $\beta_\varepsilon \in C^1(\Omega \times \Omega)$*.*

Demonstração. Veja Seção 2.2.2 em [8]. □

A função β_ε é chamda de parte regular da função de Green de $-\Delta - \alpha_\varepsilon$.

Teorema 1.8 (Representação)**.** *Se* u *satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u - \alpha_\varepsilon u = f & \textit{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

então u *tem a seguinte representação:*

$$u(y) = \lambda_\varepsilon \int_\Omega G_\varepsilon(x) f(u(x)) dx, \tag{1.16}$$

onde $G_\varepsilon(x) = G_{\alpha_\varepsilon}(y,x)$*.*

Demonstração. Veja Seção 2.2.4 em [8]. □

1.5 Classificação de soluções para o problema $-\Delta u = e^u$

Na nossa análise de blow-up no Capítulo 3, iremos precisar de um teorema de classificação para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = e^u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^u dx < +\infty. \end{cases} \tag{1.17}$$

Se $\lambda > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$ então

$$u_{\lambda,x_0}(x) = \ln\left(\frac{32\lambda^2}{(4+\lambda^2|x-x_0|^2)^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{1.18}$$

é uma família de soluções para o problema (1.17). Usando o método dos Moving Planes, em 1991, Chen, W e Li, C. ([4], Teorema 1) provaram o seguinte teorema:

Teorema 1.9. *Toda solução de* (1.17) *é radialmente simétrica e da forma de* u_{λ,x_0} *para algum* $x_0 \in \mathbb{R}^2$ *e* $\lambda > 0$.

Como consequência temos o seguinte resultado que será usado na análise de blow-up.

Corolário 1.2. *Seja* $c > 0$ *e* $w_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *uma solução não positiva do problema*

$$\begin{cases} -\Delta w_0 = ce^{w_0} \quad em \quad \mathbb{R}^2 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{w_0} dx < +\infty \\ w_0(0) = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Então w_0 *é da forma*

$$w_0(x) = -2\ln\left(1 + \frac{c}{8}|x|^2\right) \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração. Como $c > 0$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $c = e^a$. Assim, o problema (1.19) é equivalente a:

$$\begin{cases} -\Delta(w_0 + a) = e^{w_0+a} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{w_0} dx < +\infty \\ w_0(0) = 0. \end{cases}$$

Fazendo $h = w_0 + a$, solucionar (1.19) é equivalente a solucionar

$$\begin{cases} -\Delta h = e^h \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^h dx < +\infty \\ h(0) = a. \end{cases} \tag{1.20}$$

Pelo Teorema 1.9, existem $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda > 0$ tais que

$$h(x) = \ln\left(\frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2|x - x_0|^2)^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Note que

$$\ln\left(\frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2|x - x_0|^2)^2}\right)$$

é uma função radial e estritamente decrescente e atinge o seu único máximo em x_0. Por outro lado, desde que $w_0(x) \leq 0$ e $h(x) = w_0(x) + a$, temos que h também atinge seu máximo em 0. Logo, $x_0 = 0$. Portanto,

$$h(x) = \ln\left(\frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2|x|^2)^2}\right). \tag{1.21}$$

Além disso,

$$a = h(0) = \ln\left(\frac{32\lambda^2}{4^2}\right) = \ln(2\lambda^2),$$

o que implica que

$$\lambda^2 = \frac{e^a}{2} = \frac{c}{2}. \tag{1.22}$$

Portanto, de (1.22) juntamente com (1.21) obtemos que

$$\begin{aligned} w(x) = \ln\left(\frac{32\lambda^2}{(4+\lambda^2|x|^2)^2}\right) &= \ln\left(\frac{16c}{(4+\frac{c}{2}|x|^2)^2}\right) \\ &= \ln(c) + \ln\left(\frac{4}{4+\frac{c}{2}|x|^2}\right)^2 \\ &= a - 2\ln\left(\frac{(4+\frac{c}{2}|x|^2)}{4}\right) \\ &= a - 2\ln\left(1+\frac{c}{8}|x|^2\right). \end{aligned}$$

Como $h = w_0 + a$, concluímos que

$$w_0(x) = -2\ln\left(1+\frac{c}{8}|x|^2\right),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Capítulo 2

Desigualdade do tipo Trudinger-Moser

Neste capítulo, vamos provar o Teorema 1 enunciado na introdução. Mais precisamente, seja $\alpha > 0$ e definamos

$$C_\alpha(\Omega) = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \int_\Omega e^{4\pi u^2 (1+\alpha\|u\|_2^2)} dx. \tag{2.1}$$

O nosso principal objetivo deste capítulo é provar o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e suave e $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet em Ω. Então:*

(1) $C_\alpha(\Omega) = +\infty$ *para* $\alpha \geq \lambda_1$;

(2) $C_\alpha(\Omega) < +\infty$ *para* $0 \leq \alpha < \lambda_1$.

Vamos provar o item (1) e o item (2) nas Seções 2.1 e 2.2, respectivamente.

2.1 Prova do Teorema 2.1 (item (1)):

Nesta seção iremos apresentar a prova do item (1) do Teorema 2.1. Note que pelo teorema da mudança de variáveis, temos

$$\sup_{\substack{u \in H_0^1(\lambda\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \int_{\lambda\Omega} e^{4\pi u^2 \left(1+\alpha\|u\|_{L^2(\lambda\Omega)}^2\right)} dx = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \lambda^2 \int_\Omega e^{4\pi u^2 (1+\alpha\lambda^2\|u\|_2^2)} dx,$$

logo

$$C_\alpha(\lambda\Omega) = \lambda^2 C_{\alpha\lambda^2}(\Omega).$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\lambda^2 \lambda_1(\lambda\Omega) = \lambda_1(\Omega)$$

para todo $\lambda > 0$, assim podemos assumir sem perda de generalidade que $0 \in \Omega$ e que $B_1(0) \subset \Omega$.

Consideremos as funções de Moser u_ε (ver [13]) definidas por:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}\,, & \text{se } 0 \leq |x| \leq \varepsilon\,; \\ \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln(\frac{1}{|x|})\,, & \text{se } \varepsilon \leq |x| \leq 1\,; \\ 0\,, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Lema 2.1. *Para todo $\varepsilon > 0$, temos que $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = 1$.*

Demonstração. Com efeito, pela definição da u_ε, temos

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}} \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq |x| \leq \varepsilon\,; \\ \frac{x_i}{|x|^2}\,, & \text{se } \varepsilon \leq |x| \leq 1\,; \\ 0\,, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Assim, para $\varepsilon \leq |x| \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}\right]^2 \left[\left(\frac{x_1}{|x|^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{|x|^2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right))}\left(\frac{x_1^2}{|x|^4} + \frac{x_2^2}{|x|^4}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right))}\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right))} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{1}{|x|^2} dx. \tag{2.2}$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{1}{|x|^2} dx = 2\pi \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\theta} d\theta = 2\pi\left[\ln(1) - \ln(\varepsilon)\right] = 2\pi \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Então, substituindo em (2.2), temos que $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = 1$, como queríamos demonstrar. $\square$

Seja φ_1 uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(\Omega)$ dada no Teorema 1.1. Sabemos que $\|\varphi_1\|_2 = 1$ e $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$. Agora defina

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon + t_\varepsilon \varphi_1,$$

onde $t_\varepsilon > 0$, satisfaz

$$\beta_\varepsilon = t_\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \to \infty \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0$$

e

$$t_\varepsilon^2 \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Por exemplo, podemos tomar $t_\varepsilon = \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$.

Lema 2.2. *Temos as seguintes estimativas*

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = 1 + \lambda_1 t_\varepsilon^2 + 2\lambda_1 t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1} \int_\Omega \varphi_1 G dx + o(t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}), \tag{2.3}$$

$$\|v_\varepsilon\|_2^2 = t_\varepsilon^2 + 2t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1} \int_\Omega \varphi_1 G dx + o(t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon), \tag{2.4}$$

onde

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), & se\ |x| \leq 1 \\ 0, & se\ |x| > 1. \end{cases}$$

Demonstração. Notando que $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 = 1$ e $\|\nabla \varphi_1\|_2^2 = \lambda_1 \|\varphi_1\|_2^2 = \lambda_1$ temos

$$\begin{aligned} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 &= \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 + t_\varepsilon^2 \|\nabla \varphi_1\|_2^2 + 2t_\varepsilon \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi_1 dx \\ &= 1 + \lambda_1 t_\varepsilon^2 + \lambda_1 2t_\varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon \varphi_1 dx. \end{aligned}$$

Para provar (2.3), é suficiente provar que

$$2t_\varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon \varphi_1 dx = 2t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1} \int_\Omega \varphi_1 G dx + o(t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}). \tag{2.5}$$

Para isto note que

$$
\begin{aligned}
2t_\varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon \varphi_1 dx &= 2t_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \varphi_1 dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon\le|x|\le 1} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx \right) \\
&= 2t_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \varphi_1 dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon\le|x|\le 1} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx \right. \\
&\left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx \right) \\
&= 2t_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx + \\
&+ 2t_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \varphi_1 dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx \right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
2t_\varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon \varphi_1 dx &= 2t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1} \int_\Omega G \varphi_1 dx \\
&+ 2t_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \varphi_1 dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx \right).
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Afirmamos que

$$
A_\varepsilon = t_\varepsilon \left(\int_{0\le|x|\le\varepsilon} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \varphi_1 dx - \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx \right) = o(t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}).
$$

De fato, note que

$$
A_\varepsilon = t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1} \left(\int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}}{t_\varepsilon \beta_\varepsilon^{-1}} \varphi_1 dx - \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \frac{\ln(\frac{1}{|x|})}{t_\varepsilon \beta_\varepsilon^{-1}} \varphi_1 dx \right). \tag{2.7}
$$

Lembrando que $\beta_\varepsilon = t_\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$ e temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}}{t_\varepsilon \beta_\varepsilon^{-1}} \varphi_1 dx &= \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \frac{t_\varepsilon}{t_\varepsilon} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \varphi_1 dx \\
&= \int_{0\le|x|\le\varepsilon} \left| \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right| \varphi_1 dx.
\end{aligned}
$$

Mas $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e portanto $\|\varphi_1\|_\infty < \infty$. Logo

$$\int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} \frac{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}}{t_\varepsilon \beta_\varepsilon^{-1}} \varphi_1 dx| \leq \|\varphi_1\|_\infty \int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} \left|\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right| dx = \|\varphi_1\|_\infty \left|\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right| \pi\varepsilon^2 \to 0, \tag{2.8}$$

quando $\varepsilon \to 0$, já que pela regra de L'hospital:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{-\ln(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{2}{\varepsilon^3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^2 = 0.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}} \frac{\ln(\frac{1}{|x|})}{t_\varepsilon \beta_\varepsilon^{-1}} \varphi_1 dx &= \int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(\ln\frac{1}{\varepsilon})}} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx \\ &= \int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx. \end{aligned}$$

Mas

$$\varphi_1 \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \mathcal{X}_{B_\varepsilon(0)} \leq \varphi_1 \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \in \mathcal{L}^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 \mathcal{X}_{B_\varepsilon(0)} dx = \int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \varphi_1 \mathcal{X}_{B_\varepsilon(0)} dx = 0.$$

Segue da igualdade acima, de (2.8) e de (2.7) que

$$A_\varepsilon = o(t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}), \tag{2.9}$$

como havíamos afirmado.

Agora vamos provar (2.4). Para isto, usando (2.5) temos

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_2^2 &= \|u_\varepsilon\|_2^2 + t_\varepsilon^2 \|\varphi_1\|_2^2 + 2t_\varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon \varphi_1 dx \\ &= t_\varepsilon^2 + 2\beta_\varepsilon^{-1} t_\varepsilon^2 \int_\Omega \varphi_1 G dx + o(t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}) + \|u_\varepsilon\|_2^2. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\|u_\varepsilon\|_2^2 = o(t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1})$. Com efeito,

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}} dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{1}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \frac{\ln^2(\frac{1}{|x|})}{t_\varepsilon^2 \beta_\varepsilon^{-1}} dx \right). \tag{2.10}$$

Vamos analisar a primeira parte da soma em (2.10). Para isto, note que

$$\int_{0\leq|x|\leq\varepsilon}\frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}}dx=\int_{0\leq|x|\leq\varepsilon}\frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{t_\varepsilon^2}t_\varepsilon\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}=\int_{0\leq|x|\leq\varepsilon}\frac{\ln^2(\frac{1}{\varepsilon})}{t_\varepsilon\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}}dx=\frac{\ln^2(\frac{1}{\varepsilon})}{\beta_\varepsilon}\pi\varepsilon^2. \tag{2.11}$$

Usando a regra de L'hospital temos

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{-\ln(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon=0.$$

Desde que $\beta_\varepsilon\to\infty$, obtemos

$$\frac{\ln^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\beta_\varepsilon}\pi\varepsilon^2\to0. \tag{2.12}$$

Agora vamos analisar a segunda parte da soma em (2.10). Para isto, note que

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{1}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}\frac{\ln^2(\frac{1}{|x|})}{t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}}dx &= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{1}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}\ln^2\left(\frac{1}{|x|}\right)\frac{t_\varepsilon\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}}{t_\varepsilon^2}dx\\ &= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{\ln^2(\frac{1}{|x|})}{t_\varepsilon\sqrt{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}}dx=\frac{1}{\beta_\varepsilon}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\ln^2\left(\frac{1}{|x|}\right)dx\to0,\end{aligned}$$

pois $\beta_\varepsilon\to\infty$ e $\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\ln^2\left(\frac{1}{|x|}\right)\leq C$. A estimativa acima, (2.11) e (2.12) implicam que

$$\|u_\varepsilon\|_2^2=o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}), \tag{2.13}$$

o que completa a prova do lema. □

Agora consideremos o funcional

$$J(v_\varepsilon):=\int_\Omega e^{4\pi\frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\left(1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\right)}dx.$$

Lema 2.3. *$J(v_\varepsilon)\to\infty$ quando $\varepsilon\to0$.*

Demonstração. Usando as estimativa obtidas no Lema 2.2 temos

$$1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}=1+\alpha\left(\frac{t_\varepsilon^2+2\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1(t_\varepsilon^2+2\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx)+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\right)=1+\alpha\left(\frac{\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\right), \tag{2.14}$$

onde,

$$t_\varepsilon^2+2\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx=\mathcal{X}_\varepsilon,$$

Afirmamos que

$$1+\alpha\left(\frac{\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\right)=1+\alpha t_\varepsilon^2+2\alpha\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4). \tag{2.15}$$

De fato,

$$\begin{aligned}1+\alpha\left(\frac{\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\right)&=1+\alpha\left(\frac{\mathcal{X}_\varepsilon(1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}))+\mathcal{X}_\varepsilon-\mathcal{X}_\varepsilon(1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}))}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})\right)\\&=1+\alpha\mathcal{X}_\varepsilon+\alpha\left(\frac{-\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon^2-\mathcal{X}_\varepsilon o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\right).\end{aligned}$$

Segue da definição de $\mathcal{X}_\varepsilon$ que

$$\frac{1}{1+\lambda_1\left(t_\varepsilon^2+2\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx\right)+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\le 1\quad\text{quando}\quad\varepsilon\to0.$$

Além disso,

$$\mathcal{X}_\varepsilon^2=t_\varepsilon^4+4t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx+4\beta_\varepsilon^{-2}t_\varepsilon^4\left(\int_\Omega\varphi_1Gdx\right)^2.$$

Portanto,

$$\frac{\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon^2}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})} = O(t_\varepsilon^4), \tag{2.16}$$

$$\frac{\mathcal{X}_\varepsilon o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})} = o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}), \tag{2.17}$$

$$\frac{o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})} = o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}) \tag{2.18}$$

$$\frac{\mathcal{X}_\varepsilon}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})} = O(t_\varepsilon^4). \tag{2.19}$$

De (2.16) e (2.17) concluímos que

$$\begin{aligned}1+\alpha\left(\frac{\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\right)&=1+\alpha\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4)\\&=1+\alpha t_\varepsilon^2+2\alpha\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4),\end{aligned}$$

o que prova (2.15). Isto juntamente com (2.14) implica que

$$1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}=1+\alpha t_\varepsilon^2+2\alpha\beta_\varepsilon^{-1}t_\varepsilon^2\int_\Omega\varphi_1Gdx+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4). \tag{2.20}$$

De (2.3), (2.18) e (2.19) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\left(1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\right) &= \frac{1+\alpha\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4)}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})} \\
&= \frac{1+\alpha\mathcal{X}_\varepsilon+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon-\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4)}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})} \\
&= 1+\frac{(\alpha-\lambda_1)\mathcal{X}_\varepsilon}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\left(1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\right) &= 1+\frac{(\alpha-\lambda_1)\mathcal{X}_\varepsilon(1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}))}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})} \\
&\quad +\frac{\mathcal{X}_\varepsilon[(\alpha-\lambda_1)-(\alpha-\lambda_1)(1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}))]}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}+O(t_\varepsilon^4) \\
&= 1+(\alpha-\lambda_1)\mathcal{X}_\varepsilon+\mathcal{X}_\varepsilon\left(\frac{(\alpha-\lambda_1)(-\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon-o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1}))}{1+\lambda_1\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}\right)+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Usando (2.16) e (2.17), concluímos que

$$\frac{1}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\left(1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\right)=1+(\alpha-\lambda_1)\mathcal{X}_\varepsilon+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4).$$

Portanto, para $\alpha\geq\lambda_1$, temos que

$$\frac{1}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\left(1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\right)\geq 1+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+O(t_\varepsilon^4).$$

Multiplicando esta expressão por $4\pi v_\varepsilon^2$ em $B(0,\varepsilon)$ temos

$$\begin{aligned}
4\pi\frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\left(1+\alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\right) &\geq \left(2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+4\sqrt{2\pi}\beta_\varepsilon\varphi_1\right)(1+o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^2)+O(t_\varepsilon^4)) \\
&= 2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+4\sqrt{2\pi}\beta_\varepsilon\varphi_1+2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)O(t_\varepsilon^4) \\
&\quad +4\sqrt{2\pi}\beta_\varepsilon\varphi_1 o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})+4\sqrt{2\pi}\beta_\varepsilon\varphi_1 O(t_\varepsilon^4) \\
&= 2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\beta_\varepsilon(4\sqrt{2\pi}\varphi_1+o(1)).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Para justificar a última igualdade acima, observe que $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\beta_\varepsilon^2}{t_\varepsilon^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{\beta_\varepsilon} &= \frac{o(t_\varepsilon^2)}{\beta_\varepsilon^2}\frac{\beta_\varepsilon^2}{t_\varepsilon^2} = o(1) \to 0 \\
\frac{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) O(t_\varepsilon^4)}{\beta_\varepsilon} &= \frac{1}{\beta_\varepsilon}\frac{\beta_\varepsilon^2}{t_\varepsilon^2} O(t_\varepsilon^4) = O(t_\varepsilon^2)\beta_\varepsilon = O(1)t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon \quad = O(1)(t_\varepsilon\beta_\varepsilon)t_\varepsilon \to 0 \\
\frac{4\sqrt{2\pi}\beta_\varepsilon\varphi_1 o(t_\varepsilon^2\beta_\varepsilon^{-1})}{\beta_\varepsilon} &= o(1)\frac{t_\varepsilon^2}{\beta_\varepsilon} \to 0 \\
\frac{4\sqrt{2\pi}\beta_\varepsilon\varphi_1 O(t_\varepsilon^4)}{\beta_\varepsilon} &= t_\varepsilon^4 O(1) \to 0.
\end{aligned}$$

Desde que $\varphi_1 > 0$ no interior de Ω e $\beta_\varepsilon \to +\infty$ por (2.21) concluímos que

$$4\pi\frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\left(1 + \alpha\frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\right) \to +\infty,$$

o que completa a prova do Lema. □

Prova do Teorema 2.1 (item (1)):

Demonstração. Definindo

$$w_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2}$$

temos $\|\nabla w_\varepsilon\|_2 = 1$. Assim (1) em Teorema 2.1 segue diretamente do Lema 2.3. □

2.2 Prova do Teorema 2.1 (item (2)):

Agora vamos provar o item (2) do Teorema 2.1 com o auxílio do Teorema 2. A prova do Teorema 2 está no próximo capítulo. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio suave e seja $0 \leq \alpha < \lambda_1$. Provaremos que $C_\alpha(\Omega) < \infty$, onde $C_\alpha(\Omega)$ foi definido em (2.1). Seja $\varepsilon > 0$ e defina

$$C_\varepsilon = \sup_{\substack{u\in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 = 1}} \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)}dx. \tag{2.22}$$

Para provar este item, vamos provar primeiramente alguns lemas técnicos.

Lema 2.4. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = C_\alpha(\Omega)$.

Demonstração. De fato, para $\varepsilon > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|\nabla u\|_2 = 1$, temos pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)}dx &\leq \left(\int_\Omega \left|\left(e^{4\pi(1-\varepsilon)u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right| dx\right)^{1-\varepsilon} \left(\int_\Omega (1)^{\frac{1}{\varepsilon}} dx\right)^\varepsilon \\
&\leq C_\alpha(\Omega)^{1-\varepsilon}|\Omega|^\varepsilon,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon \leq C_\alpha(\Omega).$$

Por outro lado, para qualquer $u \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que $\|\nabla u\|_2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{4\pi u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)} dx &= \int_\Omega e^{4\pi u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)(1+\varepsilon-\varepsilon)} dx \\ &\leq \sup_\Omega e^{4\pi\varepsilon u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)} \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)} dx.\end{aligned}$$

Desde que

$$\sup_\Omega e^{4\pi\varepsilon u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)} \to 1$$

temos

$$C_\alpha(\Omega) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon,$$

o que prova o Lema. □

Proposição 2.1. *Para cada $\varepsilon > 0$, C_ε é atingido, ou seja, existe $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ tal que*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2 = 1 \quad e \quad \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u_\varepsilon^2(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)} dx = C_\varepsilon. \tag{2.23}$$

Demonstração. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ e (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|\nabla u_n\|_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u_n^2(1+\alpha\|u_n\|_2^2)} dx = C_\varepsilon.$$

Como (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, temos a menos de subsequência que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_\varepsilon && \text{fracamente em } H_0^1(\Omega) \\ u_n &\to u_\varepsilon && \text{forte em } \quad L^2(\Omega) \\ u_n(x) &\to u_\varepsilon(x) && \text{quase sempre em } \Omega. \end{aligned}$$

Logo

$$f_n = e^{4\pi(1-\varepsilon)u_n^2(1+\alpha\|u_n\|_2^2)} \to e^{4\pi(1-\varepsilon)u_\varepsilon^2(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)} = f_\varepsilon \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Afirmamos que $f_n \to f_\varepsilon$ forte em $L^1(\Omega)$. De fato, se $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 < 1$, iremos mostrar que $(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_n\|_2^2) < \frac{1}{1+\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}$, para n suficientemente grande. Com efeito, desde que $\alpha < \lambda_1(\Omega)$, temos pela Proposição 1.1 que

$$(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2) < (1-\varepsilon)(1+\lambda_1\|u_\varepsilon\|_2^2) \leq (1-\varepsilon)(1+\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2) < \frac{1}{1-\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}, \tag{2.24}$$

já que $(1-\varepsilon)(1+a)(1-a) = (1-\varepsilon)(1-a^2) < 1$. Agora como $(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_n\|_2^2) \to (1-\varepsilon)(1+$

$\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)$, temos que para n suficientemente grande

$$(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_n\|_2^2) < \frac{1}{1-\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}.$$

Tomando q suficientemente pequeno de modo que $q(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_n\|_2^2) < \frac{1}{1-\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}$ temos pelo Lema de Lions (0.1) que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega e^{4\pi p(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_n\|_2^2)u_n^2} dx < +\infty, \quad \forall 1 \le p \le q. \tag{2.25}$$

Se $\|\nabla u_\varepsilon\| = 1$ conseguimos a limitação acima pelo Corolário 1.1 e portanto pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega f_\varepsilon dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n dx < +\infty,$$

logo $f_\varepsilon \in L^1(\Omega)$. Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$ então $u \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \le p < \infty$, portanto, por (2.25) e pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega |f_n u_n| dx < \|f_n\|_q \|u_n\|_{q^*} < C \quad \text{onde} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1.$$

Concluindo pelo Lemma 1.1 que $f_n \to f_\varepsilon$ em $L^1(\Omega)$, e portanto

$$\int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u_\varepsilon^2(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)} dx = C_\varepsilon = \sup_{\substack{u\in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2=1}} \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u^2(1+\alpha\|u\|_2^2)} dx. \tag{2.26}$$

Notemos que podemos tomar $u_\varepsilon \ge 0$, pois a equação (2.26) vale também para $|u_\varepsilon|$. Além disso, $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 = 1$. De fato, pela convergência fraca temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2 \le \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_2 = 1.$$

Se $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 < 1$, teríamos

$$\int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u_\varepsilon^2(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)} dx < \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)\frac{u_\varepsilon^2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}\left(1+\alpha\frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}\right)} dx,$$

o que contradiz (2.26) e isto completa a prova. □

Observação 2.1. Note que a sequência $u_n \to u_\varepsilon$ na proposição anterior, de fato, converge forte em $H_0^1(\Omega)$.

Pela Proposição 2.1 os funcionais

$$J_\varepsilon(u) = \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} dx, \tag{2.27}$$

restritos ao vínculo

$$G = \{u \in H_0^1(\Omega); F(u) = \|\nabla u\|_2^2 - 1 = 0\},$$

atingem máximo em $u_\varepsilon \neq 0$. Logo $F'(u_\varepsilon) \neq 0$ e, portanto, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existem escalares k_ε tais que

$$J'_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot v = k_\varepsilon F'(u_\varepsilon) \cdot v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Note que

$$\begin{aligned} J'_\varepsilon(u) \cdot v &= \int_\Omega 4\pi(1-\varepsilon) e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} \left(2(1+\alpha\|u\|_2^2)uv + u^2 2\alpha \left(\int_\Omega uvdx\right)\right) dx. \\ &= 8\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u\|_2^2) \int_\Omega uve^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} dx + \\ &+ \ 8\pi(1-\varepsilon)\alpha \int_\Omega u^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} dx \int_\Omega uvdx, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} 2k_\varepsilon \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v dx &= 8\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2) \int_\Omega u_\varepsilon v e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx \\ &+ 8\pi(1-\varepsilon)\alpha \int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx \int_\Omega u_\varepsilon v dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Fazendo $v = u_\varepsilon$ e usando que $\|\nabla u\|_2^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} k_\varepsilon = \frac{k_\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \ &= \ 4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2) \int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx + \\ &+ \ 4\pi(1-\varepsilon)\alpha \int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx \cdot \|u_\varepsilon\|_2^2 \\ &= \ 4\pi(1-\varepsilon)\left[(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2) \int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx + \right. \\ &+ \ \left. \alpha\|u_\varepsilon\|_2^2 \int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx \right] \\ &= \ 4\pi(1-\varepsilon)(1+2\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2) \int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)} u_\varepsilon^2 dx. \end{aligned}$$

Isolando k_ε em (2.28), obtemos no sentido fraco que

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon = &\frac{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)}{4\pi(1-\varepsilon)(1+2\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)\int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx} e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} u_\varepsilon \\ &+ \frac{\alpha}{1+2\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2} u_\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto para $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \beta_\varepsilon \lambda_\varepsilon u_\varepsilon e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} + \alpha_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{em } \Omega \\ u_\varepsilon > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \|\nabla u_\varepsilon\|_2 = 1, \quad \displaystyle\int_\Omega e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} dx = C_\varepsilon \\ \beta_\varepsilon = 4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2) \\ \mu_\varepsilon = \displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} dx \\ \lambda_\varepsilon = \dfrac{1}{4\pi(1-\varepsilon)(1+2\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)\mu_\varepsilon} \\ \alpha_\varepsilon = \dfrac{\alpha}{1+2\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2} < \alpha < \lambda_1(\Omega). \end{cases} \tag{2.29}$$

Nosso objetivo é mostrar que $C_\alpha(\Omega) < +\infty$ para $0 < \alpha < \lambda_1$. Suponha por contradição que $C_\alpha(\Omega) = +\infty$, então pelo Lema 2.4

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = +\infty. \tag{2.30}$$

Com isso, temos os seguintes resultados.

Lema 2.5. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_2^2 = 0$. *Em particular*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \beta_\varepsilon = 4\pi, \tag{2.31}$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_\varepsilon = \alpha. \tag{2.32}$$

Demonstração. De fato, desde que $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 = 1$, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup u_0 && \text{em} \quad H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon &\to u_0 && \text{em} \quad L^2(\Omega) \\ u_\varepsilon(x) &\to u_0(x) && \text{quase sempre em} \quad \Omega, \end{aligned}$$

para algum $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Assim, para provarmos o Lema 2.5 é suficiente provar que $u_0 \equiv 0$. Por contradição, suponha que $u_0 \not\equiv 0$ e que $\|\nabla u_0\|_2^2 < 1$. Como $\alpha < \lambda_1$ teremos pelo mesmo argumento feito em (2.24) que

$$(1+\alpha\|u_0\|_2^2)(1-\|\nabla u_0\|_2^2) < 1.$$

Usando que $\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon = 4\pi(1 + \alpha\|u_0\|_2^2)$, para ε suficientemente pequeno temos

$$p = (1-\varepsilon)(1 + \alpha\|u_\varepsilon\|_2^2) < \frac{1}{1 - \|\nabla u_0\|_2^2},$$

portanto pelo Lema de Lions (0.1)

$$C_\varepsilon \leq \sup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega e^{4\pi p u_\varepsilon^2} < +\infty, \tag{2.33}$$

o que contradiz (2.30). Analogamente, se $\|\nabla u_0\|_2^2 = 1$, pelo Corolário 1.1 também obtemos (2.33) e isto completa a prova do Lema. □

Lema 2.6. $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = 0$.

Demonstração. Por (2.29), é suficiente provar que $\mu_\varepsilon \to +\infty$, quando $\varepsilon \to +\infty$. Para isto, note que

$$\begin{aligned} C_\varepsilon &= \int_\Omega e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} dx \\ &= \int_{u_\varepsilon \leq 1} e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} + \int_{u_\varepsilon > 1} e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} \\ &\leq \int_{u_\varepsilon \leq 1} e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} + \int_\Omega u_\varepsilon^2 e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} dx \\ &\leq e^{\beta_\varepsilon} |\Omega| + \mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Desde que $C_\varepsilon \to +\infty$ e $\beta_\varepsilon \to 4\pi$, temos que $\mu_\varepsilon \to +\infty$ quando $\varepsilon \to 0$, como queríamos demonstrar. □

Agora definamos

$$v_\varepsilon = \sqrt{\frac{\beta_\varepsilon}{4\pi}} u_\varepsilon. \tag{2.34}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que v_ε satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2. Para isto, note que pelo Lema 2.5 a sequência de números reais (α_ε) satisfaz

$$\alpha_\varepsilon \to \alpha < \lambda_1 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Por outro lado, a sequência de números reais (λ_ε) satisfaz

$$\lambda_\varepsilon \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Resta mostrar que existe uma sequência de funções (f_ε) com **crescimento crítico uniforme** tal que (v_ε) satisfaz (5) e (6), que é o que faremos a seguir:

Lema 2.7. *A sequência v_ε definida em* (2.34) *satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon - \alpha_\varepsilon v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon) & em & \Omega \\ v_\varepsilon > 0 & em & \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 & sobre & \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)e^{4\pi t^2}$ e $h_\varepsilon(t) = \beta_\varepsilon t$.

Demonstração. Por (2.29), u_ε satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \beta_\varepsilon u_\varepsilon e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} + \alpha_\varepsilon u_\varepsilon & \text{em } \Omega \\ u_\varepsilon > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Usando a definição v_ε obtemos o resultado desejado. □

No próximo resultado, mostraremos que a sequencia de funções f_ε definida no Lema 2.7 tem **crescimento crítico uniforme**.

Lema 2.8. *A sequência de funções $f_\varepsilon \in C^1$ e satisfaz as condições* $(1)-(5)$ *na Definição 0.1.*

Demonstração. Claramente f_ε é uma sequência de classe C^1. Considere $b = 4\pi$.

(1) $f_\varepsilon(0) = 0.e^{4\pi 0} = 0$, $f_\varepsilon(t) = \beta_\varepsilon t e^{4\pi t^2} > 0$ e $-f(-t) = -\beta_\varepsilon(-t)e^{4\pi(-t)^2} = \beta_\varepsilon t e^{4\pi t^2} = f(t)$ para todo $t > 0$.

(2) $f_\varepsilon'(t) = \beta_\varepsilon e^{4\pi t^2} + 8\pi\beta_\varepsilon t^2 e^{4\pi t^2} \leq C$ para todo $t \in [c, d]$.

(3) $f_\varepsilon'(t) = \beta_\varepsilon e^{4\pi t^2} + 8\pi\beta_\varepsilon t^2 e^{4\pi t^2} \geq \beta_\varepsilon e^{4\pi t^2} = \frac{f_\varepsilon(t)}{t}$ para todo $\varepsilon > 0$ e $t > 0$.

(4) Note que
$$F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s)ds = \beta_\varepsilon \int_0^t s e^{4\pi s^2} ds.$$
Fazendo uma substituição $r = 4\pi s^2$, então $dr = 8\pi s ds$, logo
$$\begin{aligned} F_\varepsilon(t) &= \frac{\beta_\varepsilon}{8\pi}\int_0^{4\pi t^2} e^r dr \\ &= \frac{\beta_\varepsilon}{8\pi}(e^{4\pi t^2} - 1). \end{aligned}$$
Se $0 < t < 1$ obtemos
$$\frac{\beta_\varepsilon}{8\pi}(e^{4\pi t^2} - 1) < M(1 + \beta_\varepsilon e^{4\pi t^2}) < M(1 + \beta_\varepsilon t^0 e^{4\pi t^2}).$$

Por outro lado, se $t \geq 1$ obtemos também que

$$\frac{\beta_\varepsilon}{8\pi}(e^{4\pi t^2}-1) < M(1+\beta_\varepsilon e^{4\pi t^2}) < M(1+\beta_\varepsilon \frac{t^\sigma}{t^\sigma} e^{4\pi t^2}) \leq M(1+\beta_\varepsilon t^\sigma e^{4\pi t^2}),$$

em todo caso,

$$F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s)ds \leq M(1+\beta_\varepsilon t^\sigma e^{4\pi t^2}),$$

para algum $M > 0$ e $\sigma \in [0,1)$.

(5) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{h'_\varepsilon(t)}{th_\varepsilon(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_\varepsilon}{t^2\beta_\varepsilon} = 0,$

Portanto (f_ε) é uma sequência de funções com crescimento crítico uniforme e isto prova o lema. $\square$

Outra propriedade importante que iremos precisar para usar o Teorema 2 é a seguinte:

Lema 2.9. $\displaystyle\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \frac{2\pi}{b} = \frac{1}{2}$ *onde*

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{\alpha_\varepsilon}{2}\int_\Omega v^2 dx - \lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v)dx.$$

Demonstração. Como $v_\varepsilon \geq 0 \Rightarrow e^{4\pi v_\varepsilon^2} \geq 1$, temos pelo Lema 2.8 que

$$F_\varepsilon(v_\varepsilon) = \int_0^{v_\varepsilon} f_\varepsilon(s)ds = \frac{\beta_\varepsilon}{8\pi}(e^{4\pi v_\varepsilon^2}-1) \geq 0.$$

Além disso λ_ε e α_ε são não-negativos, logo

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx = \frac{\beta_\varepsilon}{2\cdot 4\pi}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \frac{\beta_\varepsilon}{2\cdot 4\pi},$$

mas $\beta_\varepsilon \to 4\pi$, portanto $\displaystyle\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}$. $\square$

Prova do Teorema 2.1 (item (2)):

Demonstração. Suponha que (2.30) ocorre. Segue por (2.32) e pelos Lemas 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9 que (v_ε) satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2. Se $x_\varepsilon \in \Omega$ é o ponto onde v_ε atinge seu máximo, pelo item (4) do Teorema 2 temos que

$$v_\varepsilon(x_\varepsilon)\|v_\varepsilon\|_2 \leq C\left\|\ln\left(\frac{C}{|x_\varepsilon - x|}\right)\right\|_2 < \infty,$$

já que $\ln(|x|) \in L^2(B_r(0))$. Usando a definição de v_ε obtemos que

$$0 \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon)\|u_\varepsilon\|_2 \leq C, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \tag{2.35}$$

onde $x_\varepsilon \in \Omega$ é o ponto onde u_ε atinge seu máximo. Assim

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon = \int_\Omega e^{\beta_\varepsilon u_\varepsilon^2} &= \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)(1+\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2)u_\varepsilon^2} dx \\
&= \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)\alpha\|u_\varepsilon\|_2^2 u_\varepsilon^2} e^{4\pi(1-\varepsilon)u_\varepsilon^2} dx \\
&\leq e^{4\pi(1-\varepsilon)\alpha u_\varepsilon^2(x_\varepsilon)\|u_\varepsilon\|_2^2} \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u_\varepsilon^2} dx \\
&\leq C \int_\Omega e^{4\pi(1-\varepsilon)u_\varepsilon^2} dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (1) obtemos que C_ε é limitada, o que contradiz (2.30). Portanto a prova do item (2) no Teorema 2.1 se reduz a prova do Teorema 2. $\square$

Capítulo 3

Análise de blow-up

Nosso objetivo nesse capítulo é apresentar a prova do Teorema 3.1. Vamos dividir a demonstração em alguns passo para facilitar a leitura. Vamos lembrar da definição que precisaremos no Teorema.

Definição 3.1. *Seja $\varepsilon > 0$ e $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e defina $f_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)e^{bt^2}$ para algum $b > 0$. Dizemos que (f_ε) é uma sequência de funções com* ***crescimento crítico uniforme****, se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(1) *$f_\varepsilon(0) = 0$, $f_\varepsilon(t) > 0$ e $f_\varepsilon(t) = -f_\varepsilon(-t)$ para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $t > 0$.*

(2) *(f_ε) é uniformemente limitada em $C^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

(3) *$f'_\varepsilon(t) > \frac{f_\varepsilon(t)}{t}$ para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $t > 0$.*

(4) *Existem $M > 0$ e $\sigma \in [0, 1)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$*

$$F_\varepsilon \leq M(1 + f_\varepsilon(t)t^\sigma), \quad \forall t > 0,$$

onde

$$F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s)ds,$$

é uma primitiva de f_ε.

(5) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{h'_\varepsilon(t)}{th_\varepsilon(t)} = 0$ *uniformemente em ε.*

Teorema 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e suave. Seja (f_ε) uma sequência de funções com* ***crescimento crítico uniforme****. Suponha que $0 < \alpha < \lambda_1(\Omega)$ e seja (α_ε) uma sequência tal que $\alpha_\varepsilon \to \alpha$. Seja também (λ_ε) uma sequência positiva de números reais tal que $\lambda_\varepsilon \to 0$. Seja*

(v_ε) *satisfazendo:*

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon - \alpha_\varepsilon v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon) & em \quad \Omega \\ v_\varepsilon > 0 & em \quad \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

e

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \frac{2\pi}{b}, \tag{3.2}$$

onde

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{\alpha_\varepsilon}{2}\int_\Omega v^2 dx - \lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v)dx.$$

Se x_ε é um ponto onde v_ε atinge o máximo, então a menos de subsequência, valem as seguintes propriedades:

(1) $\lim_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon\|_2 = 0$ *e* $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = \frac{4\pi}{b}$.

(2) $\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x_\varepsilon) = +\infty$.

(3) *Se*

$$\theta_\varepsilon = (v_\varepsilon(x_\varepsilon)\Delta v_\varepsilon(x_\varepsilon))^{-\frac{1}{2}}.$$

Então

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x_\varepsilon)(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x) - v_\varepsilon(x_\varepsilon)) = -\frac{1}{b}\ln\left(1 + \frac{b}{4}|x|^2\right) \quad em\ C^2_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

(4) *existe $C > 0$ tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, vale*

$$v_\varepsilon(x_\varepsilon)v_\varepsilon(x) \leq C\ln\left(\frac{C}{|x_\varepsilon - x|}\right), \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_\varepsilon\}.$$

Primeiramente iremos apresentar a prova dos itens (1)-(3).

3.1 Prova dos itens (1)-(3)

A seguinte observação será utilizada com frequência na demonstração.

Observação 3.1. Se (f_ε) é uma sequência com **crescimento crítico uniforme** então (f_ε) é uma sequência uniformemente limitada em $C_{loc}(\mathbb{R})$. De fato, pela Definição 0.1 temos que (f_ε) é uniformemente limitada em $C^1_{loc}(\mathbb{R})$ com $f_\varepsilon(0) = 0$. Se $t \in (a, b)$ pelo Teorema do Valor médio temos

$$|f_\varepsilon(t)| = |f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(0)| = |f'_\varepsilon(\mu)|t \leq C.$$

Portanto, (f_ε) também é uniformemente limitada em $C_{loc}(\mathbb{R})$.

Vamos então começar a demonstração do Teorema 3.1.

3.1.1 Prova do item (1)

Para provar o ponto (1) do Teorema 3.1, precisamos mostrar que $\|v_\varepsilon\|_2 \to 0$ e que $\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 \to \frac{4\pi}{b}$ quando $\varepsilon \to 0$. Vamos começar provando a seguinte afirmação:

Afirmação 3.1. $\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 < +\infty$.

Demonstração. Por (3.2) temos que

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 - \alpha_\varepsilon \|v_\varepsilon\|_2^2 \leq \frac{4\pi}{b} + 2\lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon)dx + o(1)$$

Por outro lado, tomando v_ε na definição de solução fraca de (3.1) temos que

$$\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx = \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 - \alpha_\varepsilon \|v_\varepsilon\|_2^2. \tag{3.3}$$

Assim

$$\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \leq \frac{4\pi}{b} + 2\lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon)dx, \tag{3.4}$$

Desde que (f_ε) tem crescimento crítico uniforme, existem $M > 0$ e $\sigma \in [0, 1)$ tais que

$$F_\varepsilon(t) \leq M(1 + f_\varepsilon(t)t^\sigma).$$

Logo

$$2\int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon)dx \leq 2M|\Omega| + 2M \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma dx. \tag{3.5}$$

Usando que $\sigma \in [0, 1)$, pela Observação 3.1 temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma &\leq \int_{v_\varepsilon \leq C_2} f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma dx + \int_{v_\varepsilon > C_2} f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma dx \\
&\leq C_1 + \int_{v_\varepsilon > C_2} f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma dx \\
&= C_1 + \int_{v_\varepsilon > C_2} f_\varepsilon(v_\varepsilon)\frac{1}{v_\varepsilon^{1-\sigma}} v_\varepsilon dx \\
&\leq C_1 + C_2^{\sigma-1} \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx
\end{aligned}$$

para todo $C_2 > 0$. Escolhendo C_2 suficientemente grande de modo que $C_2^{\sigma-1} \leq \frac{1}{4M}$ obtemos

$$\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma \leq C_1 + \frac{1}{4M} \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx.$$

Isto jutamente com (3.5) implica que

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon)dx &\leq 2M|\Omega| + 2MC_1 + \frac{2M}{4M}\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \\ &= 2M|\Omega| + 2MC_1 + \frac{1}{2}\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Logo por (3.4) obtemos

$$\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \leq O(1) + \lambda_\varepsilon 2M|\Omega| + \lambda_\varepsilon 2MC_1 + \frac{\lambda_\varepsilon}{2}\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx,$$

e portanto,

$$\frac{\lambda_\varepsilon}{2}\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \leq O(1) + \lambda_\varepsilon 2M|\Omega| + \lambda_\varepsilon 2MC_1.$$

Desde que $\lambda_\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx = O(1). \tag{3.6}$$

Substituindo em (3.3), obtemos que

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = O(1) + \alpha_\varepsilon\|v_\varepsilon\|_2^2 = O(1) + \alpha_\varepsilon\frac{\lambda_1}{\lambda_1}\|v_\varepsilon\|_2^2 \leq O(1) + \frac{\alpha_\varepsilon}{\lambda_1}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2.$$

Portanto,

$$\left(1 - \frac{\alpha_\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = O(1),$$

como $\alpha_\varepsilon \to \alpha$ e $\alpha < \lambda_1(\Omega)$, temos que $\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = O(1)$, concluindo a Afirmação 3.1. □

Como (v_ε) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, passando para uma subsequência, temos que

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\rightharpoonup v_0 \quad \text{fraco em} \quad H_0^1(\Omega) \\ v_\varepsilon &\to v_0 \quad \text{forte em} \quad L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Lema 3.1. *Temos que* $v_0 \equiv 0$ *e portanto* $\lim_{\varepsilon\to 0}\|v_\varepsilon\|_2 = 0$.

Demonstração. Primeiramente temos a seguinte afirmação

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx = 0. \tag{3.7}$$

De fato, por (3.6) temos que para $C > 0$

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx &= \lambda_\varepsilon \int_{v_\varepsilon \leq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx + \lambda_\varepsilon \int_{v_\varepsilon \geq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx \\
&= \lambda_\varepsilon \int_{v_\varepsilon \leq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx + \lambda_\varepsilon \int_{v_\varepsilon \geq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon)\frac{v_\varepsilon}{v_\varepsilon}dx \\
&\leq \lambda_\varepsilon \int_{v_\varepsilon \leq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx + \frac{1}{C}\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \\
&= \frac{1}{C}\left(\frac{\lambda_\varepsilon}{1/C}\int_{v_\varepsilon \leq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx + O(1)\right).
\end{aligned}$$

Usando a Observação 3.1 concluímos que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx = O\left(\frac{1}{C}\right) \qquad \forall C > 0,$$

o que prova (3.7). Passando o limite na formulação fraca da equação (3.1), temos que

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = \alpha v_0 & \text{em} \quad \Omega \\ v_0 \geq 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $\alpha < \lambda_1$ temos $v_0 \equiv 0$, o que prova o lema. $\square$

Lema 3.2. *Temos que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = \frac{4\pi}{b}.$$

Demonstração. Note que de (3.2) e de (3.1) temos que

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = 2\alpha_\varepsilon \|v_\varepsilon\|_2^2 + 2\lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon)dx + 2J_\varepsilon(v_\varepsilon). \tag{3.8}$$

Procedendo como na prova de (3.5) temos que

$$\lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon)dx \leq \lambda_\varepsilon M \left(|\Omega| + \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma\right)$$

para algum $M > 0$ e $\sigma \in [0, 1)$. Usando que $\lambda_\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon)dx \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon^\sigma dx. \tag{3.9}$$

Por um raciocínio análogo ao feito na prova de (3.7) temos que para qualquer $C > 0$,

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) v_\varepsilon^\sigma dx &= \lambda_\varepsilon \int_{v_\varepsilon \leq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon) v_\varepsilon^\sigma dx + \lambda_\varepsilon \int_{v_\varepsilon \geq C} f_\varepsilon(v_\varepsilon) v_\varepsilon^\sigma dx \\ &= C^\sigma \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) dx + \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) \frac{1}{v_\varepsilon^{1-\sigma}} v_\varepsilon dx \\ &= C^\sigma \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) dx + \lambda_\varepsilon C^{\sigma-1} \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) v_\varepsilon dx.\end{aligned}$$

Portanto, por (3.7) e (3.6) obtemos para todo $C > 0$ que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) v_\varepsilon^\sigma dx \leq C^{\sigma-1} \limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) v_\varepsilon dx = O(C^{\sigma-1}) = o(1),$$

substituindo em (3.9), concluímos que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon \int_\Omega F_\varepsilon(v_\varepsilon) dx = 0.$$

Tomando o limite superior em (3.8), usando a equação acima, o Lema 3.1 e a equação (3.2) obtemos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 \leq \frac{4\pi}{b}. \tag{3.10}$$

Afirmamos que $\liminf_{\varepsilon\to 0} \geq \dfrac{4\pi}{b}$. De fato, suponha por contradição que, para alguma subsequência ainda denotada (v_ε) tenhamos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = C_0 < \frac{4\pi}{b}, \tag{3.11}$$

pela desigualdade de Trudiger-Moser (2) temos que

$$\int_\Omega e^{4\pi \frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}} dx \leq C(\Omega)$$

para todo $\varepsilon > 0$, e pela hipótese (5) da Definição 0.1, dado $\mu > 0$, existe um $t_0 > 0$, tal que se $t > t_0$

$$\ln'(h_\varepsilon(t)) = \frac{h'_\varepsilon(t)}{h_\varepsilon(t)} \leq \mu t.$$

Portanto,

$$\ln(h_\varepsilon(t)) \leq \mu \frac{t^2}{2} + C_1,$$

implicando que

$$h_\varepsilon(t) \leq C_2 e^{\frac{\mu}{2} t^2}. \tag{3.12}$$

De (3.11) e de (3.12), podemos escolher, $p > 1$ e $\mu > 0$ de modo que $\frac{pp'\mu\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}{2} < 4\pi$ e $p^2 \frac{b}{4\pi} < \frac{1}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Usando a desigualdade de Hölder e a limitação uniforme de (f_ε) em $C^1_{loc}(\Omega)$

concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_\varepsilon(v_\varepsilon)|^p &\le C_3 + \int_{v_\varepsilon > t_0} |f_\varepsilon(v_\varepsilon)|^p dx \\
&= C_3 + \int_{v_\varepsilon > t_0} |h_\varepsilon(v_\varepsilon) e^{b v_\varepsilon^2}|^p dx \\
&= C_3 + \int_{v_\varepsilon > t_0} |h_\varepsilon(v_\varepsilon)^p e^{p b v_\varepsilon^2}| dx \\
&\le C_3 + \int_\Omega C_2 e^{\frac{p\mu}{2} v_\varepsilon^2 \frac{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}} \cdot e^{p \frac{b}{4\pi} v_\varepsilon^2 4\pi} dx \\
&\le C_3 + C \left(\int_\Omega e^{\frac{pp'\mu \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}{2} \frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega e^{p^2 \frac{b}{4\pi} 4\pi v_\varepsilon^2} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C_3 + C \left(\int_\Omega e^{4\pi \frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega e^{4\pi \frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \le C(\Omega).
\end{aligned}$$

Logo $(f_\varepsilon(v_\varepsilon))$ é limitado em $L^p(\Omega)$ para algum $p > 1$. Por regularidade (Teorema 1.6) e pela imersão de Sobolev (Teorema 1.3), temos que $v_\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e que

$$\|v_\varepsilon\|_{C(\overline{\Omega})} \le K \|v_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \le K_1 \lambda_\varepsilon \|f_\varepsilon(v_\varepsilon)\|_p \to 0.$$

Portanto $v_\varepsilon \to 0$ em $C(\Omega)$. Se $w_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2}$, então a menos de subsequência $w_\varepsilon \to w$ em $L^2(\Omega)$. De (3.3) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2} - \alpha_\varepsilon \frac{\|v_\varepsilon\|_2^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2} &= \lambda_\varepsilon \int_\Omega \frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon)}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2} v_\varepsilon dx \\
&= \lambda_\varepsilon \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon) \frac{v_\varepsilon}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2 \|\nabla v_\varepsilon\|_2} \frac{v_\varepsilon}{v_\varepsilon} dx \\
&= \lambda_\varepsilon \int_\Omega \frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon)}{v_\varepsilon} w_\varepsilon^2 dx,
\end{aligned}$$

logo

$$1 - \alpha_\varepsilon \|w_\varepsilon\|_2^2 = \lambda_\varepsilon \int_\Omega \frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon)}{v_\varepsilon} w_\varepsilon^2 dx. \tag{3.13}$$

Desde que $v_\varepsilon \to 0$ em $C(\Omega)$, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\|v_\varepsilon\|_{C(\Omega)} \le 1$ e pelas hipóteses (2) e (3) da Definição 0.1 temos

$$\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon)}{v_\varepsilon} < f_\varepsilon'(v_\varepsilon) \le C,$$

logo

$$0 \le \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon \int_\Omega \frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon)}{v_\varepsilon} w_\varepsilon^2 \le C \lambda_\varepsilon \int_\Omega w_\varepsilon^2 \le \lambda_\varepsilon C_1 \to 0.$$

Portanto, passando o limite em (3.13) obtemos

$$1-\alpha\|w\|_2^2=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon)}{v_\varepsilon w_\varepsilon^2}dx=0.$$

Desde que $\|\nabla w_\varepsilon\|_2\leq 1$ e $\alpha<\lambda_1(\Omega)$ temos

$$1=\alpha\|w\|_2^2<\lambda_1\|w\|_2^2\leq\|\nabla w\|_2^2\leq\liminf\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2=1,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2\geq\frac{4\pi}{b}$ e segue de (3.10) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2=\frac{4\pi}{b}. \tag{3.14}$$

□

A prova do ponto (1) no Teorema 3.1 segue diretamente dos Lemas 3.1 e 3.2.

3.1.2 Prova dos itens (2) e (3)

Prova do Teorema 3.1 (item (2)):

Demonstração. Seja $x_\varepsilon\in\Omega$ um ponto onde v_ε atinge seu máximo e defina

$$\gamma_\varepsilon:=v_\varepsilon(x_\varepsilon)=\max_\Omega v_\varepsilon. \tag{3.15}$$

Afirmamos que $\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon=+\infty$. De fato, suponha que γ_ε seja limitada. Por (3.7) temos que

$$0\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx\leq\lambda_\varepsilon\gamma_\varepsilon\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx\leq C\lambda_\varepsilon\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx\to 0.$$

Desde que $\alpha_\varepsilon\to\alpha$, pelo Lema 3.1 e pela equação (3.1) teríamos que

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2=\lambda_\varepsilon\int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon+\alpha_\varepsilon\|v_\varepsilon\|_2^2\to 0,$$

contradizendo (3.14). Portanto,

$$\gamma_\varepsilon\to+\infty\quad\text{quando}\quad\varepsilon\to 0$$

e o item (2) do Teorema 3.1 está provado. □

Prova do Teorema 3.1 (item (3)):

Para provar o ponto (3) do Teorema 3.1 vamos usar primeiramente o fato de que, a menos de subsequência,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon = x_0 \quad \text{com} \quad x_0 \notin \partial\Omega. \tag{3.16}$$

Esse resultado foi provado por De Figueiredo-Lions-Nussbaun para o caso convexo e adaptado por Han para o caso não-convexo (ver [5] e [10]).

Agora defina

$$\theta_\varepsilon^{-2} = -v_\varepsilon(x_\varepsilon)\Delta v_\varepsilon(x_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon(\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon) \tag{3.17}$$

e considere a sequência de funções w_ε dada por

$$w_\varepsilon(x) = 2b\gamma_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x) - \gamma_\varepsilon), \quad \text{para} \quad x \in \Omega_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^2 :\ x_\varepsilon + \theta_\varepsilon y \in \Omega\}. \tag{3.18}$$

Note que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_\varepsilon^{-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon(\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon \to +\infty.$$

Assim, por (3.16) para todo $y \in \mathbb{R}^2$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x_\varepsilon + \theta_\varepsilon y \in \Omega$.

Lema 3.3.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon = -2\ln\left(1 + \frac{b}{4}|x|^2\right) \quad \textit{uniformemente em} \quad C_{loc}(\mathbb{R}^2). \tag{3.19}$$

Assim,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x) - \gamma_\varepsilon) = -\frac{1}{b}\left(1 + \frac{b}{4}|x|^2\right) \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

e isto mostra o ponto (3) do Teorema 3.1.

Demonstração. Como $f_\varepsilon(t) > 0$, para todo $t > 0$, temos pela hipótese (3) da Definição 0.1 que f_ε é crescente em $(0, +\infty)$. Usando que $\alpha_\varepsilon \geq 0$ obtemos que

$$\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(x) \leq \lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.20}$$

Por (3.17), temos que em Ω_ε

$$\begin{aligned}
-\Delta w_\varepsilon(x) &= 2b\gamma_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)\theta_\varepsilon^2 \\
&= 2b\gamma_\varepsilon(\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x))\theta^2 \\
&= 2b\gamma_\varepsilon\frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)}{\gamma_\varepsilon(\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon)},
\end{aligned}$$

logo

$$-\Delta w_\varepsilon(x) = 2b\frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon}, \tag{3.21}$$

e por (3.20),

$$0 \leq -\Delta w_\varepsilon \leq 2b. \tag{3.22}$$

Afirmamos que

$$(w_\varepsilon) \quad \text{é limitada em} \quad C^{0,\eta}_{loc}(\mathbb{R}^2). \tag{3.23}$$

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$, e considere φ_ε a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_\varepsilon = 0 & \text{em} \quad B(0,2R) \\ \quad \varphi_\varepsilon = w_\varepsilon \leq 0 & \text{sobre} \quad \partial B(0,2R). \end{cases}$$

Então pelo Princípio do Máximo $\varphi_\varepsilon \leq 0$, em $B(0,2R)$, logo

$$\begin{cases} -\Delta(-\varphi_\varepsilon) = 0 & \text{em} \quad B(0,2R) \\ \quad -\varphi_\varepsilon = -w_\varepsilon \geq 0 & \text{sobre} \quad \partial B(0,2R). \end{cases}$$

Defina $\psi_\varepsilon = w_\varepsilon - \varphi_\varepsilon$, temos

$$\begin{cases} -\Delta\psi_\varepsilon = -\Delta w_\varepsilon \leq 2b = g \in L^\infty B(0,2R) \;, \\ \quad \psi_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B(0,2R). \end{cases}$$

Portanto, pelas imersões de sobolev e por regularidade,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{C^{0,\eta}(B(0,2R))} \leq \|g\|_{L^p(B(0,2R))} < C.$$

Logo, pela desigualdade de Harnack

$$\sup_{B(0,R)} |\varphi_\varepsilon(x)| \leq C \inf_{B(0,R)} |\varphi_\varepsilon(x)| = -C\varphi_\varepsilon(0) = \psi_\varepsilon(0) < C,$$

por fim, considerando

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_\varepsilon = 0 & \text{em} \quad B(0,R) \\ \quad \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \leq 0 & \text{sobre} \quad \partial B(0,R). \end{cases}$$

Temos por regularidade que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{C^1(B(0,R))} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{C(B(0,R))} \leq C$$

e isto prova a Afirmação (3.23). De fato, seja $\varepsilon > 0$, e considere φ_ε a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_\varepsilon = 0 & \text{em} \quad B_0(2R) \\ \quad \varphi_\varepsilon = w_\varepsilon & \text{sobre} \quad \partial B_0(2R). \end{cases}$$

Definindo $\psi_\varepsilon = w_\varepsilon - \varphi_\varepsilon$, temos

$$\begin{cases} -\Delta\psi_\varepsilon = -\Delta w_\varepsilon \leq 2b = g \in L^\infty(B_0(2R)) \ , \\ \quad \psi_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_0(2R). \end{cases}$$

Portanto, mais uma vez pelas imersões de sobolev e por regularidade,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{C^{0,\eta}(B_0(2R))} \leq \|g\|_{L^p(B_0(2R))} < C.$$

Desde que $w_\varepsilon \leq 0$ então φ_ε é uma função harmônica em $B_0(2R)$ com valores não positivos na fronteira. Usando que $w_\varepsilon(0) = 0$ temos que $\varphi_\varepsilon(0) = -\psi_\varepsilon(0)$ é limitada. Consequentemente, (φ_ε) é limitado em $C^{0,\eta}(B_0(2R))$, logo $w_\varepsilon = \varphi_\varepsilon + \psi_\varepsilon$ também é limitada em $C^{0,\eta}(B_0(2R))$ e isto prova a Afirmação (3.23).

Como consequência imediata do Teorema de Ascoli-Árzela, passando uma subsequência, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon = w_0 \quad \text{em} \quad C_{loc}(\mathbb{R}^2). \tag{3.24}$$

Vamos caracterizar w_0. Para isso, seja $y \in \mathbb{R}^2$, vamos calcular $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} -\Delta w_\varepsilon(y)$, sabemos de (3.18) que

$$2b\gamma_\varepsilon v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon) - 2b\gamma_\varepsilon^2 = w_\varepsilon(x),$$

logo de (3.24)

$$v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon y) = \frac{w_\varepsilon + 2b\gamma_\varepsilon^2}{2b\gamma_\varepsilon} = \frac{w_\varepsilon(x)}{2b\gamma_\varepsilon} + \gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon + \frac{w_0(x)}{2b\gamma_\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}\right). \tag{3.25}$$

Afirmamos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}{\gamma_\varepsilon} = +\infty. \tag{3.26}$$

Caso contrário, teríamos de (3.20) que

$$0 \leq -\Delta\left(\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right) = \frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(x)}{\gamma_\varepsilon} \leq \frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = \frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}{\gamma_\varepsilon} + \alpha_\varepsilon = O(1),$$

portanto

$$\begin{cases} -\Delta\left(\dfrac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right) = g_1 \in L^\infty(\Omega) \ , \\ \qquad \dfrac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 \to 4\pi$ e $\gamma_\varepsilon \to +\infty$, temos que $\left(\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right) \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, além disso, por regularidade elíptica (Teorema 1.5), temos que $\|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\|_{C^1(\Omega)} < C_1$. Portanto

$$\left\|\nabla\left(\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right)\right\| < C,$$

mais uma vez por regularidade elíptica (Teoremas 1.6 e 1.3), temos que

$$\left\|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right\|_{C(\Omega)} \leq \left\|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|g_1\|_{L^p(\Omega)} < C_2,$$

para todo $p > 2$, então pelo Teorema de Morrey (Teorema 1.2),

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right\|_{C(\Omega)} &\leq C\left\|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} = C\left(\int_\Omega\left|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right|^p dx + \int_\Omega\left|\nabla\left(\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right)\right|^p dx\right)\\
&\leq C\left(\int_\Omega\left|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right|^{p-2}\left|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right|^2 dx + \int_\Omega\left|\nabla\left(\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right)\right|^{p-2}\left|\nabla\left(\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right)\\
&\leq \widetilde{C}\left(\left\|\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right\|_2^2 + \left\|\nabla\left(\frac{v_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\right)\right\|_2^2\right) \to 0,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\frac{v_\varepsilon(x_\varepsilon)}{\gamma_\varepsilon} = 1$, o que prova a afirmação (3.26). Então por (3.18) e por (3.21), temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\Delta w_\varepsilon(x) = 2b\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x))}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)+\alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\varepsilon v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x)}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)+\alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon}\right),$$

mas de (3.15) e de (3.26), temos

$$0 \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\varepsilon v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x)}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)+\alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)} \to 0,$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x))}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)+\alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x))}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)\left[1+\frac{\alpha_\varepsilon\gamma_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}\right]} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x))}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}.$$

Portanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\Delta w_\varepsilon(y) = 2b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y))}{f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}, \tag{3.27}$$

usando (3.25), obtemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y))}{f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y))}{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}\cdot e^{b((v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y))^2 - v_\varepsilon(x_\varepsilon)^2)},$$

desde que

$$\begin{aligned} e^{b(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y)-v_\varepsilon(x_\varepsilon)(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y)+v_\varepsilon(x_\varepsilon))} &= e^{b\left(\gamma_\varepsilon+\frac{w_0(y)}{2b\gamma_\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}\right)-\gamma_\varepsilon\right)\left(\gamma_\varepsilon+\frac{w_0(y)}{2b\gamma_\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}\right)+\gamma_\varepsilon\right)} \\ &= e^{\left(\frac{w_0(y)}{2\gamma_\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}\right)\right)\left(2\gamma_\varepsilon+\frac{w_0(u)}{2b\gamma_\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}\right)\right)} \\ &= e^{\left(w_0(y)+o\left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon^2}\right)+o(1)\right)}, \end{aligned}$$

temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y))}{f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)} = e^{w_0(y)}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y))}{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}. \tag{3.28}$$

Novamente de (3.25) e pela hipótese (5) da Definição 0.1, concluimos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon+\frac{w_0(y)}{2b\gamma_\varepsilon}+o(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}))}{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)+h'_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)(\frac{w_0(y)}{2b\gamma_\varepsilon}+o(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}))+r(O(1))}{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1+\frac{h'_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)(\frac{w_0(y)}{2b\gamma_\varepsilon}+o(\frac{1}{\gamma_\varepsilon}))\gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}+\frac{r(O(1))}{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}\right) \\ &= 1+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{h'_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)(O(1))}{\gamma_\varepsilon h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}+\frac{r(O(1))}{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}\right), \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h_\varepsilon(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon y))}{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)} = 1, \tag{3.29}$$

pois o resto é limitado e $h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)\to+\infty$. Voltando em (3.27), com (3.28) e (3.29), obtemos que w_0 satisfaz

$$-\Delta w_0 = 2be^{w_0} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \tag{3.30}$$

como $w_0(0)=0$ e $w_0\le 0$, temos pelo Corolário 1.2 que w_0 é necessariamente da forma

$$w_0(x) = -2\ln\left(1+\frac{b}{4}|x|\right).$$

Com argumento de regularidade pode-se mostrar que $w_0\in C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, o que prova o ponto (3) do Teorema 3.1. □

3.2 Prova do item (4)

Para a demonstração desse ponto, iremos precisar de alguns lemas.

Lema 3.4. $\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus B(x_\varepsilon,R\theta_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x) = 0.$

Demonstração. Pela definição de w_ε, sabemos que

$$-v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x)\Delta w_\varepsilon(x) = -2b\gamma_\varepsilon v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon)\Delta(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x))\theta^2,$$

fazendo uma mudança de variável (trocando x por $x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x$) obtemos que para todo $R > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(x_\varepsilon,R\theta_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(0,R)} -v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x)\Delta(v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon x))\theta_\varepsilon^2 dx \\
&= \frac{1}{b}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(0,R)} -\frac{v_\varepsilon(x_\varepsilon+\theta_\varepsilon)}{\gamma_\varepsilon}\Delta a_\varepsilon dx \\
&= \frac{1}{b}\int_{B(0,R)} -\Delta w_0(x)dx,
\end{aligned}$$

já que $\theta_\varepsilon \to 0$, $v_\varepsilon(x) = \gamma_\varepsilon$ e $\Delta w_\varepsilon(x) \to \Delta w_0(x)$. Agora note que

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} -\Delta w_0(x)dx &= \int_{B(0,R)} 2be^{w_0(x)}dx \\
&= \int_{B(0,R)} 2be^{-2\ln\left(1+\frac{b}{4}|x|^2\right)}dx \\
&= 2b\int_{B(0,R)} e^{\ln\left(\left(1+\frac{b}{4}|x|^2\right)^2\right)}dx \\
&= 2b\int_{B(0,R)} \frac{1}{\left(1+\frac{b}{4}|x|^2\right)^2}dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenada $x = Ry$ e depois usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}
2b\int_{B(0,R)} \frac{1}{\left(1+\frac{b}{4}|x|^2\right)^2}dx &= 2bR^2\int_{B(0,1)} \frac{1}{\left(1+\frac{b}{4}R^2|y|^2\right)^2}dx \\
&= 2bR^2 2\pi\int_0^1 \frac{r}{\left(1+\frac{b}{4}R^2r^2\right)^2}dx \\
&= 4bR^2\pi\int_1^{1+\frac{bR^2}{4}} \frac{2}{bR^2}\frac{du}{u^2} \\
&= 8\pi\left(-\frac{1}{1+\frac{bR^2}{4}}+1\right),
\end{aligned}$$

logo

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{B(0,R)} -\Delta w_0(x)dx = 8\pi. \tag{3.31}$$

Portanto

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(x_\varepsilon,R\theta_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{b}\int_{B(0,R)} -\Delta w_0(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\frac{8\pi}{2b} = \frac{4\pi}{b}. \tag{3.32}$$

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B(x_\varepsilon,R\theta_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x)dx &= \int_\Omega -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x)dx - \int_{B(x_\varepsilon,R\theta_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x)dx \\ &= \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 - \int_{B(x_\varepsilon,R\theta_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x)dx.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Usando que $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = \frac{4\pi}{b}$, por (3.32)-(3.33) obtemos

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus B(x_\varepsilon,R\theta_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x) = 0,$$

o que prova o lemma. $\square$

Lema 3.5. *Existe $C>0$, tal que para todo $\varepsilon>0$ e qualquer $x\in\Omega$,*

$$-|x_\varepsilon - x|^2 v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x) \le C.$$

Demonstração. Seja $\rho_\varepsilon = -|x_\varepsilon - x|^2 v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x)$ e seja também y_ε um ponto em Ω onde ρ_ε atinge seu máximo e suponha por contradição que

$$\rho_\varepsilon(y_\varepsilon) = \max_\Omega \rho_\varepsilon \to +\infty, \quad \text{quando} \quad \varepsilon\to 0. \tag{3.34}$$

Definamos

$$r_\varepsilon^{-2} := -v_\varepsilon(y_\varepsilon)\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon) = \frac{\rho_\varepsilon(y_\varepsilon)}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}.$$

Por (3.34), temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{r_\varepsilon} = +\infty. \tag{3.35}$$

Como Ω é limitado, temos que

$$v_\varepsilon(y_\varepsilon)\to+\infty, \quad \text{quando} \quad \varepsilon\to 0,$$

caso contrário, pela Observação 3.1,

$$\begin{aligned}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 - v_\varepsilon(y_\varepsilon)\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon) &= |x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 v_\varepsilon(y_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon f(v_\varepsilon(y_\varepsilon)) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon)) \\ &\le C(\lambda_\varepsilon C_1 + \alpha_\varepsilon c_2) \le K,\end{aligned}$$

contradizendo (3.34). Mais uma vez temos que

$$y_\varepsilon \to y_0 \notin \partial\Omega, \tag{3.36}$$

e indepedentemente, também temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\theta_\varepsilon} = +\infty, \tag{3.37}$$

caso contrário $\rho_\varepsilon(y_\varepsilon)$ seria limitado. Graças a (3.4), obtemos com (3.35) e (3.37) que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B(y_\varepsilon, r_\varepsilon)} v_\varepsilon(x) \Delta v_\varepsilon(x) dx = 0. \tag{3.38}$$

Definamos

$$\widetilde{w}_\varepsilon = 2b v_\varepsilon(y_\varepsilon)(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon y) - v_\varepsilon(y_\varepsilon)),$$

para $y \in \widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_\varepsilon + r_\varepsilon y \in \Omega\}$, logo $\widetilde{w}_\varepsilon(0) = 0$ e

$$-\Delta \widetilde{w}_\varepsilon = -2b v_\varepsilon(y_\varepsilon) \Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon y) r_\varepsilon^2 = 2b \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon) \Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon y)}{v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon)} = 2b \frac{\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon y)}{\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon)}. \tag{3.39}$$

Assuma que exista uma sequência (z_ε) de pontos em $B(0,2)$ tal que

$$-\Delta \widetilde{w}_\varepsilon(z_\varepsilon) \to +\infty \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.40}$$

de (3.35), temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon - r_\varepsilon z_\varepsilon|} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\left|(x_\varepsilon - y_\varepsilon)\left(1 - \frac{r_\varepsilon z_\varepsilon}{(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}\right)\right|} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\left|1 - \frac{r_\varepsilon z_\varepsilon}{x_\varepsilon - y_\varepsilon}\right|} = 1. \tag{3.41}$$

Como

$$\frac{\rho_\varepsilon(y_\varepsilon)}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 v_\varepsilon(y_\varepsilon)} = -\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon)$$

e

$$\frac{\rho_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon - r_\varepsilon z_\varepsilon| v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)} = -\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon),$$

temos de (3.39) que

$$-\Delta \widetilde{(v)}_\varepsilon = 2b \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon - r_\varepsilon z_\varepsilon|^2} \cdot \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon)}{v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)} \cdot \frac{\rho_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon(y_\varepsilon)}, \tag{3.42}$$

desde que $\rho_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) \leq \rho_\varepsilon(y_\varepsilon)$ por (3.34), temos de (3.40), (3.41) e (3.42) que

$$v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) = 2b O(1) v_\varepsilon(y_\varepsilon) O(1) = o(v_\varepsilon(y_\varepsilon)). \tag{3.43}$$

Portanto para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) < v_\varepsilon(y_\varepsilon)$, mas $\alpha_\varepsilon \geq 0$ e f_ε é crescente, logo

$$
\begin{aligned}
-\Delta\widetilde{w}_\varepsilon(z_\varepsilon) &= 2b\frac{\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)}{\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon)} \\
&= 2b\left(\frac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)) + \alpha_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon))}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon)) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon)}\right) \\
&\leq \left(\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon))}{f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))} + \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)}\right) \\
&\leq 2b(1+1) \leq C.
\end{aligned}
$$

Contradizendo (3.40), provamos então a existência de algum $C > 0$ tal que

$$
0 \leq -\Delta\widetilde{w}_\varepsilon \leq C \quad \text{em} \quad B(0,2) \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0. \tag{3.44}
$$

Então de (3.44), temos que

$$
0 \leq -\Delta\left(\frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon .)}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)}\right) \leq \frac{C}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)},
$$

em $B(0,2)$. como $v_\varepsilon(y_\varepsilon) \to +\infty$, temos que $\frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon .)}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)}$ é uma sequência de funções positivas em $B(0,2)$ com valores entre 0 e 1 e com o laplaciano limitado em $B(0,2)$, logo pela Desigualdade de Harnack

$$
1 = \sup_{B(0,\frac{3}{2})} \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon x)}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)} C \leq \inf_{B(0,\frac{3}{2})} \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon x)}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)}.
$$

Portanto

$$
v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon y) \geq C_1 v_\varepsilon(y_\varepsilon), \tag{3.45}
$$

para algum $C > 0$ e $y \in B(0,\frac{3}{2})$. Além disso, como $-\Delta v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon f(v_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon \geq \alpha_\varepsilon v_\varepsilon$, temos de (3.38) que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_\varepsilon v_\varepsilon^2(y_\varepsilon) r_\varepsilon^2 &= \lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_\varepsilon \frac{1}{r_\varepsilon^2} \int_{B(y_\varepsilon, r_\varepsilon)} v_\varepsilon^2(x) r_\varepsilon^2 dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B(y_\varepsilon, r_\varepsilon)} \alpha_\varepsilon v_\varepsilon^2(x) dx \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B(y_\varepsilon, r_\varepsilon)} -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x) dx = 0.
\end{aligned}
$$

Além disso, afirmamos que

$$
\frac{\alpha_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))} = o(1) \tag{3.46}
$$

De fato,

$$
\frac{\alpha_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))} = \frac{\alpha_\varepsilon u_\varepsilon^2(y_\varepsilon) r_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon)) r_\varepsilon^2 v_\varepsilon(y_\varepsilon)},
$$

mas $\alpha_\varepsilon u_\varepsilon^2(y_\varepsilon)r_\varepsilon^2 = o(1)$, e pela definição de r_ε

$$\begin{aligned}(\lambda_\varepsilon f(v_\varepsilon(y_\varepsilon))v_\varepsilon(y_\varepsilon))r_\varepsilon^2 &= (-\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon)v_\varepsilon(y_\varepsilon) - \alpha_\varepsilon u_\varepsilon^2(y_\varepsilon))r_\varepsilon^2 \\ &= -\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon)v_\varepsilon(y_\varepsilon)r_\varepsilon^2 - \alpha_\varepsilon v_\varepsilon^2(y_\varepsilon)r_\varepsilon^2 \\ &= 1 - \alpha_\varepsilon v_\varepsilon^2(y_\varepsilon)r_\varepsilon^2 \geq C,\end{aligned}$$

portanto

$$\frac{\alpha_\varepsilon u_\varepsilon^2(y_\varepsilon)r_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))r_\varepsilon^2 v_\varepsilon(y_\varepsilon)} = o(1),$$

o que prova a (3.46) Segue imediato da de (3.46) que

$$-\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))\left(1 + \frac{\alpha_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))}\right) = \lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))(1 + o(1)),$$

seja (z_ε) uma sequência de pontos em $B(0, \frac{3}{2})$, então por (3.34) e (3.41) temos que

$$\begin{aligned}-v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) &= \frac{\rho_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon - r_\varepsilon z_\varepsilon|^2} \\ &\leq \frac{\rho_\varepsilon(y_\varepsilon)}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon - r_\varepsilon z_\varepsilon|^2} \\ &= \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon - r_\varepsilon z_\varepsilon|^2} \cdot -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x) \\ &\leq \lambda_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon) f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))(1 + o(1)),\end{aligned}$$

como $\alpha_\varepsilon \geq 0$, obtemos de (3.45) que

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) &\leq \lambda_\varepsilon f_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) \\ &= -\Delta v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) \\ &\leq \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon)}{v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)}\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))(1 + o(1)) \\ &\leq C\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon)(1 + o(1)).\end{aligned}$$

Portanto

$$f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)) = O(f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))).$$

Pela propriedade (5) da Definição 0.1, existe $t_0 > 0$, independentemente de ε, tal que

$$-b \leq \frac{h_\varepsilon'(t)}{t h_\varepsilon(t)} \leq b,$$

logo

$$\frac{f_\varepsilon'(t)}{t f_\varepsilon(t)} = \frac{h_\varepsilon'(t)e^{bt^2} + 2bth_\varepsilon(t)e^{bt^2}}{th_\varepsilon e^{bt^2}} = \frac{h_\varepsilon'(t)}{th_\varepsilon(t)} + 2b \geq -b + 2b = b,$$

portanto

$$f'_\varepsilon(t) \geq bt f_\varepsilon(t), \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0.$$

Vamos supor que $\widetilde{w}_\varepsilon \geq 0$, como $v_\varepsilon(y_\varepsilon) \to +\infty$, podemos escrever usando a formula de Taylor

$$\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon))}{f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))} = 1 + \frac{f'_\varepsilon(t_\varepsilon)}{f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))}(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) - v_\varepsilon(y_\varepsilon)), \tag{3.47}$$

para algum $t_\varepsilon \geq v_\varepsilon(y_\varepsilon)$, mas já sabemos que f_ε é crescente em $(0, +\infty)$, logo

$$f'_\varepsilon(t_\varepsilon) \geq bt_\varepsilon f_\varepsilon(t_\varepsilon) \geq bv_\varepsilon(y_\varepsilon) f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon)).$$

Portanto substituindo em (3.47)

$$\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon))}{f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))} \geq 1 + bv_\varepsilon(y_\varepsilon)(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon) - v_\varepsilon(y_\varepsilon)) = 1 + \frac{1}{2}\widetilde{w}_\varepsilon(z_\varepsilon),$$

mas $f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon + r_\varepsilon z_\varepsilon)) = O(f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon)))$, logo (w_ε) é uniformemente limitado em $B(0, \frac{3}{2})$, e de (3.44), já sabemos que $-\Delta\widetilde{w}_\varepsilon$ é limitado, então repetindo a demonstração da Afirmação 3.23, temos que $(\widetilde{w}_\varepsilon)$ é limitado em $C^{0,\eta}(B(0,1))$ e como consequência do Teorema de Ascoli-àrzela, temos passando por uma subsequência que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{w}_\varepsilon = \widetilde{w}_0 \quad \text{em} \quad C(B(0,1)).$$

Calculando $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} -\Delta\widetilde{w}_\varepsilon(y)$ para $y \in B(0,1)$ como feito em (3.30), obtemos que

$$-\Delta\widetilde{w}_\varepsilon(y) = \begin{cases} 2be^{\widetilde{w}_0}, & \text{se} \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)} = +\infty \\ 2b, & \text{se} \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)} = 0 \\ 2b\dfrac{C_0 e^{\widetilde{w}_0(y)} + \alpha}{C_0 + \alpha}, & \text{se} \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon(y_\varepsilon))}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)} = C_0. \end{cases}$$

Em todos os casos, obtemos que $\int_{B(0,1)} -\Delta\widetilde{w}_0 dx > 0$ contradizendo (3.38), finalizando a prova do Lema 3.5. $\square$

Em particular, por regularidade elíptica, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad C_{loc}(\Omega \setminus \{x_0\})$$

Lema 3.6. *Seja* $0 < \beta < 1$, *então*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla(v_\varepsilon - \beta\gamma_\varepsilon)^+|^2 dx \geq \frac{4\pi}{b}(1-\beta),$$

onde u^+ é a parte positiva da função u.

Demonstração. Como $(v_\varepsilon - \beta\gamma_\varepsilon)^+ = 0$ para $x \in \partial\Omega$ e $-\Delta w_\varepsilon(x) = -2b\gamma_\varepsilon \Delta v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)\theta_\varepsilon^2$, temos que

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla(v_\varepsilon - \beta\gamma_\varepsilon)^+|^2 dx &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega -\Delta v_\varepsilon (v_\varepsilon - \beta\gamma_\varepsilon)^+ dx \\ &\geq \liminf \varepsilon \to 0 \int_{B(x_\varepsilon, R\theta_\varepsilon)} -\Delta v_\varepsilon (v_\varepsilon - \beta\gamma_\varepsilon)^+ dx \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{B(0,R)} -\Delta v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x)(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x) - \beta\gamma_\varepsilon)^+ \theta_\varepsilon^2 dx.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla(v_\varepsilon - \beta\gamma_\varepsilon)^+|^2 dx &= \frac{1}{2b} \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{B(0,R)} -\Delta a_\varepsilon \frac{(v_\varepsilon(x_\varepsilon + \theta_\varepsilon x) - \beta\gamma_\varepsilon^+)}{\gamma_\varepsilon} dx \\ &= \frac{1}{2b} \int_{B(0,R)} -\Delta w_0 \frac{(\gamma_\varepsilon - \beta\gamma_\varepsilon)^+}{\gamma_\varepsilon} dx \\ &= \frac{1-\beta}{2b} \int_{B(0,R)} -\Delta w_0 dx,\end{aligned}$$

para todo $R > 0$, fazendo $R \to +\infty$, concluímos a prova do lema, graças a (3.31). □

Corolário 3.1. *Seja*

$$v_{\varepsilon,\beta} = \min(v_\varepsilon, \beta\gamma_\varepsilon), \tag{3.48}$$

então

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \nabla |v_{\varepsilon,\beta}|^2 dx \leq \frac{4\pi}{b}\beta.$$

Lembrando que queremos provar o pronto (4) do Teorema 3.1, isto é, vamos provar que existe $C > 0$, tal que para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in \Omega \setminus \{x_\varepsilon\}$

$$\gamma_\varepsilon v_\varepsilon(x) \leq C \ln\left(\frac{C}{|x_\varepsilon - x|}\right). \tag{3.49}$$

Para provar isto, vamos tomar (y_ε) uma sequência de pontos em Ω e vamos provar que

$$\gamma_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon) = O\left(\ln\left(\frac{1}{x_\varepsilon - y_\varepsilon}\right) + O(1) + +o(\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2\right). \tag{3.50}$$

Vamos considerar dois casos:

Caso 1. Assuma que

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = O(\theta_\varepsilon), \tag{3.51}$$

mas de (3.15) sabemos que

$$\gamma_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon^2. \tag{3.52}$$

Independentemente temos de (3.17) que

$$\theta_\varepsilon^2 = \gamma_\varepsilon(\lambda_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) + \alpha_\varepsilon \gamma_\varepsilon),$$

que se torna da afirmação 3.26

$$\theta_\varepsilon^2 = \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)(1 + o(1)),$$

aplicando o logarítimo, obtemos

$$2\ln\left(\frac{1}{\theta_\varepsilon}\right) = \ln(\lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)) + o(1).$$

Além disso

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{\theta_\varepsilon}\right) &= \ln\left(\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\theta_\varepsilon} \cdot \frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}\right)\\ &= \ln\left(\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\theta_\varepsilon}\right) + \ln\left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}\right),\end{aligned}$$

logo de (3.51)

$$\ln\left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}\right) = \frac{1}{2}\ln(\lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)) + O(1). \tag{3.53}$$

Note que

$$\ln(\lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon f_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)) = \gamma_\varepsilon^2\left(\frac{\ln(\lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon))}{\gamma_\varepsilon^2} + b\right), \tag{3.54}$$

logo pelo ponto (1) do Teorema 3.1 e pela Equação (3.1), temos que

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon \int_\Omega v_\varepsilon h_\varepsilon(v_\varepsilon) e^{bv_\varepsilon^2} dx &= \lambda_\varepsilon \int_\Omega v_\varepsilon f_\varepsilon(v_\varepsilon) dx\\ &= \alpha_\varepsilon \int_\Omega v_\varepsilon^2 dx + \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx\\ &= \frac{4\pi}{b} + o(1).\end{aligned}$$

Seja $\eta > 0$, escreva

$$\frac{4\pi}{b} + o(1) = \lambda_\varepsilon \int_\Omega v_\varepsilon h_\varepsilon(v_\varepsilon) e^{\eta v_\varepsilon^2} e^{(b-\eta)v_\varepsilon^2} dx \leq \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) e^{\eta \gamma_\varepsilon^2} \int_\Omega e^{(b-\eta)v_\varepsilon^2} dx, \tag{3.55}$$

pela Desigualdade de Trudinger-Moser (2) temos que

$$\int_\Omega e^{(b-\eta)v_\varepsilon^2} dx = \int_\Omega e^{(b-\eta)\frac{v_\varepsilon^2}{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}\cdot \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2} dx = O(1), \tag{3.56}$$

pois de (3.14)

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 (b - \eta) \to \frac{4\pi}{b}(b - \eta) \leq 4\pi,$$

aplicando o logarítimo em (3.55) e usando (3.56), obtemos que

$$\ln\left(\frac{4\pi}{b}\right) + o(1) \leq \ln(\lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)) + \eta\gamma_\varepsilon^2 + O(1).$$

Como isto é valido para todo $\eta > 0$, temos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln(\lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon))}{\gamma_\varepsilon^2} \geq 0. \tag{3.57}$$

Usando (3.53) juntamente com (3.54) e (3.57) obtemos que

$$\ln\left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}\right) \geq \frac{b}{2}\gamma_\varepsilon^2 + o(\gamma_\varepsilon^2) + O(1).$$

Desde que $\|v_\varepsilon\|_2 \to 0$ e $\gamma_\varepsilon \to +\infty$, temos que

$$\frac{o(\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2)}{\gamma_\varepsilon^2} = \frac{o(\|v_\varepsilon\|_2)}{\gamma_\varepsilon} = \frac{o(1)}{\gamma_\varepsilon} = o(1).$$

Portanto de (3.52), concluímos que

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(y_\varepsilon)\gamma_\varepsilon \leq \gamma_\varepsilon^2 &\leq \frac{2}{b}\ln\left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}\right) + o(\gamma_\varepsilon^2) + O(1) \\ &= O\left(\ln\left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}\right)\right) + O(1) + o(\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2), \end{aligned}$$

o que prova (3.50).

Caso 2. Vamos assumir que $\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\theta_\varepsilon} \to +\infty$, quando $\varepsilon \to 0$, vamos usar a representação de Green,

$$\gamma_\varepsilon v_\varepsilon(y_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_\Omega G_\varepsilon(x) f_\varepsilon(v_\varepsilon(x))dx, \tag{3.58}$$

onde $G_\varepsilon(x) = G_{\alpha_\varepsilon}(y_\varepsilon, x)$, com G_{α_ε} a função de Green de $-\Delta - \alpha_\varepsilon$ em Ω com condição de Dirichlet na fronteira, como $\alpha_\varepsilon \to \alpha$, com $0 \leq \alpha < \lambda_1(\Omega)$, pode-se mostrar que existe $C > 0$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ e $x \in \Omega$.

$$G_\varepsilon \leq \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{C}{|y_\varepsilon - x|}\right). \tag{3.59}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \Omega_{1,\varepsilon} &= \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon,\beta} \\ \Omega_{2,\varepsilon} &= \Omega_{\varepsilon,\beta} \cap B\left(y_\varepsilon, \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{2}\right) \\ \Omega_{3,\varepsilon} &= \Omega \setminus (\Omega_{1,\varepsilon} \cup \Omega_{2,\varepsilon}), \end{aligned}$$

onde $\Omega_{\varepsilon,\beta} = \{x \in \Omega; v_\varepsilon \geq \beta\gamma_\varepsilon\}$. Vamos fixar $\beta \in (0,1)$ e calculemos

$$I_{2,\varepsilon} = \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_{\Omega_{2,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) G_\varepsilon(x) dx.$$

Pelo Lema 3.5, existe $C > 0$ tal que para qualquer $x \in \Omega_{2,\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon v_\varepsilon(x) f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) &= v_\varepsilon(x)(-\Delta v_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon v_\varepsilon) \\ &= -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon v_\varepsilon^2 \\ &\leq -v_\varepsilon(x)\Delta v_\varepsilon(x) \\ &\leq \frac{c}{|x_\varepsilon - x|}. \end{aligned}$$

Desde que $v_\varepsilon \geq \beta\gamma_\varepsilon$ em $\Omega_{2,\varepsilon}$, temos que

$$\begin{aligned} I_{2,\varepsilon} &= \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_{\Omega_{2,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) G_\varepsilon dx \\ &\leq \lambda_\varepsilon \frac{v_\varepsilon(x)}{\beta} \int_{\Omega_{2,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) G_\varepsilon(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\beta} \frac{1}{|x_\varepsilon - x|} \int_{\Omega_{2,\varepsilon}} G_\varepsilon(x) dx, \end{aligned}$$

mas $x \in B\left(y_\varepsilon, \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{2}\right)$, logo

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon - x| &= |x_\varepsilon - x + y_\varepsilon - y_\varepsilon| \\ &\geq |x_\varepsilon - y_\varepsilon| - |y_\varepsilon - x| \\ &\geq |x_\varepsilon - y_\varepsilon| - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{2} > |x_\varepsilon - y_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Portanto

$$I_{2,\varepsilon} \leq \frac{C}{\beta} \frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2} \int_{B\left(y_\varepsilon, \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{2}\right)} G_\varepsilon(x) dx.$$

Aplicando o logarítmo, obtemos de (3.59) que

$$I_{2,\varepsilon} = O\left(\ln\left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}\right)\right) + O(1). \tag{3.60}$$

Vamos calcular agora

$$I_{3,\varepsilon} = \lambda_\varepsilon \alpha_\varepsilon \int_{\Omega_{3,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) G_\varepsilon(x) dx,$$

e novamente de (3.59), temos que

$$I_{3,\varepsilon} \leq \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_{\Omega_{3,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx \left(O\left(\ln \left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|} \right) \right) + O(1) \right),$$

mas

$$\begin{aligned} \Omega_{3,\varepsilon} &= \Omega \setminus (\Omega_{1,3} \cup \Omega_{2,\varepsilon}) \\ &= \Omega \setminus ((\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon,\beta}) \cup \Omega_{2,\varepsilon}) \\ &= \Omega_{\varepsilon,\beta} \cap (\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon,\beta}) \cup \left(\Omega \setminus B\left(y_\varepsilon, \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{2} \right) \right) \\ &= \Omega_{\varepsilon,\beta} \setminus \left(\Omega_{\varepsilon,\beta} \cap B\left(y_\varepsilon, \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

logo $v_\varepsilon \geq \beta\gamma_\varepsilon$ em $\Omega_{3,\varepsilon}$ e pelo ponto (1) do Teorema 3.1 temos que

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_{\Omega_{3,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx &\leq \lambda_\varepsilon \frac{v_\varepsilon}{\beta} \int_\Omega f_\varepsilon(v_\varepsilon)dx \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \alpha_\varepsilon \int_\Omega v_\varepsilon^2 dx \right) \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{3,\varepsilon} = O\left(\ln \left(\frac{1}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|} \right) \right) + O(1) \tag{3.61}$$

e por último, vamos estimar

$$I_{1,\varepsilon} = \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_{\Omega_{1,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) G_\varepsilon dx,$$

como $v_\varepsilon \leq \beta\gamma_\varepsilon$, temos pelas hipóteses (1) e (2) e (5) da Definição 0.1 que existe $C > 0$ tal que para qualquer $x \in \Omega_{1,\varepsilon}$

$$\frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(x))}{v_\varepsilon(x)} \leq Ce^{2bv_\varepsilon(x)^2}.$$

Portanto, pela desigualdade de Hölder, por (3.59) e pelo fato de que $\lambda_\varepsilon \to 0$, temos que

$$\begin{aligned} I_{1,\varepsilon} &= \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_{\Omega_{1,\varepsilon}} f_\varepsilon(v_\varepsilon(x)) G_\varepsilon(x) dx \\ &= \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon \int_{\Omega_{1,\varepsilon}} \frac{f_\varepsilon(v_\varepsilon(x))}{v_\varepsilon(x)} \cdot v_\varepsilon(x) G_\varepsilon(x) dx \\ &\leq C\lambda_\varepsilon \|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2 \|G_\varepsilon\|_4 \left(\int_{\Omega_{1,\varepsilon}} e^{8bv_\varepsilon^2} dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= o(\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2) \left(\int_{\Omega_{1,\varepsilon}} e^{8bv_\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

mas
$$\int_{\Omega_{1,\varepsilon}} e^{8bv_\varepsilon^2} dx \leq \int_\Omega e^{8bv_{\varepsilon,\beta}^2} dx,$$
onde $v_{\varepsilon,\beta}$ foi definido em (3.48), então escolhendo $\beta < \frac{1}{8}$, temos pela Desigualdade de Trudinger-Moser e pelo Corolário 3.1 que

$$\int_{\Omega_{1,\varepsilon}} e^{8bv_\varepsilon^2} dx \leq \int_\Omega e^{8bv_{\varepsilon,\beta}^2} = \int_\Omega e^{8b\frac{v_{\varepsilon,\beta}^2}{\|v_{\varepsilon,\beta}\|_2^2}\|v_{\varepsilon,\beta}\|_2^2} dx \leq \int_\Omega e^{8b\frac{4\pi}{b}\beta\frac{v_{\varepsilon,\beta}^2}{\|v_{\varepsilon,\beta}\|_2^2}} dx = \int_\Omega e^{4\pi\frac{v_{\varepsilon,\beta}^2}{\|v_{\varepsilon,\beta}\|^2}} = O(1).$$

Portanto,
$$I_{1,\varepsilon} = o(\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2). \tag{3.62}$$

Combinando (3.60), (3.61), (3.62) com (3.58), obtemos (3.50) quando $\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\theta_\varepsilon} \to +\infty$. De (3.50), podemos ver que

$$\begin{aligned}\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2^2 &= O\left(\int_\Omega \ln\left(\frac{1}{|x_\varepsilon - x|}\right)^2 dx\right) + O(1) + o(\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2^2)\\ &= O(1) + o(\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2^2).\end{aligned}$$

Portanto,
$$\|\gamma_\varepsilon v_\varepsilon\|_2^2 = O(1), \tag{3.63}$$

provando que (3.50) implica em (3.49), concluindo a demonstração do ponto (4) do Teorema 3.1, o que conclui a demonstração do Teorema 3.1.

Referências Bibliográficas

[1] Adimurthi; Druet, O. *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 295-322

[2] Bartle, R. G. The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley, New York, 1995.

[3] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer (2011).

[4] Chen, W.; Li, C. *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations* Duke Math. J. **63** (1991) 615-623.

[5] de Figueiredo D. G.; Lions P. L.; Nussbaum, R. D. *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations* J. Math. Pures Appl. **61** (1982) 41-63.

[6] de Figueiredo, D. G.; Miyagaki, O. H.; Ruf, B. *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **3** (1995), 139-153

[7] do Ó, João Marcos; Medeiros, Everaldo; Severo, Uberlandio *A nonhomogeneus elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008) 286-304

[8] Evans, L. C. Partial Differential Equations, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010

[9] Guimarães, W. R. *Sobre uma Classe de Quações Elípticas envolvendo Crescimento Exponencial em* $\mathbb{R}^2$. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba. 2013

[10] Han, Z. C. *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. I.H.P., Analyse Non-linéaire **8** (1991) 159-174.

[11] Kavian, O. Introduction à la Théorie des Points Critiques, Springer.

[12] Lions, P.L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Part I*, Revista Matemática Iberoamericana **1** (1985), 145-201

[13] Moser, J. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J. **20** (1971), 1077-1092.

[14] Trudinger, Neil S. *On Imbedding into Orlicz Spaces and Some Applications*, J. Math. Mech **17** (1967), 473-484.