Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso e Mestrado em Matemática

Fases geométricas associadas a sistemas quânticos na presença de campos gravitacionais.

Demacio Costa de Oliveira

2008

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fases geométricas associadas a sistemas quânticos na presença de campos gravitacionais.

por

Demacio Costa de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. José Gomes de Assis

Maio de 2008

João Pessoa-PB

Fases geométricas associadas a sistemas quânticos na presença de campos gravitacionais.

por

Demacio Costa de Oliveira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. José Gomes de Assis - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Orlando Stanley Juraans - USP

Prof. Dr. Valdir B. Bezerra - UFPB

Prof. Dr. Pedro Antônio Hinojosa Vera - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

.

À Fátima minha mãe. Professora exemplar, modelo de perseverança, humildade, solidadriedade, bondade e amor.

Agradecimentos.

A DEUS, por seu infinito amor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. JOSÉ GOMES DE ASSIS, por sua dedicação na realização deste trabalho, pela experiência adquirida com seus ensinamentos, pela compreensão e pela confiança depositada em mim.

A todos os professores e funcionários da Pós- Graduação do DM-UFPB que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho. A todos meus sinceros agradecimentos.

A minha família, meu pai JOÃO, minha mãe FÁTIMA e meus irmãos: DEMÉTRIO, DEMACLEY, DEJINANY e DENILANY; que como fiéis amigos se fazem presente em tudo, de maneira direta ou indireta. Minha profunda gratidão por muitas alegrias que vocês me presentearam. A minha esposa MICHELLE que por amor tem compreendido as dificuldades, sendo presente em todos os momentos.

A todos os meus familiares, pelo apoio e incentivo.

Aos colegas da Pós- Graduação, pela ótima convivência que tivemos. Que o tempo e a distância não possam interromper o companheirismo.

Aos Professores Orlando Sanley Juraans e Valdir B. Bezerra, pelas correções e intervenções que enriqueceram esse trabalho.

Aos professores do DM-UFPB, especialmente aos Professores: Dr. José Gomes de Assis, Dr. Turíbio José Gomes dos Santos, Me. Valdenilza Ferreira da Silva, Dr. Ana Maria Amarillo Bertone, Dr. Maria Lewtchuk Espíndola, Me. Abdoral de Souza Oliveira, Dr. Antônio de Andrade e Silva, Dr. Fernando Antônio X. de Souza, Dr. Everaldo Souto de Medeiros, Dr. Roberto Callejas Bedregal e Dr. Pedro Hinojosa Vera.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Inicialmente apresentamos os fundamentos matemáticos utilizados para descrever fases geométricas, associadas a sistemas quânticos sujeitos a ação de um campo gravitacional. Particularmente, consideramos o espaço-tempo da corda cósmica quiral. Em seguida, generalizamos para o caso de múltiplas cordas cósmicas quirais. Por fim, apresentamos um método para o cálculo da holonomia, que corresponde a fase de Berry, o método do formalismo de duas componentes, e o utilizamos para obter a fase Berry no espaço-tempo de uma corda cósmica com rotação! Os problemas em questão são resolvidos através de métodos Matemáticos, pois a fase geométrica, na verdade, origina-se da holonomia no espaço de parâmetro em função da curva e da conexão em fibrado.

Palavras-Chave:

Holonomia, Fase geométrica, Corda cósmica quiral, Formalismo de duas componentes.

Abstract

Firsten, we present the mathematical foundations used to describe geometrical phases associated to, quantum systems subject to the action of a gravitational field. Particularly, we consides the space-time of a cosmic string chiral. We then generalize to the case of multiple chiral cosmic strings. Finally, we present a method to calculate the holonomy, which is the phase of Berry, the formalism of two components, and used it to obtain the Berry phase in the space-time of a cosmic string with rotation. These problems under question are solved by mathematical methods which is demanded by the fact that the geometric phase originates from the holonomy in the space of parameter and depends on the curve and on the connection bundles.

Key-Words:

Holonomy, Geometric phase, Chiral cosmic string, Formalism of two components.

Sumário

Notações e Simbologias

- $df_p u$ é a diferencial de f na direção u.
- $g_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz da métrica..
- $\Bbbk \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ corpo sobre os reais ou complexos.
- T^*P espaço das 1-formas, também chamado espaço dual.
- $B(H, K)$ é o conjunto formado por todas as transformações lineares e limatadas, onde H e K são Espaços de Hilbert.
- $|\cdot\rangle$ ket: são os vetores do espaço ket.
- $\langle\cdot|$ bra: são os vetores do espaço bra.

.

Introdução

Pesquisas em Gravitação e Cosmologia centram-se na natureza do espaço-tempo. Com esta finalidade, a gravitação tem feito previsões sobre a geometria do espaço-tempo. Uma ferramenta importante para investigar a solução da equação de Schröndinger com o Hamiltoniano explicitamente dependendo do tempo é a aproximação quântica adiabática [2]. Há numerosas publicações sobre este assunto e suas aplicações. Um dos mais notáveis foi o artigo de Berry, sendo o pioneiro sobre a fase geométrica [13].

A fase de Berry é um conceito geométrico ligado ao transporte paralelo em uma superfície curva. O transporte paralelo no espaço dos estados da Mecânica Quântica é dado pela equação adiabática. Quando uma fase for transportada paralelamente ao longo de uma curva fechada no espaço dos estados da Mecânica Quântica, ela pode no final ser distinta do valor inicial. A diferença entre os valores final e inicial denomina-se fase de Berry. O profundo significado geométrico por trás da fase de Berry foi reconhecido por Simon [4], que observou que a origem desta fase é atribuída à holonomia no espaço de parâmetros.

Com o intuito de tornarmos este trabalho o mais didático possível e desfrutarmos da beleza e da riqueza matemática empregada neste trabalho, o dividimos da seguinte forma: no capítulo I, apresentamos diversos conceitos matemáticos fundamenteais para o nosso estudo, onde damos ênfase às notações e resultados que funcionam como ferramentas para descrever tais modelos inerentes aos defeitos topológicos em geral e, em particular, os modelos para sistemas quânticos sujeitos à geometria de campos gravitacionais; no capítulo II, abordamos alguns conceitos que nos conduzirão a uma melhor compreensão da fase geométrica, daí seguimos os passos de Corrichi e Pierri para obtermos a fase geométrica no espaço tempo de uma corda cósmica quiral; no capítulo III, generalizamos a aplicação do capítulo anterior para múltiplas cordas cósmicas quirais, com a condição de que a fase geométrica adquirida por um vetor quando transportado na presença de duas cordas, é igual à adquirida por este vetor quando transportado na presença de uma corda cujo espaço-tempo possui uma deficiência angular que corresponde à soma das deficiências angulares dos espaços-tempos de cada uma das cordas; no capítulo IV, desenvolvemos o método do formalismo de duas componentes para a equação de Klein-Gordon, método este que aplicamos ao espaço-tempo de uma corda cósmica quiral e concluímos analisando as vantagens destes métodos.

Capítulo 1

Pré-requisitos Matemáticos

> “ O milagre da adequação da linguagem matemática para
> formulação das leis fisicas é uma dádiva maravilhosa, que
> ou não entendemos, ou não merecemos. Sejamos gratos
> por ela e torçamos para que permaneça válida na pesquisa
> futura e para que, bem ou mal, se estenda a outros ramos
> do saber, para nossa satisfação, embora talvez também
> para nossa frustação”
>
> Eugene Wigner

Neste capítulo apresentaremos as notações e resultados matemáticos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, introduzindo os conceitos de Espaços de Hilbert, Cálculos em Variedades, Grupos e Álgebras de Lie, Fibrados e Holonomia. Estes conceitos funcionam como ferramentas para descrever os modelos matemáticos inerentes aos defeitos topológicos em geral. A utilização desses variados conceitos é devido de se combinar a Geometria Riemanniana com a Álgebra e Grupos de Lie.

1.1 Espaço de Hilbert

J. Von Neumann, em 1930, introduziu a definição abstrata de espaço de Hilbert, a qual foi fundamental na formulação da mecânica quântica.

1.1.1 Produto Interno

Definição 1.1 *Um produto interno no espaço vetorial V é um funcional $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, de maneira que para quaisquer $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{C}$, temos*

i) $\langle au + v, w \rangle = \overline{a} \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

ii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

iii) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

onde $\overline{a}$ denota o complexo conjugado do escalar a.

O produto interno é a generalização do produto escalar do $\mathbb{R}^n$. Tal produto torna-se importante, pois, a partir dele obtemos uma norma, métrica e também o utilizamos no estudo do complemento ortogonal de um espaço vetorial.

Definição 1.2 *Um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{C}$ dotado de um produto interno é chamado espaço com produto interno.*

Exemplos 1 *Vejamos alguns espaços com produto interno:*

(i) No caso do $\mathbb{R}^n$, temos $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$.

(ii) No espaço $L^2(V) = \left\{ f : f : V \longrightarrow \mathbb{C} \text{ é mensuravel e } \left(\int_V |f|^2 d\mu \right)^{1/2} < \infty \right\}$, definimos o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_V \overline{f} g d\mu$.

Definição 1.3 *O espaço de Hilbert é um espaço com produto interno que é completo com a respectiva métrica associada com a norma induzida pelo produto interno.*

Definição 1.4 *Se H e K são espaços de Hilbert complexos e $T \in B(H, K)$, então o operador $T^* \in B(K, H)$ tal que*

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle \qquad \forall u \in H \text{ e } \forall v \in K$$

é chamado o adjunto de T.

Definição 1.5 *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T \in B(H)$, então, T é auto-adjunto ou Hermiteano se $T = T^*$.*

1.2 Cálculos em Variedades

1.2.1 Variedade Diferenciável

Definição 1.6 *Uma variedade diferenciável M de classe C^∞, de dimensão n, é um conjunto de pontos juntamente com uma família de pares $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, onde $\alpha \in \Lambda$ um conjunto de índices que devem sastifazer as seguintes propriedades:*

(i) U_α são conjuntos abertos que cobrem M, isto é, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, e φ_α é um homeomorfismo de U_α em um aberto U'_α de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Dados U_α e U_β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a aplicação $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta)$ é de classe C^∞.

Uma variedade é um espaço topológico que localmente pode ser visto como $\mathbb{R}^n$. No entanto, não podemos afirmar que isto aconteça globalmente. Ao introduzir uma carta, damos uma estrutura euclidiana para uma variedade, que nos possibilita usar o cálculo convencional de várias variáveis.

Exemplos 2 *Vejamos alguns exemplos de variedades:*

(i) O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$;

(ii) A esfera unitária $S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$;

(iii) O fibrado tangente $TM = \{(p, v)\,; p \in M, v \in T_pM\}$, onde M é uma variedade e T_pM é o plano tangente a M no ponto p. Ao longo deste capítulo vamos aprofundar nossos conhecimentos sobre fibrados.

Observação 1.1 *A partir deste momento denotaremos uma variedade diferenciável apenas por "variedade".*

1.2.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.7 *Uma métrica Riemaniana em uma variedade M é uma lei que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot \rangle_p$ em T_pM que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x\colon U' \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x\,(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in x(U')$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, ..., 1, ..., 0)$, então,*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_q \equiv g_{ij}\,(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.1}$$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_q \equiv g_{ij}\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ *é uma função diferenciável em U'.*

Exemplos 3 *Vejamos algumas métricas:*

(i) No $\mathbb{R}^n$ identificamos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ com $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$. Deste modo, a métrica $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Chamada de métrica euclidiana.

(ii) Dada uma imersão $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ entre duas variedades sendo que N é munida de uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ podemos definir uma métrica $(,)$ em M do seguinte modo

$$(u, v)_p := \langle df_p u, df_p v \rangle_{f(p)} \qquad u, v \in T_pM. \tag{1.2}$$

1.2.3 Conexão Riemanniana

Consideramos as variedades como sendo de Hausdorff e com base enumerável. Isto nos garante a existência de métricas Riemannianas nas variedades. Nosso objetivo é definir uma derivação sobre campos de vetores de uma variedade M. Isto é feito através da noção de conexão afim. Denotaremos o conjunto de todos os campos de vetores definidos em M por $\mathfrak{X}(M)$, e o conjunto de funções diferenciáveis por $\mathcal{F}(M)$.

Definição 1.8 *Uma aplicação* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *definida por* $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ *que possui as seguintes propriedades:*

(i) $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \forall a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \forall f, g \in \mathcal{F}(M)$;

(iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y, \forall f \in \mathcal{F}(M)$

é chamada de conexão afim da variedade M.

Teorema 1.1 *Se* M^n *é uma variedade* C^∞*, então, existe uma conexão afim* ∇ *na variedade* M*.*

Prova: Ver [18].

Exemplo 1.1 *Consideremos os campos de vetores* V *e* W*, tais que* $V = (y-x)\,e_1 + xye_3$ *e* $W = x^2e_1 + yze_3$ *onde o conjunto* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *forma uma base ortonormal em* $\mathbb{R}^3$*. Calculemos* $\nabla_V W$ *no ponto* $p = (2,1,0)$*. Para tanto, identificamos* $e_i[f] \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ *e aplicamos as propriedades da conexão. Vejamos,*

$$\begin{aligned}
\nabla_V W &= \nabla_{(y-x)e_1 + xye_3} x^2e_1 + yze_3, \quad \text{como } \nabla_{e_j} e_i = 0, \text{ em } \mathbb{R}^3 \text{ para todo } i \text{ e } j. \\
&= (y-x)\,e_1\left[x^2\right]e_1 + xye_3\,[yz]\,e_3 \\
\nabla_V W &= (y-x)\,2xe_1 + xy^2e_3 \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

$$\nabla_V W\,(p) = -4e_1\,(p) + 2e_3\,(p)\,. \qquad (1.4)$$

A partir de uma conexão afim sobre uma variedade, podemos definir a derivada covariante de campos de vetores ao longo de curvas de M.

Teorema 1.2 *Dada uma variedade M^n munida de uma conexão afim ∇. Para cada curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, a conexão ∇ determina um único operador (a derivada covariante)*

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma) \tag{1.5}$$

que possui as seguintes propriedades :

(i) $\frac{D}{dt}(aX + bY) = a\frac{D}{dt}X + b\frac{D}{dt}Y$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{D}{dt}X$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$;

(iii) Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então a restrição X_t de X ao longo de γ satisfaz $\frac{D}{dt}X_t = \nabla_{\gamma'(t)}X$.

Prova: Ver [18].

Definição 1.9 *Seja M uma variedade com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ é dito paralelo se $\frac{D}{dt}V(t) = 0$ para todo $t \in I$.*

Exemplo 1.2 *Consideremos M uma variedade com produto interno e sejam X e Y campos de vetores paralelos ao longo de $\alpha : I \longrightarrow M$, então*

(i) $\langle X(t), Y(t) \rangle$ é constante;

(ii) $|X(t)|$ e $|Y(t)|$ são constantes;

(iii) O ângulo entre $X(t)$ e $Y(t)$ é constante.

Teorema 1.3 *Seja M^n uma variedade com uma conexão afim ∇. Seja $\gamma : I \longrightarrow M$ uma curva em M e $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$. Então, existe um único campo de vetores paralelo V_t ao longo de $\gamma(t)$ tal que $V_{t_0} = v_0$. Chama-se V_t o transporte paralelo de v_0 ao longo de $\gamma(t)$.*

Prova: Ver [18].

1.3 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Definição 1.10 *Um grupo de Lie é uma variedade G, com uma estrutura de grupo de tal modo que as aplicações*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & g \cdot h \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} Inv : & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array} \tag{1.6}$$

são diferenciáveis.

Este importante conceito matemático, realiza a proeza de juntar numa mesma estrutura propriedades das grandes áreas Matemática: Álgebra, Análise e Geometria. Podemos entender que um grupo de Lie G é uma variedade com uma estrutura de grupos. Por outro lado, Álgebra de Lie é associada ao espaço tangente T_pG num ponto $p \in G$.

Notemos as aplicações

$$\begin{array}{rccc} L_g : & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & g \cdot h \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} R_g : & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & h \cdot g \end{array} \tag{1.7}$$

são difeomorfismos, para cada $g \in G$. Estas aplicações são chamadas respectivamente *translações à esquerda* por g e *translação à direita* por g. Indicaremos o elemento identidade de G por e. A aplicação dL_g é induzida por L_g e será denotada como L_{g*} tal que $L_{g*} : T_h(G) \longrightarrow T_{gh}(G)$.

Exemplo 1.3 *Vejamos alguns exemplos de Grupos de Lie:*

(i) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a estrutura de grupo da soma e a estrutura diferencial usual é um grupo de Lie. De fato, considere em $\mathbb{R}$ a seguinte estrutura diferencial $F = \{(a,b), Id\}$ e as aplicações diferenciáveis

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} Inv : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -x \end{array} \tag{1.8}$$

deste modo, $\mathbb{R}$ é um grupo de Lie.

(ii) Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. Consideremos em S^1 a estrutura de grupo multiplicativo: se α, $\beta \in S^1$, então $\alpha \cdot \beta \in S^1$ é o produto dos números complexos α e β. Como as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} inv: & \mathbb{C} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \tag{1.9}$$

são diferenciáveis e suas restrições a S^1 têm imagem em S^1, então S^1 é um grupo de Lie.

(iii) O produto $G \times H$ de dois grupos de Lie G e H é um grupo de Lie com a estrutura de variedade produto e com a estrutura de produto direto de grupos:

$$(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2) \tag{1.10}$$

quaisquer que sejam g_1, $g_2 \in G$ e h_1, $h_2 \in H$. Consequentemente $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ e $T^n = S^1 \times ... \times S^1$ são grupos de Lie.

Definição 1.11 *Uma ação de um grupo G num conjunto não-vazio M é uma função*

$$\begin{array}{rccccc} \rho & : & G \times M & \longrightarrow & M & \\ & & (g, x) & \mapsto & \rho(g, x) & := \; gx \end{array}$$

tal que:

(i) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, $\forall h$, $g \in G$ e $x \in M$;

(ii) $e \cdot x = x$, $e \in G$ e $x \in M$.

Definição 1.12 *A classe de equivalência de curvas fechadas, denotada por $[\alpha]$, é chamada de classe homotópica de α. O produto entre curvas fechadas define o produto no conjunto das classes homotópicas das curvas fechadas.*

Definição 1.13 *Consideremos M um espaço topológico. O conjunto das classes homotópicas das curvas fechadas sobre $x_0 \in M$ é denotado por $\pi_1(M, x_0)$ e chamado o grupo fundamental (ou primeiro grupo homotópico) de M sobre x_0. O produto homotópico é definido por*

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta] \, .$$

1.3.1 Grupos Lineares

Considere o seguinte conjunto $GL(n,\Bbbk) = \{A \in \Bbbk^n \times \Bbbk^n; \det(A) \neq 0\}$, onde $\Bbbk = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Então, os subconjuntos

$$GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2},\ GL(n,\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{(2n)^2},\ GL(n,Quat) \subset \mathbb{R}^{(4n)^2} \tag{1.11}$$

são abertos e são grupos de Lie com a operação de multiplicação de matrizes. De uso mais frequentes, temos:

(i) O *grupo ortogonal* $O\,(n)$,

$$O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}); A \cdot A^t = I\},$$

onde A^t é a matriz transposta de A;

(ii) O*grupo unitário* $U(n)$,

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}); A \cdot A^* = I\}, \tag{1.12}$$

com A^* indicando a adjunta de A;

(iii) O *grupo simplético* $S_p(n)$,

$$S_p(n) = \{A \in GL(n,Quat); A \cdot \overline{A}^t = I\}$$

se $A = (a_{kl})$, $a_{kl} \in Quat$, então $\overline{A} = (\overline{a}_{kl})$.

É possível mostrar que os três últimos subgrupos são subvariedades de $GL(n,\Bbbk)$. Por exemplo, seja $M(n)$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$ e δ_n o subconjunto das matrizes reais simétricas ($A = A^t$). Definamos a função $f : M(n) \longrightarrow \delta_n$ por $f(A) = A \cdot A^t$. A função f está bem definida, pois $[f(A)]^t = A \cdot A^t = f(A)$ implica que $f(A) \in \delta_n$, a diferenciabilidade de f é verificada dotando $M\,(n)$ com a estrutura do $\mathbb{R}^{n^2}$. Além disso, $f^{-1}(I) = O(n)$; para mostrar que $O(n)$ é subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$, basta mostrar que I é valor regular de f . Com efeito, se X, $H \in M(n) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial H}(X) &= \lim_{r \to 0} \frac{f(X + rH) - f(X)}{r} \\
&= \lim_{r \to 0} \frac{(X + rH)(X + rH)^t - XX^t}{r} \\
&= \lim_{r \to 0} \frac{XX^t + rXH^t + rHX^t + r^2 HH^t - XX^t}{r} \\
\frac{\partial f}{\partial H}(X) &= XH^t + HX^t
\end{aligned} \tag{1.13}$$

dados $X \in f^{-1}(I)$ e $S \in \delta_n$, escolhamos $Y = \frac{SX}{2} \in M(n)$. Pelo visto acima,

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(X) = X \left(\frac{SX}{2} \right)^t + \left(\frac{SX}{2} \right) X^t = \frac{XX^t S^t}{2} + \frac{SXX^t}{2} = \frac{S^t + S}{2} = S. \tag{1.14}$$

Decorre daí que $\frac{\partial f}{\partial H}(X)$ é sobrejetiva para $X \in f^{-1}(I)$. Isto é, I é valor regular de f, o que prova a afirmação feita.

Definição 1.14 *Dizemos que um campo X (não necessariamente diferenciável) de vetores tangentes a um grupo de Lie G é invariante a esquerda quando $X_{gh} = L_{g*} \cdot X_h$, quaisquer que sejam $g, h \in G$, onde X_g indica o valor do campo X no ponto g de G. O conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G será denotado por LG.*

Um campo invariante à esquerda fica completamente determinado quando se conhece X_e, pois $X_g = L_{g*} \cdot X_e$. É claro que LG é um espaço vetorial e temos

(i) A aplicação

$$\begin{array}{rccc}
\alpha : & LG & \longrightarrow & T_e(G) \\
& X & \longmapsto & X_e
\end{array} \tag{1.15}$$

onde $T_g(G)$ indica o espaço tangente a G no ponto g, é um isomorfismo entre espaços vetorias;

(ii) Se $X \in LG$, então X é diferenciável.

Definição 1.15 *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial ¥, com uma operação bilinear* $[,] :$ ¥ $\times$ ¥ $\longrightarrow$ ¥ *chamado o cochete de Lie, satisfazendo*

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Anticomutatividade)

(ii) $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ (Identidade de Jacobi), para todo X, Y, $Z \in$ ¥.

Exemplo 1.4 *O conjunto* $gl(n, \mathbb{R})$ *de todas as matrizes* $n \times n$ *reais é uma álgebra de Lie com a seguinte operação*

$$[A, B] = AB - BA \tag{1.16}$$

onde AB *indica o produto usual de matrizes.*

Sejam G um grupo de Lie e LG o espaço dos campos invariantes à esquerda. Se mostrarmos que LG é fechado relativamente a operação $[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$, teremos induzido uma estrutura de álgebra de Lie em LG. Devemos provar que $[X, Y]\,xy = dL_x\,[X, Y]_y$, para todos X, $Y \in LG$ e x, $y \in G$. Vamos mostrar isto num contexto um pouco mais geral e para tanto precisamos de um novo conceito e de uma Proposição.

Definição 1.16 *Sejam* M*,* N *variedades e seja* $\varphi : M \longrightarrow N$ *de classe* C^∞*. Diremos que os campos* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *são* φ*-relacionados se* $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$.

Proposição 1.1 *Seja* $\varphi : M \longrightarrow N$ *de classe* C^∞*. Se* X*,* $X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ *são* φ*-relacionados respectivamente com* Y*,* $Y_1 \in \mathfrak{X}(N)$ *então* $[X, X_1]$ *é* φ*-relacionados com* $[Y, Y_1]$*.*

Demonstração. *Devemos mostrar que* $d\varphi \circ [X, X_1] = [Y, Y_1] \circ \varphi$*. Sejam* $m \in M$ *e* $f \in C^\infty(N)$*, onde* $C^\infty(N)$ *indica as funções de classe* C^∞ *de* N *em* $\mathbb{R}$*. Mostramos que*

$$d\varphi\left([X, X_1]_m\right)(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(m)}\,(f) \tag{1.17}$$

temos que

$$
\begin{aligned}
d\varphi\left([X, X_1]_m\right)(f) &= [X, X_1]_m\,(f \circ \varphi) \\
&= X_m(X_1(f \circ \varphi)) - X_1\mid_m (X(f \circ \varphi)) \\
&= X_m((d\varphi \circ X_1)(f)) - X_1\mid_m ((d\varphi \circ X)(f)) \\
&= X_m(Y_1(f) \circ \varphi) - X_1\mid_m (Y(f) \circ \varphi) \\
&= d\varphi(X_m)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1\mid_m)(Y(f)) \\
&= Y_{\varphi(m)}(Y_1(f)) - Y_1\mid_{\varphi(m)} (Y(f)) \\
d\varphi\left([X, X_1]_m\right)(f) &= [Y, Y_1]_{\varphi(m)}\,(f) \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

■

Corolário 1.1 *Se X, $Y \in LG$, então $[X, Y] \in LG$, assim, LG é uma álgebra de Lie. Isto é, a álgebra de Lie é fechada sobre o colchete de Lie.*

Observação 1.2

(i) Sendo $\{T_\alpha\}$ um conjunto de geradores de ¥, $[T_\alpha, T_\beta] = f^\gamma_{\alpha\beta}$ onde $f^\gamma_{\alpha\beta}$ são chamadas de constantes de estruturas.

(ii) A ação adjunta $ad_g : G \longrightarrow G$ é definida por $ad_g(h) = ghg^{-1}$.

(iii) A aplicação tangente de ad_g é chamada aplicação adjunta sendo denotada por $Ad_g : T_h(G) \longrightarrow T_{ghg^{-1}}(G)$. Se restrita a $T_e(G) \simeq$ ¥ a aplicação Ad_g é definida de ¥ sobre ela mesma, $Ad_g :$ ¥ $\longrightarrow$ ¥ tal que $Ad_g(X) = gXg^{-1}$, $X \in$ ¥.

1.4 Fibrados

Definição 1.17 *A estrutura de fibrado diferenciável em E é a sêxtupla (E, π, M, F, G, Ψ), onde*

1. E - variedade de classe C^∞;

2. M - o espaço quociente, ou seja, $M = E/R$ tal que R é uma relação de equivalência em E, tal que, $R = \{(x_1, x_2) \in E \times E; \exists g \in G; x_1 \cdot g = x_2\}$. Tornando M uma variedade de dimensão n;

3. π - é a projeção definida de E em M, ou seja, $\pi : E \longrightarrow M$, $\pi(x) = \overline{x}$ é C^∞ e têm posto n;

4. F - subvariedade de classe C^∞ tal que $F \subset E$;

5. G - é um grupo de Lie.

6. Ψ - é uma família de difeomorfismos satisfazendo às seguintes propriedades:

(i) Se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma cobertura aberta de M, então $\forall x \in M$, $\exists U_\alpha(x)$ e $\exists \Psi_\alpha \in \Psi$ tal que

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \tag{1.19}$$

$$\Psi_\alpha(x, y) = x,\ \forall (x, y) \in U_\alpha \times F \tag{1.20}$$

$(U_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha\in I}$ é a representação de coordenadas para E. A função Ψ_α é chamada de trivialização local.

(ii) $\forall (U_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha\in I}$,

$$\Psi_{\alpha,x} : F \longrightarrow F_x = \{y \in E; \pi(y) = x\} \tag{1.21}$$

com $\Psi_{\alpha,x}(y) = \Psi_\alpha(x, y)$ é bijetora para $y \in F$ e $x \in U_\alpha$.

Nesta seção introduziremos as definições básicas de fibrado, pullback em fibrado, fibrado principal e conexão em fibrado. Um fibrado é um espaço topológico que localmente pode ser visto como um produto direto de dois outros espaços topológicos. O que nos motiva a estudá-los aqui é que muitas teorias em Física, como a relatividade geral e teorias de gauge, são descritas naturalmente em termos de fibrados.

Observação 1.3 *Frequentemente usamos a notação* $E \xrightarrow{\pi} M$ *ou simplesmente* E *para denotar um fibrado* (E, π, M, F, G, Ψ).

A definição de fibrado mostra é independente de uma cobertura especial $\{U_\alpha\}$ de M. Na literatura matemática a definição acima é empregada para definir um fibrado de coordenadas $(E, \pi, M, F, G, \{\Psi_\alpha\}, \{U_\alpha\})$. Dois fibrados de coordenadas $(E, \pi, M, F, G, \{\Psi_\alpha\}, \{U_\alpha\})$ e $(E, \pi, M, F, G, \{\Phi_\alpha\}, \{V_\alpha\})$ são ditos equivalentes se $(E, \pi, M, F, G, \{\Psi_\alpha\} \cup \{\Phi_\alpha\}, \{U_\alpha\} \cup \{V_\alpha\})$ é novamente um fibrado de coodernada.

Seja E um fibrado. Uma seção $s : M \longrightarrow E$ é qualquer aplicação C^∞ que satisfaz $\pi \circ s = Id_M$. Notemos que para $x \in M$, e então $s(x) \in F_x$. O conjunto das seções de M é denotado por $\Gamma(M, E)$. Se s está definida em $U \subset M$, onde U é um aberto; dizemos que s é uma seção local.

Se $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, o difeomorfismo $t_{ij}(x) = \Psi_{i,x}^{-1} \circ \Psi_{j,x} : F \longrightarrow F_x \in G$, onde t_{ij} é chamado de função de transição e F_x é chamada de fibra de x, $F_x = \pi^{-1}(x)$, $\forall x \in M$, que é uma subvariedade fechada de E.

1.4.1 Pullback em Fibrados

Consideremos $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado com uma fibra F. Se a aplicação $f : N \longrightarrow M$ é dada, o par (E, f) define um novo fibrado sobre N com a mesma fibra F. Considere f^*E sendo um subespaço de $N \times E$, que consiste do ponto (p, u) tal que $f(p) = \pi(u)$, este subespaço é definido como o *pullback* de E por f. A fibra F_p de f^*E é justamente uma cópia da fibra $F_{f(p)}$ de E. Se definir-mos $f^*E \xrightarrow{\pi_1} N$ por $\pi_1(p, u) = p$ e $\pi_2 : f^*E \longrightarrow E$ por $\pi_2(p, u) = u$, o pullback f^*E pode ser dotado com uma estrutura de fibrado e nós obtemos a seguinte aplicação de fibrado.

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_2 & & \\ & f^*E & \longrightarrow & E & \\ \pi_1 & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & N & \longrightarrow & M & \\ & & f & & \end{array} \tag{1.22}$$

A comutatividade do diagrama segue pois $\pi(\pi_2(p, u)) = \pi(u) = f(p) = f(\pi_1(p, u))$ para $(p, u) \in f^*E$. Em particular, se $N = M$ e $f = id_M$, então os dois fibrados f^*E e E são equivalentes.

1.4.2 Fibrado Principal

Um tipo de fibrado fundamental para Teorias de gravitação é o Fibrado Principal, que num certo sentido é a generalização de grupos de Lie. Um fibrado principal têm uma fibra F que é idêntica com a estrutura do grupo G. Ele é denotado por $P(M, G)$, sendo também chamado um fibrado G sobre M.

As funções de transições atuam sob a fibra à esquerda. Adicionalmente, definimos a ação de G sobre F à direita. Considere $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_1)$ sendo a trivialização local dada por $\phi^{-1}(u) = (p, g)$, onde $u \in \pi^{-1}(U_1)$ e $p = \pi(u)$. A ação a direita de G sobre $\pi^{-1}(U_1)$ é definida por $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$, que é, $ua = \phi_i(p, g_i a)$. Para qualquer $a \in G$ e $u \in \pi^{-1}(p)$. Desde que a ação à direita comute com a ação a esquerda, esta definição é independente da trivialização local. De fato, se $p \in U_i \cap U_j$,

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a). \tag{1.23}$$

A multiplicação à direita é definida sem referência a trivialização local. Esta é denotada por $P \times G \longrightarrow P$ ou $(u, a) \longrightarrow ua$. Note que $\pi(ua) = \pi(u)$. A ação à direita de G sobre $\pi^{-1}(p)$ é transitiva desde que G atue sobre G transitivamente sobre à direita e $F_p = \pi^{-1}(p)$ seja difeomorfica à G. Então para quaisquer $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$, nós podemos construir a todas as fibras como $\pi^{-1}(p) = \{ua; a \in G\}$. A ação à direita também é livre, se $ua = u$ para algum $u \in P$, logo $a = e$, $e \in G$. Em efeito, se $u = \phi_i(p, g_i)$, nós temos $\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i)a = ua = u = \phi_i(p, g_i)$. Desde que ϕ_i é bijetiva, temos $g_i a = g_i$, isto é, $a = e$.

Dada a seção $s_i(p)$ sobre U_i, definimos a trivialização local $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ como a seguir. Para $u \in \pi^{-1}(U_i)$, $p \in U$, há um único elemento $g_u \in G$ tal que $u = s_i(p) g_u$. Então, definimos ϕ_i por $\phi^{-1}(u) = (p, g_u)$. Nesta trivialização local, a seção $s_i(p)$ é expressada como $s_i(p) = \phi_i(p, e)$. Esta trivialização local é chamada de trivialização canônica. Por definição $\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e)g = s_i(p)g$. Se $p \in U_i \cap U_j$, duas seções $s_i(p)$ e $s_j(p)$ são relacionadas por uma função de transição $t_{ij}(p)$ como segue

$$\begin{aligned} s_i(p) &= \phi_i(p,e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)) \\ &= \phi_j(p,e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Exemplo 1.5 *Considere P sendo um fibrado principal com fibra $U(1) = S^1$ e o espaço base S^2. Este fibrado principal representa a topologia ambiente do monopolo magnético. Considere $\{U_N, U_S\}$ sendo uma cobertura de S^2 pelo usual ângulo polar, nós temos $U_N = \{(\theta, \alpha); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon, 0 \leq \beta < 2\pi\}$ e $U_S = \{(\theta, \alpha); \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \beta < 2\pi\}$. A intercessão $U_N \cap U_S$ é uma faixa que é essencialmente o equador. Considere ϕ_N e ϕ_S sendo a trivialização local tal que $\phi_N^{-1}(u) = (p, \exp(i\alpha_N))$ e $\phi_S^{-1}(u) = (p, \exp(i\alpha_S))$, onde $p = \pi(u)$. Tomando uma função de transição t_{NS} da forma $e^{in\beta}$, onde n deve ser inteiro. Podemos definir unicamente $t_{NS}(p)$ sobre o equador, desde que t_{NS} aplica o equador S^1 para $U(1)$, este inteiro caracteriza o grupo de homotopia $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$. As fibras coordenadas α_N e α_S são relacionadas sobre o equador como $e^{i\alpha_N} = e^{in\beta}e^{i\alpha_S}$. Se $n = 0$, a função de transição é o elemento unitário de $U(1)$ e nós temos um fibrado trivial $P = S^2 \times S^1$. Se $n \neq 0$, o $U(1)$-fibrado P_n é curvado. É impressionante que a estrutura topológica de um fibrado seja caracterizado por um número inteiro.*

Desde que $U(1)$ seja abeliano, a ação à direita e a ação à esquerda são equivalentes. De acordo com a ação à direita $g = e^{i\lambda}$, nós temos $\phi_N^{-1}(ug) = (p, e^{i(\alpha_N + \lambda)})$ e $\phi_S^{-1}(ug) = (p, e^{i(\alpha_S + \lambda)})$.

1.4.3 Conexão em Fibrados

Primeiramente definimos conexão sobre um fibrado principal. Sua definição abstrata é realizada concretamente introduzindo a conexão de 1-forma cuja forma local é bem conhecida para os físicos como um potêncial de gauge. Há várias definições equivalentes de uma conexão sobre um fibrado principal. A maneira que iremos trabalhar é baseada na sepação do espaço tangente T_pM em subespaços verticais e horizontais. Embora esta aproximação pareça ser abstrata, ela é vantajosa comparada com outras aproximações, pois ela esclarece o quadro geométrico envolvido e é definida independentemente das trivializações locais espaciais. A conexão é também definida como 1-forma G-valuada que satisfaz certos axiomas. Estas definições são mostradas ser equivalentes.

Consideremos u sendo um elemento de um fibrado principal $P(M, G)$ e G_p sendo a fibra em $p = \pi(u)$. O subespaço vertical V_uP é um subespaço de T_uP que é tangente a G_p em u. Vejamos a construção de um plano vertical V_uP. Tomando um elemento $X \in$ ¥. Pela ação à direita

$$R_{\exp(tX)}u = u \exp(tX) \tag{1.25}$$

a curva através de u é definida em P. Desde que $\pi(u) = \pi(u \exp(tX)) = p$, esta curva existe dentro dos limites de G_p. Defina um vetor $X^{\#} \in T_uP$ por

$$X^{\#} f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp(tX)) \bigg|_{t=0} \tag{1.26}$$

onde $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável arbitrária. O vetor $X^{\#}$ é tangente para G_p em u, daí $X^{\#} \in V_uP$. Deste modo definimos um vetor $X^{\#}$ em cada ponto de P e construimos um campo de vetor $X^{\#}$, chamado o campo fundamental de vetor gerado por X. Há um isomorfismo de espaço vetorial $\#$: ¥ $\longrightarrow V_uP$ dado por $X \longrightarrow X^{\#}$. O subespaço horizontal H_uP é o complemento de V_uP em T_uP, e este, é definido unicamente no caso de existir uma conexão em P.

Definição 1.18 *Uma conexão sobre P é uma única separação do espaço tangente T_uP nos subespaços vertical e horizontal, tais que*

(i) $T_uP = H_uP \oplus V_uP$

(ii) Um campo de vetor C^∞ X sobre P é separado em campos de vetores C^∞ $X^H \in H_uP$ e $X^V \in V_uP$ como $X = X^H + X^V$.

(iii) $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$ para arbitrários $u \in P$ e $g \in G$.

A condição (iii) diz que os subespaços H_uP e $H_{ug}P$ sobre a mesma fibra são relacionados por uma aplicação linear R_{g*} induzida pela ação à direita. A partir do subespaço H_uP sobre u a aplicação R_{g*} gera todos os subespaços sobre a mesma fibra.

Nos cálculos prático, devemos separar T_uP em V_uP e H_uP de modo sistemático. Este pode ser alcançado introduzindo uma álgebra de Lie valuada 1-forma $w \in ¥ \otimes T^*P$ chamada a *conexão de 1-forma.*

Definição 1.19 *A conexão de 1-forma $w \in ¥ \otimes T^*P$ é a projeção de T_uP sobre a componente vértical $V_uP \simeq ¥$. As propriedades da projeção são resumidas pelas seguintes exigências.*

(i) $w\left(X^{\#}\right) = X$

(ii) $R_g^* w = Ad_{g^{-1}} w.$

Isto é, para $X \in T_uP$,

$$R_g^* w_{ug}\left(X\right) = w_{ug}\left(R_{g*}X\right) = g^{-1} w_u\left(X\right) g. \tag{1.27}$$

Definição 1.20 *O subespaço horizontal H_uP é o núcleo de w,*

$$H_uP = \{X \in T_uP; w(X) = 0\}. \tag{1.28}$$

Para mostrar que esta definição é consistente com a definição (1.18), provaremos a seguinte proposição.

Proposição 1.2 *O subespaço horizontal (1.28) satisfaz*

$$R_{g*}H_uP = H_{ug}P. \tag{1.29}$$

Demonstração. Para um ponto $u \in P$ e definimos $H_uP = \{X \in T_uP; w(X) = 0\}$. Com $X \in H_uP$ e construindo $R_{g*}X \in T_{ug}P$. Encontramos

$$w\left(R_{g*}X\right) = R_g^* w\left(X\right) = g^{-1} w\left(X\right) g$$

desde que $w(X) = 0$. De acordo com $R_{g*}X \in H_{ug}P$. Notamos que R_{g*} é uma aplicação linear invertível. Daí qualquer vetor $Y \in H_{ug}P$ é expressado como $Y = R_{g*}X$ para algum $X \in H_uP$. ■

A conexão de 1-forma w definida acima é conhecida na literatura como a *conexão de Ehresmanm.*

Considere $\{U_i\}$ sendo uma cobertura aberta de M e σ_i uma seção local definida sobre cada U_i. Ela é conviniente para introduzir uma Álgebra de Lie avaluada em 1-forma $\mathbf{A}_i$ sobre U_i por

$$\mathbf{A}_i \equiv \sigma_i^* w \in ¥ \otimes \Omega(U_i) \tag{1.30}$$

consequentemente, dado a Álgebra de Lie avaluada em 1-forma $\mathbf{A}_i$ sobre U_i, nós podemos recontruir a conexão 1-forma w cujo pullback de σ_i^* é $\mathbf{A}_i$.

Teorema 1.4 *Dado uma 1-forma ¥ - avaluada $\mathbf{A}_i$ sobre U_i e a seção local $\sigma_i : U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$, existe uma conexão 1-forma w tal que $\mathbf{A}_i \equiv \sigma_i^* w$ sobre U_i.*

Prova: Ver [17].

Para w ser definida unicamente sobre P, que é separado de maneira única como $T_uP = H_uP \oplus V_uP$, devemos ter $w_i = w_j$ sobre $U_i \cap U_j$. A única 1-forma w é então definida em P por $w|_{U_i} = w_i$. Para cumprir esta condição, a forma local $\mathbf{A}_i$ precisa sastifazer uma propriedade de transformação peculiar similar aos simbolos de Christofel, para tanto precisamos de um lema técnico.

Lema 1.1 *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e $\sigma_i(\sigma_j)$ uma seção local sobre $U_i(U_j)$ tal que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Para $X \in T_pM$ ($p \in U_i \cap U_j$), $\sigma_{i*}X$ e $\sigma_{j*}X$ satisfazem*

$$\sigma_{j*}X = R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + (t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X))^{\#} \tag{1.31}$$

onde $t_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ é uma função de transição.

Prova: Ver [17].

A compatibilidade desta equação é obtida pela aplicação da conexão 1-forma w sobre a equação (1.31). Nós encontramos que

$$\begin{aligned}\sigma_j^* w(X) &= R_{t_{ij}}^* w(\sigma_{i*}X) + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X) \\ &= t_{ij}^{-1} w(\sigma_{i*}X) t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X) \end{aligned} \tag{1.32}$$

onde o axioma da definição (1.19) foi usado. Desde que esta seja verdadeira para quaisquer $X \in T_pM$, a equação acima se reduz em

$$\mathbf{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathbf{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \tag{1.33}$$

esta é a condição de compatibilidade que estavamos procurando.

Convencionalmente, dada uma cobertura aberta $\{U_i\}$, a seção local $\{\sigma_i\}$ e as formas locais $\{\mathbf{A}_i\}$ que satisfaz a equação (1.33), nós podemos construir a 1-forma ¥ - avaluada w sobre P. Desde que um fibrado principal não trivial não admita uma seção global, o pullback $\mathbf{A}_i = \sigma_i^* w$ existe localmente mas não necessariamente global.

1.5 Levantamento Horizontal e Transporte Paralelo

Nesta seção, definiremos o transporte paralelo de um elemento do fibrado principal ao longo de uma curva em M que é fornecido pelo levantamento horizontal de uma curva.

Definição 1.21 *Seja $P(M,G)$ um G fibrado e $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ uma curva em M. Uma curva $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow P$ é dita um levantamento horizontal de γ se $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ e o vetor tangente a $\widetilde{\gamma}(t)$ sempre pertence a $H_{\widetilde{\gamma}(t)}P$.*

Consideremos $\widetilde{X}$ sendo o vetor tangente a $\widetilde{\gamma}$, logo $\widetilde{X}$ pertence ao subespaço horizontal. Daí pela definição temos que $w\left(\widetilde{X}\right) = 0$. Esta condição origina-se numa Equação Diferenciável Ordinária (EDO) e o teorema fundamental das EDO garante a existência e unicidade de solução de $w\left(\widetilde{X}\right) = 0$ do levantamento horizontal.

Teorema 1.5 *Considere $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ uma curva em M e seja $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Então exsite um único levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}(t)$ em P tal que $\widetilde{\gamma}(0) = u_0$.*

Demonstração. Consideremos a construção de tal curva $\widetilde{\gamma}$. Seja U_i uma carta que contém γ e tome uma seção σ_i sobre U_i. Se existe um levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}$, ele pode ser expressado como $\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t)) \cdot g_i(t)$, onde $g_i(t)$ levanta para $g_i(\gamma(t)) \in G$. Sem perda de generalidade, nós tomamos uma seção tal que $\sigma_i(\gamma(0)) = \widetilde{\gamma}(0)$, isto é $g_i(0) = e$. Considere X sendo um vetor tangente a $\gamma(t)$ sobre $\gamma(0)$. Então $\widetilde{X} = \widetilde{\gamma}_* X$ é tangente, a $\widetilde{\gamma}$ sobre $u_0 = \widetilde{\gamma}(0)$. Desde que o vetor tangente $\widetilde{X}$ é horizontal, ele satisfaz $w\left(\widetilde{X}\right) = 0$. Uma pequena modificação do lema (1.1) produz

$$\widetilde{X} = g_i(t)^{-1}\sigma_{i*}X g_i(t) + (g_i(t)^{-1}dg_i(X))^{\#} \tag{1.34}$$

aplicando w sobre a equação acima, encotramos

$$0 = w\left(\widetilde{X}\right) = g_i(t)^{-1}w\left(\sigma_{i*}X\right)g_i(t) + g_i(t)^{-1}\frac{dg_i(t)}{dt}. \tag{1.35}$$

Multiplicando por $g_i(t)$ à esquerda, obtemos

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -w\left(\sigma_{i*}X\right)g_i(t). \tag{1.36}$$

O teorema fundamental de EDO garante a existência e unicidade da solução da equação (1.36).

Desde que $w\left(\sigma_{i*}X\right) = \sigma_i^* w\left(X\right) = \mathbf{A}_i\left(X\right)$, a equação (1.36) é expressada numa forma local,

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathbf{A}_i\left(X\right)g_i(t) \tag{1.37}$$

cuja solução formal com $g_i(0) = e$ é

$$\begin{aligned} g_i(\gamma(t)) &= B\exp\left(-\int_0^1 \mathbf{A}_{i\mu}\frac{dx^\mu}{dt}dt\right) \\ &= B\exp\left(-\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathbf{A}_{i\mu}\left(\gamma(t)\right)dx^\mu\right) \end{aligned} \tag{1.38}$$

onde B é o operador que ordena o caminho ao longo de $\gamma(t)$. O levantamento horizontal é expresso como $\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t)) \cdot g_i(\gamma(t))$. ■

Corolário 1.2 *Consideremos* $\widetilde{\gamma}'$ *sendo outro levantamento de* γ, *tal que* $\widetilde{\gamma}'(0) = \gamma(0)\,g$. *Então* $\widetilde{\gamma}'(t) = \widetilde{\gamma}(t)\,g$ *para todo* $t \in [0,1]$.

Prova: Usar a unicidade do teorema anterior.

Exemplo 1.6 *Consideremos* $P(M,G) \cong M \times R$ *onde* $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. *Seja* $\phi : ((x,y), f) \longrightarrow u \in P$ *sendo uma trivialização local, onde* (x,y) *são as coordenadas de* M *enquanto* f *é um elemento do grupo aditivo* $\mathbb{R}$. *Considere*

$$w = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + df \tag{1.39}$$

sendo uma conexão 1-forma. Não é difícil verificar que w *satisfaz o axioma da conexão 1-forma. Com efeito, para* $A^{\#} = A\frac{\partial}{\partial f}$, $A \in \mathbb{R}$ *sendo um elemento da Álgebra de Lie do grupo aditivo, temos* $w\left(A^{\#}\right) = A$. *Além do mais,* $R_{g*}w = w = g^{-1}wg$, *desde que* $\mathbb{R}$ *é abeliano. Considere* $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ *definida por* $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. *Vamos construir um levantamento horizontal que passa por* $((1,0), 0)$. *Seja*

$$X = \frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial f} \tag{1.40}$$

o vetor tangente a $\widetilde{\gamma}(t)$ *Como* X *é horizontal deve satisfazer*

$$0 = w(X) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{df}{dt} = -2\pi + \frac{df}{dt} \tag{1.41}$$

A solução é dada por $f = 2\pi t + k$, k *é uma constante. Desta maneira encontramos o levantamento horizontal* $\widetilde{\gamma}$ *passando por* $((1,0), 0)$,

$$\widetilde{\gamma}(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t) \tag{1.42}$$

que é uma hélice sobre o círculo unitário.

De acordo com a ação de grupo(à direita ou à esquerda), f transforma-se em $f + g$, $g \in \mathbb{R}$. Quanto às mudanças no levantamento horizontal é

$$\widetilde{\gamma}(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t + g). \tag{1.43}$$

Consideremos $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ uma curva. Seja u_0 um ponto, tal que, $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Existe um único levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}(t)$ de $\gamma(t)$ passando por u_0, e daí um único ponto $u_1 = \widetilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$. O ponto u_1 é chamado o *transporte paralelo* de u_0 ao longo da curva $\widetilde{\gamma}$. Assim, podemos definir a aplicação $\Gamma(\widetilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$ tal que $u_0 \longrightarrow u_1$. Se a forma local (1.38) é empregada, temos

$$u_1 = \sigma_i(1)\, B \exp\left(-\int_0^1 \mathbf{A}_{i\mu} \frac{dx^{\mu}(\gamma(t))}{dt} dt \right). \tag{1.44}$$

De acordo com o corolário 1.2 podemos mostrar que $\Gamma(\widetilde{\gamma})$ comuta com a ação à direita R_g. Primeiro note que $R_g\Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0) = u_1 g$ e $\Gamma(\widetilde{\gamma}) R_g(u_0) = \Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0 g)$. Observemos que $\widetilde{\gamma}(t)\, g$ é um levantamento horizontal passando por $u_0 g$ e $u_1 g$. Da unicidade do levantamento horizontal através de $u_0 g$, temos $u_1 g = \Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0 g)$, que é, $R_g\Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0 g) = \Gamma(\widetilde{\gamma}) R_g(u_0)$. Desde esta seja verdadeira para qualquer $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, temos $R_g\Gamma(\widetilde{\gamma}) = \Gamma(\widetilde{\gamma}) R_g$.

1.6 Holonomia

Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e γ uma curva, cujo levantamento horizontal em $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ é $\widetilde{\gamma}$. Na última seção definimos a aplicação $\Gamma(\widetilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$ que aplica um ponto $u_0 = \widetilde{\gamma}(0)$ em $u_1 = \widetilde{\gamma}(1)$. Consideremos duas curvas $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$. Passando para os levantamentos horizontais $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ de α e β respectivamente, tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0) = u_0$. Então $\widetilde{\alpha}(1)$ não é necessariamente igual a $\widetilde{\beta}(1)$. Isto mostra que se considerarmos uma curva fechada $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ sobre $p = \gamma(0) = \gamma(1)$, temos $\widetilde{\gamma}(0) \neq \widetilde{\gamma}(1)$ em geral. Uma curva fechada γ define uma transformação $\tau_\gamma : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \pi^{-1}(p)$ sobre a fibra. Esta definição é compatível com a ação à direita do grupo,

$$\tau_\gamma(ug) = \tau_\gamma(u)\, g. \tag{1.45}$$

Note que τ_γ depende não somente da curva fechada γ, mais também da conexão.

Considere um ponto $u \in P$ com $\pi(u) = p$ e $C_p(M)$ o conjunto das curvas fechadas sobre p;

$$C_p(M) \equiv \{\gamma : [0,1] \longrightarrow M \ \ |\gamma(0) = \gamma(1) = p\}.$$

O conjunto de elementos $\phi_u \equiv \{g \in G; \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p(M)\}$ é um subgrupo do grupo de estrutura G e é chamado o *grupo de holonomia* sobre u. As propriedade de grupo de ϕ_u podem ser verificadas da seguinte maneira. Se α, β e $\gamma = \alpha * \beta$ são curvas fechadas sobre p, nós temos $\tau_\gamma = \tau_\beta \circ \tau_\alpha$ daí

$$\tau_\gamma(u) = \tau_\beta \circ \tau_\alpha(u) = \tau_\beta(ug_\alpha) = \tau_\beta(u)\, g_\alpha = ug_\beta g_\alpha \tag{1.46}$$

onde $\tau_\alpha(u) = ug_\alpha$. Isto mostra que $g_\gamma = g_\beta g_\alpha$. A curva fechada constante $c : [0,1] \longrightarrow p$ define a transformação identidade $\tau_c : u \longrightarrow u$. A curva fechada inversa γ^{-1} induz a transformação $\tau_{\gamma^{-1}} = \tau_\gamma^{-1}$, daí $g_{\gamma^{-1}} = g_\gamma^{-1}$.

Capítulo 2

Fase geométrica no espaço tempo de uma corda cósmica quiral

"A natureza só tece sua tapeçaria com os fios mais longos, de modo que cada pedacinho de sua tela revela a organização da tapeçaria inteira."

Richard Fegaman

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos que nos conduzirão a uma melhor compreensão da fase geométrica e por fim a aplicaremos no caso do espaço-tempo de uma corda cósmica quiral.

2.1 Espaço-tempo

É a variedade base para o estudo da relatividade especial ou restrita criadas por Einstein no início do século XX. Pontos no espaço-tempo são chamados de *eventos* e são definidos por quatro coordenadas (x, y, z, ct), onde c é a velocidade da luz. Notemos assim, que um espaço-tempo é formado pelo produto cartesiano do tempo e o espaço tridimensional. E cada evento têm quatro coordenadas, que dizem o local e a hora em que ele ocorreu, ocorre ou ocorrerá.

Um "intervalo de espaço-tempo"entre dois acontecimentos é a quantidade (invariante consoante o referencial) análoga à distância no espaço euclidiano com assinatura $(1, -1, -1, -1)$. O intervalo de espaço-tempo é definido por

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2.1}$$

Os intervalos de espaço-tempo, concebidos numa variedade, definem uma métrica pseudo-euclidiana chamada de métrica de Lorentz. Esta métrica é similar à das distâncias no espaço euclidiano. Deve se notar que no espaço-tempo as distâncias podem ser positiva, nula ou negativa. O espaço-tempo definido acima é conhecido como espaço de Minkowski, sendo o espaço-tempo da relatividade restrita.

2.2 Rotações Infinitesimais na Mecânica Quantica

Nesta seção, veremos como caracterizar rotações na Mecânica Quântica. Como as rotações afetam sistemas físicos, o estado ket correspondendo a um sistema rotacionado diferente do estado ket correspondendo ao sistema original, antes da rotação. Dado um operador rotação $R \in U(3)$, caracterizado por uma matriz R ortogonal 3×3, associamos um operador $D(R)$ no coviniente ket espaço tal que

$$|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle, \tag{2.2}$$

onde $|\alpha\rangle_R$ e $|\alpha\rangle$ representam kets do sistema rotacionado e original, respectivamente. Notemos que a matriz R ortogonal 3×3 atua sobre uma matriz coluna correspondente às três componentes de um vetor clássico, embora o operador $D(R)$ atue sobre o estado vetor no ket espaço. Para construir um operador rotação $D(R)$, é importante examinar primeiro suas propriedades sobre uma rotação infinitesimal. Consideremos o operador infinitesimal escrito como

$$U_{\varepsilon} = 1 - iG_{\varepsilon} \tag{2.3}$$

com um operador Hermiteano G. Especificamente,

$$G \longrightarrow \frac{p_x}{\hbar}, \qquad \varepsilon \longrightarrow dx\acute{} \tag{2.4}$$

para uma translação infinitesimal por um deslocamento $dx\acute{}$ na x-direção, e

$$G \longrightarrow \frac{H}{\hbar}, \qquad \varepsilon \longrightarrow dt \tag{2.5}$$

para uma evolução no tempo infinitesimal com deslocamento no tempo dt. Conhecemos da mecânica clássica que o momento angular é um gerador de rotação. O momento e Hamiltoniano, por sua vez, são os geradores de translações e evolução no tempo, respectivamente. Portanto, definimos o operador momento angular J_k de tal maneira que o operador de uma rotação infinitesimal em volta do k-ésimo eixo dado pelo ângulo $d\phi$ pode ser obtido

$$G \longrightarrow \frac{J_k}{\hbar}, \qquad \varepsilon \longrightarrow d\phi \tag{2.6}$$

em (2.3). Com J_k sendo Hermiteano, o operador infinitesimal é garantido sendo unitário e reduz ao operador identidade no limite $d\phi \longrightarrow 0$. Mais geralmente, temos

$$D\left(\hbar, d\phi\right) = 1 - i\left(\frac{J \bullet \hat{n}}{\hbar}\right) d\phi \tag{2.7}$$

para uma rotação sobre na direção caracterizada por um vetor unitário $\hat{n}$ e por um ângulo infinitesimal $d\phi$.

Uma rotação finita pode ser obtida pela composição de sucessivas rotações infinitesimais sobre o mesmo eixo. Por exemplo, se estamos interessados em uma rotação finita sobre o eixo z de um ângulo ϕ, consideremos

$$\begin{aligned} D_z\left(\phi\right) &= \lim_{N \longrightarrow \infty}\left[1 - i\left(\frac{J_z}{\hbar}\right)\left(\frac{\phi}{N}\right)\right]^N = \exp\left(\frac{-iJ_z\phi}{\hbar}\right) \\ &= 1 - \frac{iJ_z\phi}{\hbar} - \frac{J_z^2\phi^2}{2\hbar^2} + \cdots \end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora, obtemos a relação fundamental de comutação para operadores de rotação. Vamos calcular $[J_x, J_y]$,

$$\begin{aligned}
[J_x, J_y] &= J_x J_y - J_y J_x \\
&= \left(1 - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) - \\
&- \left(1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \\
&= 1 - \frac{iJ_z\varepsilon^2}{\hbar} - 1 \\
[J_x, J_y] &= i\hbar J_z.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Analogamente, obtemos rotações sobre outros eixos

$$[J_x, J_y] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \tag{2.10}$$

Importante observarmos que esta relação fundamental dos operadores de rotação define uma *Álgebra de Lie.*

2.3 Corda Cósmica

Uma *corda cósmica* é um objeto muito fino, extremamente bem esticado e muitíssimo rico em massa, infinitamente longa ou formando laços fechados.

A existência de tal corda foi conjecturada pelo físico indiano Thomas Walter Bannerman Kibble, em 1976 e reiterada pelo astrofísico russo Alexandre Vilenkin, em 1985. Foi considerada a hipótese de que tais cordas serviriam de sementes para a formação de estruturas, tais como as Galáxias.

2.4 Fase de Berry

A fase de Berry é um conceito *geométrico* ligado ao transporte paralelo em uma superfície curva. O transporte paralelo no espaço dos estados da Mecânica Quântica é dado pela equação adiábatica

$$\left(\left\langle \psi\left(t\right), \dot{\psi}\left(t\right)\right\rangle = 0,\ 0 \leq t \leq 1\right).$$

Quando uma fase for transportada paralelamente ao longo de uma curva fechada no espaço de estados da Mecânica Quântica, ela pode no final ser distinta do valor inicial. A diferença entre os valores final e inicial denomina-se *fase de Berry.*

Consideremos $H\left(R\right)$ sendo um hamiltoniano de um sistema quântico que depende de k parâmetros $R = \left(R_1, ..., R_k\right)$. Consideremos $\left|n; R\right\rangle$ o n-ésimo auto-estado normalizado de $H\left(R\right)$,

$$H\left(R\right)\left|n, R\right\rangle = E_n\left(R\right)\left|n; R\right\rangle \tag{2.11}$$

$\left\langle n; R\left|n; R\right.\right\rangle = 1$ e E_n é assumido sendo isolado e não-degenerado. Suponhamos R descrevendo uma curva fechada no espaço de parâmetro: $R = R\left(t\right)$ onde $R\left(0\right) = R\left(1\right)$. Assumimos R carregado adiábaticamente e o estado sempre permanecendo no n-ésimo auto-estado. Após o transporte ao longo de uma curva fechada γ no espaço de parâmetro M, o estado ganha um fator de fase extra.

$$\eta_n = i\oint_{\gamma}\left\langle n; R\left|\frac{\partial}{\partial R^n}\right|n; R\right\rangle dR^n \tag{2.12}$$

conhecida como *fase de Berry.* Foi Simon(1983) que primeiro reconheceu o profundo significado geométrico por trás da fase de Berry. Ele observou que a origem da fase de Berry é atribuida à holonomia no espaço de parâmetro.

Consideremos M sendo uma variedade descrevendo o espaço de parâmetro e seja $R = \left(R^1, ..., R^k\right)$ as coordenadas locais. Sobre cada ponto R de M, consideramos o n-ésimo auto-estado normalizado do Hamiltoniano $H\left(R\right)$. Desde que um estado quântico $\left|n; R\right\rangle$ não pode ser distinguido de $e^{i\phi}\left|n; R\right\rangle$, um estado físico é expresso por uma classe de equivalência

$$\left[\left|R\right\rangle\right] = \left\{g\left|R\right\rangle; g \in U\left(1\right)\right\} \tag{2.13}$$

onde omitimos o índice n, pois estamos interessados somente no n-ésimo auto-valor. A trivialização local canônica é dada por $\phi^{-1}\left(\left|R\right\rangle\right) = \left(R, e\right)$. A ação à direita produz $\phi^{-1}\left(\left|R\right\rangle g\right) = \left(R, e\right)g = \left(R, g\right)$.

A conexão de Berry por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_\mu dR^\mu = \langle R| \left(d\,|R\rangle\right) = -\left(d\,\langle R|\right)|R\rangle \tag{2.14}$$

onde $d = \left(\frac{\partial}{\partial R^\mu}\right) dR^\mu$ é a derivada exterior no R -espaço. Note que $\mathbf{A}$ é anti-Hermiteano pois,

$$0 = d\left(\langle R\,|R\rangle\right) = \left(d\,\langle R|\right)|R\rangle + \langle R|\,d\,|R\rangle = \langle R\,|d|\,R\rangle^\dagger + \langle R\,|d|\,R\rangle\,. \tag{2.15}$$

Para ver que a expressão (2.14) é de fato uma forma local de uma conexão, temos que verificar a equação de compatibilidade. Consideremos U_i e U_j cartas de M tal que $U_i \cap U_j \neq 0$ e seja $\sigma_i\left(R\right) = |R\rangle_i$ e $\sigma_j\left(R\right) = |R\rangle_j$ sendo as respectivas seções locais. Elas são relacionadas por uma função de transição como $|R\rangle_j = |R\rangle_i\, t_{ij}\left(R\right)$. Então, encontramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j &=_j \langle R|\,d\,|R\rangle_i = t_{ij}\left(R\right)_i^{-1} \langle R| \left[d\,|R\rangle_i\, t_{ij}\left(R\right) + |R\rangle\, dt_{ij}\left(R\right)\right] \\ &= \mathbf{A}_i\left(R\right) + t_{ij}(R)^{-1} dt_{ij}\left(R\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

o conjunto de 1-forma $\{\mathbf{A}_i\}$ satisfazendo(2.15) define uma conexão de Ehresman sobre $P\left(M, U\left(1\right)\right)$.

O campo $\digamma$, associado a $\mathbf{A}$ é chamado *curvatura de Berry* e é dado por

$$\digamma = d\mathbf{A} = \left(d\,\langle R|\right) \wedge \left(d\,|R\rangle\right) = \left(\frac{\partial\,\langle R|}{\partial R^\mu}\right)\left(\frac{\partial\,|R\rangle}{\partial R^\nu}\right) dR^\mu \wedge dR^\nu. \tag{2.17}$$

Para determinar a fase geométrica de uma corda cósmica com momento angular, vamos seguir o mesmo tratamento de Corrichi e Pierri [5] O elemento de linha que descreve este espaço-tempo é dado por [6]

$$ds^2 = (dt + 4J^t d\phi)^2 - d\rho^2 - \alpha^2\rho^2 d\phi^2 - (dz + 4J^z d\phi)^2, \tag{2.18}$$

ou

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 + 4J^t dt d\phi + 4J^t d\phi dt + (4J^t)^2 d\phi^2 - d\rho^2 - \alpha^2\rho^2 d\phi^2 - dz^2 - \\ &- 4J^z dz d\phi - 4J^z d\phi dz - (4J^z)^2 d\phi^2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

o que nos permite visualizar cada elemento da matriz $(g_{\mu\nu})$, dados por:

$$g_{00} = 1,\; g_{01} = 0,\; g_{02} = 4J^t,\; g_{03} = 0$$

$$g_{10} = 0,\; g_{11} = -1,\; g_{12} = 0,\; g_{03} = 0$$

$$g_{20} = 4J^t,\; g_{21} = 0,\; g_{22} = (4J^t)^2 - (4J^z)^2 - (\alpha\rho)^2,\; g_{03} = -4J^z$$

$$g_{30} = 0,\; g_{31} = 0,\; g_{32} = -4J^z,\; g_{33} = -1$$

Assim, a matriz $(g_{\mu\nu})$ corresponde a métrica (2.18)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4J^t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4J^t & 0 & (4J^t)^2 - (4J^z)^2 - (\alpha\rho)^2 & -4J^z \\ 0 & 0 & -4J^z & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

e sua inversa será denotada por $(g^{\mu\nu})$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha\rho)^2-(4J^t)^2}{(\alpha\rho)^2} & 0 & \frac{4J^t}{(\alpha\rho)^2} & \frac{-16J^tJ^z}{(\alpha\rho)^2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{4J^t}{(\alpha\rho)^2} & 0 & \frac{-1}{(\alpha\rho)^2} & \frac{4J^z}{(\alpha\rho)^2} \\ \frac{-16J^tJ^z}{(\alpha\rho)^2} & 0 & \frac{4J^z}{(\alpha\rho)^2} & \frac{-(\alpha\rho)^2-(4J^t)^2}{(\alpha\rho)^2} \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Definimos $g := \det(g_{\mu\nu})$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} g &= (-1)^2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4J^t & 0 \\ 4J^t & (4J^t)^2 - (4J^z)^2 - (\alpha\rho)^2 & -4J^z \\ 0 & -4J^z & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot \left[-(4J^t)^2 + (4J^z)^2 + (\alpha\rho)^2 + (4J^t)^2 - (4J^z)^2\right] \\ &= -(\alpha\rho)^2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ainda sobre a métrica (2.18), analizamos os seguintes casos: se $J^t = 0$ e $J^z = 0$ a métrica representa uma corda cósmica;

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2\rho^2 d\phi^2 - dz^2. \tag{2.23}$$

Para $J^z = 0$, esta métrica representa a rotação de uma corda cósmica com momento angular J^t;

$$ds^2 = (dt + 4J^t d\phi)^2 - d\rho^2 - \alpha^2\rho^2 d\phi^2 - dz^2. \tag{2.24}$$

Para $J^t = 0$, a métrica descreve uma deslocação cósmica

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2\rho^2 d\phi^2 - (dz + 4J^z d\phi)^2. \tag{2.25}$$

Esta métrica é localmente plana, o que pode ser visto através de uma redefinição das coordenadas t e z. Mas este espaço-tempo não é globalmente plano.

Nestes casos as holonomias são não triviais [7] e dependem do momento angular J^t, do déficit de ângulo dado por $2\pi(1-\alpha)$, e do vetor burgers que é proporcional a J^t.

O comportamento de uma partícula quântica escalar é determinada pela equação covariante de Klein-Gordon

$$\left(\Box + M^2\right)\Psi = 0 \tag{2.26}$$

onde:

$\Box$ - é o operador d'Alembertiano;

M - é a massa da partícula. Com a escolha de $\hbar = c = 1$

A expressão do d'Alembertiano é dada por:

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) \tag{2.27}$$

utilizando,(2.18), (2.21) e (2.22) obtemos o d'Alembertiano na forma

$$\begin{aligned}
\Box &= \frac{1}{\sqrt{-[-(\alpha\rho)^2]}} \cdot \left\{ \left[\frac{(\alpha\rho)^2 - (4J^t)^2}{(\alpha\rho)} \right] \partial_t^2 + \frac{8J^t}{\alpha\rho}\partial_t\partial_\phi + \frac{-32J^tJ^z}{\alpha\rho}\partial_t\partial_z - \alpha\partial_\rho \right\} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{-[-(\alpha\rho)^2]}} \left\{ -\alpha\rho\partial_\rho^2 - \frac{\partial_\phi^2}{\alpha\rho} + \frac{8J^z}{\alpha\rho}\partial_\phi\partial_z + \left[\frac{-(\alpha\rho)^2 - (4J^z)^2}{(\alpha\rho)} \right] \partial_z^2 \right\} \\
&= \partial_t^2 - \frac{(4J^t)^2}{(\alpha\rho)^2}\partial_t^2 + \frac{8J^t}{(\alpha\rho)^2}\partial_t\partial_\phi - \frac{32J^tJ^z}{(\alpha\rho)^2}\partial_t\partial_z - \frac{\partial_\rho}{\rho} - \partial_\rho^2 - \frac{\partial_\phi^2}{(\alpha\rho)^2} \\
&+ \frac{8J^z}{(\alpha\rho)^2}\partial_\phi\partial_z - \partial_z^2 - \frac{(4J^z)^2}{(\alpha\rho)^2}\partial_z^2 \\
&= \partial_t^2 - \frac{\partial_\rho(\rho\partial_\rho)}{\rho} - \frac{1}{(\alpha\rho)^2}[(4J^t\partial_t - \partial_\phi)^2 + (4J^z\partial_z - \partial_\phi)^2] \\
&- \frac{1}{(\alpha\rho)^2}[32J^tJ^z\partial_t\partial_z + (\alpha\rho)^2\partial_z^2],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

substituindo na equação de Klein-Gordon, obtemos:

$$\left\{ \partial_t^2 - \frac{\partial_\rho(\rho\partial_\rho)}{\rho} - \frac{1}{(\alpha\rho)^2} \left[(4J^t\partial_t - \partial_\phi)^2 + (4J^z\partial_z - \partial_\phi)^2 + 32J^tJ^z\partial_t\partial_z + (\alpha\rho)^2(\partial_z^2 - M^2) \right] \right\} \Psi(t,\rho,\phi,z) = 0. \tag{2.29}$$

A expressão descrita pela equação (2.18) é independente do tempo e simétrico sobre translações ao longo do eixo z. Deste modo, a solução da equação (2.29) pode ser obtida através do método de separação de variáveis e, pode ser escrita da seguinte forma

$$\Psi_n(t,\rho,\phi,z) = \exp(-iE_nt)\exp(iK_nz)\psi_n(\rho,\phi). \tag{2.30}$$

onde E_n são os autovalores de energia e K_n são os vetores de onda na direção z.

Usando o método do fator de fase de Dirac, podemos escrever a solução $\psi_n(\rho,\phi)$ da equação de Klein-Gordon como função da solução inicial $\psi_0(\rho,\phi)$, ou seja,

$$\psi_n(\rho,\phi) = \exp\left(-4i\int_{\phi_0}^{\phi} (E_nJ^t - K_nJ^z)d\phi \right) \psi_0(\rho,\phi). \tag{2.31}$$

Com o objetivo de obter uma equação mais simples que a (2.29), vamos realizar os cálculos da métrica e substituir na equação de Klein-Gordon para uma solução inicial $\psi_0(\rho,\phi)$ com

$J^t = J^z = 0$.

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2\rho^2 d\phi^2 - dz^2 \tag{2.32}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha\rho)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(\alpha\rho)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

$$\Box = \partial_t^2 - \frac{\partial_\rho(\rho\partial_\rho)}{\rho} - \frac{\partial_\phi^2}{(\alpha\rho)^2} - \partial_z^2. \tag{2.34}$$

com $\psi_0(\rho,\phi)$ sendo a solução inicial da equação

$$\left(\Box + M^2\right)\psi_n(\rho,\phi) = 0, \tag{2.35}$$

ou

$$\left[\frac{\partial_\rho(\rho\partial_\rho)}{\rho} + \frac{\partial_\phi^2}{(\alpha\rho)^2} - (M^2 - E_n^2 - K_n^2)\right]\psi_0(\rho,\phi) = 0 \tag{2.36}$$

que corresponde à equação de Klein-Gordon na métrica (2.32) para $J^t = J^z = 0$. Desta maneira encontramos a solução da equação (2.29) a partir de uma mais simples, dada por (2.36).

Agora vamos investigar a fase de Berry no espaço-tempo de uma corda cósmica quiral. Para este caso o ângulo da fase geométrica depende do índice espectral que está ligado à rotação da corda cósmica [8]. Além do mais, para cada auto-vetor indexado de n há uma diferente fase geométrica, e como conseqüência, o tratamento apropriado deste problema é obtido usando a generalização não-abeliana [8] da fase de Berry.

Por definição, um estado de um sistema quântico cuja dinâmica é governada pela equação de Schrödinger,

$$\frac{i\partial\psi(t)}{\partial t} = H(t)\,\psi(t), \tag{2.37}$$

é dito cíclico com período T se ele é um autor-vetor do operador evolução temporal

$$U(T) = P\exp\left(-i\int_0^T H(t)\,dt\right) \tag{2.38}$$

onde P é o operador de ordenamento temporal. O auto-vetor correspondente ao estado inicial $\psi(0)$ satisfaz a equação

$$\left|\psi(T)\right\rangle = U(T)\left|\psi(0)\right\rangle = e^{i\alpha(T)}\left|\psi(0)\right\rangle \tag{2.39}$$

com $\alpha(T) \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Se a Hamiltoniana H for um operador auto-adjunto, então, $\alpha \in \mathbb{R}$ e consequentemente $\left|\psi(T)\right\rangle$ e $\left|\psi(0)\right\rangle$ diferem por um fator de fase. Em geral $\alpha(T)$ pode ser expresso como a soma de uma parte dinâmica e outra geométrica. Consideremos o subespaço

$$H_0 = \{\left|\psi(T)\right\rangle \in \mathbf{H}; \left\langle\psi\right|\left.\psi\right\rangle = 1\}, \tag{2.40}$$

do espaço de Hilbert $\mathbf{H}$.

Seja $\pi : H_0 \longrightarrow \mathbf{P}$ a aplicação projeção definida por

$$\pi(\left|\psi(T)\right\rangle) := \left\{\left|\psi\prime\right\rangle; \left|\psi\prime\right\rangle = e^{i\alpha(T)}\left|\psi(T)\right\rangle, \alpha(T) \in \mathbb{R}\right\} \tag{2.41}$$

que é uma classe de equivalência em H_0, ou seja uma fibra em $\mathbf{P} = \frac{H_0}{\pi(\left|\psi(T)\right\rangle)}$, espaço projetivo que representa o espaço de todos os estados físicos distintos. Lembremos que H_0 tem uma estrutura de fibrado principal sobre $\mathbf{P}$.

Para calcular esta fase limitamos o sistema quântico para a perfeita reflexão na caixa tal que o pacote de onda é diferente de zero somente no interior da caixa e, é dado por uma superposição de auto-funções diferentes. O vetor que localiza a caixa em relação ao defeito é denotado por $\overrightarrow{R}$. Este vetor é orientado da origem do sistema de coordenada (localizado no defeito) para o centro da caixa. Chamando R_i as componentes de $\overrightarrow{R}$, dado por $R_i = (R_0, \phi_0, z_0)$ e tal que $R_0 > \frac{4J^t}{\alpha}$. Esta condição imposta em R_0 nos permite compreender dois problemas: os múltiplos valores da função de onda e a existência de curvas fechadas no espaço-tempo.

Das equações (2.30) e (2.31) concluímos que quando $J^t = J^z = 0$, a função de onda tem a forma $\psi(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R})$ onde $\overrightarrow{x}$ é a localização da partícula relativa ao centro da caixa. Se nós considerar-mos $J^t \neq 0$ e $J^z \neq 0$, então a função de onda é sensível a estes parâmetros e podem ser obtidos pelo fator de fase de Dirac dado pela equação (2.31), no interior da caixa.

Considere a caixa sendo transportada ao longo de uma curva fechada C em volta do defeito. Desde que o espaço-tempo é anti-simétrico nós podemos transportar a caixa ao longo do rotacional do campo de vetores de Killing $R^a = \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a$.

Devido a degeneração dos autovalores de energia, na ordem para calcular a fase geométrica de Berry, é necessário usar a versão não-abeliana correspondendo a junção [8] dada por

$$A_n^{ij} = \frac{i\left\langle \psi_n^i(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R}) \mid \nabla_R \psi_n^j(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R})\right\rangle}{\left\langle \psi_n^i(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R}) \mid \psi_n^i(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R})\right\rangle}. \tag{2.42}$$

Como $\psi_n^i(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R})$ formam uma base ortonormal para o subespaço de degenerescência em H_0 e, i, j são possíveis índices da degeneração, podemos reduzir a equação (2.42) para

$$A_n^{ij} = i\left\langle \psi_n^i(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R}) \mid \nabla_R \psi_n^j(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R})\right\rangle. \tag{2.43}$$

O produto interno na equação (2.43) é o produto interno usual do espaço de Hilbert H_0, e pode ser calculado usando o fator de fase de Dirac como segue:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_n^i(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R}) \mid \nabla_R \psi_n^j(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R})\right\rangle &= i\oint_\Sigma ds\psi_n^{*i}(x_i - R_i)[4(K_n J^z - E_n J^t)\psi_n^j(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R}) \\
&\quad + \nabla_R \psi_n^j(x_i - R_i)] \\
&= 4i(K_n J^z - E_n J^t)\oint_\Sigma ds\psi_n^{*i}(x_i - R_i)\psi_n^j(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{R}) \\
&= 4i(K_n J^z - E_n J^t)\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

substituindo a equação (2.44) na (2.43) e, obtemos

$$A_n^{ij} = 4(E_n J^t - K_n J^z)\delta_{ij}. \tag{2.45}$$

A fase de Berry pode ser obtida da expressão (2.45) e, é dada por

$$\begin{aligned}
\gamma_n^{ij}(C) &= \int_0^{2\pi} A_n^{ij} d\phi = \int_0^{2\pi} 4(E_n J^t - K_n J^z)\delta_{ij} d\phi \\
&= 4(E_n J^t - K_n J^z)\delta_{ij}\int_0^{2\pi} d\phi \\
\gamma_n(C) &= 8\pi(E_n J^t - K_n J^z)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde os indíces i, j e δ_{ij} foram omitidos. Este resultado reproduz o de Corrichi e Pierri [5] e Mostafazadeh [8] no caso da corda cósmica com rotação. Como indicado por [5], o efeito pode ser observado de uma interferência da função de onda associada a uma partícula na caixa transportada e além do mais correspodendo a partícula na caixa que segue a órbita ao longo do campo de vetores de Killing no espaço-tempo.

Capítulo 3

Fase de Berry no espaço-tempo de múltiplas cordas quirais

"Quem se prende a uma estrela não
muda de idéia".

Leonardo da Vince

Usando a holonomia descrevemos os aspectos globais do espaço-tempo de N cordas cósmicas quirais paralelas com uma delas movendo-se em relação às outras. A natureza topológica do espaço-tempo de duas cordas movendo-se perante as outras foram estudadas usando a condição que o fator geométrico adquirido por um vetor, quando transportado na presença de duas cordas, é igual ao adquirido por este vetor quando transportado paralelamente ao redor de uma corda que se comporta, do ponto de vista global, como duas cordas. Para fazer isto, usamos as variáveis de contorno na teoria da gravitação. Nesta abordagem as matrizes que correpondem às holonomias representam o transporte paralelo ao longo de curvas em um espaço-tempo com uma determinada conexão afim.

No artigo publicado por Gal´tsov e Letelier [6] obtiveram a solução para múltiplas cordas quirais, cujo o elemento de linha em coordenadas cartesianas é dado por

$$ds^2 = \left[dt - \Sigma_{i=1}^{n} A_i(w_i^1 dy - w_i^2 dx)\right]^2 - e^{-4\nu}(dx^2 + dy^2) -$$
$$- \left[dz - \Sigma_{i=1}^{n} B_i(w_i^1 dy - w_i^2 dx)\right]^2 \tag{3.1}$$

onde $A_i = 4J_i^t$ e $B_i = 4J_i^z$, com J_i^t e J_i^z correspondendo ao momento angular e torção do i-ésimo cone quiral, respectivamente, e w_i^1 e w_i^2 são dadas por

$$w_i^1 = \frac{x - x_i}{|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_i}|^2}, \; w_i^2 = \frac{y - y_i}{|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_i}|^2}. \tag{3.2}$$

Nesta seção vamos calcular a fase quântica de Berry associada com uma partícula escalar no espaço-tempo de N-cordas cómicas quirais paralelas. Neste caso, a fase de Dirac da equação de Klein-Gordon não é trivial. Para evitar esta dificuldade devemos adotar uma indução, baseado no fato que o fator de fase adquirido pelo vetor quando transportado paralelamente no espaço-tempo correspondendo a múltiplas cordas quirais é afetado somente pela corda quiral envolvida pela curva ao longo da qual o vetor é transportado paralelamente [7]. Então, permite nos calcular o fator de fase de Dirac para dois cones quirais, para três, e sucessivamente para N cones quirais. Nós consideramos primeiro dois cones quirais, um localizado por ρ_1 e o outro por ρ_2. Realizamos o transporte da caixa que contém a partícula ao longo de um caminho fechado C_1 em volta do cone quiral. Neste caso, o fator de fase de Dirac é idêntico ao primeiro dado pela equação (2.31) e pode ser escrito como

$$\psi_n^1(\rho, \phi) = \exp\left[-4i(E_n J_1^t - K_n J_1^z) \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\right] \psi_0(\rho, \phi). \tag{3.3}$$

Agora, nós transportamos o estado $\psi_n^1(\rho, \phi)$ em volta do cone, localizado por ρ_2, ao longo do caminho C_2, que resulta em

$$\psi_n^2(\rho, \phi) = \exp\left[-4i(E_n J_2^t - K_n J_2^z) \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\right] \psi_n^1(\rho, \phi) \tag{3.4}$$

substituindo a equação (3.3) na (3.4), obtemos o seguinte resultado

$$\psi_n^2(\rho,\phi) = \exp\left[-4i[E_n(J_1^t + J_2^t) - K_n(J_1^z + J_2^z)]\int\limits_{\phi_0}^{\phi} d\phi\right]\psi_0(\rho,\phi). \tag{3.5}$$

A generalização deste resultado para N cones quirais localizados em $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ é dado por

$$\psi_n^{1,2,...,N}(\rho,\phi) = \exp\left[-4i\left[\Sigma_{j=1}^n(E_nJ_j^t - K_nJ_j^z)\right]\int\limits_{\phi_0}^{\phi} d\phi\right]\psi_0(\rho,\phi). \tag{3.6}$$

Além do mais, podemos calcular a conexão de Berry usando a função de onda dada na equação (3.6) que resulta em

$$A_n^{ij} = 4\Sigma_{i=1}^n(E_nJ_i^t - K_nJ_i^z)dR^2\delta_{ij} \tag{3.7}$$

onde dR^2 é o ângulo polar associado a o centro da caixa. Desta maneira, a fase de Berry pode ser obtida da equação (3.7) como

$$\gamma_n(C) = \int_0^{2\pi} A_n^{ij}d\phi = \int_0^{2\pi} 4\Sigma_{i=1}^n(E_nJ_i^t - K_nJ_i^z)dR^2\delta_{ij}d\phi \tag{3.8}$$

$$\gamma_n(C) = 8\pi\Sigma_{i=1}^n(E_nJ_i^t - K_nJ_i^z) \tag{3.9}$$

onde omitimos os índices i,j e δ_{ij} correspondendo a diferentes autovetores, por conviniência. Esta é a fase de uma partícula na caixa que realiza um giro C em volta dos múltiplos cones quirais.

Capítulo 4

O Formalismo de duas componentes para a equação de Klein-Gordon

> "Trilhar caminhos diferentes na busca de soluções nos proporciona conhecer mais e melhor os problemas e suas circunstâncias."
>
> Hassis

A finalidade deste capítulo é apresentar um outro método, propício para se obter a fase geométrica de Berry de uma corda cósmica com rotação, em contraste com o que foi feito no capítulo 2. Com esta finalidade desenvolveremos uma generalização dos métodos da Mecânica Quântica não-relativística para uma condição de adiabaticidade que é distinta, e em contrapartida, também limita a taxa de mudança dos autovalores de energia.

Considere um campo escalar complexo ϕ definido sobre um espaço-tempo hiperbólico $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, g)$ satisfazendo

$$[g^{\mu\nu}(\nabla_\mu + ieA_\mu)(\nabla_\nu + ieA_\nu) + V - M^2]\phi = 0 \tag{4.1}$$

onde $g^{\mu\nu}$ são componentes da inversa da matriz $g_{\mu\nu}$, ∇_μ é a derivada covariante ao longo de $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ definida pela conexão de Levi-Civita, A_μ são componentes do potencial eletromagnético, V é um potencial escalar arbitrário, e é a carga elétrica, e M é a massa.

Neste trabalho o sinal da métrica é escolhido como $(-, +, +, +)$ e as letras do alfabeto grego são associadas com as coordenadas da base local do espaço tangente da variedade espaço-tempo. As letras do alfabeto latin indicam as correspondentes componentes espacias. Elas tomam valores de 1 à 3.

Denotando a derivada temporal por um ponto, a expressão (4.1) toma a seguinte forma

$$\ddot{\phi} + \widehat{D}_1\dot{\phi} + \widehat{D}_2\phi = 0 \tag{4.2}$$

onde:

$$\widehat{D}_1 := \frac{2}{g^{00}}\left[g^{0i}\partial_i + ieg^{0\mu}A_\mu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\right] \tag{4.3}$$

$$\widehat{D}_2 := \left[\begin{array}{c} \frac{2}{g^{00}}g^{ij}\partial_{ij} + (ieg^{\mu i}A_\mu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^i_{\mu\nu})\partial_i \\ +\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(ie\nabla_\mu A_\nu - e^2A_\mu A_\nu) + \frac{1}{2}(V - M^2) \end{array}\right]. \tag{4.4}$$

Uma representação em duas componentes para a equação do campo (4.2) é

$$i\frac{\partial\psi^{(q)}}{\partial t} = \widehat{H}^{(q)}\psi^{(q)} \tag{4.5}$$

onde:

$$\psi^{(q)} = \begin{pmatrix} u^{(q)} \\ v^{(q)} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$u^{(q)} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + q\dot{\phi}) \qquad v^{(q)} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - q\dot{\phi}) \tag{4.7}$$

$$\widehat{H}^{(q)} := \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \frac{\dot{q}}{q} + \frac{1}{q} - \widehat{D}_1 - q\widehat{D}_2 & -\frac{\dot{q}}{q} - \frac{1}{q} + \widehat{D}_1 - q\widehat{D}_2 \\ -\frac{\dot{q}}{q} + \frac{1}{q} + \widehat{D}_1 + q\widehat{D}_2 & \frac{\dot{q}}{q} - \frac{1}{q} - \widehat{D}_1 + q\widehat{D}_2 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

e q é um parâmetro complexo arbitrário, possivelmente dependente do tempo e não nulo. O conjunto $\mathbb{C}-\{0\}$ de q´s define um grupo de transformações

$$\psi^{(q)} \longmapsto \psi^{(q')} := g(q', q)\psi^{(q)} \tag{4.9}$$

que é isomorfo a $GL(1,\mathbb{C})$. Os elementos do grupo são dados por

$$g(q', q) = g(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma}{2} & \frac{1-\gamma}{2} \\ \frac{1-\gamma}{2} & \frac{1+\gamma}{2} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

onde $\gamma := \frac{q'}{q}$. De acordo com a transformação (4.9) o Hamiltoniano se transforma de acordo com

$$\widehat{H}^{(q)} \longmapsto \widehat{H}^{(q')} = g(\gamma)\widehat{H}^{(q)}g^{-1}(\gamma) + i\overset{\bullet}{g}(\gamma)g^{-1}(\gamma) \tag{4.11}$$

e a equação de Schrödinger (4.5) preserva esta forma. A simetria ligada a $GL(1,\mathbb{C})$ que caracteriza a arbitrariedade de q não tem qualquer significado físico. Esta é, todavia, útil para fins computacionais como mostrado em [9].

A vantagem de formar a equação do campo com duas componentes é que ela possibilita um procedimento análogo a o que conhecemos para o caso da mecânica quântica não-relativista. De fato, a equação (4.5) com uma escolha fixa de q é uma equação de Schrödinger associada com o Hamiltoniano $\widehat{H}^{(q)}$ explicitamente dependente do tempo. O campo de duas-componentes pertence ao espaço vetorial $H_t \oplus H_t$ onde H_t é um espaço de Hilbert completo de funções complexas de suporte compacto sobre a hipersuperfície espacial Σ_t associada a uma decomposição específica Arnowitt-Deser-Misner (ADM) do espaço-tempo [10].

Usualmente na aproximação de duas componentes para a teoria de campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski, escolhe-se um produto interno sobre $H_t \oplus H_t$, desta maneira criamos o correspondente produto interno hermiteano $(,)$ sobre $H_t \oplus H_t$ pode ser definido por um produto interno Hermiteano $\langle | \rangle$ sobre H_t e possivelmente uma matriz 2×2, $h = (h_{ij})$ hermitiana complexa dependendo do tempo.

$$(\psi_1, \psi_2) := (\langle u_1| , \langle v_1|) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12}^* & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |u_2\rangle \\ |v_2\rangle \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

onde u_i e v_i são componentes de ψ_i, e h_{11}, h_{22} são reais. A escolha usual para h, no caso de Minkowski, é [28,29],

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

esta escolha reduz (ψ_1, ψ_2) para

$$(\psi_1, \psi_2) = \langle u_1 \mid u_2 \rangle - \langle v_1 \mid v_2 \rangle \,. \tag{4.14}$$

Não é difícil de verificar que no caso geral esta escolha não garante a auto-adjuntocidade do Hamiltoniano a menos que alguma condição severa seja imposta sobre q e os operadores $\widehat{D}_1$ e $\widehat{D}_2$, isto é, que q seja imaginário, $\widehat{D}_2$ seja auto-adjunto com relação ao produto interno $\langle \mid \rangle$ sobre H_t, e $\widehat{D}_1 = \frac{\dot{q}}{q}$. A última condição é especialmente restritiva que q pode somente depender do tempo e ser um parâmetro livre (não-dinâmico), pode ser considerado como uma constante no caso que $\widehat{D}_1$ deva desaparecer. Em geral, estas condições não são cumpridas. Não obstante, o produto interno (4.14) têm uma propriedade agradável que é descrita a seguir.

Considere o problema de auto-valor para $H^{(q)}$. Denotando os auto-valores e auto-vetores por $E_n^{(q)}$ e $\psi_n^{(q)}$, isto é

$$H^{(q)} \psi_n^{(q)} = E_n^{(q)} \psi_n^{(q)} \tag{4.15}$$

expressando $\psi_n^{(q)}$ na forma de duas componentes como em (4.6), e usando a equação (4.15), obtemos

$$H^{(q)} \begin{pmatrix} u^{(q)} \\ v^{(q)} \end{pmatrix} \phi_n^{(q)} = E_n^{(q)} \begin{pmatrix} u^{(q)} \\ v^{(q)} \end{pmatrix} \phi_n^{(q)} \tag{4.16}$$

substituindo a expressão do operador Hamiltoniano (4.8) na equação (4.16),

$$\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{\dot{q}}{q} + \frac{1}{q} - \widehat{D}_1 - q\widehat{D}_2 & -\frac{\dot{q}}{q} - \frac{1}{q} + \widehat{D}_1 - q\widehat{D}_2 \\ -\frac{\dot{q}}{q} + \frac{1}{q} + \widehat{D}_1 + q\widehat{D}_2 & \frac{\dot{q}}{q} - \frac{1}{q} - \widehat{D}_1 + q\widehat{D}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(q)} \\ v^{(q)} \end{pmatrix} \phi_n^{(q)} = E_n^{(q)} \begin{pmatrix} u^{(q)} \\ v^{(q)} \end{pmatrix} \phi_n^{(q)} \tag{4.17}$$

desenvolvendo a equação (4.17) podemos mostrar que sobre um múltiplo escalar inderterminado, $\psi_n^{(q)}$ têm a seguinte forma:

$$\psi_n^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - iqE_n^{(q)} \\ 1 + iqE_n^{(q)} \end{pmatrix} \phi_n^{(q)} \tag{4.18}$$

onde $\phi_n^{(q)} \in H_t$ satisfaz

$$\left[\widehat{D}_2 - iE_n^{(q)}\left(\widehat{D}_1 - \frac{\overset{\bullet}{q}}{q}\right) - (E_n^{(q)})^2\right]\phi_n^{(q)} = 0. \tag{4.19}$$

Esta equação pode ser observada como uma equação de auto-valores generalizada para H_t. Ela define ambos os vetores $\phi_n^{(q)}$ e os números complexos $E_n^{(q)}$. Ela reduz para o auto-valor ordinário a equação de $\widehat{D}_2$, se $\widehat{D}_1 = \frac{\overset{\bullet}{q}}{q}$. Note que esta também é uma condição para a auto-adjuntocidade do Hamiltoniano, com a escolha de (4.14) para o produto interno. Além do mais, se esta condição é satisfeita, então a equação (4.19) determina $E_n^{(q)}$ a menos de um sinal, isto é, auto-valores aparecem com um par de sinais opostos.

Se q é escolhido para ser independente do tempo, então (4.19) não leva qualquer informação sobre q e portanto $\phi_n^{(q)}$ e $E_n^{(q)}$ são independente da escolha de q. Daí, pode-se retirar o índice q do lado direito da equação (4.18). Neste caso, a equação (4.19) torna-se

$$\left[\widehat{D}_2 - iE_n\widehat{D}_1 - {E_n}^2\right]\phi_n = 0. \tag{4.20}$$

Agora usando o produto interno (4.14) para calcular o produto interno de dois auto-vetores do Hamiltoniano. Realizando os cálculos, encontra-se

$$\begin{aligned}
\left(\psi_m^{(q)}, \psi_n^{(q)}\right) &= \frac{1}{2}\left\langle \phi_n + iqE_n\phi_n \,|\phi_m + iqE_m\phi_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \left\langle \phi_n \,|\phi_m \right\rangle - iq^*E_m^*\left\langle \phi_n \,|\phi_m \right\rangle + iqE_n\left\langle \phi_n \,|\phi_m \right\rangle + \\ + |q|^2 E_nE_m^*\left\langle \phi_n \,|\phi_m \right\rangle \end{array}\right] \\
&= \frac{i}{2}\left(q^*E_m^* - qE_n\right)\left\langle \phi_m \mid \phi_n \right\rangle + \frac{i}{2}(q^*E_m^* - qE_n)\left\langle \phi_m \mid \phi_n \right\rangle \\
\left(\psi_m^{(q)}, \psi_n^{(q)}\right) &= i(q^*E_m^* - qE_n)\left\langle \phi_m \mid \phi_n \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Portanto se q é um número imaginário positivo, isto é, $q = i\,|q|$, então

$$\begin{aligned}
\left(\psi_m^{(q)}, \psi_n^{(q)}\right) &= i(q^*E_m^* - qE_n)\left\langle \phi_m \mid \phi_n \right\rangle \\
&= i(-i\,|q|\,E_m^* - i\,|q|\,E_n)\left\langle \phi_m \mid \phi_n \right\rangle \\
&= (|q|\,E_m^* + |q|\,E_n)\left\langle \phi_m \mid \phi_n \right\rangle \\
\left(\psi_m^{(q)}, \psi_n^{(q)}\right) &= |q|\left(E_m^* + E_n\right)\left\langle \phi_m \mid \phi_n \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Daí os auto-vetores $\psi_m^{(q)}$ e $\psi_n^{(q)}$ com $E_m = -E_n^*$ (se existirem) são ortogonais independentemente do valor de $\langle \phi_m \mid \phi_n \rangle$. De fato, Considere $E_n = a + ib$, logo obtemos

$$E_n^* = a - ib, \text{ como } E_m = -E_n^* = -a + ib$$

e portanto

$$\begin{aligned} E_m^* + E_n &= (-a+ib)^* + a + ib \\ &= -a - ib + a + ib \\ E_m^* + E_n &= 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Além disso, nestas condições, têm-se

$$\left(\psi_n^{(q)}, \psi_n^{(q)}\right) = 2\,|q|\,\mathrm{Re}(E_n)\,\langle \phi_n \mid \phi_n \rangle \tag{4.24}$$

isto é, a norma de um auto-vetor possui o mesmo sinal da parte real do correspondente auto-valor de energia imaginário. Note que aqui estamos assumindo que o produto interno $\langle \phi_m \mid \phi_n \rangle$ sobre H_t é não negativo. De fato, H_t está sendo identificado com o espaço de Hilbert $L^2(\Sigma_t)$ das funções de quadrado somáveis sobre Σ_t, onde a integração é definida pela medida $[\det({}^{(3)}g)]^{\frac{1}{2}}$ dada pela métrica-três ${}^{(3)}g$. A última é induzida pela métrica-quatro g.

Uma outra propriedade interessante do produto interno (4.14) é o fato que para q imaginário ele produz a família de produto interno Klein-Gordon, $\langle \mid \rangle_{KG}$. Isto é facilmente visto por substituir (4.7) em (4.14), que conduz para

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_2) &= \langle u_1 | \, u_2 \rangle - \langle v_1 | \, v_2 \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + q\dot{\phi}_1) \right| \left. \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2 + q\dot{\phi}_2) \right\rangle \\ &- \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - q\dot{\phi}_1) \right| \left. \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2 - q\dot{\phi}_2) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left[2q \left\langle \phi_1 \middle| \dot{\phi}_2 \right\rangle + 2q^* \left\langle \dot{\phi}_1 \middle| \phi_2 \right\rangle \right] \\ &= q\left(\left\langle \phi_1 \middle| \dot{\phi}_2 \right\rangle - \left\langle \dot{\phi}_1 \middle| \phi_2 \right\rangle \right) \\ &=: q\,\langle \phi_1 \mid \phi_2 \rangle_{KG}\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ele também é útil para recordar que o espaço $H_t \oplus H_t$ é nada mais que o espaço das possíveis condições iniciais $\left[\phi(t,x^i), \overset{\bullet}{\phi}(t,x^i)\right]$ com tempo inicial t e $x^i \in \Sigma_t$. Em vista da bem posta equação dinâmica (4.1). Daí a decomposição em duas-componentes pode ser considerada como uma divisão do espaço de soluções das equações de campo. Em vista da liberdade da escolha do parâmetro q, esta divisão é claramente não única.

4.1 Corda cósmica com rotação

Em [5], os autores estudam a fase geométrica (topológica) induzida por um campo de Klein-Gordon devido a rotação de uma corda cósmica. Nesta seção, esboçaremos uma solução para este problema que usa o formalismo de duas-componentes.

A expressão da métrica g correspondente em coordenadas locais para a rotação de uma corda cósmica com momento angular j e densidade linear d é [5]

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4j & 0 & (\alpha\rho)^2 - (4j)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

e sua inversa g^{-1} é dada por

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(4j)^2-(\alpha\rho)^2}{(\alpha\rho)^2} & 0 & \frac{-4j}{(\alpha\rho)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-4j}{(\alpha\rho)^2} & 0 & \frac{1}{(\alpha\rho)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

onde $(x^\mu) = (t, \rho, \varphi, z)$, $\alpha = 1 - 4d$ e (ρ, φ, z) são coordenadas cilíndricas na hiper-surfície do espaço $\sum_t$ que corresponde a um cone com um ângulo deficitário $\beta = 8\pi d = 2\pi(1-\alpha)$.

Note que para $\rho \leq \frac{4j}{\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ se torna tipo-tempo. Isto conduz a existência de curvas tipo-tempo fechadas. Esta região pode ser ignorada impondo condições de limite apropriado nos campos, i.e. $\Phi = 0$ para $\rho \leq \frac{4j}{\alpha}$.

Executando os cálculos necessários, encontramos as expressões dos seguintes operadores $\widehat{D}_1$ e $\widehat{D}_2$ das equações (4.3) e (4.4):

$$\widehat{D}_1 = \frac{2}{g^{00}}\left[g^{0i}\partial_i + ieg^{0\mu}A_\mu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\right]$$

como $\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\}g^{km}$, obtemos

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = 0 \tag{4.28}$$

e são $A_\mu = 0$, daí

$$\widehat{D}_1 = \frac{8j}{(\alpha\rho)^2 - (4j)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{4.29}$$

de maneira analoga aos cálculos realizados para $\widehat{D}_1$ encontramos a expressão para $\widehat{D}_2$. Como $\Gamma^1_{22} = -\alpha^2\rho$, os demais Γ^m_{ij} da expressão e o potencial V são nulos, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{D}_2 &= \left[\begin{array}{c}\frac{2}{g^{00}}g^{ij}\partial_{ij} + (ieg^{\mu i}A_\mu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^i_{\mu\nu})\partial_i \\ +\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(ie\nabla_\mu A_\nu - e^2A_\mu A_\nu) + \frac{1}{2}(V - M^2)\end{array}\right] \\ &= \left(\frac{-(\alpha\rho)^2}{(\alpha\rho)^2 - (4j)^2}\right)\left[\begin{array}{c}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} \\ +\frac{1}{(\alpha\rho)^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - M^2\end{array}\right].\end{aligned} \tag{4.30}$$

Então as condições para a auto-adjuntocidade do Hamiltonian $H^{(q)}$ de (4.5) não pode ser conhecida. Todavia, considere os autovetores $\Psi^{(q)}_n$ de $H^{(q)}$, (4.15). Para a métrica (4.26), equação (4.20) leva a forma

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{(\alpha\rho)^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{i8jE_n}{(\alpha\rho)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ +\frac{\partial^2}{\partial z^2} - M^2 + \left[\frac{(\alpha\rho)^2 - (4j)^2}{(\alpha\rho)^2}\right]E_n\end{array}\right\}\Phi_n = 0 \tag{4.31}$$

devido a uma observação feita em [14] e usou em [5], nos permite escrever Φ_n na forma $\Phi_n = \exp(i\zeta\varphi)\,\phi_n$. Substituindo esta equação em (4.31), encontramos que $\zeta = -4jE_n$, ϕ_n satisfaz

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{(\alpha\rho)^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \\ +\frac{\partial^2}{\partial z^2} - M^2 + E_n\end{array}\right\}\phi_n = .0 \tag{4.32}$$

Equação (4.32) pode ser obtida de (4.31) fixando $j = 0$ e substituindo Φ_n por ϕ_n. Conseqüentemente ϕ_n determina os auto-vetores do Hamiltoniano para uma corda sem rotação com mesma densidade de massa. Neste caso $\widehat{D}_1$ desaparece e $\widehat{D}_2$ se torna auto-adjunto. Então, ϕ_n são auto-vetores ortogonais de $\widehat{D}_2$, com $j = 0$. Se $q = i$, então o Hamiltoniano se torna auto-adjunto com relação ao produto interno (4.14).

As soluções da equação (4.32) são da forma

$$\phi_n = N_n e^{ipz} e^{im\varphi} J_v\left(kp\right) \tag{4.33}$$

onde N_n são constantes de normalização apropriadas, J_v é a função de Bessel, e

$$k := \sqrt{E_n^2 - (p^2 + M^2)} \qquad v := \frac{m}{\alpha}. \tag{4.34}$$

A propriedade de ortogonalidade de ϕ_n leva para Φ_n com o mesmo auto-valor de energia E_n como a medida da integração sobre $\sum_t$ é independente de j. Isto é por causa da identidade

$$\det[g] = -\det[{}^{(3)}g] \tag{4.35}$$

que garante para qualquer métrica com função de lapso $N = 1$, [15]. Note, porém, que há Φ_n com auto-valores de energia diferente que não são ortogonais.

Neste caso, o campo de Klein-Gordon adquire uma fase tipo Aharonov-Bohm que é topológica por natureza. Como Berry descreve em seu artigo [13], a fase de Aharonov-Bohm pode ser vista como um caso particular de uma fase geométrica. A dependência no tempo do sistema é introduzida escolhendo um sistema de coordenada centrado dentro da caixa. Isto conduz à fase geométrica para as auto-funções de energia. O mesmo resultado é aplicado, então, ao pacote de onda de um elétron, simplesmente porque a fase geométrica é independente do auto-valor de energia, isto é, a todo auto-valor de energia e então qualquer combinação linear deles, em particular formando um pacote de onda de elétron localizado, adquiri a mesma fase geométrica que é mostrada igual à descoberta por Aharonov e Bohm [13].

Em [5] é usada a analogia entre corda cósmica e o aparato de Aharonov-Bohm para se obter as fases geométricas correspondentes. Porém, isto não é justificado totalmente para auto-funções de energias arbitrárias como mostrado abaixo e também em [5]. Diferentemente do sistema de Aharonov-Bohm, a fase induzida neste caso depende do auto-valor de energia.

Por conseguinte, um campo arbitrário de Klein-Gordon localizado por superposição de autofunções de energias diferentes não será cíclico. O argumento de Berry se aplica, então, só a essas configurações de campo "localizado" por autofunções de energia.

Logo, nos permite usar em analogia o tratamento da fase de Berry para o de Aharonov-Bohm [13], e derivar a fase geométrica no contexto do formalismo de duas componente. Isto é feito por mudança no centro da caixa que circula ao redor da corda a uma distância maior que $\frac{4j}{\alpha}$. Se R^i são coordenadas do centro da caixa e x'^i são as coordenadas centradas sobre $R = (R^i)$, então, as autofunções são da forma: $\Phi_n(x') = \Phi(x - R)$. Substituindo esta expressão na versão não-Abeliana de (2.42), encontramos

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_n^{ij} &= i\left\langle \Phi_n^l(x-R)\left|\frac{\partial}{\partial R^i}\right|\Phi_n^j(x-R)\right\rangle dR^i \\
&= i\int_\Sigma d\Omega\phi_n^{*I}(x-R)\left[-4iE_nj\phi_n^J(x-R)\,dR^2 + \frac{\partial}{\partial R^i}\phi_n^J(x-R)\,dR^i\right] \\
&= 4jE_n\delta_{IJ}dR^2
\end{aligned} \tag{4.36}$$

onde $d\Omega = \alpha\rho d\rho d\varphi dz$, I e J representam possíveis índices de degeneração correspondendo a autofunções, R^2 é o ângulo polar associado com o centro da caixa, os ϕ_n's estão normalizados. Para uma curva C com número Nc, a fase geométrica do "ângulo"é determinado por

$$\gamma_n = N_c\int_0^{2\pi}\mathbf{A}_n = 8\pi jE_nN_c \tag{4.37}$$

onde os índices I, J e δ_{IJ} foram suprimido por conveniência. Este é idêntico ao resultado de [5]. Porém, note que aqui não houve preocupação com a dificuldade de escolher um produto interno para o espaço das soluções da equação de Klein-Gordon, como o proposto por Ashtekar e Magnon [16].

4.2 Conclusão

Neste trabalho estudamos conteúdos matemáticos que consideremos essenciais para atingir nossos objetivos, entre eles destacamos: Grupos e Álgebras de Lie, fibrado principais, conexões de 1-forma, levantamento horizontal e holonomia. Em seguida encontramos a fase geométrica para uma classe de espaço-tempos correspondendo a defeitos topológicos usando o método do fator de fase de Dirac [5]. Em todos os casos a fase geométrica depende do índice espectral da degenerescência da energia. Além do mais, para dar um tratamento apropriado a este problema usamos a generalização não-abeliana da fase de Berry [8]. Encontramos as fases geométricas de um campo escalar induzidas por uma corda cósmica quiral e por multiplas cordas cósmicas quirais. Neste último, usamos o fato que do ponto de vista global as cordas fora da curva não afetam a holonomia [7] e consequentemente não afetam a fase de Berry. Por último, mostramos que o formalismo de duas componentes pode ser usado para investigar a fase geométrica associada com campos carregados de Klein-Gordon. Este formalismo provê uma definição precisa da aproximação de adiabática e permite obter a derivação de Berry da fase geométrica adiabática a ser aplicada a campos relativísticos de Klein-Gordon.

Referências Bibliográficas

[1] J. G. de Assis, C. Furtado e V. B. Bezerra Phys. Rev. D 62, 45003 (2000).

[2] Mostafazadeh A 1998 J. Phys. A: Math. Gen. 31 7829-7845. Printed in the UK.

[3] ASSIS, José Gomes de. Fatores de Fase Geométricos e Topológicos em Gravitação. João Pessoa, 2000. Tese (Doutoramento em Física) – Universidade Federal da Paraíba.

[4] Simon B 1983 Phys. Rev. Lett. **51** 2167

[5] A. Corichi e M. Pierri, Phys. Rev. D 51, 5870 (1995).

[6] D. V. Gal´tsov e P. S. Letelier, Phys. Rev, D 47, 4273 (1993); ver também P. S. Letelier, Class. Quantum Grav. 12, 471 (1995).

[7] V. B. Bezerra e P. S. Letelier, J. Math. Phys. 37,6271 (1996).

[8] A. Mostafazed, J. Phys. A 31, 7829 (1998).

[9] Mostafazed A Cosmological geomemetric phase Preprint Koç University, Istambul.

[10] Misner CW, Thorne K S and Wheeler J A 1973 Gravittion (New York: Freeman).

[11] Feshbach H and Villars F 1958 Rev. Mod. Phys. 30 24.

[12] Holstein B R 1992 Topics in Advanced Quantum Mechanics (Redwood City, CA: Addison-Wesley)

[13] Berry M. V. 1984 Proc. R. Soc. A 392 45

[14] de Sousa Gerbert P and Jackiw J 1989 *Commum. Math. Phys.* **124** 229.

[15] Wald R. M. 1984 General Relativity (Chicago, IL: University of Chicago Press)

[16] Ashtekar A and Magnon A 1975 Proc. R. Soc. A 346 375.

[17] NAKAHARA, Mikio. Geometry, Topology and Physics. IOP Publishing Ltd, 2003.

[18] CARMO, Manfredo Perdigão do. Geométria Riemanniana. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[19] O´Neill, Barrett - Elementary differential geometry. California, Limusa-Wiley, S. A. 1972.