

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma Compactificação da Família das Configurações de Três Pontos em \mathbb{P}^2

Por
Glageane da Silva Souza

sob orientação do
Prof. Dr. Fernando A. Xavier de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

abril 2005
João Pessoa, Paraíba

Uma Compactificação da Família das Configurações de Três Pontos em \mathbb{P}^2

por

Glageane da Silva Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Algébrica

Aprovada por:

Prof. Dr. **Fernando A. Xavier de Souza**
Orientador

Prof. Dr. **Carlos Eduardo Bahiano**
Examinador

Prof. Dr. **Jaqueline F. Rojas Arancibia**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

abril 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: **abril 2005**

Autor: **Glageane da Silva Souza**

Título: **Uma Compactificação da Família
das Configurações de Três Pontos
em \mathbb{P}^2**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **abril** Ano: **2005**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

O AUTOR RESERVA OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO, E NEM A TESE NEM EXTENSIVAS EXTRAÇÕES DELA PODEM SER IMPRESSAS OU REPRODUZIDAS SEM A PERMISSÃO ESCRITA DO AUTOR.

O AUTOR ATESTA QUE A PERMISSÃO TEM SIDO OBTIDA PELO USO DE QUALQUER DIREITO AUTORAL DO MATERIAL EM QUE ESTA TESE APAREÇA(OU BREVES RESUMOS REQUERENDO APENAS O PRÓPRIO AGRADECIMENTO NO MATERIAL ESCRITO) E QUE TODOS OS TAIS USOS SEJAM CLARAMENTE AGRADECIDOS.

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Notação	iv
Introdução	v
1 Conceitos Preliminares	1
1.1 Variedades Projetivas	1
1.1.1 Produto de Espaços Projetivos	5
1.1.2 Grassmanniana	8
1.1.3 Variedade de Incidência	10
1.1.4 Variedade Bandeira	11
1.2 Fibrado Vetorial	11
1.3 Espaço Tangente	12
1.4 Polinômio de Hilbert	13
2 Explosão	21
2.1 Explosão em \mathbb{P}^n	21
2.2 Explosão Local	24
2.3 Explosão ao longo de uma subvariedade	27
3 Grupos Algébricos	29
3.1 Grupos Algébricos	29
3.2 Ação de Grupo	30

4	Introdução a Triângulos	34
4.1	Noções Preliminares	35
4.2	A Rede de Cônicas	35
4.3	O Lugar da Indeterminação de ν	37
4.4	Primeira Explosão	43
4.5	Resolvendo a indeterminação de ν	44
4.6	Primeiro Mapa de Multiplicação	54
4.7	Carta Local para X'	55
4.8	Descrição de Y'	59
4.9	Segunda Explosão	61
4.10	Segundo Mapa de Multiplicação	66
4.11	Descrição de Y''	70
4.12	Terceira Explosão	73
	Apêndice	75
A	Cálculos no software Maple versão 8.00(IBM INTEL NT)	76
	Referências Bibliográficas	101

Agradecimentos

- A Deus Eterno e todo Poderoso, por sua benevolência, e a Nossa Senhora de Nazaré por sua interseção junto a seu amado filho nosso Senhor Jesus Cristo.
- Aos meus pais, Braz e Glagean, pelo apoio incondicional e carinho imenso . Aos meus irmãos Gulliver, Givago e Dmercléia por seus pensamentos positivos. E a toda família.
- Ao meu orientador por sua dedicação.
- Ao meu amado companheiro Hermann Costa, por toda paciência para comigo.
- As famílias Barbosa e Loureiro pelo apoio, em particular Adriana Barbosa.
- A todos os professores da graduação e da pós-graduação pela dedicação e orientação, em particular aos prof. Pedro Sá, prof. Miguel Chaquian e prof. Roberto Callejas Bedregal.
- Aos meus colegas de curso que estudaram comigo, Rita, Givaldo, Ebem, Aluízio, Janete, Ivan, Gerson e João. E a Jorge Luíz de Souza por sua amizade.
- A todos os funcionários do departamento.

Resumo

Em nosso trabalho estabelecemos uma compactificação da família das configurações de três pontos em \mathbb{P}^2 . Iniciamos nossa compactificação estudando a grassmanniana de feixes de cônicas que passam por um ponto fixo 0 , a qual foi denotada por $X = G(2, \mathcal{F}_2^0)$. Construimos uma seqüência explícita de três explosões ao longo de centros lisos, para estendermos o mapa racional $\Psi_1 : X \dashrightarrow \text{Hilb}^3\mathbb{P}^2$. Este mapa não está bem definido na subvariedade $Y \subset X$. Na primeira explosão encontramos um mapa racional $\Psi_2 : X' \dashrightarrow \text{Hilb}^3\mathbb{P}^2$, onde X' é a explosão de X ao longo da subvariedade Y . Na segunda explosão nos deparamos com um terceiro mapa racional $\Psi_3 : X'' \dashrightarrow \text{Hilb}^3\mathbb{P}^2$, onde X'' é a explosão de X' ao longo da subvariedade $Y' \cong \tilde{\mathbb{P}}^2 \subset X'$. E na terceira e última explosão definimos um morfismo $\varphi : X''' \rightarrow \text{Hilb}^3\mathbb{P}^2$, onde X''' é a explosão de X'' ao longo da subvariedade $Y'' \subset X''$.

Abstract

In our work we established a compactification of the family of the configurations of three points in \mathbb{P}^2 . We begin our compactification studying the grassmannian of pencil of conics containing a fixed point 0, which was denoted por $X = G(2, \mathcal{F}_2^0)$. We built an explicit sequence of three blowups along smooth centers, we extend the rational map $\Psi_1 : X \dashrightarrow Hilb^3\mathbb{P}^2$. This map is not very well defined in the subvariety $Y \subset X$. In the first blowup we found a rational map $\Psi_2 : X' \dashrightarrow Hilb^3\mathbb{P}^2$, where X' it is the blowup of X along the subvariety Y . In the second blowup we obtained a third rational map $\Psi_3 : X'' \dashrightarrow Hilb^3\mathbb{P}^2$, where X'' it is the explosion of X' along the subvariedade $Y' \cong \check{\mathbb{P}}^2 \subset X'$. In the third and last blowup we defined a morfism $\varphi : X''' \rightarrow Hilb^3\mathbb{P}^2$, where X''' it is the explosion of X'' along the subvariety $Y'' \subset X''$.

Notação

- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ denota o anel de polinômios nas variáveis x_1, \dots, x_n , com coeficientes em \mathbb{C} .
- $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_s$ denota o subconjunto formado pelos elementos de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ de grau $\leq s$.
- $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ denota o ideal gerado pelos polinômios f_1, \dots, f_n .
- $I(X)$ denota o ideal da variedade X .
- $K[X]$ denota o anel de coordenadas da variedade X , definido como $K[X] = \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(X)}$.
- $K(X)$ denota o corpo das funções racionais da variedade X .
- $\dim T_x X$ denota a dimensão do espaço tangente a variedade X no ponto $x \in X$.
- m_x denota o ideal máximo do ponto x . Onde $m_x = \{f \in K[X] \mid f(x) = 0\}$.
- $d^\circ f$ denota o grau do polinômio f .
- \mathcal{F} denota o espaço vetorial das formas lineares nas variáveis x_0, x_1 e x_2 .
- \mathcal{F}_m^0 o subfeixe de formas de grau m que se anulam no ponto 0.
- $\mathcal{F}_m^{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle}$ o subfeixe de formas de grau m que se anulam no ponto de interseção das formas lineares λ_1 e λ_2 .

Introdução

A abordagem moderna do esquema de Hilbert foi introduzida por Grotendick [9], e desde então tem sido objeto de estudos de muitos matemáticos. O esquema de Hilbert de 3 pontos no plano tem sido estudado por G. Elencwajeg et P. Le Barz [6], G. Elingsrud, S. Stromme [7] e R. Mallavilabarrena [12]. Forgaty [8] mostrou que $Hilb^d\mathbb{P}^2$ é não singular de dimensão $2d$. Dan Avritzer e Israel Vaisencher [1], mostram que o esquema de Hilbert de d pontos em \mathbb{P}^2 mergulha na grassmanniana de subespaços de \mathcal{F}_d de codimensão d , ou seja, $G(N - d, \mathcal{F}_d)$, onde $N = \dim\mathcal{F}_d$. Então $Hilb^3\mathbb{P}^2$ mergulha na grassmaniana $G(7, \mathcal{F}_3)$.

Vainsencher e Xavier [22], [17] construíram uma compactificação do espaço das cúbicas reversas estudando o feixe de quádricas que contém uma reta em comum. Eles observaram que a configuração

$$\boxed{\text{reta}(\ell) \cup \text{cúbica reversa}(\mathcal{C})}$$

é uma interseção completa. Esse foi o nosso ponto de partida.

Em nosso trabalho estabeleceremos uma compactificação do esquema de Hilbert que parametriza a configuração de três pontos em \mathbb{P}^2 . Iniciaremos nossa compactificação estudando o feixe de cônicas que contém um ponto em comum. Note que a configuração

$$\boxed{\text{ponto fixo} \cup \text{triângulo}}$$

é uma interseção completa em \mathbb{P}^2 , já que o seu ideal é gerado por 2 cônicas. Portanto seguiremos a descrição feita por Vainsencher e Xavier, para obtermos nossa compactificação.

Seja $X = G(2, \mathcal{F}_2^0)$, onde 0 denota um ponto fixo, a grassmaniana de feixes de cônicas que contém o ponto 0. Iremos construir uma seqüência explícita de três explosões

$$X''' \rightarrow X'' \rightarrow X' \rightarrow X.$$

ao longo de centros lisos.

O objetivo do nosso trabalho é construir um mapa regular

$$\varphi : X''' \rightarrow G(7, \mathcal{F}_3).$$

Pois sabe-se por Sernesi [13], que esse mapa estende o mapa racional

$$\gamma : X \dashrightarrow \text{Hilb}^3\mathbb{P}^2.$$

Note que $\mathcal{H} = \text{Hilb}^3\mathbb{P}^2 \subset G(7, \mathcal{F}_3)$, e assim temos que $\varphi^{-1}(\mathcal{H}) \subset X'''$.

Daremos agora um resumo da construção desse mapa.

Existe uma aplicação racional $\nu : X \dashrightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$, que a cada ponto $\langle q_1, q_2 \rangle \in X$ associa à rede de cônicas $\langle q_1, q_2, q_3 \rangle$, com

$$q_1 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \quad q_2 = \lambda'_1 f_1 + \lambda'_2 f_2, \quad q_3 = \lambda_1 \lambda'_2 - \lambda_2 \lambda'_1,$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2, f_1$ e f_2 denotam formas lineares.

A aplicação ν não está definida na subvariedade $Y \subset X$ dada pelo feixe de cônicas que possuem uma componente fixa ℓ , a qual é uma reta que passa pelo ponto fixo, 0.

$$Y = \{\ell \in \check{\mathbb{P}}_0^1\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{p} \\ \star \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ 0 \end{array} \right\}$$

A explosão de X ao longo de Y define um morfismo $X' \rightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$ que estende o mapa racional $\nu : X \dashrightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$.

Seja \mathcal{A} a imagem recíproca do fibrado tautológico de posto dois sobre $G(2, \mathcal{F}_2^0)$ via o primeiro mapa de explosão. O mapa de multiplicação $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_3^0$ induz um mapa racional $X' \dashrightarrow G(6, \mathcal{F}_3^0)$. Este mapa racional não está definido numa subvariedade $Y' \subset X'$. Esta subvariedade é isomorfa à \mathbb{P}^2 . Explodindo X' ao longo de Y' obtemos X'' .

Seja \mathcal{R}' a imagem recíproca do fibrado tautológico via o segundo mapa de explosão de posto 3, \mathcal{R} , sobre $G(3, \mathcal{F}_2)$. O mapa de multiplicação $\eta : \mathcal{R}' \otimes \mathcal{F}_3$ induz um mapa racional $X'' \dashrightarrow G(7, \mathcal{F}_3)$. Mostraremos que este mapa está definido em Y'' , a subvariedade de X'' , que pode ser descrita como o \mathbb{P}^1 -fibrado sobre $\check{\mathbb{P}}_0^1$ definido pelos pares $(\ell, p) \in \check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2$, tal que $p \in \ell$.

$$Y'' = \left\{ \begin{array}{ccc} & & p \\ & & \star \\ \bullet & \text{---} & \\ 0 & & \ell \end{array} \right\}$$

Portanto obtemos X''' através da explosão de X'' ao longo de Y'' , o que induz o mapa regular $X''' \rightarrow G(7, \mathcal{F}_3)$.

Nos capítulos *I*, *II* e *III* daremos algumas noções básicas de geometria algébrica. No capítulo *I* definiremos variedades projetivas, morfismo e polinômio de Hilbert. Já no capítulo *II*, descreveremos os coincideitos relativos a explosão, uma vez que iremos utilizá-los na discursão do problema, e no capítulo *III*, abordaremos grupos algébricos e ação de grupo.

O problema será discutido no capítulo *IV*, no qual exibiremos o mapa racional

$$\nu : X \dashrightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$$

e determinaremos a única órbita fechada de X . A descrição das órbitas fechadas é decisiva, pois sabe-se que a verificação de muitos resultados se restringirá a apenas uma vizinhança de um representante da órbita fechada. Exibiremos ainda os centros de explosões, os lugares da indeterminação dos mapas racionais, para finalmente explodirmos X'' ao longo de Y'' , para construirmos assim um morfismo $X''' \rightarrow G(7, \mathcal{F}_3)$.

No apêndice, temos os cálculos feitos no programa Maple versão 8.00 (IBM INTEL NT) para descrever as operações relatadas no capítulo *IV*.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, para uma melhor comodidade dos leitores, daremos em sua grande maioria, algumas definições e resultados de um primeiro curso de Geometria Algébrica.

Convém lembrar que estaremos trabalhando sobre o corpo dos números complexos, \mathbb{C} e que todos os anéis aqui considerados são comutativos com unidade.

1.1 Variedades Projetivas

Definição 1.1. *O n -espaço projetivo sobre \mathbb{C} , denotado por $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ou \mathbb{P}^n , é o conjunto das classes de equivalência de $(n + 1)$ -uplas $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ de elementos de \mathbb{C} , sob a relação de equivalência dada por $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$; em outras palavras é o conjunto quociente do conjunto $\mathbb{A}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ com respeito a relação de equivalência que identifica pontos que estão na mesma reta passando pela origem.*

Um elemento de \mathbb{P}^n é chamado **ponto**. Se p é um ponto, então qualquer $(n + 1)$ -upla (a_0, a_1, \dots, a_n) na classe de equivalência de p é chamada **coordenada homogênea** de p . Note que se $x = (a_0, a_1, \dots, a_n) \sim y = (b_0, b_1, \dots, b_n)$, então x e y estão em uma mesma reta.

Definição 1.2. *Um **anel graduado** é um anel S junto com uma decomposição*

$S = \bigoplus S_d, d \geq 0$, de S em uma soma direta de grupos abelianos S_d , de modo que para qualquer $d, e \geq 0, S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$.

Exemplo 1.3.

O anel dos polinômios $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ é um anel graduado. De fato, $S = \bigoplus S_d$ onde $S_d = \langle x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \mid i_0 + i_1 + \dots + i_n = d \rangle$, com $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$.

Assim, se $F \in S$ temos que $F = F_0 + F_1 + \dots + F_n$, onde $F_i \in S_i$.

Um elemento de S_d é chamado elemento homogêneo de grau d . Portanto, qualquer elemento de S pode ser escrito de maneira única como uma soma finita de elementos homogêneos.

Agora consideremos F um polinômio homogêneo de grau d em S , então verifica-se que

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n) = F(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d F(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Assim inicialmente encontramos dificuldades para definir uma função em \mathbb{P}^n , pois as coordenadas homogêneas não são únicas. Então para podermos falar de zeros de um polinômio homogêneo consideremos a seguinte função:

$$F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$p \longmapsto \begin{cases} F(p) = 0, & \text{se } F(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0 \\ F(p) = 1, & \text{se } F(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq 0. \end{cases}$$

Definição 1.4. Dado $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, homogêneo. O **conjunto de zeros** de F é definido por $V(F) = \{ p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0 \}$.

Se T é um subconjunto qualquer de elementos homogêneos de S , definimos o conjunto de zeros de T como $V(T) = \{ p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0, \forall F \in T \}$.

Como S é Noetheriano então existe um subconjunto finito F_1, F_2, \dots, F_r tal que $V(T) = V(F_1, F_2, \dots, F_r)$.

Definição 1.5. Um subconjunto de \mathbb{P}^n é um **conjunto algébrico** se existe um conjunto T de elementos homogêneos de S tal que $Y = V(T)$.

Definição 1.6. O conjunto $\mathcal{T} = \{ V(T) \mid T \subseteq S \}$ satisfaz os axiomas de fechados de uma topologia. Assim definimos a **topologia de zariski** sobre \mathbb{P}^n , conceituando **conjuntos abertos** como os conjuntos complementares dos conjuntos algébricos.

Definição 1.7. Uma **variedade algébrica projetiva** é um conjunto algébrico em \mathbb{P}^n , com a topologia induzida.

Definição 1.8. Uma **variedade quase projetiva** é um subconjunto aberto de um conjunto fechado projetivo.

Definição 1.9. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade quase projetiva. Uma função $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ é **regular** em $p \in Y$ se existe uma vizinhança aberta U com $p \in U \subseteq Y$, e polinômios homogêneos $g, h \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, de mesmo grau, de modo que h é não nulo sobre U , e $f = \frac{g}{h}$ sobre U . Dizemos que f é regular sobre Y se é regular em todos os pontos de Y .

Definição 1.10. Se X, Y são duas variedades, um morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ é um mapa contínuo de modo que para todo conjunto aberto $V \subseteq Y$, e para toda função regular $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, a função $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ é regular.

Consideremos X e Y variedades projetivas. Sejam f uma aplicação regular e $y \in Y$, chamamos de **fibra** sobre o ponto y , o conjunto $f^{-1}(y) \subset X$.

Teorema 1.11 (Dimensão da fibra). Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo entre variedades projetivas irredutíveis tal que $f(X) = Y$.

Seja $\dim X = n$ e $\dim Y = m$. Então:

1. $n \geq m$;
2. $\dim f^{-1}(y) \geq n - m, \quad \forall y \in Y$;
3. $\exists U \subset Y$ aberto denso tal que $\dim f^{-1}(y) = n - m, \quad \forall y \in U$.

Demonstração: Vide referência [14], pg. 60.

Corolário 1.12 (Critério de Irredutibilidade). *Seja $f : X \rightarrow Y$ morfismo entre variedades projetivas, com $f(X) = Y$. Se Y e $f^{-1}(y)$, $\forall y \in Y$, são irredutíveis e $\dim(f^{-1}(y))$ é constante. Então X é irredutível.*

Demonstração: Vide referência [14], pg. 61.

Definição 1.13. *Uma **curva plana projetiva** é o conjunto de zeros $F = V(f)$ em \mathbb{P}^2 de um polinômio homogêneo e não constante. O grau do polinômio f determina o grau da curva, denotado por ∂F .*

Exemplo 1.14.

Considere o conjunto de zeros do seguinte polinômio

$$F(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

uma **cônica plana projetiva** $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2$. Podemos associar a F a seguinte matriz:

$$S_F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 2a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix}.$$

Seja $V = \{\text{Matrizes simétricas } 3 \times 3\}$. Note que V é um espaço vetorial de dimensão 6. Logo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^5$. De fato,

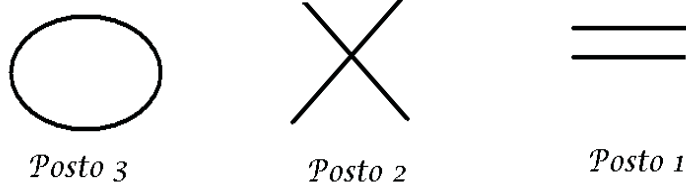
$$\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$\left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 2a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \right] \mapsto [a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}]$$

é um isomorfismo.

Existem três tipos de cônicas em \mathbb{P}^2 de acordo com o posto da matriz acima

Teorema 1.15. (Bezout) *Sejam F e G curvas planas projetivas de grau m e n , respectivamente. Assuma F e G sem fatores em comum. Então F e G interceptam-se mn pontos contados com multiplicidade.*



Demonstração: Vide referência [16], pg.26.

Exemplo 1.16.

Sejam $q_1 = x_2^2 - x_0x_2$ e $q_2 = x_0^2 + x_0x_1$ cônicas em \mathbb{P}^2 , com $\text{mdc}\{q_1, q_2\} = 1$, temos pelo teorema acima que q_1 e q_2 interceptam-se em quatro pontos. De fato q_1 e q_2 interceptam-se nos pontos $[0 : 1 : 0]$, $[1 : -1 : c]$, $[1 : c : 1]$, e $[d : c : 0]$, com $d, c \in \mathbb{C}$.

1.1.1 Produto de Espaços Projetivos

Definição 1.17. *Sejam \mathbb{P}^n e \mathbb{P}^m espaços projetivos, definimos o produto de espaços projetivos via imersão de Segre, Ψ , considerando a seguinte aplicação:*

$$\Psi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$([x_0 : x_1 : \dots : x_n], [y_0 : y_1 : \dots : y_m]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : \dots : x_0y_m : \dots : x_ny_0 : \dots : x_ny_m],$$

onde $N = (n + 1)(m + 1) - 1$.

Proposição 1.18. *Ψ aplica o produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, biunivocamente, sobre a subvariedade de \mathbb{P}^N dada pelos zeros comuns dos seguintes polinômios:*

$$V_{ij}V_{kl} - V_{kj}V_{il}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n; \quad j, l = 0, 1, \dots, m$$

onde $V_{ij} = x_iy_j$, $i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$ são as coordenadas de \mathbb{P}^N .

Demonstração: Seja então:

$$\Psi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$([x_0 : x_1 : \dots : x_n], [y_0 : y_1 : \dots : y_m]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : \dots : x_0y_m : \dots : x_ny_0 : \dots : x_ny_m],$$

onde $N = (n + 1)(m + 1) - 1$.

Note que Ψ está bem definida pois dado $[kx_0, kx_1, \dots, kx_n]e[\mu y_0 : \dots : \mu y_m] \in \mathbb{P}^N$, $k, \mu \in \mathbb{C}$, $k, \mu \neq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \Psi([kx_0 : kx_1 : \dots : kx_n], [\mu y_0 : \mu y_1 : \dots : \mu y_m]) &= \\ [k\mu x_0y_0 : k\mu x_0y_1 : \dots : k\mu x_0y_m : \dots : k\mu x_ny_0 : \dots : k\mu x_ny_m] &= \\ = k\mu[x_0y_0 : x_0y_1 : \dots : x_0y_m : \dots : x_ny_0 : \dots : x_ny_m] \end{aligned}$$

Ψ aplica $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ biunivocamente sobre a subvariedade de \mathbb{P}^N (cujas as coordenadas estamos denotando por $[V_{00} : V_{01} : \dots : V_{0m} : V_{10} : \dots : V_{nm}]$) dada por:

$$\mathcal{V} = V(V_{ij}V_{kl} - V_{kj}V_{il}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n; \quad j, l = 0, 1, \dots, m) \quad (1.1)$$

Com efeito, $\Psi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subset \mathcal{V}$. Reciprocamente dado $v \in \mathcal{V}$, com

$$v = [v_{00} : v_{01} : \dots : v_{0m} : v_{10} : \dots : v_{nm}]$$

e suponha $v_{00} \neq 0$, por exemplo. Então fazendo $k = l = 0$ encontramos que $x = [v_{00} : v_{10} : \dots : v_{n0}]$ e $y = [v_{00} : v_{01} : \dots : v_{0m}]$, assim:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= [v_{00}v_{00} : v_{00}v_{01} : \dots : v_{00}v_{0m} : v_{10}v_{00} : \dots : v_{00}v_{nm}] \\ &= [v_{00} : v_{01} : \dots : v_{0m} : v_{10} : \dots : v_{nm}] = v. \end{aligned}$$

Por outro lado vemos que $v \in \mathcal{V}$ determina $x \in \mathbb{P}^n$ e $y \in \mathbb{P}^m$ tais que $\Psi(x, y) = v$ de maneira única ou seja Ψ é injetiva. \square

Observação 1.19.

Os pontos $v \in \mathcal{V}$, $v = [v_{00} : v_{01} : \dots : v_{0m} : \dots : v_{n0} : \dots : v_{nm}]$ podem ser interpretados como uma matriz de ordem $(n + 1) \times (m + 1)$ matriz, e assim as equações (1.1) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} v_{ij} & v_{il} \\ v_{kj} & v_{kl} \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplo 1.20.

A imagem do mapa:

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1]$$

$\mathcal{V} = V(V_{00}V_{11} - V_{01}V_{10}) \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície quádrlica. Se fixarmos $x \in \mathbb{P}^1$, $x = [a_0 : a_1]$, o conjunto:

$$\sigma(x \times \mathbb{P}^1) = [a_0y_0 : a_0y_1 : a_1y_0 : a_1y_1]$$

é dado em \mathbb{P}^3 pelas equações: $a_0V_{00} = a_1V_{10}$ e $a_1V_{01} = a_0V_{11}$, que é a equação de uma reta.

Analogamente, podemos considerar as retas $\sigma(\mathbb{P}^1 \times y)$, $y \in \mathbb{P}^1$, onde obtemos uma segunda família de retas. Note ainda que podemos descrever a equação

$$V_{00}V_{11} - V_{01}V_{10} = 0$$

como

$$\begin{vmatrix} V_{00} & V_{01} \\ V_{10} & V_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Proposição 1.21. *Se X é uma variedade projetiva, e Y uma variedade quase projetiva, a segunda projeção $p : X \times Y \rightarrow Y$ leva conjuntos fechados em conjuntos fechados.*

Demonstração: Vide referência [14], pg. 58.

Lema 1.22. *Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades projetivas. Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ regular. Então o gráfico de φ ,*

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in U \times \mathbb{P}^n \mid y = \varphi(x)\}$$

é um subconjunto fechado em $X \times Y$.

Demonstração: Vide referência [10], pg. 29.

Definição 1.23. *Seja X uma variedade projetiva e Y qualquer variedade. Um **mapa racional***

$$\varphi : X \dashrightarrow Y$$

é definido como uma classe de equivalência de pares (U, γ) com $U \subset X$ um subconjunto aberto não vazio e $\gamma : U \rightarrow Y$ um morfismo, onde dois pares (U, γ) e (V, η) são ditos equivalentes se $\gamma|_{U \cap V} = \eta|_{U \cap V}$.

Exemplo 1.24.

Temos como exemplo de um mapa racional

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x_0, x_1, x_2] &\mapsto [x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Note que este mapa é regular em $\mathbb{P}^2 - \{[0 : 0 : 1]\}$.

Definição 1.25. *Seja X uma variedade projetiva e $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa racional, seja $U \subset X$ um subconjunto aberto onde φ está definido. Definimos o **gráfico** do mapa racional o fecho de $\Gamma_\varphi, \overline{\Gamma_\varphi}$, em $X \times \mathbb{P}^n$, onde Γ_φ é o gráfico de $\varphi|_U$ definido como em (1.22).*

1.1.2 Grassmanniana

Definição 1.26. *A **Grassmannia** $G(d, n)$ é o conjunto dos subespaços lineares de \mathbb{C}^n de dimensão d .*

Se $d = 2$ a grassmanniana $G(2, n)$ será o conjunto das retas de \mathbb{P}^{n-1} .

Exemplo 1.27.

A Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^3 é o conjunto dos subespaços lineares de \mathbb{C}^4 de dimensão dois que passam pela origem, que será denotada por $G(2, 4)$. Chamaremos os sub-espaços lineares de \mathbb{C}^4 de dimensão dois de **planos**.

Observação 1.28.

Seja $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ um d -plano, gerado pelos d -vetores linearmente independentes $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, v_d = (a_{d1}, \dots, a_{dn})$. Podemos assim associar a seguinte matriz $d \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dn} \end{pmatrix}$$

Assim, qualquer matriz deste tipo representa um elemento de $G(d, n)$. Duas matrizes M, M' representam o mesmo elemento se e somente se $M' = gM$, $g \in GL_d(\mathbb{C})$, onde $GL_d(\mathbb{C})$ é o conjunto das matrizes $d \times d$ inversíveis.

Seja $U_{12\dots d} = \{\Lambda \in G(d, n) \mid \det(P_{12\dots d}) \neq 0\}$, onde $\det(P_{12\dots d})$ é o determinante da submatriz formada pelas d primeiras colunas de M . Podemos representar os elementos de $U_{12\dots d}$ pela seguinte matriz $d \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1(n-d)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2(n-d)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{d1} & b_{d2} & \dots & b_{d(n-d)} \end{pmatrix}.$$

Lema 1.29. *Existe uma correspondência biunívoca entre $U_{12\dots d}$ e $\mathbb{C}^{d(n-d)}$.*

Demonstração: Vide referência [2], pg. 52.

Do lema temos que $G(d, n)$ possui dimensão $d(n-d)$.

Seja $N = \binom{n}{d} - 1$. Consideremos a seguinte aplicação:

$$\Phi : G(d, n) \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$\Phi(\Lambda) = (p_{12\dots d} : \dots : p_{i_1 i_2 \dots i_d} : \dots : p_{(n-d+1)\dots n})$$

com $i_1 < i_2 < \dots < i_d$ e $p_{i_1 i_2 \dots i_d} = \det(P_{i_1 i_2 \dots i_d})$.

Note que Φ está bem definida. Pois se considerarmos $\Lambda \in G(d, n)$, e M uma matriz $d \times n$ que representa Λ , teremos que pelo menos um dos menores $d \times d$ de M

é não nulo. Além disto se M, M' são duas matrizes $d \times n$ que representam Λ temos que, $M' = gM$, $g \in GL_d(\mathbb{C})$, e portanto, $P'_{i_1 i_2 \dots i_d} = g P_{i_1 i_2 \dots i_d}$, onde, $P_{i_1 i_2 \dots i_d}$ é o menor $d \times d$ de M formado pelas colunas i_1, i_2, \dots, i_d . Assim, $P'_{i_1 i_2 \dots i_d} = \det(g) P_{i_1 i_2 \dots i_d}$.

Como $g \in GL_d(\mathbb{C})$, então $\det(g) \neq 0$. Logo $\Phi(\Lambda)$ é um elemento bem definido de \mathbb{P}^N .

Definição 1.30. As coordenadas $(p_{12\dots d} : \dots : p_{i_1 i_2 \dots i_d} : \dots : p_{(n-d+1)\dots n}) \in \mathbb{P}^N$ do d -plano Λ são chamadas de **coordenadas de Plücker** de Λ .

Teorema 1.31. Existe uma correspondência biunívoca entre os d – planos de \mathbb{P}^N , $N = \binom{n}{d} - 1$, cujas as coordenadas satisfazem as equações:

$$\sum_{\lambda=1}^{d+1} (-1)^{\lambda+1} P_{i_1 i_2 \dots i_{d-1} j_\lambda} P_{j_1 j_2 \dots j_\lambda \dots j_{d+1}} = 0,$$

onde i_1, i_2, \dots, i_{d-1} e $j_1, j_2, \dots, j_\lambda \dots j_{d+1}$ são quaisquer seqüências de inteiros com $0 \leq i_\alpha, j_\beta \leq n$ e o símbolo j_λ foi removido da seqüência.

Demonstração: Vide referência [4], pg. 13.

1.1.3 Variedade de Incidência

Seja $G(d, n)$ a Grassmaniana, o conjunto dos subespaços lineares de \mathbb{C}^n de dimensão d . Podemos então definir uma subvariedade $\Sigma \subset G(d, n) \times \mathbb{P}^{n-1}$ por

$$\Sigma = \{(\Lambda, x) \mid x \in \Lambda\}.$$

Para maiores detalhes vide referência [10], pg. 68.

Exemplo 1.32.

Temos como exemplo a seguinte variedade $\Gamma = \{(P, \lambda) \in \mathbb{P}^2 \times \tilde{\mathbb{P}}^2 \mid P \in \lambda\}$.

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{P} \quad \lambda \end{array} \right\}$$

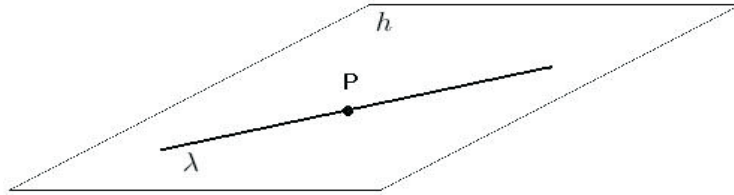
1.1.4 Variedade Bandeira

Para qualquer seqüência crescente de inteiros $a_1 < a_2 < \dots < n$ podemos formar uma variedade denominada **bandeira**

$$\mathbb{F}(a_1, \dots, a_k; n) = \{(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) \mid \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_k\} \subset G(a_1, n) \times \dots \times G(a_k, n).$$

Exemplo 1.33.

$\Gamma' = \{(p, \lambda, h) \in \mathbb{P}^3 \times G(2, 4) \times \check{\mathbb{P}}^3 \mid p \in \lambda \subset h\}$, onde p representa um ponto pertencente a reta λ e que por sua vez esta contida no plano h .



1.2 Fibrado Vetorial

Definição 1.34. Uma **família** de espaços vetoriais é um morfismo $\rho : E \rightarrow X$, nas quais todas as fibras $\rho^{-1}(x)$, $x \in X$, tem a estrutura de um espaço vetorial sobre $K(X)$, e a estrutura correspondente de uma variedade algébrica é a mesma da estrutura de $\rho^{-1}(x)$ como imagem inversa do ponto x sobre o morfismo ρ .

X e E são chamados de **espaço base** e **espaço total**, respectivamente.

Exemplo 1.35.

Seja $E = X \times V$, onde V é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , e ρ é a projeção de $X \times V$ sobre X . Essa família e qualquer família isomorfa à essa são chamadas **famílias triviais**. A fibra $\rho^{-1}(x)$ é denotada por E_x .

Seja $\rho : E \rightarrow X$ uma família de espaços vetoriais, então para todo conjunto aberto $U \subset X$ a fibração $\rho : \rho^{-1}(U) \rightarrow U$ é uma família de espaços vetoriais. Denotamos essa restrição por $E|_U$.

Definição 1.36. Uma família de espaços vetoriais $\rho : E \rightarrow X$ é chamado um **fibrado vetorial** se todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U tal que a restrição da família E para U é trivial.

Exemplo 1.37.

Seja $E = G(d, n) \times \mathbb{C}^n$. Consideremos a seguinte fibração $\rho : E \rightarrow G(d, n)$, onde ρ mapeia os pares (V, v) em V , com $v \in V$. Note que para todo $V \in G(d, n)$, $\rho^{-1} = \{(V, v) \in E \mid v \in V\}$ tem estrutura de espaço vetorial.

Observação 1.38. Note que para toda fibra E_x de um fibrado vetorial a função $x \rightarrow d_x$, $d_x = \dim E_x$, é localmente constante sobre todas as componentes conexas de X . Se essa função é globalmente constante sobre X , chamamos essa dimensão de **posto** do fibrado vetorial e a denotamos por $\text{rk}E$.

Definição 1.39. Considere um fibrado vetorial $p : E \rightarrow X$ e um morfismo $f : X' \rightarrow X$. O produto fibrado $E' = E \times_X X'$ sobre X tem um morfismo $p' : E' \rightarrow X'$. Esse morfismo define um fibrado vetorial. De fato, se $E|_U \cong U \times V$ com $U \subset X$ então escrevendo $U' = f^{-1}(U)$, obtemos $E'|_{U'} = E \times_U U' \cong U' \times V$. Esse fibrado vetorial é chamado a **imagem recíproca** de E , e é denotado por $f^*(E)$.

Exemplo 1.40.

A restrição do fibrado vetorial $\rho : E \rightarrow X$ sobre o subespaço $A \subset X$ pode ser visto como um imagem recíproca com respeito a inclusão do mapa $A \hookrightarrow X$, visto que a inclusão $\rho^{-1}(A) \hookrightarrow E$ certamente é um isomorfismo sobre cada fibra.

1.3 Espaço Tangente

Definição 1.41. Seja $X = V(F_1, \dots, F_r)$ uma subvariedade de \mathbb{P}^n e q um ponto de X . Chamaremos de **espaço tangente** a variedade X no ponto q ao seguinte conjunto

$$T_p X = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{\partial F_j}{\partial X_i} x_i = 0 \text{ e } j = 1, \dots, r\}.$$

Definição 1.42. Quando $\dim(T_p V) = \dim X$, com $\dim X$ a dimensão da variedade X (vide [14], pg. 67), dizemos que $p \in X$ é não-singular. Caso contrário, p é dito ponto singular de X .

Exemplo 1.43.

Temos que para qualquer ponto $p \in \mathbb{P}^n$, $T_p \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n$. Portanto \mathbb{P}^n é não-singular em todos os seus pontos.

1.4 Polinômio de Hilbert

Definição 1.44. Seja $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ um ideal. Denotaremos I_s o subconjunto formado pelos elementos de I de grau $\leq s$. Note que I_s é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_s$.

Lema 1.45. Seja $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ um ideal. As afirmações abaixo são equivalentes:

1. $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_s}{I_s}$ é constante para $s \gg 0$;
2. $\frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]}{I}$ é um espaço vetorial de dimensão finita;
3. $V(I)$ é um conjunto finito.

Demonstração: Vide referência [5], pg. 66.

Definição 1.46. Dizemos que uma função $\varphi(s)$ a valores reais e definida para todo inteiro $s \gg 0$ é **assintoticamente polinomial** ou **asp** se existir um polinômio $p(x)$ tal que $\varphi(s) = p(s), \forall s \gg 0$. Dizemos que o polinômio p representa φ . O grau da função φ é o grau do polinômio que a representa.

Lema 1.47. Se uma função φ for asp, então o polinômio que a representa é único.

Demonstração: Suponha que p, q são polinômios que representam a função φ . Então $\varphi = p(s) = q(s), \forall s \gg 0$, i.e., $p - q = 0, s \gg 0$. Seja $h(x) = (p - q)(x)$, mas

$h(x) \equiv 0, \forall s \gg 0$. Então $p = q$, já que $h(x)$ é um polinômio em uma variável e tem um número finito de raízes se não for nulo.

□

Lema 1.48. *Seja $\varphi(s)$ uma função com valores inteiros definida para $s \gg 0$. Seja $\Psi(s) = \varphi(s) - \varphi(s - 1)$, se $\Psi(s)$ é asp de grau d . Então $\varphi(s)$ é assintoticamente polinômial de grau $d + 1$.*

Demonstração: Vide referência [5], pg. 69.

Lema 1.49. *Sejam A uma k -álgebra e $I \subseteq A$ um ideal. Dado $x \in A$, seja*

$$I' = I : x = \{ g \in A \mid xg \in I \}.$$

Então temos:

1. $\frac{I + \langle x \rangle}{\langle x \rangle}$ é um ideal de $\frac{A}{\langle x \rangle}$;
2. $\frac{I + \langle x \rangle}{\langle x \rangle} \cong \frac{I}{xI'}$ (isomorfismo de $\frac{A}{I}$ -módulos).

Demonstração: Vide referência [5], pg. 73.

Definição 1.50. *A **função de Hilbert** de um ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, é dada por*

$$\varphi_I(s) = \text{codim}(I_s) = \dim \left(\frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_s}{I_s} \right) = \binom{s+n}{n} - \dim I_s,$$

onde I_s é o subconjunto formado pelos elementos de I de grau $\leq s$. O **polinômio de Hilbert** de I é o polinômio que representa $\varphi_I(s)$.

Exemplo 1.51.

Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tais que $\text{mdc}(f, g) = 1$, $d^\circ f = p$ e $d^\circ g = q$. Seja I o ideal gerado por f e g . Consideremos a seguinte aplicação sobrejetiva:

$$\varphi : \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_{s-p} \times \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_{s-q} \rightarrow I_s$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha f + \beta g.$$

Assim $\text{Ker}\varphi = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha f + \beta g = 0 \}$. Como $\alpha f + \beta g = 0$, então $f \mid -\beta g$, conseqüentemente $f \mid \beta$. Portanto $\beta = \beta_1 f$, com $\beta_1 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_{s-q-p}$. Logo $\alpha f = -\beta_1 f g$, onde concluímos que $\alpha = -\beta_1 g$. Desta maneira

$$\text{Ker}\varphi = \{ (-\beta_1 g, \beta_1 f) \mid \beta_1 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_{s-q-p} \} \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]_{s-q-p}.$$

Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que

$$\dim I(s) = \binom{n+s-p}{n} + \binom{n+s-q}{n} - \binom{n+s-q-p}{n}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \varphi_I(s) &= \binom{n+s}{n} - \binom{n+s-p}{n} - \binom{n+s-q}{n} + \binom{n+s-q-p}{n} \\ &= \frac{1}{n!} \{ n(n-1)pqs^{n-2} + \dots \} = \frac{pq}{(n-2)!} s^{n-2} + (\text{termos de menor grau}). \end{aligned}$$

Para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi_I(s) &= \frac{1}{2} [(s+1)(s+2) - (s-p+1)(s-p+2) - (s-q+1)(s-q+2) + (s-q-p+1)(s-q-p+2)] \\ &= \frac{1}{2} [-(p^2 - 3p + 2) - (q^2 - 3q + 2) + (q^2 + pq - 2q + pq + p^2 - 2p - q - p + 2)] \\ &= \frac{1}{2} [2pq] \\ \varphi_I(s) &= pq. \end{aligned}$$

Teorema 1.52. *Seja $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então:*

1. $\varphi_I(s)$ é asp, i.e, existem inteiros d, a_0, \dots, a_d tais que

$$\varphi_I(s) = a_d \binom{s+d}{d} + a_{d-1} \binom{s+d-1}{d-1} + \dots + a_0, \quad \forall s \gg 0;$$

2. Temos que $n \geq d \geq 0$, $a_d \geq 0$ e $a_d > 0$ se $I \neq \langle 1 \rangle$;

3. $d = 0$ se e somente se $V(I)$ é finito.

Demonstração: Sejam $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ e $A_s = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_s/I_s$ o anel e o espaço vetorial quocientes, respectivamente. Temos que $\varphi_I(s) = \dim A_s$.

Note que uma vez provado que $\varphi_I(s)$ é *asp* e de grau $d \leq n$, a afirmação $a_d \geq 0$ segue do fato de que $\varphi_I(s) \geq 0, \forall s \geq 0$. Por outro lado, se $d = 0$ então $\varphi_I(s)$ é constante para $s \gg 0$ e portanto, o lema (1.45) se aplica.

Procederemos por indução sobre o número n de variáveis. No caso $n = 0$ temos que os únicos ideais de \mathbb{C} são $\langle 0 \rangle$ e $\langle 1 \rangle$.

Examinemos agora o caso $n = 1$. Temos que todo ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x]$ é principal. Se $I = \langle 0 \rangle$, temos $I_s = \langle 0 \rangle$ para todo s , e portanto $\varphi_I(s) = \binom{s+1}{1}$ está na forma desejada, com $d = 1, a_1 = 1, a_0 = 0$. Note também que $V(I) = \mathbb{C}$ é infinito. Suponhamos agora $I = \langle f \rangle$, com $f \in \mathbb{C}[x]$ um polinômio não nulo. Seja $m = d^\circ f$. Temos então

$$I_s = \begin{cases} \langle 0 \rangle & \text{para } s < m \text{ e} \\ \langle f \cdot \mathbb{C}[x]_{s-m} \rangle & \text{para } s \geq m \end{cases}$$

Temos então

$$\varphi_I(s) = \dim \mathbb{C}[x]_s - \dim I_s = \begin{cases} s + 1 & \text{para } s < m \text{ e} \\ s + 1 - (s - m + 1) & \text{para } s \geq m. \end{cases}$$

Portanto, $\varphi_I(s) = m$ para $s \gg 0$. Se $m = 0$, temos f constante não nulo, e $V(\langle f \rangle)$ é vazio. Por fim, se $m > 0$ então $V(\langle f \rangle)$ é o conjunto das raízes de f .

Mostremos a etapa de indução para provar o item 1.

Seja

$$\begin{aligned} \mu : A &\rightarrow A \\ f &\mapsto f \cdot x_n \end{aligned}$$

Essa transformação linear induz em cada grau s uma outra transformação linear que denotamos por μ_s ,

$$\begin{aligned} \mu_s : A_s &\rightarrow A_{s+1} \\ g + I_s &\mapsto g \cdot x_n + I_{s+1} \end{aligned}$$

Sejam $N \subset A$ e $N_s = N \cap A_s$ os núcleos de μ e μ_s , respectivamente. Seja $B = A/\mu(A)$ o quociente de A pela imagem de μ . Pelo teorema do núcleo e da

imagem, podemos escrever que,

$$\varphi_I(s) = \dim(A_s) = \dim N_s + \dim \mu_s(A_s),$$

mas

$$\dim \mu_s(A_s) = \dim A_{s+1} - \dim B_{s+1},$$

e

$$\varphi_I(s+1) = \dim A_{s+1} = \dim \mu_s(A_s) + \dim B_{s+1},$$

portanto

$$\varphi_I(s+1) - \varphi_I(s) = \dim B_{s+1} - \dim N_s. \quad (1.2)$$

A idéia agora é provar que tanto B como N provêm de uma situação a $n - 1$ variáveis. Da hipótese de indução seguiria que $\dim B_s$, $\dim N_s$ são funções *asp* de grau $\leq n - 1$ em s . Portanto pelo lema (1.48), concluiríamos que $\varphi_I(s)$ é *asp* de grau $\leq n$ para $s \gg 0$.

Então para mostrarmos que tanto B como N provêm de uma situação a $n - 1$ variáveis provemos inicialmente que

Afirmção 1.53. B é isomorfo ao quociente de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ pelo ideal \mathcal{I} obtido de I pela substituição $x_n = 0$.

Com efeito, definamos o seguinte homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras:

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}] &\rightarrow B \\ f &\mapsto (f + I) + \mu(A) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que ϑ é sobrejetiva e que seu núcleo é igual ao ideal \mathcal{I} descrito em (1.53).

Temos, que cada elemento de B é uma classe residual, $\alpha + \mu(A)$ com $\alpha \in A$. Por sua vez, α é uma classe residual módulo I , de onde temos que $\alpha = f + I$ para algum $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Separando os termos de f que contêm x_n , podemos escrever $f = f_0 + x_n f_1$, onde $f_0 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Temos então

$$\begin{aligned} \alpha + \mu(A) &= (f_0 + x_n f_1 + I) + \mu(A) \\ &= ((f_0 + I) + \mu(A)) + ((x_n f_1 + I) + \mu(A)) \\ &= (f_0 + I) + \mu(A) = \vartheta(f_0), \end{aligned}$$

o que mostra a sobrejetividade. Para calcular o núcleo, suponhamos que $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ e $\vartheta(f) = 0$. Isso implicaria que $f + I \in \mu(A)$, e conseqüentemente $\exists h + I \in A$ tal que $f + I = x_n h + I$, donde teríamos que $f - x_n h \in I$. Portanto $\exists q \in I$ tal que $q = f - x_n h$, então $f = q + x_n h$, como f não depende de x_n , substituindo $x_n = 0$, temos que $f = q$, mostrando assim que $f \in \mathcal{I}$. Recíprocamente, se $f \in \mathcal{I}$, então existem $h \in I, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, tais $f = h + g x_n$. Como

$$\vartheta(f) = \vartheta(h) + \vartheta(g x_n) = 0.$$

assim segue-se a afirmação (1.53).

Resta-nos mostrar que $\dim N_s$ é uma função *asp*. Para isso estudemos agora N , que passamos a escrever N_I para lembrar que depende de I . Note que se $N_I = \langle 0 \rangle$, nossa demonstração estaria terminada como conseqüência da equação (1.2).

Para cada ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, ponhamos

$$I_{(1)} = I : x_n = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f \cdot x_n \in I\}.$$

Seja

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{\mu} A$$

$$f \longrightarrow f + I \longrightarrow f \cdot x_n + I,$$

notemos que $I_{(1)} = \sigma^{-1}(N_I)$. Temos que $I \subseteq I_{(1)}$, assim podemos construir por indução a seguinte cadeia $I_{(2)} = I_{(1)} : x_n \subseteq \dots \subseteq I_{(m+1)} = I_{(m)} : x_n \subseteq \dots$, e ainda $I_{(1)} = I$ se e só se $N_I = 0$. Como $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é noetheriano, a cadeia acima para, i.e., $\exists m$ tal que $I_{(m+1)} = I_{(m)}$, mas isso só ocorre se $N_{I_{(m)}} = 0$. Para chegarmos ao ideal I original, consideremos

$$x_n(I_{(1)})_{s-1} \longrightarrow I_s \longrightarrow I_s / (x_n(I_{(1)})_{s-1})$$

a primeira seta denotando a inclusão e a segunda o quociente. Calculemos agora $\varphi_I(s)$,

$$\begin{aligned} \varphi_I(s) &= \binom{n+s}{n} - \dim I_s \\ &= \binom{n+s}{n} - (\dim(I_{(1)})_{s-1} + \dim(I_s / (x_n(I_{(1)})_{s-1}))) \\ &= \varphi_{I_{(1)}}(s-1) - \dim(I_s / (x_n(I_{(1)})_{s-1})) \end{aligned}$$

Temos do lema (1.49), que $I_s/(x_n(I_{(1)})_{s-1}) \cong I_s + \langle x_n \rangle / \langle x_n \rangle$, que por sua vez é um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_n \rangle \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Então $\dim(I_s/(x_n(I_{(1)})_{s-1}))$ é uma função *asp*. Logo, $\varphi_I(s)$ será da forma desejada se $\varphi_{I_{(1)}}(s)$ o for. Repetindo o argumento utilizado para $I_{(1)}$ no lugar de I , afinal remetendo tudo para o caso de $I_{(m)}$, em que $N_{I_{(m)}} = 0$, teríamos novamente pela equações (1.2) que $\varphi_{I_{(m)}}$ será uma função *asp* \square .

Definição 1.54. A **saturação** \bar{I} , de um ideal $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é dada pelo seguinte conjunto

$$\bar{I} = \{F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mid x_i^k \cdot F \in I, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, n\}$$

Proposição 1.55. Seja $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, e \bar{I} a sua saturação. Então $\varphi_I(s) = \varphi_{\bar{I}}(s)$.

Demonstração: Vide referência [21], pg. 350-354.

Exemplo 1.56.

Seja $I = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle$, temos então que $\bar{I} = \langle x_0 \rangle$. De fato, seja $f \in \langle x_0 \rangle$, então $f = \lambda x_0$, e

$$x_0 \cdot f = \lambda x_0^2, \quad x_1 \cdot f = \lambda x_0x_1 \quad \text{e} \quad x_2 \cdot f = \lambda x_0 \cdot x_2.$$

Logo $f \in \bar{I}$. Agora seja $F \in \bar{I}$, temos então $x_1^k \cdot F \in I$, ou seja,

$$x_1^k \cdot F = a_1(x_0^2)^r + a_2(x_0x_1)^s + a_3(x_0x_2)^t = x_0 \cdot g,$$

donde temos que $x_0 \mid F$. Analogamente mostra-se para $x_2^k \cdot F$, portanto $F = \lambda x_0$, $F \in \langle x_0 \rangle$. Agora consideremos a seguinte aplicação sobrejetiva,

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{s-1} & \rightarrow & \langle x_0 \rangle_s \\ f & \mapsto & f \cdot x_0 \end{array}.$$

Note que Ψ também é injetiva pois $\text{Ker} \Psi = \{f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{s-1} \mid f \cdot x_0 = 0\}$,

então $\ker \Psi = \{0\}$. Vemos que Ψ é um isomorfismo \mathbb{C} -linear e assim

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\langle x_0 \rangle}(s) &= \binom{2+s}{2} - \binom{s-1+2}{2} \\
 &= \binom{2+s}{2} - \binom{s+1}{2} \\
 &= \frac{(s+2)(s+1)}{2} - \frac{(s+1)s}{2} \\
 &= \frac{s^2 + 3s + 2 - s^2 - s}{2} \\
 &= s + 1.
 \end{aligned}$$

Pela proposição acima temos que $\varphi_{\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle}(s) = \varphi_{\langle x_0 \rangle}(s) = s + 1$.

Capítulo 2

Explosão

A compactificação que será determinada neste trabalho envolve a técnica da explosão de variedade projetiva ao longo de uma subvariedade. Como essa teoria não é, em geral, vista em um curso de Mestrado em Matemática devido sua complexidade, daremos aqui uma breve introdução sobre esse assunto. As referências principais são [14] e [11]

2.1 Explosão em \mathbb{P}^n

Consideremos os dois espaços projetivos \mathbb{P}^n com coordenadas homogêneas x_0, \dots, x_n e \mathbb{P}^{n-1} com coordenadas homogêneas y_1, \dots, y_n . Para pontos $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ e $y = [y_1 : \dots : y_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$, seja

$$(x, y) = (x_0 : \dots, x_n; y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

Consideremos a subvariedade fechada $B \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x_i y_j = x_j y_i, \text{ para } i, j = 1, \dots, n\} \quad (2.1)$$

Definição 2.1. *Seja $\xi = [1 : 0 : \dots : 0] \in \mathbb{P}^n$. O mapa $\sigma : B \rightarrow \mathbb{P}^n$ definido pela projeção do primeiro fator $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^n$ é chamado **explosão de \mathbb{P}^n centrado em ξ***

Se $[x_0 : \dots : x_n] \neq \xi$ então as equações (2.1) implicam que

$$[y_1 : \dots : y_n] = [x_1 : \dots : x_n],$$

de modo que o mapa $\sigma^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus \xi \rightarrow B$ definido por

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto (x_0 : \dots : x_n; x_1 : \dots : x_n) \tag{2.2}$$

é o mapa inverso de σ . Porém, se $[x_0 : \dots : x_n] = \xi$ então as equações (2.1) são satisfeitas para quaisquer valores de y_i , $i = 1, \dots, n$. Assim

$$\sigma^{-1}(\xi) = \{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1},$$

e σ define um isomorfismo entre $\mathbb{P}^n \setminus \{\xi\}$ e $B \setminus (\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1})$. O ponto ξ , $\sigma^{-1}(\xi)$ são chamados o **centro** da explosão σ e o **divisor excepcional** de ξ , respectivamente.

Descrevamos a estrutura de B em uma vizinhança dos pontos da forma $(\xi; y_1, \dots, y_n)$. Temos $y_i \neq 0$ para algum i , de modo que o ponto escolhido esteja contido no conjunto aberto U_i de B definido por $x_0 \neq 0$, $y_i \neq 0$, assim podemos assumir que $x_0 = 1$, $y_i = 1$. Então as equações (2.1) são da forma $x_j = y_j x_i$ para $j = 1, \dots, n$ com $j \neq i$. Portanto U_i é isomorfo ao espaço afim \mathbb{A}^n com coordenadas $y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n$, portanto temos que nesta vizinhança B é não singular.

Analisemos o efeito da explosão σ sobre alguma reta L que passa por ξ . Suponha que L é dada por $x_j = \alpha_j x_i$ para algum i e $j = 1, \dots, n$ com $j \neq i$. Sobre L o mapa (2.2) tem a seguinte forma:

$$\sigma^{-1}(x_0 : \dots : x_n) = ((x_0 : \dots : x_n); (\alpha_1 x_i : \dots : x_i : \dots : \alpha_n x_i))$$

$$\sigma^{-1}(x_0 : \dots : x_n) = ((x_0 : \dots : x_n); (\alpha_1 : \dots : 1 : \dots : \alpha_n)),$$

com $\alpha_i = 1$ na i -ésima coordenada. Vemos assim que σ^{-1} é regular sobre a reta L e a mapeia na curva $\sigma^{-1}(L) \subset B$ que intersecta $\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ no ponto $(\xi; \alpha_1 : \dots : 1 : \dots : \alpha_n)$.

Esse resultado mostramos que σ^{-1} não é regular em ξ , mas considerando-o sobre L obtemos o mapa regular $\sigma^{-1} : L \rightarrow B$. Podemos usar isto para estender a definição de σ^{-1} em L sobre o ponto ξ , isto significa que definimos σ^{-1} para $x \in L \setminus \{\xi\}$ e definimos σ^{-1} fazendo x tender para ξ ao longo da direção de L . Mas o resultado depende da escolha de L , visto que o limite $x \rightarrow \xi$ depende da direção da qual x aproxima-se de ξ . Escolhendo diferentes retas L obtemos todos os possíveis pontos de $\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Embora σ^{-1} não seja regular em ξ , através dessa técnica não obtemos pontos arbitrários de B , mas somente pontos de $\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}$. Então σ^{-1} explode ξ e o transforma em $\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}$. Com isso a irredutibilidade de B está provada. De fato,

$$B = (\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}) \cup (B \setminus \{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1})$$

visto que $B \setminus \{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ é isomorfo a $\mathbb{P}^n \setminus \{\xi\}$ que é irredutível, portanto seu fecho é $\overline{B \setminus \{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}}$. Assim precisamos mostrar somente que

$$\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \overline{B \setminus \{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}}.$$

Note que $\sigma^{-1}(L) \subset \overline{B \setminus \{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}}$, e também $\sigma^{-1}(L) \cap (\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}) \subset \overline{B \setminus \{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}}$.

Mas vimos exatamente que para cada escolha oportuna da reta L obtemos um ponto arbitrário de $\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Exemplo 2.2.

Sejam x_0, x_1, x_2 as coordenadas homogêneas de \mathbb{P}^2 , e y_1, y_2 as coordenadas de \mathbb{P}^1 . Seja ainda

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_1 y_2 = x_2 y_1\}.$$

Então $\sigma : B \rightarrow \mathbb{P}^2$ é a explosão de \mathbb{P}^2 em $\xi = [1 : 0 : 0]$. Temos então o seguinte mapa de explosão

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow \sigma & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

2.2 Explosão Local

Para uma variedade quase-projetiva arbitrária X e um ponto não-singular $\xi \in X$, construímos agora uma variedade Y e o mapa $\sigma : Y \rightarrow X$ análogo a construção anterior para $X = \mathbb{P}^n$ e $\xi = [1 : 0 : \dots : 0]$.

Iniciemos com uma construção auxiliar. Seja X uma variedade quase-projetiva e $\xi \in X$ um ponto não-singular, e suponha que u_1, \dots, u_n são funções regulares em X de modo que:

1. As equações $u_1 = \dots = u_n = 0$ possuem como única solução ξ em X ;
2. u_1, \dots, u_n formam um sistema de parâmetros locais sobre X em ξ .

Consideremos o produto $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ e a subvariedade $Y \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$ consistindo dos pontos $(x; t_1 : \dots : t_n)$ com $x \in X$ e $[t_1 : \dots : t_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$, de modo que

$$u_i(x)t_j = u_j(x)t_i \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

O mapa regular $\sigma : Y \rightarrow X$ obtido como restrição para Y da projeção do primeiro fator $X \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow X$ é chamada a **explosão local** de X com centro em ξ .

Note que em geral essa construção não se aplica ao caso em que X é projetivo, pois seria necessária a existência de funções regulares em X , e não-constante u_1, \dots, u_n , pois caso contrário as condições (1) e (2) não seriam satisfeitas. As duas definições estão relacionadas da seguinte forma: Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ o subconjunto afim definido por $x_0 \neq 0$, e o conjunto $Y = \sigma^{-1}(X)$.

Então o mapa $\sigma : Y \rightarrow X$ induzido sobre Y pela explosão $B \rightarrow \mathbb{P}^n$ é uma explosão local.

As propriedades provadas na seção anterior podem ser provadas de maneira análoga para a explosão local. O mapa $\sigma : Y \rightarrow X$ é regular e define um isomorfismo

$$Y \setminus (\{\xi\} \times \mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} X \setminus \{\xi\}$$

Em um ponto $y \in \sigma^{-1}(\xi)$, temos que $t_i \neq 0$, para algum i , e podemos fixar $s_j = \frac{t_j}{t_i}$ para $j \neq i$. Então as equações de Y são da forma $u_j = u_i s_j$ para $j = 1, \dots, n$ com

$j \neq i$. Portanto o ideal maximal de y é dado por

$$\begin{aligned} m_y &= (u_1 - u_1(y), \dots, u_n - u_n(y), s_1 - s_1(y), \dots, s_n - s_n(y)) \\ &= (s_1 - s_1(y), \dots, u_i - u_i(y), \dots, s_n - s_n(y)) \end{aligned}$$

Por isso $\dim T_y Y \leq n$, e visto que $\dim(\sigma^{-1}(X \setminus \{\xi\})) = n$, a variedade Y é não-singular em todos os pontos $y \in \sigma^{-1}(X)$. Sabe-se que Y é irredutível, para maiores detalhes vide [14], pg. 117.

Lema 2.3. *Seja v_1, \dots, v_n outro sistema de funções sobre X satisfazendo as condições (1) e (2) e $\sigma' : Y' \rightarrow X$ a explosão local construída acima em termos de v_1, \dots, v_n . Então existe um isomorfismo $\varphi : Y \rightarrow Y'$ de modo que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' \\ & \searrow \sigma & \downarrow \sigma' \\ & & X \end{array}$$

comute.

Demonstração: Temos que $Y' \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$, onde suas coordenadas homogêneas são t'_1, \dots, t'_n . Nos conjuntos abertos $Y \setminus \sigma^{-1}(\xi)$ e $Y' \setminus \sigma'^{-1}(\xi)$, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(x; t_1, \dots, t_n) &= (x; v_1(x) : \dots : v_n(x)) \\ \Psi(x; t'_1, \dots, t'_n) &= (x; u_1(x) : \dots : u_n(x)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Segue da condição (1) que φ e Ψ são regulares, onde $\varphi : Y \setminus \sigma^{-1}(\xi) \rightarrow Y'$ e $\Psi : Y' \setminus \sigma'^{-1}(\xi) \rightarrow Y$.

Considerando agora o conjunto aberto Y no qual $t_i \neq 0$, obtemos $s_j = \frac{t_j}{t_i}$. Assim $v_k(\xi) = 0$, e u_1, \dots, u_n é uma base para o ideal de m_ξ , temos

$$v_k = \sum_{j=1}^n h_{kj} u_j, \quad h_{kj} \in \mathcal{O}_\xi, \quad (2.4)$$

onde \mathcal{O}_ξ é o anel local do ponto ξ .

Visto que no nosso conjunto aberto $u_j = u_i s_j$, temos que

$$v_k = u_i \sum_{j=1}^n \sigma^*(h_{kj}) s_j = u_i g_k, \quad \text{onde } g_k = \sum_{j=1}^n \sigma^*(h_{kj}) s_j, \quad (2.5)$$

onde σ^* é a imagem recíproca de σ .

Obtemos $\varphi(x; t_1 : \dots : t_n) = (x; g_1 : \dots : g_n)$. Note que esse mapa coincide com (2.3) quando ambas estiverem definidas, desde que nesse lugar $g_k = \frac{v_k}{u_i}$.

Chequemos que φ é regular. Para isso é necessário que g_1, \dots, g_n não são simultaneamente nulas em qualquer ponto $\eta \in \sigma^{-1}(\xi)$. Suponha que $g_1(\eta) = \dots = g_n(\eta) = 0$. Visto que nem todos os $s_j(\eta) = 0$, porque $s_i = 1$, logo de (2.5) teremos que $\det|h_{kj}(\xi)| = 0$. Mas $v_k \equiv \sum h_{kj}(\xi) u_j$ modulo m_ξ^2 e seguiria disto que os v_k são linearmente dependentes em m_ξ/m_ξ^2 , considerando que eles formam um sistema de coordenadas locais em ξ . Assim definimos um mapa global $\varphi : Y \rightarrow Y'$, e de modo análogo um mapa $\Psi : Y' \rightarrow Y$. Basta provar agora que estes mapas são mutuamente inversos nos conjuntos abertos segundo (2.3). De fato, no aberto de Y , onde $t_i \neq 0$, temos $u_j(x) = u_i(x) t_j$, para $i \neq j$. Então,

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi(x; t_1 : \dots : t_n)) &= \Psi(x; (v_1(x) : \dots : v_n(x))) \\ &= (x; (u_1(x) : \dots : u_n(x))) \\ &= (x; (u_i(x) t_1 : \dots : u_i(x) t_n)) \\ &= (x; (t_1 : \dots : t_n)). \end{aligned}$$

Logo o lema esta demonstrado \square .

2.3 Explosão ao longo de uma subvariedade

Proposição 2.4. *Seja X uma variedade, $Y \subset X$ uma subvariedade, e suponha que $x \in Y$ é um ponto não singular de ambas X e Y . Então podemos escolher um sistema de parâmetros locais u_1, \dots, u_n sobre X em x e uma vizinhança afim U de x tal que $I(Y) = (u_1, \dots, u_m)$, o ideal da subvariedade Y em U .*

Demonstração: Vide a referência [14], pg. 111.

Suponha que a variedade X descrita na proposição acima é afim e u_1, \dots, u_n são parâmetros locais para Y em X . Considere o produto $X \times \mathbb{P}^{m-1}$ e a subvariedade $X' \subset X \times \mathbb{P}^{m-1}$ definida pelas equações

$$t_i u_j(x) = t_j u_i(x), \text{ para } i, j = 1, \dots, m,$$

onde t_1, \dots, t_m são coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^{m-1} . A projeção $X \times \mathbb{P}^{m-1} \rightarrow X$ define um morfismo $\sigma : X' \rightarrow X$. Note que $\sigma^{-1}(Y) = Y \times \mathbb{P}^{m-1}$, e σ define um isomorfismo

$$X' \setminus (Y \times \mathbb{P}^{m-1}) \xrightarrow{\sim} X \setminus Y.$$

Sabe-se que X' é não singular, n -dimensional e irredutível, para maiores detalhes vide referência [14], pg. 71.

Lema 2.5. *Se $\Gamma : \bar{X} \rightarrow X$ é uma explosão da mesma subvariedade $Y \subset X$ definida por um sistema de parâmetros diferente v_1, \dots, v_m de Y então existe um isomorfismo $\varphi : X' \rightarrow \bar{X}$ para o qual o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & \bar{X} \\ & \searrow \sigma & \downarrow \Gamma \\ & & X \end{array}$$

comuta. O isomorfismo φ é unico.

Demonstração: Vide referência [14],pg. 72.

- **Construção Global:**

Seja $X = \bigcup U_\alpha$ uma cobertura afim tal que Y está definido em U_α pelos parâmetros locais $u_{\alpha,1}, \dots, u_{\alpha,m}$. Sobre U_α aplicamos a construção da explosão local a $Y \cap U_\alpha$; obtemos um sistema de variedades X'_α e morfismos $\sigma_\alpha : X'_\alpha \rightarrow U_\alpha$. Consideremos o subconjunto $\sigma_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset X'_\alpha$ para todo α e β ; então pelo lema, existe um isomorfismo unicamente determinado

$$\varphi_{\alpha\beta} : \sigma_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \sigma_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Podemos checar que isso satisfaz as condições de cobertura e define uma variedade X' e um morfismo $\sigma : X' \rightarrow X$. O morfismo σ construído é chamado **explosão** de Y , ou a explosão de X centrada em Y . Do lema (2.5) segue que X' e σ independem da cobertura $X = \bigcup U_\alpha$ e do sistema de parâmetros $u_{\alpha,i}$.

Capítulo 3

Grupos Algébricos

Neste capítulo, definiremos a ação de um grupo em uma variedade algébrica. Veremos alguns resultados importantes para o nosso trabalho. Devido sua complexidade demonstraremos alguns. As referências principais são [3] e [15]

3.1 Grupos Algébricos

Definição 3.1. *Um grupo algébrico é uma variedade algébrica G junto com os mapas regulares*

$$m : G \times G \rightarrow G$$

e

$$i : G \rightarrow G$$

satisfazendo as propriedades de multiplicação e inverso de um grupo, i. e., existe um ponto $e \in G$, onde $m(e, p) = m(p, e) = p$ e $m(p, i(p)) = e, \forall p \in G$.

Um **morfismo de grupos algébricos** é um mapa regular $\varphi : G \rightarrow H$ que também é um homomorfismo de grupos.

Exemplo 3.2.

Seja o espaço \mathbb{M}_n de todas as $n \times n$ -matrizes em \mathbb{A}^{n^2} . Se $X \in \mathbb{M}_n$, então consideremos $\det(X)$ seu determinante. Denominamos de grupo linear geral, $\mathbb{G}L_n$, o seguinte conjunto aberto $\{X \in \mathbb{M}_n \mid \det(X) \neq 0\}$. O mapa

$$\begin{aligned} m : \mathbb{G}L_n \times \mathbb{G}L_n &\rightarrow \mathbb{G}L_n \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B \end{aligned}$$

é regular, juntamente com

$$\begin{aligned} i : \mathbb{G}L_n &\rightarrow \mathbb{G}L_n \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned} \quad ,$$

baseado na regra de Cramer, é dado por:

$$(A^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j}) / \det(A)$$

onde $M_{i,j}$ é a submatriz de A obtida através da eliminação da j -ésima linha e da i -ésima coluna.

O grupo quociente $\mathbb{G}L_n / \mathbb{C}^*$ é denominado grupo $\mathbb{P}GL_n$, o grupo linear geral projetivo.

3.2 Ação de Grupo

Definição 3.3. *Uma ação de um grupo algébrico G sobre uma variedade algébrica X , é um mapa regular*

$$\varphi : G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto \varphi(g, x) = gx$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\varphi(ex) = x$
- $\varphi(g, \varphi(hx)) = (gh)x$

para todo $x \in X$ e todo $g, h \in G$. Nessas condições X é dito um G -espaço.

Exemplo 3.4.

Temos que $\mathbb{P}GL_{n+1}$ age sobre \mathbb{P}^n da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}GL_{n+1} \times \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (A, [v]) &\mapsto [A.v^t]. \end{aligned}$$

De fato φ é uma ação, pois $I.[v]^t = [v]^t$ e $B(A.[v]^t) = BA.[v]^t = (BA).[v]^t$.

Note que GL_{n+1} age sobre $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \varphi : GL_{n+1} \times \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] &\rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ (A.F(x_0, \dots, x_n)) &\mapsto F \left(A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Essa ação induz uma ação de $\mathbb{P}GL_{n+1}$ sobre \mathbb{P}^n .

Definição 3.5. *Sejam X e Y G -espaços, um mapa regular $\Psi : X \rightarrow Y$ é chamado morfismo **equivariante**, se $\Psi(gx) = g\Psi(x)$, $\forall g \in G$ e $x \in X$.*

Exemplo 3.6.

Sejam X uma variedade projetiva, Y uma variedade quase projetiva, e G um grupo algébrico que age sobre X e Y . Considere a seguinte ação

$$\begin{aligned} \theta : G \times X \times Y &\rightarrow X \times Y \\ (g, (x, y)) &\mapsto g.(x, y) = (g.x, g.y) \end{aligned}$$

Note que $p : X \times Y \rightarrow Y$, a projeção na segunda coordenadas, é um morfismo equivariante pois $p(g.(x, y)) = g.y = g.p(x, y)$.

Definição 3.7. *Qualquer ação de G sobre X define uma relação de equivalência sobre X , dois elementos x e y são chamados equivalentes se existe um elemento $g \in G$, com $gx = y$. A classe de equivalência de x sobre essa relação de equivalência é dada pelo conjunto $O_x = \{g.x \mid g \in G\}$ que o qual é chamado de **órbita** de x . Para todo $x \in X$, definimos $E_x = \{g \in G : g.x = x\}$. Esse conjunto é um subgrupo de G , e é chamado de **estabilizador** de x ou subgrupo isotrópico de x .*

Exemplo 3.8.

O grupo $G = \mathbb{G}L_n$ age sobre o espaço afim \mathbb{A}^n . Sobre essa ação temos duas órbitas. Uma é $\{(0, \dots, 0)\}$, e a outra é $\mathbb{A}^n - \{(0, \dots, 0)\}$. Note que uma órbita é fechada, e a outra é aberta. Seja ainda, $v = (1, 0, \dots, 0)$, então o estabilizador de v é o conjunto das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

um subgrupo fechado de G , já que é o conjunto de zeros de $x_{11} - 1 = x_{21} = \dots = x_{n1} = 0$.

Proposição 3.9. *Seja $P = [0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^2$, e G_0 o subgrupo de $\mathbb{P}GL_3$ que estabiliza P , então G_0 age sobre \mathbb{P}^2 e sobre $G(2, \mathcal{F}_2^0)$, onde*

$$G_0 = \left\{ A \in \mathbb{P}GL_3 \mid A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\}.$$

Demonstração: Sejam

$$\begin{aligned} \Psi_1 : G_0 \times \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ (A, [v]) &\mapsto A.[v]^t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_2 : G_0 \times G(2, \mathcal{F}_2^0) &\rightarrow G(2, \mathcal{F}_2^0) \\ (A, \langle p_1, p_2 \rangle) &\mapsto A. \langle p_1, p_2 \rangle = \langle A.p_1, A.p_2 \rangle \end{aligned}$$

Pelo exemplo (3.2), precisamos mostrar apenas que Ψ_2 satisfaz as condições de uma ação de grupo

- Elemento neutro:

$$- I. \langle p_1, p_2 \rangle = \langle I.p_1, I.p_2 \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle$$

- Associativa, com $A, B \in \mathbb{P}GL(n)$:

$$\begin{aligned}
- B(A. \langle p_1, p_2 \rangle) &= B. \langle A.p_1, A.p_2 \rangle = \\
&\langle BA.p_1, BA.p_2 \rangle = \\
&(BA). \langle p_1, p_2 \rangle \square
\end{aligned}$$

Proposição 3.10 (Órbita fechada). *Seja G um grupo algébrico que age sobre uma variedade não vazia X . Então cada órbita é uma variedade lisa aberta em seu fecho em X . Seu fecho é a união de órbitas de dimensões estritamente menores que a sua. Em particular as órbitas de dimensões mínimas são fechadas.*

Demonstração: Vide referência [3], pg. 53.

Corolário 3.11 (Existência). *Seja φ uma ação do grupo algébrico G sobre a variedade X . φ é dita **fechada** se todas as suas órbitas são fechadas, **livre** se somente a identidade de G tem pontos fixos (i.e., $g.x = x$ para algum $x \in X$ implica que $g=1$). Se φ é livre, então todas as órbitas possuem a mesma dimensão que G , consequentemente são fechadas pela proposição acima.*

Lema 3.12. *Seja $\theta : Y \rightarrow X$ um morfismo equivariante de variedades projetivas sob a ação de um grupo linear G . Então temos:*

1. *O estabilizador G_x de um representante da órbita fechada $G.x$ age em $\varphi^{-1}(x)$;*
2. *Para $y \in \varphi^{-1}(x)$ temos que $G_y = (G_x)_y$, onde G_y é o estabilizador de y em G e $(G_x)_y$ é o estabilizador de y em (G_x) ;*
3. *Existe uma bijeção entre o conjunto das órbitas fechadas de Y que se projetam sobre uma mesma órbita fechada de X e o conjunto das órbitas fechadas da fibra sobre um representante da órbita fechada, fibra esta sob ação do estabilizador do representante da órbita fechada de X .*

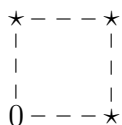
Demonstração: Vide referência [22], pg. 34 \square .

Capítulo 4

Introdução a Triângulos

Os pontos de $Hilb^3\mathbb{P}^2$ correspondem aos subvariedades de \mathbb{P}^2 de grau 3 e dimensão 0. De modo que um ponto de $Hilb^3\mathbb{P}^2$ pode ser considerado como um ideal homogêneo saturado $I \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ de modo que para todo grau d suficientemente grande o pedaço homogêneo $I_d \subset \mathcal{F}_d$ é um subespaço de codimensão 3.

Completando um triângulo genérico com um quarto vértice, isto é, simplesmente adicionando um ponto $0 := [0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^2$.



★'s triângulo com um vértice extra

Os quatro pontos podem ser descritos como o lugar dos zeros de um feixe de cônicas que passam pelo ponto especial 0, isto é

$$q_1 := a_1x_0^2 + a_2x_0x_1 + a_3x_0x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_1x_2$$

$$q_2 := b_1x_0^2 + b_2x_0x_1 + b_3x_0x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_1x_2$$

Usaremos as técnicas usadas em [22], [20] e [17] para construir os triângulos.

4.1 Noções Preliminares

Seja $X = G(2, \mathcal{F}_2^0)$ a Grassmanniana de feixes de cônicas em \mathbb{P}^2 , as quais passam por um ponto fixo $0 := [0 : 0 : 1]$. Um ponto geral de X corresponde a um triângulo com vértice adicional, o qual está fixado em 0 de uma vez por todas.

Denote por \mathcal{A} o subfibrado de posto dois de \mathcal{F}_2^0 sobre X . A fibra $\mathcal{A}_x, x \in X$ consiste das cônicas que se anulam no ponto distinguido 0 .

4.2 A Rede de Cônicas

Nesta seção vamos determinar um mapa racional

$$\nu : X \dashrightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$$

que associa cada feixe de cônicas $\langle q_1, q_2 \rangle \in X$ que passam pelo ponto 0 , uma rede de cônicas $\langle q_1, q_2, q_3 \rangle$, onde q_3 , passa pelos três vértices, mas não necessariamente 0 .

Assim, considere o seguinte mapa racional

$$\nu : X \dashrightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$$

$$\langle q_1, q_2 \rangle \mapsto \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$$

as cônicas q_1, q_2 são escritas da seguinte maneira

$$\begin{cases} q_1 = \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}x_1 \\ q_2 = \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}x_1 \end{cases}$$

onde α_{ij} são formas lineares em \mathcal{F} .

Pela *Regra de Cramer* se $x_0 \neq 0$ ou $x_1 \neq 0$, então um zero de q_1 e q_2 requer que

$$q_3 := \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.1}$$

Definida q_3 , percebemos a liberação do vértice auxiliar 0 .

Mostraremos que ν está bem definida, isto é, a rede de cônicas independe dos geradores escolhidos.

Lema 4.1. *O mapa ν está bem definido.*

Demonstração: Seja $\langle q_1, q_2 \rangle$ e $\langle q'_1, q'_2 \rangle$ de modo que

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \langle q'_1, q'_2 \rangle$$

onde

$$\begin{cases} q_1 = \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}x_1 \\ q_2 = \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}x_1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} q'_1 = \alpha'_{11}x_0 + \alpha'_{12}x_1 \\ q'_2 = \alpha'_{21}x_0 + \alpha'_{22}x_1 \end{cases}$$

Provemos que $\nu(\langle q_1, q_2 \rangle) = \nu(\langle q'_1, q'_2 \rangle)$.

Por hipótese $\langle q_1, q_2 \rangle = \langle q'_1, q'_2 \rangle$ então:

$$\begin{aligned} q_1 &= mq'_1 + nq'_2 = (m\alpha'_{11} + n\alpha'_{21})x_0 + (m\alpha'_{12} + n\alpha'_{22})x_1 \\ q_2 &= rq'_1 + sq'_2 = (r\alpha'_{11} + s\alpha'_{21})x_0 + (r\alpha'_{12} + s\alpha'_{22})x_1 \end{aligned}$$

Então temos que $q_3 = \det A$, onde

$$A = \begin{pmatrix} m\alpha'_{11} + n\alpha'_{21} & m\alpha'_{12} + n\alpha'_{22} \\ r\alpha'_{11} + s\alpha'_{21} & r\alpha'_{12} + s\alpha'_{22} \end{pmatrix}$$

Através das seguintes operações elementares teremos

$$\begin{pmatrix} m\alpha'_{11} + n\alpha'_{21} & m\alpha'_{12} + n\alpha'_{22} \\ r\alpha'_{11} + s\alpha'_{21} & r\alpha'_{12} + s\alpha'_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} sm\alpha'_{11} + sn\alpha'_{21} & sm\alpha'_{12} + sn\alpha'_{22} \\ nr\alpha'_{11} + ns\alpha'_{21} & nr\alpha'_{12} + ns\alpha'_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_1 \mapsto sL_1 \\ L_2 \mapsto nL_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} sm\alpha'_{11} + sn\alpha'_{21} & sm\alpha'_{12} + sn\alpha'_{22} \\ nr\alpha'_{11} + ns\alpha'_{21} & nr\alpha'_{12} + ns\alpha'_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (sm - nr)\alpha'_{11} & (sm - nr)\alpha'_{12} \\ nr\alpha'_{11} + ns\alpha'_{21} & nr\alpha'_{12} + ns\alpha'_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_1 \mapsto L_1 + (-1)L_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (sm - nr)\alpha'_{11} & (sm - nr)\alpha'_{12} \\ nr\alpha'_{11} + ns\alpha'_{21} & nr\alpha'_{12} + ns\alpha'_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (nr)(sm - nr)\alpha'_{11} & (nr)(sm - nr)\alpha'_{12} \\ (sm - nr)(nr\alpha'_{11} + ns\alpha'_{21}) & (sm - nr)(nr\alpha'_{12} + ns\alpha'_{22}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} L_1 \mapsto (nr)L_1 \\ L_2 \mapsto (sm - nr)L_2 \end{cases} \\ & \begin{pmatrix} (nr)(sm - nr)\alpha'_{11} & (nr)(sm - nr)\alpha'_{12} \\ (sm - nr)(nr\alpha'_{11} + ns\alpha'_{21}) & (sm - nr)(nr\alpha'_{12} + ns\alpha'_{22}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (nr)(sm - nr)\alpha'_{11} & (nr)(sm - nr)\alpha'_{12} \\ (sm - nr)(ns)\alpha'_{21} & (sm - nr)(ns)\alpha'_{22} \end{pmatrix} \\ & \begin{cases} L_2 \mapsto L_2 + (-1)L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente

$$q_3 = \lambda \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$q_3 = \lambda q'_3, \text{ onde } \lambda = (nr)(ns)(sm - nr)^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2, q_3 \rangle &= \langle q_1, q_2, \lambda q'_3 \rangle \\ &= \langle q'_1, q'_2, q'_3 \rangle. \end{aligned}$$

□

Modificaremos X por uma seqüência de explosões de modo que os conjuntos abertos correspondentes aos triângulos honestos (munidos do vértice 0), se ajustarão em uma nova vizinhança mais interessante.

4.3 O Lugar da Indeterminação de ν

Nesta seção vamos descrever a subvariedade Y de X , o lugar onde o mapa ν deixa de ser regular.

Vamos determinar as órbitas fechadas em X , pois sabemos que o lugar onde o posto de ν cai é invariante pela ação do subgrupo G_0 descrita em (3.9), logo contém uma órbita fechada.

Lema 4.2. *Existe uma única órbita O , fechada em X , cujo representante é dado pelo feixe:*

$$\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle \in X$$

sob a ação natural do estabilizador de θ , o ponto fixo.

Demonstração: Seja $W \in X = G(2, \mathcal{F}_2^0)$, podemos supor que $W = \langle q_1, q_2 \rangle$ onde

$$\begin{aligned} q_1 &:= x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_1^2 + a_3x_1x_2 \\ q_2 &:= x_0x_1 + b_1x_0x_2 + b_2x_1^2 + b_3x_1x_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

De fato, se $W \in X$ podemos supor sem perda de generalidade que

$$\begin{aligned} q_1 &:= a'_1x_0^2 + a'_2x_0x_1 + a'_3x_0x_2 + a'_4x_1^2 + a'_5x_1x_2 \\ q_2 &:= b'_1x_0^2 + b'_2x_0x_1 + b'_3x_0x_2 + b'_4x_1^2 + b'_5x_1x_2 \end{aligned}$$

com $a'_1b'_2 - b'_1a'_2 \neq 0$. Para isto basta agirmos com o estabilizador do ponto θ , a matriz:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ e $a_{33} \neq 0$. E assim concluímos que q_1 e q_2 podem ser escritos como descrito em (4.2).

Note que, se agirmos com o subgrupo a 1-parâmetro $m_t : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, x_1, tx_2)$, teremos:

$$\langle x_0^2 + ta_1x_0x_2 + a_2x_1^2 + ta_3x_1x_2, x_0x_1 + tb_1x_0x_2 + b_2x_1^2 + tb_3x_1x_2 \rangle$$

Assim no limite, quando $t \mapsto 0$, encontramos $\langle x_0^2 + a_2x_1^2, x_0x_1 + b_2x_1^2 \rangle$. Se agirmos novamente com o subgrupo a 1-parâmetro mas agora na variável x_1 , $m'_t : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, tx_1, x_2)$, o espaço gerado pelas cônicas será

$$\begin{aligned} \langle x_0^2 + t^2a_2x_1^2, tx_0x_1 + t^2b_2x_1^2 \rangle &= \\ \langle x_0^2 + t^2a_2x_1^2, t(x_0x_1 + tb_2x_1^2) \rangle &= \\ \langle x_0^2 + t^2a_2x_1^2, x_0x_1 + tb_2x_1^2 \rangle &= \end{aligned}$$

No limite, teremos a órbita procurada:

$$\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle$$

Note que esta órbita é fechada, pois é isomorfa a uma variedade bandeira (reta ℓ e ponto fixo 0 com $0 \in \ell$).

□

Lema 4.3. *A aplicação abaixo é um mergulho:*

$$\begin{aligned} i : \quad \check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2 &\hookrightarrow X \\ (\lambda_0, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle) &\mapsto \langle \lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2 \rangle, \end{aligned}$$

onde $\check{\mathbb{P}}_0^1$ é a rede de retas que passam pelo ponto destacado 0 e $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \in G(2, \mathcal{F})$ interpretaremos como um ponto de \mathbb{P}^2 .

Demonstração: De início mostremos que i está bem definido. Sejam $(\ell, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle)$ e $(\ell', \langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle) \in \check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2$ tal que

$$(\ell, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle) = (\ell', \langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle).$$

Então temos que $\ell = \alpha\ell'$, $\alpha \neq 0$, $\lambda_1 = \alpha_1\lambda'_1 + \beta_1\lambda'_2$ e $\lambda_2 = \alpha_2\lambda'_1 + \beta_2\lambda'_2$. Assim

$$\begin{aligned} i(\ell, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle) &= \langle \ell\lambda_1, \ell\lambda_2 \rangle \\ &= \langle \alpha\ell'(\alpha_1\lambda'_1 + \beta_1\lambda'_2), \alpha\ell'(\alpha_2\lambda'_1 + \beta_2\lambda'_2) \rangle \\ &= \langle \ell'(\alpha_1\lambda'_1 + \beta_1\lambda'_2), \ell'(\alpha_2\lambda'_1 + \beta_2\lambda'_2) \rangle \\ &= \langle \ell'\alpha_1\lambda'_1 + \ell'\beta_1\lambda'_2, \ell'\alpha_2\lambda'_1 + \ell'\beta_2\lambda'_2 \rangle \\ &= \langle \ell'(\alpha_1\lambda'_1 + \beta_1\lambda'_2), \ell'(\alpha_2\lambda'_1 + \beta_2\lambda'_2) \rangle \end{aligned}$$

Podemos assumir $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$, portanto:

$$\begin{aligned} i(\ell, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle) &= \langle \ell'(\lambda'_1 + a\lambda'_2), \ell'(b\lambda'_1 + \lambda'_2) \rangle \\ &= \langle \ell'\lambda'_1 + a\ell'\lambda'_2, -ab\ell'\lambda'_2 + \ell'\lambda'_2 \rangle \\ &= \langle \ell'\lambda'_1 + a\ell'\lambda'_2, \ell'\lambda'_2 \rangle \\ &= \langle \ell'\lambda'_1, \ell'\lambda'_2 \rangle = i(\ell', \langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle) \end{aligned}$$

Agora demonstremos que a aplicação i é injetiva . De fato, sejam

$$x = (\lambda_0, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle), y = (\langle \lambda'_0, \langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle \rangle) \in \check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2,$$

com $i(x) = i(y)$, ou seja, $\langle \lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2 \rangle = \langle \lambda'_0\lambda'_1, \lambda'_0\lambda'_2 \rangle$. Mas

$$\lambda'_0\lambda'_1 = \lambda_0(m\lambda_1 + n\lambda_2) \quad e \quad \lambda'_0\lambda'_2 = \lambda_0(p\lambda_1 + q\lambda_2).$$

Logo, $\lambda_0|\lambda'_0$, pois caso contrário $\lambda_0|\lambda'_1$ e $\lambda_0|\lambda'_2$, o que é uma contradição pois q'_1 e q'_2 são linearmente independentes. Assim $\lambda'_0 = t\lambda_0, t \neq 0 \in \mathbb{C}$, o que implica que $\lambda'_1 = m_1\lambda_1 + n_1\lambda_2$ e $\lambda_2 = p_1\lambda_1 + q_1\lambda_2$. Portanto $x = y$.

Agora mostremos a injetividade da diferencial de i , que denotaremos por di . Como a injetividade de di é uma questão local, estudaremos em torno de um representante da única órbita fechada de X . Consideremos os seguintes abertos

- $U_1 = \{\lambda_0 \in \check{\mathbb{P}}_0^1\}$, com $\lambda_0 = x_0 + cx_1, c \in \mathbb{C}$;
- $U_2 = \{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \in \mathbb{P}^2\}$, com $\lambda_1 = x_0 + ax_2, \lambda_2 = x_1 + bx_2$, e $a, b \in \mathbb{C}$;
- $U_{12} = \{\langle q_1, q_2 \rangle \in X\}$, onde $q_1 = \lambda_0\lambda_1 = x_0^2 + cx_0x_1 + ax_0x_2 + cx_1x_2$ e $q_2 = \lambda_0\lambda_2 = x_0x_1 + bx_0x_2 + cx_1^2 + cbx_1x_2$.

Seja então:

$$\begin{aligned} i : U_1 \times U_2 &\rightarrow U_{12} \\ (\lambda_0, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle) &\mapsto \langle \lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2 \rangle \end{aligned}$$

Seja $(\langle \lambda'_0, \langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle \rangle) \in U_1 \times U_2$, note que podemos representar

$$i(\langle \lambda'_0, \langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle \rangle) = M \in U_{12},$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & c & a & 0 & ca & 0 \\ 0 & 1 & b & c & cb & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a - cb & -c^2 & ca - c^2b & 0 \\ 0 & 1 & b & c & cb & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos as seguintes cartas para $\check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2$ e X :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow U_1 \times U_2 \\ (a; (b, c)) &\mapsto ((x_0 + cx_1); (x_0 + ax_2, x_1 + bx_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 : \mathbb{C}^6 &\longrightarrow U_{12} \\ (a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2) &\mapsto (\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2),\end{aligned}$$

onde $\lambda_0\lambda_1 = x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_0x_2 + a_4x_1x_2$ e $\lambda_0\lambda_2 = x_0x_1 + b_1x_0x_2 + b_2x_1^2 + cbx_1x_2$.

Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U = U_1 \times U_2 & \xrightarrow{i} & U_{12} \\ \varphi_1^{-1} \downarrow & & \downarrow \varphi_2^{-1} \\ \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}^3 \end{array}$$

Portanto pelo diagrama acima temos que di é injetiva se e somente se $d\Psi$ for injetiva. Mas

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^6 \\ (a, b, c) &\mapsto (a - cb, -c^2, ca - c^2b, b, c, cb)\end{aligned}$$

Para mostrar que $d\Psi$ é injetiva, basta verificar que o posto da matriz Jacobiana é igual a 3. Mas

$$Jac(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & a - 2cb & -c^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

Portanto para qualquer ponto de $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2$, a matriz jacobiana tem posto 3.

□

Observação 4.4. Note que poderíamos ter mostrado a injetividade da seguinte forma, observando que U_{12} é isomorfo a \mathbb{C}^6

$$\begin{aligned}\varphi : & U_{12} \longrightarrow \mathbb{C}^6 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & a - cb & -c^2 & ca - c^2b \\ 0 & 1 & b & c & cb \end{array} \right) & \mapsto (a - cb, -c^2, ca - c^2b, b, c, cb).\end{aligned}$$

Portanto i tem a seguinte matriz jacobiana

$$Jac(i) = \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & a - 2cb & -c^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

E na origem temos

$$Jac(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo di é injetiva .

A partir de agora denotaremos por Y a imagem de $\check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2$ via o mergulho i .

Proposição 4.5. Y é G_0 invariante.

Demonstração: Seja $y \in Y$, onde $y = \langle \lambda_0 \lambda_1, \lambda_0 \lambda_2 \rangle$. Temos então que

$$A \cdot y = \langle A(\lambda_0 \lambda_1), A(\lambda_0 \lambda_2) \rangle,$$

com $A \in \mathbb{P}GL(3)$. Mas

$$\begin{aligned} A \cdot y &= \langle A(\lambda_0 \lambda_1), A(\lambda_0 \lambda_2) \rangle \\ &= \langle (A \cdot \lambda_0)(A \cdot \lambda_1), (A \cdot \lambda_0)(A \cdot \lambda_2) \rangle \\ &= \langle \lambda'_0 \lambda'_1, \lambda'_0 \lambda'_2 \rangle \in Y. \end{aligned}$$

□

4.4 Primeira Explosão

Nesta seção faremos a primeira explosão da variedade X . Para isso precisamos do seguinte resultado.

Lema 4.6. *Seja U uma variedade afim integral com anel de coordenadas A e seja:*

$$M = \begin{bmatrix} I_r & * & * & * \\ 0 & f_1 & \dots & f_s \end{bmatrix}$$

uma matriz $(r+1) \times n$ com entradas em A , onde I_r denota uma matriz $r \times r$ cujas entradas na diagonal principal são todas iguais a um e as entradas abaixo da diagonal principal são nulas. Seja $\mathcal{M} \subset A^n$ o submódulo gerado pelas linhas de M . Suponha que o ideal J dos $(r+1)$ menores não seja nulo. Seja

$$\rho : U \rightarrow G(r+1, \mathbb{C})$$

a aplicação racional definida por M . Seja $U' \rightarrow U$ a explosão de U no esquema de zeros $V = V(J)$ e seja V' o divisor excepcional. Então temos o seguinte:

1. *A aplicação ρ se estende a um morfismo também denotado por*

$$\rho : U' \rightarrow G(r+1, \mathbb{C}).$$

2. *Suponha agora que V é uma interseção completa de dimensão t em U e que $J = \langle f_1, \dots, f_t \rangle$, para algum $t \leq s$. Então U' é um subesquema fechado de $U \times \mathbb{P}^{t-1}$, dado pelas equações $f_i x_j - f_j x_i, 1 \leq i, j \leq t$, onde x_1, \dots, x_t denotam as coordenadas homogêneas para \mathbb{P}^{t-1} .*

3. *Seja*

$$U'_0 = U' \cap U \times \mathbb{A}^{t-1}$$

o aberto afim dado por $x_1 = 1$ e seja $V'_0 = V' \cap U'_0$. Então existem funções regulares y_1, \dots, y_s em $B = \mathcal{O}(U'_0)$ tais que $f_i = y_i f_1$ para $1 \leq i \leq s$ e o anel de coordenadas de V'_0 é o anel de polinômios $(A/J)[y_2, \dots, y_t]$.

4. A saturação da imagem de $\mathcal{M} \otimes B$ em B^n é um submódulo livre e cindido com base dada pelas r primeiras linhas da matriz M e o elemento

$$e_{r+1} + y_2 e_{r+2} + \dots + y_s e_n$$

obtido dividindo a última linha de M por f_1

Demonstração: Vide referência [19].

4.5 Resolvendo a indeterminação de ν

Estudaremos agora a explosão de X ao longo da subvariedade Y . Para isto vamos mostrar que o lugar V , onde o mapa não está definido é igual a $Y = i(\check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2)$.

Lema 4.7. *O subesquema V é igual a Y .*

Demonstração: Seja U uma vizinhança de $\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle$ em X com funções coordenadas a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 e b_3 tais que as duas cônicas

$$q_1 = x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 = x_0(x_0 + a_1 x_2) + x_1(a_2 x_1 + a_3 x_2)$$

$$q_2 = x_0 x_1 + b_1 x_0 x_2 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1 x_2 = x_0(x_0 + b_1 x_2) + x_1(b_2 x_1 + b_3 x_2)$$

dão uma trivialização local do subfibrado de posto dois \mathcal{A} . Defina q_3 como sendo o determinante

$$q_3 = \begin{vmatrix} x_0 + a_1 x_2 & a_2 x_1 + a_3 x_2 \\ x_1 + b_1 x_2 & b_2 x_1 + b_3 x_2 \end{vmatrix}$$

$$q_3 = b_2 x_0 x_1 + b_3 x_0 x_2 - a_2 x_1^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3) x_1 x_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_2^2$$

O subespaço gerado por q_1, q_2 e q_3 pode ser representado como espaço linha da matriz obtida coletando os coeficientes dos monômios quadráticos. A base ordenada é formada pelos 5 monômios indicados nas expressões de q_1 e q_2 , juntamente com x_2^2 . Com esta notação para um ponto genérico de U , temos:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & -a_2 & a_1b_2 - a_2b_1 - a_3 & a_1b_3 - a_3b_1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo a operação elementar $\left\{ \begin{array}{l} L_3 \mapsto b_2L_2 - L_3 \end{array} \right.$ temos que

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Onde,

$$\begin{cases} \sigma_1 = b_3 - b_1b_2 \\ \sigma_2 = -b_2^2 - a_2 \\ \sigma_3 = -b_2b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 - a_3 \\ \sigma_4 = b_3a_1 - a_3b_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Seja

$$\begin{aligned} I &= \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle \\ &= \langle b_3 - b_1b_2, -b_2^2 - a_2, -b_2b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 - a_3 \rangle \\ &= \langle b_3 - b_1b_2, b_2^2 + a_2, -b_2b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 - a_3 - b_1(b_2^2 + a_2) + b_2(b_3 - b_1b_2) \rangle \\ I &= \langle b_3 - b_1b_2, b_2^2 + a_2, a_1b_2 - a_3 \rangle. \end{aligned}$$

Como $\sigma_4 = a_1(b_3 - b_1b_2) + b_1(a_1b_2 - a_3)$, logo $\sigma_4 \in I$.

O ideal dos menores 3×3 de M_1 é igual a I .

Portanto, I é o ideal em U da subvariedade V onde ν não está definida. Resolvendo as relações em I para a_2, a_3 e b_3 temos:

$$a_2 = -b_2^2 \quad a_3 = a_1b_2 \quad e \quad b_3 = b_2b_1$$

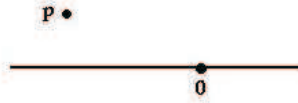
e substituindo em q_1 e q_2 , obtemos a rede de cônicas degeneradas dadas por:

$$\begin{aligned} q_1' &= (x_0 + b_2x_1)[x_0 - b_2x_1 + a_1x_2] \\ q_2' &= (x_0 + b_2x_1)[x_1 + b_1x_2] \end{aligned}$$

Note a ocorrência de uma componente fixa, dada pela reta $(x_0 + b_2x_1) \in \check{\mathbb{P}}_o^1$ e um feixe de retas $\lambda = \langle x_0 - b_2x_1 + a_1x_2, x_1 + b_1x_2 \rangle$ marcando um ponto novo

$$p = [-(b_2b_1 + a_1) : -b_1 : 1]. \quad (4.5)$$

Pela definição de Y , temos que V e $Y \cap U$ coincidem como conjunto e como V é irredutível e lisa, (ver [22]) temos que $V = Y$. Assim um ponto de Y pode ser representado geometricamente por



Teorema 4.8. *Seja X' a explosão de X ao longo da subvariedade Y . Com o seguinte diagrama de explosão:*

$$\begin{array}{ccc} E' & \hookrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \Pi \\ Y & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Então podemos definir um morfismo de $v' : X' \rightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$.

Demonstração: Sejam U_{12} e σ_i , $1 \leq i \leq 4$ como antes. Sejam c_1, c_2 e c_3 coordenadas homogêneas para \mathbb{P}^2 , $\Pi : X' \rightarrow X$ e $U_1' = \Pi^{-1}(U_{12})$ a subvariedade de $U_{12} \times \mathbb{P}^2$ dada por equações da forma $c_i\sigma_j = c_j\sigma_i$. U_1' é coberto por 3 abertos afins. No aberto $U_1'^1 \subset U_{12} \times \mathbb{P}^2$ definido por $c_1 = 1$, obtemos $\sigma_j = \sigma_1 c_j$ e σ_1 como a equação do divisor

excepcional, onde encontramos que

$$\begin{cases} a_2 = c_2(b_3 - b_1b_2) - b_2^2 \\ a_3 = c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2. \end{cases}$$

Substituindo $\sigma_j = \sigma_1 c_j$ na matriz $M_1(4.3)$, temos uma representação local para M'_1 ,

$$M'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & c_2(b_3 - b_2b_1) - b_2^2 & c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & (b_3 - b_1b_2) & -c_2(b_3 - b_1b_2) & (-b_2 - c_2b_1 - c_3)(b_3 - b_1b_2) & (a_1 - c_3b_1)(b_3 - b_1b_2) \end{bmatrix},$$

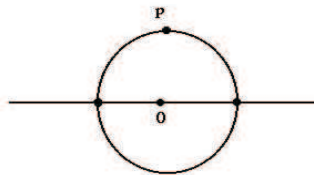
onde M'_1 é a imagem recíproca de M_1 a X' . Dividindo a última linha por σ_1 , obtemos:

$$M'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & c_2(b_3 - b_2b_1) - b_2^2 & c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c_2 & -b_2 - c_2b_1 - c_3 & a_1 - c_3b_1 \end{bmatrix}$$

Pelo lema(4.6) temos que $v' : X' \rightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$ é um morfismo.

□

Observação 4.9. *O calculo intrínseco do divisor excepcional é de extrema complexidade por isso não é estudado em um curso de mestrado. Porém, faz-se necessário determinar-lo, pois sabe-se que o mapa de explosão é equivariante pela ação do grupo, logo pelo lema (3.12) temos que toda órbita fechada da explosão está contida em seu divisor excepcional. Verifica-se que $E' = \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_2^{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle}}{\lambda_0 \cdot \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \right)$, para maiores detalhes ver [23]. Assim um ponto do divisor excepcional E' pode ser representado geometricamente do seguinte modo*



Lema 4.10. *Temos que $E' = \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_2^{<\lambda_1, \lambda_2>}}{\lambda_0 \cdot <\lambda_1, \lambda_2>} \right)$ mergulha em $Y \times G(3, \mathcal{F}_2)$.*

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} \varphi'_{|_{E'}} : E' &\rightarrow Y \times G(3, \mathcal{F}) \\ \overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} &\mapsto (<q_1, q_2>; <\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2>) \end{aligned}$$

Primeiramente mostremos que $\varphi'_{|_{E'}}$ está bem definida. Sejam $\overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} = \overline{\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2}$. Temos então que $(\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) - (\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2) \in <\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2>$. Portanto

$$\begin{aligned} (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) - (\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2) &= \gamma_1\lambda_0\lambda_1 + \gamma_2\lambda_0\lambda_2 \\ (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) &= (\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2) + \gamma_1\lambda_0\lambda_1 + \gamma_2\lambda_0\lambda_2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Então

$$\begin{aligned} \varphi'_{|_{E'}}(\overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}) &= (<\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2>; <\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2>), \text{ por (4.6),} \\ \varphi'_{|_{E'}}(\overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}) &= (<\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2>; <\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2, (\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2) + \gamma_1\lambda_0\lambda_1 + \gamma_2\lambda_0\lambda_2> \\ \varphi'_{|_{E'}}(\overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}) &= (<\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2>; <\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2, \alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2>) = \varphi'_{|_{E'}}(\overline{\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2}) \end{aligned}$$

Provemos agora a injetividade de $\varphi'_{|_{E'}}$. Seja $\varphi'_{|_{E'}}(\overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}) = \varphi'_{|_{E'}}(\overline{\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2})$, então

$$(<\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2>; <\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2>) = (<\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2>; <\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2, \alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2>) \tag{4.7}$$

Mostremos então que $\overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} = \overline{\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2}$. Mas por 4.7, temos que

$$\begin{aligned} \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 &= c_1(\lambda_0\lambda_1) + c_2(\lambda_0\lambda_2) + c_3(\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2) \\ (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) - c_3(\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2) &= c_1(\lambda_0\lambda_1) + c_2(\lambda_0\lambda_2) \end{aligned}$$

Logo, $\overline{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2} = \overline{\alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2}$.

Resta-nos mostrar que $d\varphi'_{|_{E'}}$ também é injetiva. Como a injetividade de $d\varphi'_{|_{E'}}$ é uma questão local, sejam $\{U_{ij}\}$ a cobertura aberta canônica de X , $\{U_{ijk}\}$ a cobertura

aberta canônica de $G(3, \mathcal{F}_2)$, e $\{U_{ijr}\}$ a cobertura aberta de X' obtida no teorema (4.8),

$$U_{ij,r} = \{U_r'^1 = \Pi^{-1}(U_{12}) \subset U_{12} \times \mathbb{P}^2 \mid c_r = 1, r = 1, 2, 3\}.$$

Portanto podemos definir $\varphi'_{|_{E'}}$ localmente da seguinte maneira:

$$\varphi'_{|_{U_{12,1}}} : U_{121} \rightarrow U_{12} \times U_{123} ,$$

onde

- $U_{12,1} = \{(\langle q_1, q_2 \rangle; 1, c_2, c_3) \in U \times \mathbb{P}^2\}$, com $q_1 = x_0^2 + a_1x_0x_2 + (c_2(b_3 - b_1b_2) - b_2^2)x_1^2 + (c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2)x_1x_2$ e $q_2 = x_0x_1 + b_1x_0x_2 + b_2x_1^2 + b_3x_1x_2$;
- $U_{12} = \{\langle q_1, q_2 \rangle \in X\}$, com q_1 e q_2 como em $U_{12,1}$;
- $U_{123} = \{\langle q_1, q_2, q_3 \rangle \in G(3, \mathcal{F}_2)\}$, com q_1, q_2 como em U_{121} e $q_3 = x_0x_2 - c_2x_1^2 - (b_2 + c_2b_1 + c_3)x_1x_2 + (a_1 - c_3b_1)x_2^2$.

Note para cada ponto de $U_{12,1}$, temos $\varphi(\langle q_1, q_2 \rangle; c_1, c_2, c_3) = (N_1, N_2)$, onde

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & c_2(b_3 - b_2b_1) - b_2^2 & c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{pmatrix} e$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & c_2(b_3 - b_2b_1) - b_2^2 & c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c_2 & -b_2 - c_2b_1 - c_3 & a_1 - c_3b_1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_2(b_3 - b_2b_1) - b_2^2 + a_1c_2 & c_3(b_3 - b_1b_2) + 2a_1b_2c_2b_1a_1 + c_3a_1 & a_1^2 - c_3b_1a_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 + c_2b_1 & b_3 + b_1b_2 + c_2b_1^2 + c_3b_1 & a_1b_1 - c_3b_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & -c_2 & -b_2 - c_2b_1 - c_3 & a_1 - c_3b_1 \end{pmatrix}$$

Note que $U_{12} \times U_{123}$ é isomorfo a \mathbb{C}^{15} da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Psi : U_{12} \times U_{123} &\rightarrow \mathbb{C}^{15} \\ (N_1, N_2) &\mapsto \Psi(N_1, N_2) = (T_1, \dots, T_{15}), \end{aligned}$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = a_1 \\ T_2 = c_2(b_3 - b_2b_1) - b_2^2 \\ T_3 = c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2 \\ T_4 = b_1 \\ T_5 = b_2 \\ T_6 = b_3 \\ T_7 = c_2(b_3 - b_2b_1) - b_2^2 + a_1c_2 \\ T_8 = c_3(b_3 - b_1b_2) + 2a_1b_2 + c_2b_1a_1 + c_3a_1 \\ T_9 = a_1^2 - c_3b_1a_1 \\ T_{10} = b_2 + c_2b_1 \\ T_{11} = b_3 + b_1b_2 + c_2b_1^2 + c_3b_1 \\ T_{12} = a_1b_1 - c_3b_1^2 \\ T_{13} = -c_2 \\ T_{14} = -b_2 - c_2b_1 - c_3 \\ T_{15} = a_1 - c_3b_1 \end{array} \right.$$

Temos que a matriz jacobiana na origem de $\varphi'_{|E'}$ é dada por

$$Jac(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $d\varphi'_{|E'}$ é injetiva.

□

Observação 4.11. Sabemos que X' mergulha em $X \times G(3, \mathcal{F})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi' : X' &\rightarrow X \times G(3, \mathcal{F}) \\ x' &\mapsto (\langle q_1, q_2 \rangle; \langle q_1, q_2, q_3 \rangle) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} q_3 \text{ como em (4.1), se } \langle q_1, q_2 \rangle \in X - Y; \\ q_3 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \text{ se } \langle q_1, q_2 \rangle \in Y, \text{ com } q_1 = \lambda_0\lambda_1 \text{ e } q_2 = \lambda_0\lambda_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}, \\ \text{com } V(\lambda_1, \lambda_2) = p, \text{ onde } \bar{q} \in \frac{\mathcal{F}_2^{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle}}{\lambda_0 \cdot \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle}. \end{cases}$$

Para demonstrar precisamos verificar em todas as vizinhanças de X' . O cálculo feito na vizinhança da órbita fechada é feito de modo análogo ao lema acima pois nesse caso restringe-se ao divisor excepcional.

Observação 4.12. Note que a rede de cônicas definido em (4.8) ainda não define exatamente três pontos, ou seja, o polinômio de Hilbert de $\langle q_1, q_2, q_3 \rangle$ não necessariamente é igual a 3. Vide o exemplo (1.56).

Registraremos aqui outros dois locais relevantes em X . Eles aparecerão como a imagem(isomorfa) das variedades que servirão como centro das próximas explosões

$$Y_1 = \{ \langle lx_0, lx_1 \rangle \mid \ell \in \check{\mathbb{P}}^2 \} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$Y_2 = \{ \langle \ell^2, \ell\ell' \rangle \mid \ell \in \check{\mathbb{P}}_1^0, \ell' \in \mathbb{P}(\langle x_0, x_1 \rangle / \langle \ell \rangle) \} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \star \\ \bullet \quad \text{p} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Note ainda que $Y_2 \subset Y$ e que

$$Y_2 \cap Y_1 = Y \cap Y_1 = \{ \langle lx_0, lx_1 \rangle \mid \ell \in \check{\mathbb{P}}_1^0 \} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \bullet \\ 0 = \text{p} \end{array} \right\}$$

Lema 4.13. A variedade $Y \cap Y_1 = \{ \langle lx_0, lx_1 \rangle \mid \ell \in \check{\mathbb{P}}_1^0 \}$.

Demonstração: A igualdade entre conjuntos é clara. Portanto, basta mostrarmos que $Y \cap Y_1$ é lisa. Seja ℓ a reta, e $p = \langle x_0, x_1 \rangle$ o ponto. O mergulho

$$\begin{aligned}\varphi : Y_1 &\rightarrow X \\ \ell &\mapsto \langle \ell x_0, \ell x_1 \rangle\end{aligned}$$

em torno do representante da órbita fechada $\ell = x_0 + ax_1 + bx_2$, tem a seguinte representação para a imagem

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & b & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & -a^2 & -ab & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & b & 0 \end{pmatrix}.$$

As equações que definem o mergulho de Y em X são

$$a_2 = -b_2^2 \quad a_3 = a_1 b_2 \quad e \quad b_3 = b_2 b_1.$$

As equações que definem o mergulho de Y_1 em X são

$$b_1 = 0, \quad a_2 = -b_2^2, \quad a_1 = b_3 \quad e \quad a_3 = -a_1 b_2,$$

onde os a'_i s e b'_i s são as funções coordenadas da vizinhança U de $\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle$ de X . Portanto, temos cinco equações linearmente independentes definindo localmente $Y \cap Y_1$ em X , logo o posto da matriz jacobiana é cinco que é a $\text{codim}(Y \cap Y_1)$ em X .

□

Lema 4.14. *Em X' existem exatamente duas órbitas fechadas, representadas por*

- $O'_1 = (\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle, \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2 \rangle)$;
- $O'_2 = (\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle, \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2 \rangle)$.

Demonstração: Como a órbita fechada de X' se projeta sobre a única órbita fechada de X , onde um dos representante é $\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle$, temos que todo ponto $x' \in E'$ sobre a órbita fechada é dado por ponto de $G(3, \mathcal{F}_2)$ da forma $\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle + \langle \bar{q} \rangle$. Aqui um elemento $\bar{q} \in \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_2^{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle}}{\lambda_0 \cdot \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \right)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\bar{q} = c_1 x_0 x_2 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1 x_2 + c_4 x_2^2, \quad (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{P}^3.$$

O estabilizador de O é dado pelas matrizes $M \in PGL_3$ que fixam o ponto 0 , ou seja, da forma

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Então pelo lema (3.12) basta agirmos com M . Agindo com o subgrupo a 1-parâmetro $m_t := (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, x_1, tx_2)$, no limite temos que $m_t(\bar{q}) \mapsto c_2 x_1^2$, portanto temos que $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2 \rangle$ está no fecho da órbita de $\langle x_0^2, x_0 x_1, q \rangle$. Esta órbita é fechada pois é isomorfa ao quadrado do ideal do ponto $\langle x_0, x_1 \rangle$.

Suponhamos que $c_i = 0$, para $i = 2, 3, 4$. Teremos então que $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2 \rangle$ estará no fecho da órbita de $\langle x_0^2, x_0 x_1, q \rangle$. Esta órbita é fechada pois é isomorfa a $\check{\mathbb{P}}^2$. Suponhamos agora que pelo menos um $c_i \neq 0$, com $i = 2, 3, 4$. Se c_2 ou c_3 forem não nulos, basta agirmos com o subgrupo a 1-parâmetro $m_t := (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, tx_1, x_2)$, assim voltamos ao caso em que $c_1 \neq 0$ e os demais são nulos. Se $c_4 \neq 0$ temos que basta agirmos com

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix},$$

onde encontramos novamente $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2 \rangle$ que por sua vez estará no fecho da órbita de $\langle x_0^2, x_0 x_1, q \rangle$.

□

Observação 4.15. *Como veremos nas próximas seções O'_1 não se encontrará nos demais centros de explosões já que o polinômio de Hilbert é correto. Portanto centraremos nossos estudos em torno de O'_2 .*

4.6 Primeiro Mapa de Multiplicação

Seja \mathcal{A} a imagem recíproca do fibrado tautológico de posto dois sobre X para X' via o mapa de explosão.

Seja

$$\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_3^0$$

$$q \otimes f \mapsto q \cdot f$$

o mapa de multiplicação. Estamos procurando o espaço das cúbicas em \mathbb{P}^2 que contém um triângulo mais o ponto fixo. Para uma superfície cúbica conter quatro pontos (o ponto fixo mais o triângulo) em \mathbb{P}^2 temos quatro condições como o espaço das cúbicas tem dimensão dez, temos que o espaço das cúbicas que contém triângulos e o ponto fixo tem dimensão seis, portanto o posto genérico de μ é 6.

Provaremos que o posto genérico de $\mu|_{X'}$ via o mapa de explosão cai para cinco no lugar dado pela união do divisor excepcional E' e o transformado estrito Y' de Y_1 . Para isso devemos encontrar uma representação local para a matriz do mapa μ .

4.7 Carta Local para X'

Consideremos o aberto afim em que a equação local do divisor excepcional é dada pelo polinômio

$$\sigma_1 = b_3 - b_2 b_1.$$

Observe que na matriz que dá a representação de ν (após operações elementares nas linhas), a entrada σ_1 aparece na coluna correspondente ao monômio $x_0 x_2$. Dividindo a terceira linha da matriz M'_1 do teorema (4.8) por σ_1 , vemos que irá corresponder a uma cônica da forma $x_0 x_2 +$ termos que se anulam na origem da vizinhança coordenada abaixo. As funções coordenadas podem ser escolhidas como:

$$a_1, b_1, b_2, c_2 \text{ e } c_3$$

onde os c_i são as razões com respeito a σ_1 para os dois geradores restantes do ideal de Y . Mas precisamente, o mapa $X' \rightarrow X$ é dado pela inclusão dos anéis de coordenadas

afins

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[X] &\hookrightarrow \mathbb{C}[X'] \\
a_1 &\mapsto a_1 \\
a_2 &\mapsto c_2(b_3 - b_1b_2) - b_2^2 \\
a_3 &\mapsto c_3(b_3 - b_1b_2) + a_1b_2 \\
b_1 &\mapsto b_1 \\
b_2 &\mapsto b_2 \\
b_3 &\mapsto b_3
\end{aligned}$$

Seja U' uma vizinhança da órbita fechada, cujo o representante é o ponto

$$(\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle, \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle)$$

de X' de modo que a restrição do fibrado tautológico de posto três \mathcal{R} (sobre $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$) a U' tenha base

$$\begin{aligned}
q_1 &= x_0^2 + a_1x_0x_2 + (c_2(b_3 - b_1b_2) - b_2^2)x_1^2 + (c_3(b_3 - b_2b_1) + b_1b_2)x_1x_2 \\
q_2 &= x_0x_1 + b_1x_0x_2 + b_2x_1^2 + b_3x_1x_2 \\
q_3 &= x_0x_2 - c_2x_1^2 - (b_2 + c_2b_1 + c_3)x_1x_2 + (a_1 - c_3b_1)x_2^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde q_1, q_2 formam uma base para a imagem recíproca para X' , do subfibrado de posto dois \mathcal{A} , como em (4.1).

Lema 4.16. *Existe uma base de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$, de modo que a representação matricial de $\mu|_{X'}$ em torno do aberto U' descrito acima, é uma matriz 6×9 da forma*

$$\mu|_{X'} = \begin{pmatrix} I_5 & \star \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

onde I_5 denota um bloco identidade de tamanho 5 e ρ é uma matriz linha múltipla da equação local do divisor excepcional σ_1 , que gera o ideal \mathcal{I}' das 6×6 menores de μ .

Demonstração: Seja

$$\{q_1 \otimes x_0, q_1 \otimes x_1, q_1 \otimes x_2, q_2 \otimes x_0, q_2 \otimes x_1, q_2 \otimes x_2\}$$

uma base ordenada de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$, onde q_1 e q_2 escritas como em (4.8). Com essa base temos a seguinte representação matricial para $\mu|_X$,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & t_1 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $t_1 = c_2(b_3 - b_1b_2) - b_2^2$ e $t_2 = a_1b_2 + c_3(b_3 - b_1b_2)$.

Fazendo as seguintes operações elementares apenas na linha 6 teremos:

- $L_6 \mapsto -L_2 + L_6$

$$\left(0 \quad 0 \quad -b_1 \quad -b_2 \quad -b_3 + a_1 \quad 0 \quad t_1 \quad t_2 \quad 0 \right).$$

- $L_6 \mapsto b_1L_3 + L_6$

$$\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad b_2b_1 - b_3 + a_1 \quad b_1a_1 \quad b_2^2 + t_1 \quad b_2b_3 + b_1t_1 + t_2 \quad b_1t_2 \right).$$

- $L_6 \mapsto (b_3 - b_2b_1 - a_1)L_4 + L_6$

$$\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad t_3b_1 + b_1a_1 \quad b_2^2 + t_1 \quad b_2t_3 + b_2b_3 + b_1t_1 + t_2 \quad t_3b_3 + b_1t_2 \right).$$

com $t_3 = b_3 - b_2b_1 - a_1$.

Por fim chegamos que

$$L_6 = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_1b_1 \quad \sigma_1c_2 \quad \sigma_1(2b_2 + b_1c_2 + c_3) \quad \sigma_1(b_3 - a_1 + b_1c_3) \right).$$

A linha L_6 é múltipla da equação local do divisor excepcional, $\sigma_1 = b_3 - b_1 b_2$. Portanto, dividindo por σ_1 temos

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & t_1 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1 \\ \beta_2 &= c_2 \\ \beta_3 &= 2b_2 + b_1 c_2 + c_3 \\ \beta_4 &= b_3 - a_1 + b_1 c_3 \end{aligned}$$

(4.9)

Portanto temos que a nova linha dada pela fatoração da linha ρ gera o ideal dos menores 6×6 de μ

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' &= \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rangle \\ &= \langle b_1, c_2, 2b_2 + b_1 c_2 + c_3, b_3 - a_1 + b_1 c_3 \rangle \\ &= \langle b_1, c_2, 2b_2 + b_1 c_2 + c_3 - b_1 c_2, b_3 - a_1 + b_1 c_3 - b_1 c_3 \rangle \\ &= \langle b_1, c_2, 2b_2 + c_3, b_3 - a_1 \rangle. \end{aligned}$$

Assim o lugar Y' onde o posto de μ cai de 6 para 5 é dado localmente pelo ideal \mathcal{I}' .

□

4.8 Descrição de Y'

Resolvendo as relações em \mathcal{I}' para b_1, c_2, b_2, a_1 temos:

$$b_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{2}c_3 \quad \text{e} \quad a_1 = b_3.$$

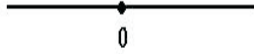
Substituindo-as nas cônicas de (4.8) encontramos

$$\begin{aligned} q_1 &= -1/4(2x_0 + c_3x_1)(c_3x_1 - 2x_0 - 2b_3x_2) \\ q_2 &= -1/2x_1(c_3x_1 - 2x_0 - 2b_3x_2) \\ q_3 &= 1/4(c_3x_1 - 2b_3x_2)(c_3x_1 - 2x_0 - 2b_3x_2) \end{aligned}$$

A rede de cônicas tem uma componente fixa dada pela reta suporte

$$c_2x_1 - 2x_0 - 2b_3x_2.$$

Observe que em geral esta reta não contém o ponto distingüido 0. Portanto um ponto de Y' pode ser representado geometricamente como



Lema 4.17. *O mapa abaixo é um mergulho:*

$$\begin{aligned} i' : \check{\mathbb{P}}^2 &\hookrightarrow X' \subset X \times G(3, \mathcal{F}_2) \\ \ell &\mapsto (\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}) \end{aligned},$$

onde $\check{0} = \langle x_0, x_1 \rangle$ denota a rede de retas que passam pelo ponto 0.

Demonstração: Para mostrarmos a injetividade de i' consideremos ℓ e $\ell' \in \check{\mathbb{P}}^2$, onde $i'(\ell) = i'(\ell')$ e mostremos que $\ell = \ell'$. Como $i'(\ell) = i'(\ell')$, temos que

$$(\ell \cdot \langle x_0, x_1 \rangle, \ell \cdot \mathcal{F}) = (\ell' \cdot \langle x_0, x_1 \rangle, \ell' \cdot \mathcal{F}).$$

Por igualdade de pares ordenados temos que $\langle \ell x_0, \ell x_1 \rangle = \langle \ell' x_0, \ell' x_1 \rangle$, aplicando o mesmo raciocínio de (4.3) referente a injetividade temos que $\ell = \alpha \ell'$.

De modo análogo ao primeiro mergulho (4.3), para mostrarmos que di' é injetiva, estudemos em torno da órbita fechada de X' , O'_2 , que tem como representante

$$\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle .$$

Sejam

- $U'_1 = \{\ell \in \check{\mathbb{P}}^2\}$, onde $\ell = x_0 + c_1x_1 + c_2x_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$;
- $U'_{12} = \{(\ell \cdot \langle x_0, x_1 \rangle) \in X\}$, onde $\ell \cdot \langle x_0, x_1 \rangle = \langle (x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)x_0, (x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)x_1 \rangle$.
- $W' = \{\ell \cdot \mathcal{F} \in G(3, \mathcal{F}_2)\}$, onde $\ell \cdot \mathcal{F} = \langle (x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)x_0, (x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)x_1, (x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)x_2 \rangle$

Seja

$$\begin{aligned} i' &: U_1 \rightarrow U'_{12} \times W' \\ \ell &\mapsto (\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Note que o mapa i' em cada ponto do aberto U'_1 de X' pode ser representado por $i'(\ell) = (A_1, A_2)$, onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_2 & -c_1^2 & -c_1c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_1^2 & -2c_1c_2 & -c_2^2 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto novamente como em (4.3) podemos analisar se di' é injetiva através do seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi' &: U'_{12} \times U' \rightarrow \mathbb{C}^6 \\ (A_1, A_2) &\mapsto (c_2, -c_1^2, -c_1c_2, c_1, -2c_1c_2, -c_2^2) \end{aligned}$$

Portanto i' terá a seguinte matriz jacobiana na origem

$$Jac(i') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O que mostra a injetividade de di' .

□

4.9 Segunda Explosão

Teorema 4.18. *Seja X'' a explosão de X' ao longo de Y' . Com o seguinte mapa de explosão:*

$$\begin{array}{ccc} E'' & \hookrightarrow & X'' \\ \downarrow & & \downarrow \Pi_2 \\ Y' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

Então podemos definir um morfismo $\mu : X'' \rightarrow G(6, \mathbb{F}_3^9)$.

Demonstração: Sejam U' e β_j , $1 \leq j \leq 4$, como em (4.8) e (4.9) respectivamente. Sejam d_1, d_2, d_3, d_4 as coordenadas homogêneas para \mathbb{P}^3 , $\Pi_2 : X'' \rightarrow X'$ e $U'^1 = \Pi_2^{-1}(U')$ a subvariedade de $U' \times \mathbb{P}^3$ dada pelas equações da forma $d_i \beta_j = d_j \beta_i$. Note que U'^1 é coberto por 4 abertos afins. No aberto $U_1'^1 \subset U' \times \mathbb{P}^3$ definido por $d_1 = 1$, obtemos

$$\beta_j = d_j \beta_1 \tag{4.10}$$

, e $\beta_1 = b_1$ como a equação do divisor excepcional, onde encontramos que

$$\begin{cases} c_2 = d_2 b_1 \\ b_2 = -\frac{1}{2} c_3 + d_3 b_1 \\ a_1 = b_3 + d_4 b_1 \end{cases}$$

Quando substituímos as equações (4.10) em M_2 (4.9), encontramos uma representação local para M_2''

$$M_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 + d_4b_1 & s_1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 + d_4b_1 & 0 & s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3b_1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_1d_2 & (2d_3 + d_2b_1)b_1 & (-d_4 + c_3)b_1 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} s_1 &= d_2b_1b_3 + \frac{1}{2}d_2b_1^2c_3 - d_2d_3b_1^3 - d_3^2b_1^2 + c_3d_3b_1 - \frac{1}{4}c_3^2, \\ s_2 &= \frac{1}{2}b_3c_3 + d_3b_1b_3 - \frac{1}{2}c_3d_4b_1 + d_4d_3b_1^2 + \frac{1}{2}b_1c_3^2 - d_3c_3b_1^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

e M_2'' é a imagem recíproca de M_2 a X'' . Assim, dividindo a última linha por $\beta_1 = b_1$, a nova matriz M_2'' pode ser escrita como

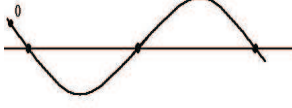
$$M_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 + d_4b_1 & s_1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 + d_4b_1 & 0 & s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3b_1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_2 & 2d_3 + d_2b_1 & -d_4 + c_3 \end{pmatrix},$$

com s_1, s_2 como em (4.11).

Temos então que $\mu : X'' \rightarrow G(6, \mathcal{F}_3^0)$ é um morfismo.

□

Observação 4.19. Novamente pelo lema (3.12), temos que toda órbita fechada de X'' está contida em E'' . Verifica-se que $E'' = \mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{F}_3^0}{\ell. \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle}\right)$. Temos então que um ponto do divisor excepcional E'' pode ser representado geometricamente do seguinte modo



Note que X'' mergulha em $X' \times G(6, \mathcal{F}_3^0)$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \varphi'' : X'' &\rightarrow X' \times G(6, \mathcal{F}_3^0) \\ x'' &\mapsto (\langle q_1, q_2 \rangle, \langle q_1, q_2, q_3 \rangle, C_{x''}), \end{aligned}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{x''} = q_1 \cdot \mathcal{F} \oplus q_2 \cdot \mathcal{F}, \text{ se } x'' \notin E'', \text{ com } \Pi_1(\Pi_2(x'')) = \langle q_1, q_2 \rangle \in X - Y; \\ C_{x''} = \lambda_0 \lambda_1 \cdot \mathcal{F} + \lambda_0 \lambda_2 \mathcal{F} + \langle \ell \cdot q_3 \rangle, \text{ se } x'' \notin E'', \text{ e } \Pi_2(x'') = (\langle \lambda_0 \lambda_1, \lambda_0 \lambda_2 \rangle; \langle \lambda_0 \lambda_1, \lambda_0 \lambda_2, q_3 \rangle) \in E' - Y', \\ \text{com } q_3 = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2, \ell \in \check{\mathbb{P}}^2 \text{ e } \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \text{ com } V(\lambda_1, \lambda_2) = p; \\ C_{x''} = \ell \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle + \langle q_3 \rangle, \text{ se } x'' \in E'', \text{ com } \ell \in \check{\mathbb{P}}^2, q_3 = \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2, \text{ onde } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}, \text{ com } V(\lambda_1, \lambda_2) = p \\ \text{e } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}_2. \end{array} \right.$$

Lema 4.20. $E'' = \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^0}{\ell \cdot \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle} \right)$ mergulha em $Y' \times G(6, \mathcal{F}_3^0)$.

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} \varphi''|_{E''} : \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^0}{\ell \cdot \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle} \right) &\rightarrow Y' \times G(6, \mathcal{F}_3^0) \\ \overline{\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1} &\mapsto (\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \mathcal{F}_2^0 + (\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1)) \end{aligned}$$

Note que $\varphi''|_{E''}$ está bem definido, sejam

$$\overline{\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1} = \overline{\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1}.$$

Portanto temos que $\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1 - \gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1 \in \ell \mathcal{F}_2^0$, então

$$(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1) - (\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1) = \gamma \ell q,$$

com $q \in \mathcal{F}_2^0$ e

$$(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1) = (\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1) + \gamma \ell q.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\varphi''_{|E''}(\overline{\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1}) &= (\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \mathcal{F}_2^0 + \langle \gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1 \rangle) \\
&= (\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \mathcal{F}_2^0 + \langle \gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1 \rangle + \gamma \ell \mathcal{F}_2^0) \\
&= (\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \mathcal{F}_2^0 + \langle \gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1 \rangle) = \varphi''_{|E''}(\overline{\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1})
\end{aligned}$$

Mostremos ainda que $\varphi''_{|E''}$ é injetiva. Suponhamos $\varphi''_{|E''}(\overline{\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1}) = \varphi''_{|E''}(\overline{\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1})$. Então temos que

$$(\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \mathcal{F}_2^0 + \langle \gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1 \rangle) = (\ell \cdot \check{0}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \mathcal{F}_2^0 + \langle \gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1 \rangle)$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
(\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1) &= c_1 \ell \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle + c_2 (\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1) \\
(\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1) - c_2 (\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1) &\in c_1 \ell \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_1} = \overline{\gamma'_1 x_0 + \gamma'_2 x_1}$.

Como em (4.10), descreveremos $\varphi''_{|E''}$ localmente para mostrarmos a injetividade de $\varphi''_{|E''}$. Sejam $\{U_{ijr}\}$ a cobertura aberta de X' , descrita no lema (4.10), $\{U_J\}$ a cobertura canônica de $G(6, \mathcal{F}_3^0)$, $\{U'_{ijr}\}$ a cobertura aberta de X'' obtida no teorema (4.18), onde

$$\{U'_{ijr}\} = \{U^r = \Pi_2^{-1}(U') \subset U' \times \mathbb{P}^3 \mid d_r = 1, r = 1, \dots, 4\}.$$

Definamos $\varphi''_{|E''}$ localmente,

$$\begin{aligned}
\varphi''_{|E''} &: U'_{121} \rightarrow U_{123} \times U_{1\dots 6} \\
x'' &\mapsto (\Pi_2(x''), C_{x''})
\end{aligned}$$

onde

- $U'_{121} = \{U^1 = \Pi_2^{-1}(U') \subset U' \times \mathbb{P}^3 \mid d_1 = 1, d_1 \beta_j = d_j \beta_1, j = 2, \dots, 4\}$, com β_j como em (4.18).
- $U_{121} = \{(\langle q_1, q_2 \rangle; 1, c_2, c_3) \in U \times \mathbb{P}^2\}$, com $q_1 = x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + (c_2(b_3 - b_1 b_2) - b_2^2)x_1^2 + (c_3(b_3 - b_1 b_2) + a_1 b_2)x_1 x_2$ e $q_2 = x_0 x_1 + b_1 x_0 x_2 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1 x_2$;

- $U_{1\dots 6} = \{ \langle c_1, c_2, \dots, c_6 \rangle \in G(6, \mathcal{F}_3^0) \}$, com

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = x_0^3 + (b_3 + d_4 b_1) x_0^2 x_2 + (d_2 b_1 b_3 + \frac{1}{2} d_2 b_1^2 c_3 - d_2 d_3 b_1^3 - d_3^2 b_1^2 + c_3 d_3 b_1 - \frac{1}{4} c_3^2) x_0 x_1^2 \\ \quad + (\frac{1}{2} b_3 c_3 + d_3 b_1 b_3 - \frac{1}{2} c_3 d_4 b_1 + d_4 d_3 b_1^2 + \frac{1}{2} b_1 c_3^2 - d_3 c_3 b_1^2) x_0 x_1 x_2 \\ c_2 = x_0^2 x_1 + b_1 x_0^2 + (-\frac{1}{2} c_3 + d_3 b_1) x_0 x_1^2 + b_3 x_0 x_1 x_2 \\ c_3 = x_0^2 x_2 + (b_3 + d_4 b_1) x_0 x_2^2 + (d_2 b_1 b_3 + \frac{1}{2} d_2 b_1^2 c_3 - d_2 d_3 b_1^3 - d_3^2 b_1^2 + c_3 d_3 b_1 - \frac{1}{4} c_3^2) x_1^2 x_2 \\ \quad + (\frac{1}{2} b_3 c_3 + d_3 b_1 b_3 - \frac{1}{2} c_3 d_4 b_1 + d_4 d_3 b_1^2 + \frac{1}{2} b_1 c_3^2 - d_3 c_3 b_1^2) x_1 x_2^2 \\ c_4 = x_0 x_1^2 + b_1 x_0 x_1 x_2 + (-\frac{1}{2} c_3 + d_3 b_1) x_1^3 + b_3 x_1^2 x_2 \\ c_5 = x_0 x_1 x_2 + b_1 x_0 x_2^2 + (-\frac{1}{2} c_3 + d_3 b_1) x_1^2 x_2 + b_3 x_1 x_2^2 \\ c_6 = x_0 x_2^2 + d_2 x_1^3 + (2d_3 + d_2 b_1) x_1^2 x_2 + (-d_4 + c_3) x_1 x_2^2 \end{array} \right.$$

Pelo lema (1.29), temos que $U_{123} \times U_{1\dots 6}$ é isomorfo a $\mathbb{C}^{10} \times \mathbb{C}^{18}$. Portanto a matriz jacobiana de $\varphi''_{|E''}$ é uma matriz 8×28 , que terá posto 8 na origem. De modo análogo a (4.10), temos que $d\varphi''_{|E''}$ é injetiva. Portanto $\varphi''_{|E''}$ é um mergulho.

□

Lema 4.21. *Em X'' existem exatamente duas órbitas fechadas, representadas por*

- $O''_1 = (O'_2, \langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle x_0 x_2^2 \rangle)$;
- $O''_2 = (O'_2, \langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle x_1^3 \rangle)$.

que se projetam sobre O'_2 .

Demonstração: Lembremos que as órbitas fechadas de X'' que se projetam sobre a órbita O'_2 de X' , onde um dos seus representante é $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2 \rangle$. Todo ponto $x'' \in E''$ sobre a órbita O'_2 é dado por um ponto de $G(6, \mathcal{F}_3^0)$ da forma $\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle \bar{q} \rangle$, com $\bar{q} \in E''$. Aqui um elemento

$$\bar{q} \in E'' = \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^0}{\ell \cdot \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle} \right)$$

pode ser escrito da seguinte forma:

$$\bar{q} = c_1 x_0 x_2^2 + c_2 x_1^3 + c_3 x_1^2 x_2 + c_4 x_1 x_2^2, (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{P}^3.$$

O estabilizador de O'_2 é dado pelas matrizes $M \in PGL_3$ da forma

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Então pelo lema (3.12) basta agir com M . Agindo com o subgrupo a 1-parâmetro $m_t := (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, x_1, tx_2)$, no limite temos que $m_t(\bar{q}) \mapsto c_2x_1^3$, portanto temos que $\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle x_1^3 \rangle$ está no fecho da órbita de $\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle \bar{q} \rangle$. Esta órbita é fechada pois é isomorfa ao ponto 0.

Agora se agirmos com o subgrupo a 1-parâmetro só que dessa vez na variável x_1 , ou seja, $m_t := (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, tx_1, x_2)$, no limite teremos $m_t(\bar{q}) \mapsto c_2x_1^3$, logo $\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle x_0x_2^2 \rangle$ estará no fecho da órbita de $\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle \bar{q} \rangle$. Esta órbita será fechada pois é isomorfa a \mathbb{P}_0^1 .

□

Como veremos a seguir O''_2 não se encontrará nos demais centros de explosões já que o seu polinômio de hilbert está correto, portanto estudaremos em torno de O''_1 .

4.10 Segundo Mapa de Multiplicação

Seja U'' a vizinhança da órbita O''_1 , onde um dos seus representantes é o ponto

$$(\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle, \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle, \langle x_0^2, x_0x_1 \rangle \cdot \mathcal{F} + \langle x_0x_2^2 \rangle)$$

de X'' de modo que a imagem recíproca do fibrado tautológico \mathcal{R} (4.8) para X'' a U'' tenha como base

$$\begin{aligned} q''_1 &= x_0^2 + (b_3 + d_4b_1)x_0x_2 + (d_2b_1b_3 + \frac{1}{2}d_2b_1^2c_3 - d_2d_3b_1^3 - d_3^2b_1^2 + c_3d_3b_1 - \frac{1}{4}c_3^2)x_1^2 \\ &+ (\frac{1}{2}b_3c_3 + d_3b_1b_3 - \frac{1}{2}c_3d_4b_1 + d_4d_3b_1^2 + \frac{1}{2}b_1c_3^2 - d_3c_3b_1^2)x_1x_2 \\ q''_2 &= x_0x_1 + b_1x_0x_2 + (-\frac{1}{2}c_3 + d_3b_1)x_1^2 + b_3x_1x_2 \\ q''_3 &= x_0x_2 - d_2b_1x_1^2 + (-b_1^2d_2 - \frac{1}{2}c_3 - d_3b_1)x_1x_2 + (-b_1c_3 + b_3 + d_4b_1)x_2^3 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Proposição 4.22. *Seja \mathcal{R}' o fibrado de posto 3 sobre X'' , a imagem recíproca do fibrado \mathcal{R} via o mapa de explosão 4.18. Consideremos o seguinte mapa de multiplicação*

$$\eta : \mathcal{R}' \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_3 \quad (4.12)$$

Existe uma base de $\mathcal{R}' \otimes \mathcal{F}$, de modo que a representação matricial em torno do aberto U'' descrito acima, é uma matriz 9×10 da forma

$$\eta|_{X''} = \begin{pmatrix} I_6 & \star \\ 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde I_6 denota um bloco identidade de tamanho 6 e ω é uma matriz linha múltipla da equação local do divisor excepcional, β_1 que gera o ideal \mathcal{I}'' das 7×7 menores de η .

Demonstração: Seja

$$\{q_1'' \otimes x_0, q_2'' \otimes x_0, q_3'' \otimes x_0, q_1'' \otimes x_1, \dots, q_3'' \otimes x_2\}$$

uma base ordenada de $\mathcal{R} \otimes \mathcal{F}$, com q_1'' , q_2'' e q_3'' como em (4.10). Com essa base temos a seguinte representação matricial para η em torno da vizinhança U'

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 + d_4 b_1 & s_1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 + d_4 b_1 & 0 & s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 b_1 & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -d_2 b_1 & m_1 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d_2 b_1 & m_1 & m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com s_1 , s_2 como em (4.11) e

$$\begin{cases} m_1 = -b_1^2 d_2 - \frac{1}{2}c_3 - d_3 b_1 \\ m_2 = -b_1 c_3 + b_3 + d_4 b_1 \end{cases}$$

Realizemos as seguintes operações elementares:

$$\text{Operação(1)} = \left\{ \begin{array}{l} L_6 = L_6 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\text{Operação(2)} = \left\{ \begin{array}{l} L_6 = L_6 - b_1 L_3 \\ L_7 = L_7 - L_3 \end{array} \right.$$

$$\text{Operação(3)} = \left\{ \begin{array}{l} L_6 = L_6 + (\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1)L_4 \\ L_7 = L_7 + d_2 b_1 L_4 \end{array} \right.$$

$$\text{Operação(4)} = \left\{ \begin{array}{l} L_6 = L_6 + (-b_1(\frac{1}{2}b_1 c_3 - d_3 b_1^2) + d_4 b_1)L_5 \\ L_7 = L_7 + (\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1)L_5 \\ L_8 = L_8 - L_5 \end{array} \right.$$

$$\text{Operação(5)} = \left\{ \begin{array}{l} L_6 = L_6 + ((b_3 + d_4 b_1 b_1 + b_1^2(\frac{1}{2}b_1 c_3 - d_3 b_1^2) - d_4 b_1^2)L_9 \\ L_7 = L_7 + (-b_1(\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1) + b_1 c_3)L_9 \\ L_8 = L_8 - b_1 L_9 \end{array} \right.$$

$$\text{Operação(6)} = \left\{ \begin{array}{l} L_6 = L_8(\frac{1}{2}c_3 - d_3 b_1) - L_6 \\ L_7 = L_8(b_3 + \frac{1}{2}c_3 b_1 - d_3 b_1^2) - L_7 \end{array} \right.$$

Assim obtemos a seguinte matriz:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 + d_4 b_1 & s_1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 + d_4 b_1 & 0 & s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d_2 b_1 & m_1 & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_2 b_1 & t_1 & t_2 & t_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com s_1, s_2 como em (4.11) e

$$\begin{cases} m_1 = -b_1^2 d_2 - \frac{3}{2} c_3 - d_3 b_1 + d_4 \\ m_2 = -b_1 c_3 + b_3 + d_4 b_1 \\ t_1 = b_1(-2b_1 d_2 - 2d_3) \\ t_2 = b_1(d_4 - \frac{3}{2} c_3 - b_1^2 d_2 - d_3 b_1) \\ t_3 = b_1(b_3 + d_4 b_1 - c_3 b_1) \end{cases}$$

Portanto temos que a linha 7 de M' é múltipla da equação local do divisor excepcional, $\beta_1 = b_1$. Portanto, ao dividirmos a linha 7 de M' obtemos:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 + d_4 b_1 & s_1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2} c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 + d_4 b_1 & 0 & s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2} c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2} c_3 + d_3 b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d_2 b_1 & m_1 & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_2 & t'_1 & t'_2 & t'_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com s_1, s_2 como em (4.11) e

$$\begin{cases} m_1 = -b_1^2 d_2 - \frac{3}{2} c_3 - d_3 b_1 + d_4 \\ m_2 = -b_1 c_3 + b_3 + d_4 b_1 \\ t'_1 = -2b_1 d_2 - 2d_3 \\ t'_2 = d_4 - \frac{3}{2} c_3 - b_1^2 d_2 - d_3 b_1 \\ t'_3 = b_3 + d_4 b_1 - c_3 b_1 \end{cases}$$

Considere as entradas da última linha na matriz acima

$$\begin{cases} \Gamma_1 = -d_2 \\ \Gamma_2 = -2b_1 d_2 - 2d_3 \\ \Gamma_3 = d_4 - \frac{3}{2} c_3 - b_1^2 d_2 - d_3 b_1 \\ \Gamma_4 = b_3 + d_4 b_1 - c_3 b_1 \end{cases}$$

(4.13)

Portanto teremos que a nova linha dada pela fatoração da linha ω gera o ideal dos menores 7×7 de η

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'' &= \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \rangle \\
&= \langle d_2, 2d_3 + 2d_2b_1, b_1^2d_2 + \frac{3}{2}c_3 + d_3b_1 - d_4, -b_1c_3 + b_3 + d_4b_1 \rangle \\
&= \langle d_2, d_3 + d_2b_1, (b_1^2d_2 + \frac{3}{2}c_3 + d_3b_1 - d_4) - b_1(d_3 + d_2b_1), -b_1c_3 + b_3 + d_4b_1 \rangle \\
&= \langle d_2, d_3 + d_2b_1 - d_2b_1, \frac{3}{2}c_3 - d_4, -b_1c_3 + b_3 + d_4b_1 \rangle \\
&= \langle d_2, d_3, \frac{3}{2}c_3 - d_4, -b_1c_3 + b_3 + d_4b_1 \rangle \\
&= \langle d_2, d_3, c_3 - \frac{2}{3}d_4, -b_1c_3 + b_3 + d_4b_1 \rangle \\
&= \langle d_2, d_3, -\frac{2}{3}d_4 + c_3, -b_1c_3 + b_3 + d_4b_1 + b_1(-\frac{2}{3}d_4 + c_3) \rangle \\
&= \langle d_2, d_3, -\frac{2}{3}d_4 + c_3, b_3 + \frac{1}{3}d_4b_1 \rangle
\end{aligned}$$

□

4.11 Descrição de Y''

Resolvendo as equações dadas nos geradores do ideal \mathcal{I}'' , então as relações que definem localmente Y'' são:

$$d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad c_3 = \frac{2}{3}d_4 \text{ e } b_3 = -\frac{1}{3}d_4b_1.$$

Substituindo essas relações em (4.10) encontramos as seguintes cônicas:

$$\begin{aligned}
q_1'' &= (3x_0 - d_4x_1)(3x_0 + 2d_4b_1x_2 + d_4x_1) \\
q_2'' &= (3x_0 - d_4x_1)(x_1 + b_1x_2) \\
q_3'' &= x_2(3x_0 - d_4x_1)
\end{aligned}$$

Observe que a rede de cônicas tem uma componente fixa dada pela reta:

$$(3x_0 - d_4x_1).$$

Note que esta reta residual contém o ponto fixo 0. Temos ainda que o feixe $\langle 3x_0 + 2d_4b_1x_2 + d_4x_1, x_1 + b_1x_2 \rangle$ determina o ponto $p'' = [\frac{-1}{3}d_4b_1, -b_1 : 1]$.

Portanto um ponto de Y'' pode ser representado geometricamente da seguinte maneira



Lema 4.23. *O mapa abaixo é um mergulho:*

$$i'' : Y_2'' \subset \check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow X'' \subset X' \times G(6, \mathcal{F}_3^0) \subset X \times G(3, \mathcal{F}_2) \times G(6, \mathcal{F}_3^0),$$

$$(\ell, P) \mapsto (\ell \cdot \check{P}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \cdot \mathcal{F}_2),$$

onde $Y_2'' = \{(\ell, p) \in \check{\mathbb{P}}_0^1 \times \mathbb{P}^2 \mid p \in \ell\}$, \check{p} denota a rede de retas que passam pelo ponto p , e ℓ é uma reta pertencente $\check{\mathbb{P}}_0^1$, que contém os pontos p e 0 .

Demonstração: Note que a aplicação i'' é injetiva. A prova é análoga a demonstração feita no lema (4.3). Agora mostremos a injetividade de di'' .

Consideremos:

- $U_1'' = \{\ell \in \check{\mathbb{P}}_0^1\}$, com $\ell = x_0 - \frac{1}{3}d_4x_1$.
- $U_2'' = \{P = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \in \mathbb{P}^2 \mid P \in \ell\}$, com $\lambda_1 = x_0 + \frac{1}{3}d_4b_1x_2$ e $\lambda_2 = x_1 + b_1x_2$
- $U''_{12} = \{\ell \cdot \check{P} = \langle \ell \cdot \lambda_1, \ell \cdot \lambda_2 \rangle \in G(2, \mathcal{F}_2^0)\}$, onde $\ell \cdot \lambda_1 = 3x_0^2 + 2d_4b_1x_0x_2 - \frac{1}{3}d_4^2x_1^2 - \frac{2}{3}d_4^2b_1x_1x_2$ e $\ell \cdot \lambda_2 = x_0x_1 + b_1x_0x_2 - \frac{1}{3}d_4x_1^2 - \frac{1}{3}d_4b_1x_1x_2$;
- $W'' = \{\ell \cdot \mathcal{F} \in G(3, \mathcal{F}_2)\}$, onde $\ell \cdot \mathcal{F} = \langle x_0^2 - \frac{1}{3}d_4x_0x_1, x_0x_1 - \frac{1}{3}d_4x_1^2, x_0x_2 - \frac{1}{3}d_4x_1x_2 \rangle$;
- $\tilde{W} = \{\ell \cdot \mathcal{F}_2 \in G(6, \mathcal{F}_3)\}$, onde $\ell \cdot \mathcal{F}_2 = \langle x_0^3 - \frac{1}{3}d_4x_0^2x_1, x_0^2x_1 - \frac{1}{3}d_4x_0x_1^2, x_0^2x_2 - \frac{1}{3}d_4x_0x_1x_2, x_0x_1^2 - \frac{1}{3}d_4x_1^3, x_0x_1x_2 - \frac{1}{3}d_4x_1^2x_2, x_0x_2^2 - \frac{1}{3}d_4x_0^2x_1x_2^2 \rangle$.

Seja

$$i'' : U_1'' \times U_2'' \rightarrow U''_{12} \times U'' \times W$$

$$(\ell, P) \mapsto \langle \ell \cdot \check{P}, \ell \cdot \mathcal{F}, \ell \cdot \mathcal{F}_2 \rangle$$

Seja $(\ell, p) \in U''_1 \times U''_{12}$, então podemos representar $i''(\ell, p) = (A_1, A_2, A_3)$, onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3}d_4 & \frac{1}{3}d_4b_1 & 0 & -\frac{1}{9}d_4^2b_1 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{3}d_4 & -\frac{1}{3}d_4b_1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3}d_4b_1 & -\frac{1}{9}d_4^2 & -\frac{2}{9}d_4^2b_1 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{3}d_4 & -\frac{1}{3}d_4b_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{9}d_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{27}d_4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9}d_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9}d_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}d_4 \end{pmatrix}.$$

Novamente de maneira análoga aos mergulhos anteriores (4.3) e (4.17), teremos :

$$\begin{aligned} \varphi'' : U''_{12} \times U'' \times W &\rightarrow \mathbb{C}^7 \\ (A_1, A_2, A_3) &\mapsto \left(\frac{2}{3}d_4b_1, -\frac{1}{9}d_4^2, -\frac{2}{9}d_4^2b_1, b_1, -\frac{1}{3}d_4, -\frac{1}{3}d_4b_1, -\frac{1}{27}d_4^3 \right). \end{aligned}$$

Portanto a matriz jacobiana de i'' na origem é

$$Jac(i'') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O que mostra a injetividade de di'' .

□

4.12 Terceira Explosão

Teorema 4.24. *Seja X''' a explosão de X'' ao longo de Y'' . Com o seguinte mapa de explosão*

$$\begin{array}{ccc} E''' & \hookrightarrow & X''' \\ \downarrow & & \downarrow \Pi_3 \\ Y'' & \hookrightarrow & X'' \end{array}$$

Então podemos definir um morfismo $\eta : X''' \rightarrow G(7, \mathcal{F}_3)$.

Demonstração: Sejam U'' e Γ_j , $1 \leq j \leq 4$, como em (4.22). Sejam e_1, e_2, e_3, e_4 as coordenadas homogêneas para \mathbb{P}^3 , $\Pi_3 : X''' \rightarrow X''$ e $U''' = \Pi_3^{-1}(U'')$ a subvariedade de $U'' \times \mathbb{P}^3$ dada pelas equações da forma

$$e_i \Gamma_j = e_j \Gamma_i. \quad (4.14)$$

Temos que U''' é coberto por 4 abertos afins. No aberto U'''_1 definido por $e_1 = 1$, as equações (4.14) são da forma $\Gamma_j = e_1 \Gamma_i$, e d_2 a equação do divisor excepcional, onde encontramos

$$\begin{cases} d_3 = e_2 d_2 \\ c_3 = \frac{2}{3} d_4 + e_3 d_2 \\ b_3 = e_4 d_2 - \frac{1}{3} d_4 b_1. \end{cases} (4.12)$$

Substituímos as equações (4.12) em M_3 , encontramos uma representação local

para M_3'''

$$M_3''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1 + d_4 b_1 & s'_1 & s'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2}m_2 + m_3 b_1 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & m_1 & 0 & s'_1 & s'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}m_2 + m_3 b_1 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}m_2 + m_3 b_1 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_2 & 2m_3 + d_2 b_1 & -d_4 + m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & t_1 & t_2 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{cases} t_1 = 2d_2 b_1 + 2e_2 d_2 \\ t_2 = -b_1^2 d_2 + e_2 d_2 b_1 + 3/2 e_3 d_2 \\ t_3 = b_1 e_3 d_2 + e_4 d_2 \\ m_1 = e_4 d_2 - \frac{1}{3} d_4 b_1 \\ m_2 = \frac{2}{3} d_4 + e_3 d_2 \\ m_3 = e_2 d_2 \\ s'_1 = d_2 b_1 m_3 + \frac{1}{2} d_2 b_1^2 m_4 - d_2 m_5 b_1^3 - m_5^2 b_1^2 + m_4 m_5 b_1 - \frac{1}{4} m_4^2 \\ s'_2 = \frac{1}{2} m_3 m_4 + m_5 b_1 m_3 - \frac{1}{2} m_4 d_4 b_1 + d_4 m_5 b_1^2 + \frac{1}{2} b_1 m_4^2 - m_5 m_4 b_1^2 \end{cases}$$

e M_3''' é a imagem recíproca de M_3 a X''' . Portanto ao dividirmos a última linha por Γ_1 , a nova matriz M_3''' pode ser escrita como

$$M_3''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1 + d_4 b_1 & s'_1 & s'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -\frac{1}{2}m_2 + m_3 b_1 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & m_1 & 0 & s'_1 & s'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}m_2 + m_3 b_1 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & -\frac{1}{2}m_2 + m_3 b_1 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_2 & 2m_3 + d_2 b_1 & -d_4 + m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t'_1 & t'_2 & t'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

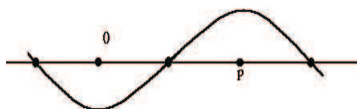
com

$$\left\{ \begin{array}{l} t'_1 = 2b_1 + 2e_2 \\ t'_2 = -b_1^2 + e_2b_1 + 3/2e_3 \\ t'_3 = b_1e_3 + e_4 \\ m_1 = e_4d_2 - \frac{1}{3}d_4b_1 \\ m_2 = \frac{2}{3}d_4 + e_3d_2 \\ m_3 = e_2d_2 \\ s'_1 = d_2b_1m_3 + \frac{1}{2}d_2b_1^2m_4 - d_2m_5b_1^3 - m_5^2b_1^2 + m_4m_5b_1 - \frac{1}{4}m_4^2 \\ s'_2 = \frac{1}{2}m_3m_4 + m_5b_1m_3 - \frac{1}{2}m_4d_4b_1 + d_4m_5b_1^2 + \frac{1}{2}b_1m_4^2 - m_5m_4b_1^2 \end{array} \right.$$

Portanto temos que $\eta : X''' \rightarrow G(7, \mathcal{F}_3)$ é um morfismo .

□

Observação 4.25. Verifica-se que $E''' = \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^{(\ell+P)}}{\ell.\mathcal{F}_2^P} \right)$, e geometricamente podemos representar um de seus pontos por



Apêndice A

Cálculos no software Maple versão 8.00(IBM INTEL NT)

```
> restart;  
> read("c:/Luanda/jprosjr6.txt");
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Lista de variáveis.

```
> xx:=[x0,x1,x2];
```

Cálculo da base para o espaço vetorial das formas homogêneas de grau 2 nas variáveis.

```
> evalm([[x0],[x1],[x2]]&*[xx]);
```

$$\begin{bmatrix} x0^2 & x0 x1 & x0 x2 \\ x0 x1 & x1^2 & x1 x2 \\ x0 x2 & x1 x2 & x2^2 \end{bmatrix}$$

```
> convert(%,set);
```

$$\{x0^2, x0 x1, x0 x2, x1^2, x1 x2, x2^2\}$$

Procedimento que fixa a ordem lexicográfica .

```
> fixorder(liste(%),xx);
```

$$[x0^2, x0 x1, x0 x2, x1^2, x1 x2, x2^2]$$

> s2f0:=%;

$$s2f0 := [x0^2, x0 x1, x0 x2, x1^2, x1 x2, x2^2]$$

> nops(%);

6

Cônicas que contem o ponto fixo.

> q1:=s2f0[1]+sum('a[i]*s2f0[i+2]', 'i'=1..3);

$$q1 := x0^2 + a_1 x0 x2 + a_2 x1^2 + a_3 x1 x2$$

> q2:=s2f0[2]+sum('b[i]*s2f0[i+2]', 'i'=1..3);

$$q2 := x0 x1 + b_1 x0 x2 + b_2 x1^2 + b_3 x1 x2$$

Procedimento que coleta os coeficientes dos monômios.

> seq(coefmon(q1,s2f0[i]), i=1..nops(s2f0));

$$1, 0, a_1, a_2, a_3, 0$$

> seq(coefmon(q2,s2f0[i]), i=1..nops(s2f0));

$$0, 1, b_1, b_2, b_3, 0$$

Cálculo da terceira quádrlica(liberação do ponto fixo).

> r1:=rem(q1,x0,x0,'q11');

$$r1 := a_2 x1^2 + a_3 x1 x2$$

> r2:=rem(r1,x1,x1,'q12');

$$r2 := 0$$

> r3:=rem(q2,x0,x0,'q21');

$$r3 := b_2 x1^2 + b_3 x1 x2$$

> r4:=rem(r3,x1,x1,'q22');

$$r4 := 0$$

> Md:=matrix(2,2,[q11,q12,q21,q22]);

$$Md := \begin{bmatrix} x0 + a_1 x2 & a_2 x1 + a_3 x2 \\ x1 + b_1 x2 & b_2 x1 + b_3 x2 \end{bmatrix}$$

> q3:=det(%);

$$q3 := x0 b_2 x1 + x0 b_3 x2 + a_1 x2 b_2 x1 + a_1 x2^2 b_3 - a_2 x1^2 - a_2 x1 b_1 x2 - a_3 x1 x2 - a_3 x2^2 b_1$$

Cálculo da matriz que nos da a imagem de ν .

> eqx:=[q1,q2,q3]:

> vars0:=[seq(a[i],i=1..3),seq(b[i],i=1..3)];nops(%);

$$vars0 := [a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3]$$

6

> [seq([seq(coefmon(eqx[j],s2f0[i]),i=1..nops(s2f0))],j=1..3)];

$$[[1, 0, a_1, a_2, a_3, 0], [0, 1, b_1, b_2, b_3, 0], [0, b_2, b_3, -a_2, a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3, a_1 b_3 - a_3 b_1]]$$

> M:=matrix(%);

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & -a_2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \end{bmatrix}$$

Procedimento que faz a eliminação gaussiana.

> gausselim(M, 'r', 'd');

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 b_1 & -a_2 - b_2^2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 - b_2 b_3 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \end{bmatrix}$$

> M2:=(%);

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 b_1 & -a_2 - b_2^2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 - b_2 b_3 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \end{bmatrix}$$

Procedimento que calcula o número de linhas da matriz, a localização dos pivos, e também a eliminação gaussiana.

```
> M3:=rows_no_pivo(M);
```

```
‘FINDING ROWS NO PIVO IN‘, M
```

```
{1, 2, 3}
```

$$M3 := \left[\{3\}, \{[2, 2], [1, 1]\}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 b_1 & -a_2 - b_2^2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 - b_2 b_3 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \end{bmatrix} \right]$$

```
> rows_no_pivo_mu:=M3[1];
```

```
rows_no_pivo_mu := {3}
```

```
> pivos_mu:=M3[2];
```

```
pivos_mu := {[2, 2], [1, 1]}
```

```
> print(nops(%));
```

```
2
```

```
> M3:=M3[3];
```

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 b_1 & -a_2 - b_2^2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 - b_2 b_3 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \end{bmatrix}$$

Procedimento que determina as equações locais do primeiro centro de explosão.

```
> i:=eqs(M3,rows_no_pivo_mu,vars0);
```

```
3*(‘found ‘.’ equations‘)
```

```
i := [{3}, [[3, 3], [3, 4], [3, 5]], [b3 - b2 b1, -a2 - b2^2, a1 b2 - a2 b1 - a3 - b2 b3],  
[b3, a2, a3]]
```

```
> Y:=i[3];
```

```
Y := [b3 - b2 b1, -a2 - b2^2, a1 b2 - a2 b1 - a3 - b2 b3]
```

```
> Y_1:=i[4];
```

```

Y_1 := [b3, a2, a3]
> posY := [seq(i [2] [j] [2], j=1..nops(i [2]))];
      posY := [3, 4, 5]
> Y := sol(Y, Y_1);
      Y := [b3 = b2 b1, a2 = -b2^2, a3 = a1 b2]

```

Definição da nova cônica.

```

> eqx[3] := sum('M3[3, j]*s2f0[j]', 'j'=1..nops(s2f0));

eqx3 := (b3 - b2 b1) x0 x2 + (-a2 - b2^2) x1^2 + (a1 b2 - a2 b1 - a3 - b2 b3) x1 x2
      + (a1 b3 - a3 b1) x2^2

```

Substituição do centro de explosão nas cônicas.

```

> fsubs(Y, eqx[1..3]):see(%);

1, (x0+b[2]*x1)*(-b[2]*x1+a[1]*x2+x0)

2, (x1+b[1]*x2)*(x0+b[2]*x1)

3, 0

```

Componente fixa (reta).

```

> h2 := mdc(%);

      h2 := x0 + b2 x1

```

Determinação do ponto marcado pelo feixe de retas.

```

> ponto := sol(liste(fsubs(Y, eqx[1..2])/h2));

      ponto := [x0 = -b2 b1 x2 - a1 x2, x1 = -b1 x2]

```

Ideal da subvariedade Y de X.

```

> eqsmu := id(Y);

      eqsmu := [b3 - b2 b1, a2 + b2^2, a3 - a1 b2]

```

Determinação das equações locais do primeiro centro de explosão.

```
> i:=relexcn(eqsmu,Y_1,c,1);
```

$$i := [[a_2 = -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_3 = a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1], \\ [b_3 - b_2 b_1, a_2 + b_2^2, a_3 - a_1 b_2], [b_3, a_2, a_3]]$$

Relações da primeira explosão.

```
> rel1:=collect(i[1],[seq(c[p],p=1..nops(eqsmu))]);
```

$$rel1 := [a_2 = c_1 (b_3 - b_2 b_1) - b_2^2, a_3 = c_2 (b_3 - b_2 b_1) + a_1 b_2]$$

```
> eqsmu:=i[2];
```

$$eqsmu := [b_3 - b_2 b_1, a_2 + b_2^2, a_3 - a_1 b_2]$$

```
> eqsmu_1:=i[3];
```

$$eqsmu_1 := [b_3, a_2, a_3]$$

```
> vars1:=op(omit(vars0,[seq(lhs(rel1[i]),i=1..nops(rel1))])),seq(c[i],
```

```
> i=1..nops(rel1))];
```

$$vars1 := [a_1, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2]$$

Equação local do centro de explosão.

```
> exc1:=eqsmu_1[1]=solve(eqsmu[1],eqsmu_1[1]);
```

$$exc1 := b_3 = b_2 b_1$$

```
> eqx1:=ssubs(rel1,eqx):see(%);
```

1,

$$x_0^2 + a_1 x_0 x_2 - b_2^2 x_1^2 + x_1^2 c_1 b_3 - x_1^2 c_1 b_2 b_1 + a_1 x_2 b_2 x_1 + x_1 x_2 c_2 b_3 - x_1 x_2 c_2 b_2 b_1$$

2, $x_0 x_1 + b_1 x_0 x_2 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1 x_2$

3,

$$x_0 b_3 x_2 - x_0 x_2 b_2 b_1 - x_1^2 c_1 b_3 + x_1^2 c_1 b_2 b_1 + x_1 x_2 b_2^2 b_1 - x_1 x_2 b_1 c_1 b_3 + x_1 x_2 c_1 b_2 b_1^2 - x_1 x_2 c_2 b_3 + x_1 x_2 c_2 b_2 b_1 - x_1 x_2 b_2 b_3 + a_1 x_2^2 b_3 - x_2^2 a_1 b_2 b_1 - x_2^2 b_1 c_2 b_3 + x_2^2 c_2 b_2 b_1^2$$

```
> eqx1[3]:=si(factor(eqx1[3])/eqsmu[1]): print(denom(%));
```

1

Coefficientes da nova cônica.

```
> si(evalm(ssubs(rel1,row(M3,3))/id(exc1)));
```

$[0, 0, 1, -c_1, -b_1 c_1 - c_2 - b_2, -b_1 c_2 + a_1]$

```
> origin(vars1,eqx1);
```

$[x0^2, x0 x1, x0 x2]$

Imagem do morfismo de $X' \rightarrow G(3, \mathcal{F}_3)$.

```
> eqx1exc1:=fsubs(exc1,eqx1):see(%);
```

1, $(x0+b[2]*x1)*(-b[2]*x1+a[1]*x2+x0)$

2, $(x1+b[1]*x2)*(x0+b[2]*x1)$

3,

$-b[1]*x1*x2*c[1]-b[1]*x2^2*c[2]-x1*x2*b[2]+x2^2*a[1]+x0*x2-c[1]*x1^2-x1*x2*c[2]$

Cálculo do polinômio de Hilbert da imagem do morfismo anterior.

```
> hilbertpoly([op(eqx1exc1)],tdeg(x0,x1,x2),t);
```

3

Cálculo da base para o espaço vetorial das formas homogêneas de grau 3 nas variáveis.

```
> s3f0:=mon(3,xx);
```

$s3f0 := [x0^3, x0^2 x1, x2 x0^2, x1^2 x0, x2 x0 x1, x2^2 x0, x1^3, x2 x1^2, x1 x2^2, x2^3]$

Mapa de multiplicação:

> k1:=expand([seq(((x0)*eqx1[j]),j=1..2)]);

$$k1 := [x0^3 + a_1 x0^2 x2 - x0 b_2^2 x1^2 + x0 x1^2 c_1 b_3 - x0 x1^2 c_1 b_2 b_1 + x0 a_1 x2 b_2 x1 + x0 x1 x2 c_2 b_3 - x0 x1 x2 c_2 b_2 b_1, x0^2 x1 + b_1 x2 x0^2 + b_2 x1^2 x0 + x0 b_3 x1 x2]$$

> k2:=expand([seq(((x1)*eqx1[j]),j=1..2)]);

$$k2 := [x0^2 x1 + x2 x0 x1 a_1 - b_2^2 x1^3 + x1^3 c_1 b_3 - x1^3 c_1 b_2 b_1 + a_1 b_2 x2 x1^2 + x1^2 x2 c_2 b_3 - x1^2 x2 c_2 b_2 b_1, x1^2 x0 + x1 b_1 x0 x2 + b_2 x1^3 + b_3 x1^2 x2]$$

> k3:=expand([seq(((x2)*eqx1[j]),j=1..2)]);

$$k3 := [x2 x0^2 + x2^2 x0 a_1 - b_2^2 x1^2 x2 + x2 x1^2 c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1 x2 x1^2 + b_2 x1 x2^2 a_1 + x1 x2^2 c_2 b_3 - b_2 x1 b_1 x2^2 c_2, x2 x0 x1 + b_1 x0 x2^2 + x2 b_2 x1^2 + b_3 x1 x2^2]$$

Coleta dos coeficientes das cúbicas do mapa de multiplicação.

> L1:=seq(coefmon(k1[1],s3f0[j]),j=1..9);

$$L1 := 1, 0, a_1, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0, 0, 0$$

> L2:=seq(coefmon(k1[2],s3f0[j]),j=1..9);

$$L2 := 0, 1, b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0, 0$$

> L3:=seq(coefmon(k2[1],s3f0[j]),j=1..9);

$$L3 := 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0$$

> L4:=seq(coefmon(k2[2],s3f0[j]),j=1..9);

$$L4 := 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3, 0$$

> L5:=seq(coefmon(k3[1],s3f0[j]),j=1..9);

$$L5 := 0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1$$

> L6:=seq(coefmon(k3[2],s3f0[j]),j=1..9);

$$L6 := 0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3$$

Cálculo da matriz que nos da a imagem de μ restrito a X' .

> Ma:=matrix([L1],[L2],[L3],[L4],[L5],[L6]));

$$Ma := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & \%2 & \%1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \%2 & \%1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \%2 & \%1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\%1 := a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1$$

$$\%2 := -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1$$

> `Ma:=gausselim(Ma, 'r', 'd');`

`Ma :=`

$$[1, 0, a_1, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1]$$

$$[0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, b_1 b_3 - b_2 b_1^2, c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1,$$

$$c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1 - 2 b_2^2 b_1 + b_1 c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1^2 + 2 b_2 b_3,$$

$$b_1 a_1 b_2 + b_1 c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1^2 - a_1 b_3 + b_3^2 - b_3 b_2 b_1]$$

ρ , a matriz linha múltipla da equação local do divisor excepcional σ_1 .

> `v2:=row(Ma,6);`

$$v2 := [0, 0, 0, 0, 0, b_1 b_3 - b_2 b_1^2, c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1,$$

$$c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1 - 2 b_2^2 b_1 + b_1 c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1^2 + 2 b_2 b_3,$$

$$b_1 a_1 b_2 + b_1 c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1^2 - a_1 b_3 + b_3^2 - b_3 b_2 b_1]$$

> `A2:=convert(v2,set);`

$$A2 := \{0, c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, b_1 b_3 - b_2 b_1^2,$$

$$b_1 a_1 b_2 + b_1 c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1^2 - a_1 b_3 + b_3^2 - b_3 b_2 b_1,$$

$$c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1 - 2 b_2^2 b_1 + b_1 c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1^2 + 2 b_2 b_3\}$$

> fator:=mdc(A2);

$$fator := -b_3 + b_2 b_1$$

> v21:=simplify(evalm(v2/fator));

$$v21 := [0, 0, 0, 0, 0, -b_1, -c_1, -c_1 b_1 - 2 b_2 - c_2, -b_1 c_2 + a_1 - b_3]$$

> v22:=seq((v21[j]),j=1..9);

$$v22 := 0, 0, 0, 0, 0, -b_1, -c_1, -c_1 b_1 - 2 b_2 - c_2, -b_1 c_2 + a_1 - b_3$$

> Ma:=matrix([[L1],[L2],[L6],[L4],[L5],[v22]]);

$$Ma := \begin{bmatrix} 1, 0, a_1, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3 \\ 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3, 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1 \\ 0, 0, 0, 0, 0, -b_1, -c_1, -c_1 b_1 - 2 b_2 - c_2, -b_1 c_2 + a_1 - b_3 \end{bmatrix}$$

> gausselim(Ma);

$$\begin{bmatrix} 1, 0, a_1, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1 \\ 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3 \\ 0, 0, 0, 0, 0, -b_1, -c_1, -c_1 b_1 - 2 b_2 - c_2, -b_1 c_2 + a_1 - b_3 \end{bmatrix}$$

> M2:=rows_no_pivo(Ma);

‘FINDING ROWS NO PIVO IN’, Ma

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$M2 := \left[\begin{array}{c} \{6\}, \{[2, 2], [1, 1], [3, 5], [5, 3], [4, 4]\}, \\ \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1, 0, a_1, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3 \\ 0, 0, 0, 1, 0, -b_1^2, b_2, b_3 - b_2 b_1, -b_1 b_3 \\ 0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1 \\ 0, 0, 0, 0, 0, -b_1, -c_1, -c_1 b_1 - 2 b_2 - c_2, -b_1 c_2 + a_1 - b_3 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

```

> rows_no_pivo_mu1:=M2[1];
      rows_no_pivo_mu1 := {6}

> pivos_mu1:=M2[2];
      pivos_mu1 := {[2, 2], [1, 1], [3, 5], [5, 3], [4, 4]}

> print(nops(%));
      5

> M2:=M2[3];
M2 := \left[ \begin{array}{cccccccc} 1, 0, a_1, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3 \\ 0, 0, 0, 1, 0, -b_1^2, b_2, b_3 - b_2 b_1, -b_1 b_3 \\ 0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1 \\ 0, 0, 0, 0, 0, -b_1, -c_1, -c_1 b_1 - 2 b_2 - c_2, -b_1 c_2 + a_1 - b_3 \end{array} \right]

```

Procedimento que determina as equações locais do segundo centro de explosão.

```

> i2:=eqs(M2,rows_no_pivo_mu1,vars1);

4*(‘found ‘.‘ equations‘)

```

```

i2 := [{6}, [[6, 6], [6, 7], [6, 8], [6, 9]], [-b1, -c1, -c1 b1 - 2 b2 - c2, -b1 c2 + a1 - b3],
[b1, c1, b2, a1]]
> Y2:=i2[3];
      Y2 := [-b1, -c1, -c1 b1 - 2 b2 - c2, -b1 c2 + a1 - b3]
> Y2_1:=i2[4];
      Y2_1 := [b1, c1, b2, a1]
> posY2:=[seq(i2[2][j][2],j=1..nops(i2[2]))];
      posY2 := [6, 7, 8, 9]
> Y2:=sol(Y2,Y2_1);
      Y2 := [b1 = 0, c1 = 0, b2 = -1/2 c2, a1 = b3]

```

Substituição das equações locais de Y' nas cônicas.

```

> eqxY_2:=fsubs(Y2,eqx1):see(%);
1, 1/4*(2*x0+x1*c[2])*(2*x0+2*b[3]*x2-x1*c[2])
2, 1/2*x1*(2*x0+2*b[3]*x2-x1*c[2])
3, 1/2*x2*(2*x0+2*b[3]*x2-x1*c[2])

```

Componente fixa(reta).

```

> h3:=mdc(%);
      h3 := x0 + b3 x2 - 1/2 x1 c2

```

Ideal da subvariedade Y' de X'.

```

> eqsmu2:=id(Y2);
      eqsmu2 := [b1, c1, b2 + 1/2 c2, a1 - b3]

```

Determinação das equações locais do segundo centro de explosão.

> $i := \text{relexcn}(\text{eqsmu2}, Y2_1, e, 1);$

$$i := [[c_1 = e_1 b_1, b_2 = -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, a_1 = b_3 + e_3 b_1], [b_1, c_1, b_2 + \frac{1}{2} c_2, a_1 - b_3], [b_1, c_1, b_2, a_1]]$$

Relações da segunda explosão.

> $\text{rel2} := \text{collect}(i[1], [\text{seq}(e[p], p=1..nops(\text{eqsmu2}))]);$

$$\text{rel2} := [c_1 = e_1 b_1, b_2 = -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, a_1 = b_3 + e_3 b_1]$$

Imagem recíproca do ponto P determinado na primeira explosão.

> $\text{ponto2} := \text{ssubs}(\text{rel2}, \text{ponto});$

$$\text{ponto2} := [x0 = \frac{1}{2} b_1 x2 c_2 - b_1^2 x2 e_2 - b_3 x2 - x2 e_3 b_1, x1 = -b_1 x2]$$

> $\text{eqsmu2} := i[2];$

$$\text{eqsmu2} := [b_1, c_1, b_2 + \frac{1}{2} c_2, a_1 - b_3]$$

> $\text{eqsmu2_1} := i[3];$

$$\text{eqsmu2_1} := [b_1, c_1, b_2, a_1]$$

> $\text{vars2} := [\text{op}(\text{omit}(\text{vars1}, [\text{seq}(\text{lhs}(\text{rel2}[j]), j=1..nops(\text{rel2}))])), \text{seq}(e[n],$

> $n=1..nops(\text{rel2}))];$

$$\text{vars2} := [b_1, b_3, c_2, e_1, e_2, e_3]$$

Equação local do divisor excepcional.

> $\text{exc2} := \text{eqsmu2_1}[1] = \text{solve}(\text{eqsmu2}[1], \text{eqsmu2_1}[1]);$

$$\text{exc2} := b_1 = 0$$

> $\text{eqx2} := \text{ssubs}(\text{rel2}, \text{eqx1});$

> $\text{print}(\text{origin}(\text{vars2}, \text{eqx2}));$

$$\begin{aligned} \text{eqx2} := & [x0^2 + x0 b_3 x2 + x0 x2 e_3 b_1 - \frac{1}{4} x1^2 c_2^2 + x1^2 c_2 e_2 b_1 - x1^2 e_2^2 b_1^2 + x1^2 e_1 b_1 b_3 \\ & + \frac{1}{2} x1^2 e_1 b_1^2 c_2 - x1^2 e_1 b_1^3 e_2 + \frac{1}{2} x1 x2 c_2 b_3 + x1 x2 b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2} x1 x2 e_3 b_1 c_2 \\ & + x1 x2 e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2} x1 x2 c_2^2 b_1 - x1 x2 c_2 b_1^2 e_2, \\ & x0 x1 + b_1 x0 x2 - \frac{1}{2} c_2 x1^2 + x1^2 e_2 b_1 + b_3 x1 x2, x0 x2 - e_1 b_1 x1^2 - \frac{1}{2} c_2 x2 x1 \\ & - x1 x2 e_2 b_1 - x1 x2 b_1^2 e_1 + b_3 x2^2 + x2^2 e_3 b_1 - x2^2 b_1 c_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eqx2 := & [x0^2 + x0 b_3 x2 + x0 x2 e_3 b_1 - \frac{1}{4} c_2^2 x1^2 + x1^2 c_2 e_2 b_1 - x1^2 e_2^2 b_1^2 + x1^2 e_1 b_1 b_3 \\
& + \frac{1}{2} x1^2 e_1 b_1^2 c_2 - x1^2 e_1 b_1^3 e_2 + \frac{1}{2} x1 x2 c_2 b_3 + x1 x2 b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2} x1 x2 e_3 b_1 c_2 \\
& + x1 x2 e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2} x1 x2 c_2^2 b_1 - x1 x2 c_2 b_1^2 e_2, \\
x0 x1 + b_1 x0 x2 - & \frac{1}{2} c_2 x1^2 + x1^2 e_2 b_1 + b_3 x1 x2, -b_1^2 x1 x2 e_1 - b_1 x2^2 c_2 \\
- \frac{1}{2} x1 x2 c_2 - & x1 x2 e_2 b_1 + b_3 x2^2 + x2^2 e_3 b_1 + x0 x2 - e_1 b_1 x1^2] \\
& [x0^2, x0 x1, x0 x2]
\end{aligned}$$

Coeficientes da nova cúbica.

```

> mu_1:=si(evalm(ssubs(rel2,row(M2,6))/id(exc2)));
      mu_1 := [0, 0, 0, 0, 0, -1, -e_1, -e_1 b_1 - 2 e_2, -c_2 + e_3]
> mu:=si(liste(mu_1));print(denom(%));
      mu := [0, 0, 0, 0, 0, -1, -e_1, -e_1 b_1 - 2 e_2, -c_2 + e_3]
           [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
> M2:=subs(rel2,eval(M2)):

```

Adição da nova cúbica.

```

> eqx2:=[op(eqx2),x2^2*x0
> +e[1]*x1^3+(e[1]*b[1]+2*e[2])*x2*x1^2+(c[2]-e[3])*x1*x2^2];

```

$$\begin{aligned}
eqx2 := & [x0^2 + x0 b_3 x2 + x0 x2 e_3 b_1 - \frac{1}{4} c_2^2 x1^2 + x1^2 c_2 e_2 b_1 - x1^2 e_2^2 b_1^2 + x1^2 e_1 b_1 b_3 \\
& + \frac{1}{2} x1^2 e_1 b_1^2 c_2 - x1^2 e_1 b_1^3 e_2 + \frac{1}{2} x1 x2 c_2 b_3 + x1 x2 b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2} x1 x2 e_3 b_1 c_2 \\
& + x1 x2 e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2} x1 x2 c_2^2 b_1 - x1 x2 c_2 b_1^2 e_2, \\
x0 x1 + b_1 x0 x2 - & \frac{1}{2} c_2 x1^2 + x1^2 e_2 b_1 + b_3 x1 x2, -b_1^2 x1 x2 e_1 - b_1 x2^2 c_2 \\
- \frac{1}{2} x1 x2 c_2 - & x1 x2 e_2 b_1 + b_3 x2^2 + x2^2 e_3 b_1 + x0 x2 - e_1 b_1 x1^2, \\
x2^2 x0 + e_1 x1^3 + & (e_1 b_1 + 2 e_2) x2 x1^2 + (c_2 - e_3) x1 x2^2] \\
> eqx2exc2:=fsubs(exc2,eqx2):see(%);$$

- 1, $1/4*(2*x0+x1*c[2])*(2*x0+2*b[3]*x2-x1*c[2])$
- 2, $1/2*x1*(2*x0+2*b[3]*x2-x1*c[2])$
- 3, $1/2*x2*(2*x0+2*b[3]*x2-x1*c[2])$
- 4, $x2^2*x0+e[1]*x1^3+2*e[2]*x2*x1^2+x1*x2^2*c[2]-x1*x2^2*e[3]$

Cálculo do polinômio de Hilbert das cônicas e da nova cúbica.

- > hilbertpoly(eqx2,tdeg(op(xx)),t);
3
- > hilbertpoly(eqx2exc2,tdeg(op(xx)),t);
3

Início da Terceira explosão(Segundo mapa de multiplicação):

- > L1:=seq(coefmon(k1[1],s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
 $L1 := 1, 0, a_1, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0, 0, 0, 0$
- > L2:=seq(coefmon(k1[2],s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
 $L2 := 0, 1, b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0, 0, 0$
- > L3:=seq(coefmon(k2[1],s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
 $L3 := 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0, 0$
- > L4:=seq(coefmon(k2[2],s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
 $L4 := 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3, 0, 0$
- > L5:=seq(coefmon(k3[1],s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
 $L5 := 0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, -b_2^2 + c_1 b_3 - c_1 b_2 b_1, a_1 b_2 + c_2 b_3 - c_2 b_2 b_1, 0$
- > L6:=seq(coefmon(k3[2],s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
 $L6 := 0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, b_2, b_3, 0$
- > k4:=expand((x0)*eqx1[3]);

```

k4 := -x0 b1 x1 x2 c1 - x0 b1 x2^2 c2 - x0 x1 x2 b2 + x2^2 x0 a1 + x2 x0^2 - x0 c1 x1^2
- x0 x1 x2 c2
> k5:=expand((x1)*eqx1[3]);

```

```

k5 := -b1 x1^2 x2 c1 - x1 b1 x2^2 c2 - x2 b2 x1^2 + x1 x2^2 a1 + x2 x0 x1 - c1 x1^3 - x1^2 x2 c2
> k6:=expand((x2)*eqx1[3]);

```

```

k6 := -b1 x1 x2^2 c1 - b1 x2^3 c2 - x1 x2^2 b2 + x2^3 a1 + x2^2 x0 - x2 c1 x1^2 - x1 x2^2 c2

```

Coleta dos coeficientes das cúbicas do segundo mapa de multiplicação.

```

> L7:=seq(coefmon(k4,s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
      L7 := 0, 0, 1, -c1, -c1 b1 - b2 - c2, a1 - b1 c2, 0, 0, 0, 0
> L8:=seq(coefmon(k5,s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
      L8 := 0, 0, 0, 0, 1, 0, -c1, -c1 b1 - b2 - c2, a1 - b1 c2, 0
> L9:=seq(coefmon(k6,s3f0[j]),j=1..nops(s3f0));
      L9 := 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -c1, -c1 b1 - b2 - c2, a1 - b1 c2

```

Cálculo da matriz que nos da a imagem de η restrito a X .

```

> Mb:=matrix([L1], [L2], [L3], [L4], [L5], [L6], [L7], [L8], [L9]);
> Mbb:=subs(rel2,eval(Mb));

```

$$Mbb := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \%4 & \%6 & \%5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & \%3 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \%4 & 0 & \%6 & \%5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & \%3 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \%4 & 0 & \%6 & \%5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & 0 & \%3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -e_1 b_1 & \%2 & \%1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_1 b_1 & \%2 & \%1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_1 b_1 & \%2 & \%1 \end{bmatrix}$$

$$\%1 := b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2$$

$$\%2 := -e_1 b_1^2 - \frac{1}{2} c_2 - e_2 b_1$$

$$\%3 := -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1$$

$$\%4 := b_3 + e_3 b_1$$

$$\%5 := \%4 \%3 + c_2 b_3 - c_2 \%3 b_1$$

$$\%6 := -\%3^2 + e_1 b_1 b_3 - e_1 b_1^2 \%3$$

> `Mc:=gausselim(Mbb);`

$$\begin{aligned}
Mc := & \\
& \left[1, 0, b_3 + e_3 b_1, -\frac{1}{4} c_2^2 + c_2 e_2 b_1 - e_2^2 b_1^2 + e_1 b_1 b_3 + \frac{1}{2} e_1 b_1^2 c_2 - e_1 b_1^3 e_2, \right. \\
& \left. \frac{1}{2} c_2 b_3 + b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2} e_3 b_1 c_2 + e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2} b_1 c_2^2 - b_1^2 c_2 e_2, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \\
& \left[0, 1, b_1, -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, b_3, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 1, 0, 0, b_3 + e_3 b_1, 0, \right. \\
& \left. -\frac{1}{4} c_2^2 + c_2 e_2 b_1 - e_2^2 b_1^2 + e_1 b_1 b_3 + \frac{1}{2} e_1 b_1^2 c_2 - e_1 b_1^3 e_2, \right. \\
& \left. \frac{1}{2} c_2 b_3 + b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2} e_3 b_1 c_2 + e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2} b_1 c_2^2 - b_1^2 c_2 e_2, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 1, b_1, 0, -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, b_3, 0, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, b_3, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -e_1 b_1, -e_1 b_1^2 - \frac{1}{2} c_2 - e_2 b_1, b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -e_1 b_1, -2 e_1 b_1^2 - 2 e_2 b_1, -\frac{3}{2} b_1 c_2 + e_3 b_1 - e_1 b_1^3 - e_2 b_1^2, \right. \\
& \left. -b_1 (-b_3 - e_3 b_1 + b_1 c_2) \right] \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
\end{aligned}$$

Matriz linha ω múltipla do divisor excepcional β_1 .

> `l6:=row(Mc,7);`

$$\begin{aligned}
l6 := & \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -e_1 b_1, -2 e_1 b_1^2 - 2 e_2 b_1, -\frac{3}{2} b_1 c_2 + e_3 b_1 - e_1 b_1^3 - e_2 b_1^2, \right. \\
& \left. -b_1 (-b_3 - e_3 b_1 + b_1 c_2) \right]
\end{aligned}$$

> `l6s:=convert(l6,set);`

$$\begin{aligned}
l6s := & \{0, -2 e_1 b_1^2 - 2 e_2 b_1, -\frac{3}{2} b_1 c_2 + e_3 b_1 - e_1 b_1^3 - e_2 b_1^2, -b_1 (-b_3 - e_3 b_1 + b_1 c_2), \\
& -e_1 b_1\}
\end{aligned}$$

> fat1:=mdc(l6s);

$$fat1 := b_1$$

> l6b:=simplify(evalm(l6/fat1));

$$l6b := \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -e_1, -2e_1 b_1 - 2e_2, -\frac{3}{2}c_2 + e_3 - e_1 b_1^2 - e_2 b_1, b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2 \right]$$

> v1:=seq((l6b[j]),j=1..10);

$$v1 := 0, 0, 0, 0, 0, 0, -e_1, -2e_1 b_1 - 2e_2, -\frac{3}{2}c_2 + e_3 - e_1 b_1^2 - e_2 b_1, b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2$$

> M6:=stackmatrix(Mbb, [v1]):

> M6b:=gausselim(M6);

M6b :=

$$\left[1, 0, b_3 + e_3 b_1, -\frac{1}{4}c_2^2 + c_2 e_2 b_1 - e_2^2 b_1^2 + e_1 b_1 b_3 + \frac{1}{2}e_1 b_1^2 c_2 - e_1 b_1^3 e_2, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}c_2 b_3 + b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2}e_3 b_1 c_2 + e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2}b_1 c_2^2 - b_1^2 c_2 e_2, 0, 0, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, 1, b_1, -\frac{1}{2}c_2 + e_2 b_1, b_3, 0, 0, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, 1, 0, 0, b_3 + e_3 b_1, 0, \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}c_2^2 + c_2 e_2 b_1 - e_2^2 b_1^2 + e_1 b_1 b_3 + \frac{1}{2}e_1 b_1^2 c_2 - e_1 b_1^3 e_2, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}c_2 b_3 + b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2}e_3 b_1 c_2 + e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2}b_1 c_2^2 - b_1^2 c_2 e_2, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, 0, 1, b_1, 0, -\frac{1}{2}c_2 + e_2 b_1, b_3, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, -\frac{1}{2}c_2 + e_2 b_1, b_3, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -e_1 b_1, -e_1 b_1^2 - \frac{1}{2}c_2 - e_2 b_1, b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2 \right]$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -e_1, -2e_1 b_1 - 2e_2, -\frac{3}{2}c_2 + e_3 - e_1 b_1^2 - e_2 b_1, \right.$$

$$\left. b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2 \right]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

> M4:=rows_no_pivo(M6b);

‘FINDING ROWS NO PIVO IN’, M6b

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

```

M4 := [{7, 8, 9, 10}, {[5, 5], [3, 3], [2, 2], [1, 1], [6, 6], [4, 4]},
[1, 0, b3 + e3 b1, -1/4 c2^2 + c2 e2 b1 - e2^2 b1^2 + e1 b1 b3 + 1/2 e1 b1^2 c2 - e1 b1^3 e2,
1/2 c2 b3 + b3 e2 b1 - 1/2 e3 b1 c2 + e3 b1^2 e2 + 1/2 b1 c2^2 - b1^2 c2 e2, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 1, b1, -1/2 c2 + e2 b1, b3, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 1, 0, 0, b3 + e3 b1, 0,
-1/4 c2^2 + c2 e2 b1 - e2^2 b1^2 + e1 b1 b3 + 1/2 e1 b1^2 c2 - e1 b1^3 e2,
1/2 c2 b3 + b3 e2 b1 - 1/2 e3 b1 c2 + e3 b1^2 e2 + 1/2 b1 c2^2 - b1^2 c2 e2, 0],
[0, 0, 0, 1, b1, 0, -1/2 c2 + e2 b1, b3, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 1, b1, 0, -1/2 c2 + e2 b1, b3, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -e1 b1, -e1 b1^2 - 1/2 c2 - e2 b1, b3 + e3 b1 - b1 c2],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -e1, -2 e1 b1 - 2 e2, -3/2 c2 + e3 - e1 b1^2 - e2 b1,
b3 + e3 b1 - b1 c2],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]
> rows_no_pivo_mu2:=M4[1];
      rows_no_pivo_mu2 := {7, 8, 9, 10}
> pivos_mu1:=M4[2];
      pivos_mu1 := {[5, 5], [3, 3], [2, 2], [1, 1], [6, 6], [4, 4]}
> print(nops(%));

```

> M4:=M4[3];

$$\begin{aligned}
M4 := & \\
& \left[1, 0, b_3 + e_3 b_1, -\frac{1}{4} c_2^2 + c_2 e_2 b_1 - e_2^2 b_1^2 + e_1 b_1 b_3 + \frac{1}{2} e_1 b_1^2 c_2 - e_1 b_1^3 e_2, \right. \\
& \left. \frac{1}{2} c_2 b_3 + b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2} e_3 b_1 c_2 + e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2} b_1 c_2^2 - b_1^2 c_2 e_2, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \\
& \left[0, 1, b_1, -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, b_3, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 1, 0, 0, b_3 + e_3 b_1, 0, \right. \\
& \left. -\frac{1}{4} c_2^2 + c_2 e_2 b_1 - e_2^2 b_1^2 + e_1 b_1 b_3 + \frac{1}{2} e_1 b_1^2 c_2 - e_1 b_1^3 e_2, \right. \\
& \left. \frac{1}{2} c_2 b_3 + b_3 e_2 b_1 - \frac{1}{2} e_3 b_1 c_2 + e_3 b_1^2 e_2 + \frac{1}{2} b_1 c_2^2 - b_1^2 c_2 e_2, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 1, b_1, 0, -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, b_3, 0, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, -\frac{1}{2} c_2 + e_2 b_1, b_3, 0 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -e_1 b_1, -e_1 b_1^2 - \frac{1}{2} c_2 - e_2 b_1, b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2 \right] \\
& \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -e_1, -2 e_1 b_1 - 2 e_2, -\frac{3}{2} c_2 + e_3 - e_1 b_1^2 - e_2 b_1, \right. \\
& \left. b_3 + e_3 b_1 - b_1 c_2 \right] \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
\end{aligned}$$

Determinação das equações locais do terceiro centro de explosão Y”.

> p:=eqs(M4,[7],vars2):

> rows_mu_3:=p[1];pos_mu_3:=p[2];eqsmu_3:=p[3]:eqsmu_3_1:=p[4]:

4*(‘found ‘.‘ equations‘)

$$rows_mu_3 := \{7\}$$

$$pos_mu_3 := [[7, 7], [7, 8], [7, 9], [7, 10]]$$

> Y3_3:=sol(eqsmu_3,eqsmu_3_1);

$$Y3_3 := [e_1 = 0, e_2 = 0, c_2 = \frac{2}{3} e_3, b_3 = -\frac{1}{3} e_3 b_1]$$

Determinação da imagem recíproca do ponto P, determinado na primeira explosão.

> ponto3:=ssubs(Y3_3,ponto2);

$$ponto3 := [x0 = -\frac{1}{3} x2 e_3 b_1, x1 = -b_1 x2]$$

Confirmação de que o posto cai na subvariedade Y'' de X''.

> sset(subs(Y3_3,row(M4,7)));

{0}

> eqxY3_3:=numer(fsubs(Y3_3,eqx2)):see(%);

1, (3*x0-x1*e[3])*(3*x0+2*x2*e[3]*b[1]+x1*e[3])

2, (x1+b[1]*x2)*(3*x0-x1*e[3])

3, x2*(3*x0-x1*e[3])

4, x2^2*(3*x0-x1*e[3])

Componente fixa (reta que passa pelo ponto destacado)

> hY1_3:=mdc(%);eqxY1_30:=liste(%/%) ;

$$hY1_3 := 3 x0 - x1 e_3$$

$$eqxY1_30 := [3 x0 + 2 x2 e_3 b_1 + x1 e_3, x1 + b_1 x2, x2, x2^2]$$

O ponto determinado pelas retas residuais das duas primeiras cônicas P''.

> sol([3*x0+2*x2*e[3]*b[1]+x1*e[3], x1+b[1]*x2],xx);

$$[x0 = -\frac{1}{3} x2 e_3 b_1, x1 = -b_1 x2]$$

> ponto3;

$$[x0 = -\frac{1}{3} x2 e_3 b_1, x1 = -b_1 x2]$$

Determinação do ideal da subvariedade Y'' , das relações da terceira explosão e das variáveis envolvidas.

```

> p:=relexcn(id(Y3_3),eqsmu_3_1,f,1);
> rel3:=p[1];eqsmu:=p[2]:eqsmu_1:=p[3];
      rel3 := [e2 = f1 e1, c2 = 2/3 e3 + f2 e1, b3 = -1/3 e3 b1 + f3 e1]
      eqsmu_1 := [e1, e2, c2, b3]
> vars3:=[op(omit(vars2,[seq(lhs(rel3[i]),
> i=1..nops(rel3))])), seq(f[i],i=1..nops(rel3))];
> exc3:=eqsmu_1[1]=solve(eqsmu[1],eqsmu_1[1]);
      vars3 := [b1, e1, e3, f1, f2, f3]
      exc3 := e1 = 0

```

Equação local do divisor excepcional da terceira explosão.

```

> eqsmu[1];
      e1
> eqx3:=ssubs(rel3,eqx2);print(origin(vars3,eqx3));
eqx3 := [x0^2 + 1/3 x1 x2 e3 f3 e1 - 2/9 x1 x2 e3^2 b1 - x1^2 f1^2 e1^2 b1^2 + x0 x2 f3 e1 - 1/3 x1^2 e3 f2 e1
+ e1^2 b1 x1^2 f3 + 1/2 x1^2 e1^2 b1^2 f2 - 1/9 e3^2 x1^2 - 1/4 x1^2 f2^2 e1^2 - x1^2 e1^2 b1^3 f1
+ 1/2 x1 x2 f2 e1^2 f3 + x1 x2 f1 e1^2 b1 f3 + 1/2 x1 b1 x2 f2^2 e1^2 - x1 x2 b1^2 f1 e1^2 f2
+ x1^2 f1 e1^2 b1 f2 + 2/3 x1^2 f1 e1 b1 e3 + 2/3 x0 x2 e3 b1,
x0 x1 + b1 x0 x2 - 1/3 e3 x1^2 - 1/2 x1^2 f2 e1 + x1^2 f1 e1 b1 - 1/3 e3 b1 x1 x2 + x1 x2 f3 e1,
-b1^2 x1 x2 e1 - b1 x2^2 f2 e1 - 1/3 x1 x2 e3 - 1/2 x1 x2 f2 e1 - x1 x2 f1 e1 b1 + x2^2 f3 e1
+ x0 x2 - e1 b1 x1^2,
x2^2 x0 + e1 x1^3 + x2 x1^2 e1 b1 + 2 x2 x1^2 f1 e1 - 1/3 x1 x2^2 e3 + x1 x2^2 f2 e1]
      [x0^2, x0 x1, x0 x2, x2^2 x0]
> mu_3:=subs(rel3,eval(M4));rowdim(M4);

```

$$\begin{aligned}
mu_{-3} &:= \\
&\left[1, 0, \frac{2}{3} e_3 b_1 + f_3 e_1, \right. \\
&-\frac{1}{4} \%1^2 + \%1 f_1 e_1 b_1 - f_1^2 e_1^2 b_1^2 + e_1 b_1 \%3 + \frac{1}{2} e_1 b_1^2 \%1 - e_1^2 b_1^3 f_1, \\
&\frac{1}{2} \%1 \%3 + \%3 f_1 e_1 b_1 - \frac{1}{2} e_3 b_1 \%1 + e_3 b_1^2 f_1 e_1 + \frac{1}{2} b_1 \%1^2 - b_1^2 \%1 f_1 e_1, 0, 0, \\
&0, 0, 0 \left. \right] \\
&[0, 1, b_1, \%4, \%3, 0, 0, 0, 0, 0] \\
&\left[0, 0, 1, 0, 0, \frac{2}{3} e_3 b_1 + f_3 e_1, 0, \right. \\
&-\frac{1}{4} \%1^2 + \%1 f_1 e_1 b_1 - f_1^2 e_1^2 b_1^2 + e_1 b_1 \%3 + \frac{1}{2} e_1 b_1^2 \%1 - e_1^2 b_1^3 f_1, \\
&\frac{1}{2} \%1 \%3 + \%3 f_1 e_1 b_1 - \frac{1}{2} e_3 b_1 \%1 + e_3 b_1^2 f_1 e_1 + \frac{1}{2} b_1 \%1^2 - b_1^2 \%1 f_1 e_1, 0 \left. \right] \\
&[0, 0, 0, 1, b_1, 0, \%4, \%3, 0, 0] \\
&[0, 0, 0, 0, 1, b_1, 0, \%4, \%3, 0] \\
&\left[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -e_1 b_1, -e_1 b_1^2 - \frac{1}{3} e_3 - \frac{1}{2} f_2 e_1 - \%2, \frac{2}{3} e_3 b_1 + f_3 e_1 - b_1 \%1 \right] \\
&\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -e_1, -2 e_1 b_1 - 2 f_1 e_1, -\frac{3}{2} f_2 e_1 - e_1 b_1^2 - \%2, \right. \\
&\left. \frac{2}{3} e_3 b_1 + f_3 e_1 - b_1 \%1 \right] \\
&[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\
&[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\
&[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\
\%1 &:= \frac{2}{3} e_3 + f_2 e_1 \\
\%2 &:= f_1 e_1 b_1 \\
\%3 &:= -\frac{1}{3} e_3 b_1 + f_3 e_1 \\
\%4 &:= -\frac{1}{3} e_3 - \frac{1}{2} f_2 e_1 + \%2
\end{aligned}$$

Determinação da segunda cúbica.

```
> mu:=si(liste(row(mu_3,7)/eqsmu[1])):print(denom(%));
      [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1]
```

Adição da segunda cúbica.

```
> eqx3:=[op(eqx3),sum('mu[j]*s3f0[j]', 'j'=1..nops(s3f0))];
```

$$\begin{aligned} \text{eqx3} := & [x0^2 + \frac{1}{3} x1 x2 e3 f3 e1 - \frac{2}{9} x1 x2 e3^2 b1 - x1^2 f1^2 e1^2 b1^2 + x0 x2 f3 e1 - \frac{1}{3} x1^2 e3 f2 e1 \\ & + e1^2 b1 x1^2 f3 + \frac{1}{2} x1^2 e1^2 b1^2 f2 - \frac{1}{9} e3^2 x1^2 - \frac{1}{4} x1^2 f2^2 e1^2 - x1^2 e1^2 b1^3 f1 \\ & + \frac{1}{2} x1 x2 f2 e1^2 f3 + x1 x2 f1 e1^2 b1 f3 + \frac{1}{2} x1 b1 x2 f2^2 e1^2 - x1 x2 b1^2 f1 e1^2 f2 \\ & + x1^2 f1 e1^2 b1 f2 + \frac{2}{3} x1^2 f1 e1 b1 e3 + \frac{2}{3} x0 x2 e3 b1, \\ & x0 x1 + b1 x0 x2 - \frac{1}{3} e3 x1^2 - \frac{1}{2} x1^2 f2 e1 + x1^2 f1 e1 b1 - \frac{1}{3} e3 b1 x1 x2 + x1 x2 f3 e1, \\ & -b1^2 x1 x2 e1 - b1 x2^2 f2 e1 - \frac{1}{3} x1 x2 e3 - \frac{1}{2} x1 x2 f2 e1 - x1 x2 f1 e1 b1 + x2^2 f3 e1 \\ & + x0 x2 - e1 b1 x1^2, \\ & x2^2 x0 + e1 x1^3 + x2 x1^2 e1 b1 + 2 x2 x1^2 f1 e1 - \frac{1}{3} x1 x2^2 e3 + x1 x2^2 f2 e1, \\ & -x1^3 + (-2 b1 - 2 f1) x2 x1^2 + (-\frac{3}{2} f2 - b1^2 - f1 b1) x1 x2^2 + (f3 - b1 f2) x2^3] \\ > \text{exc3}; \end{aligned}$$

$$e_1 = 0$$

```
> eqx3exc3:=subs(exc3,eqx3);
```

$$\begin{aligned} \text{eqx3exc3} := & [x0^2 + \frac{2}{3} x0 x2 e3 b1 - \frac{1}{9} e3^2 x1^2 - \frac{2}{9} x1 x2 e3^2 b1, \\ & x0 x1 + b1 x0 x2 - \frac{1}{3} e3 x1^2 - \frac{1}{3} e3 b1 x1 x2, -\frac{1}{3} x1 x2 e3 + x0 x2, x2^2 x0 - \frac{1}{3} x1 x2^2 e3, \\ & -x1^3 + (-2 b1 - 2 f1) x2 x1^2 + (-\frac{3}{2} f2 - b1^2 - f1 b1) x1 x2^2 + (f3 - b1 f2) x2^3] \\ > \text{hilbertpoly}(\text{eqx3exc3}, \text{tdeg}(\text{op}(\text{xx})), \text{t}); \end{aligned}$$


```

> see(factor(eq3exc3));

1, 1/9*(3*x0-x1*e[3])*(3*x0+2*x2*e[3]*b[1]+x1*e[3])

2, 1/3*(x1+b[1]*x2)*(3*x0-x1*e[3])

3, 1/3*x2*(3*x0-x1*e[3])

4, 1/3*x2^2*(3*x0-x1*e[3])

5,
-x1^3-2*x2*x1^2*b[1]-2*x2*x1^2*f[1]-3/2*x1*x2^2*f[2]-x1*x2^2*b[1]^2-x1
*x2^2*f[1]*b[1]+x2^3*f[3]-x2^3*b[1]*f[2]

> origin(vars3,eq3exc3);

[x0^2, x0 x1, x0 x2, x2^2 x0, -x1^3]

```

Observação A.1. Para a realização desses procedimentos utilizamos o programa *jprosjr6.txt*, desenvolvido por Israel Vaisencher, disponível em <http://www.dmat.ufpe.br/israel/twcbis.txt>.

Referências Bibliográficas

- [1] Avritzer, D. & Vainsencher, I. *Hilb⁴P²*, Springer. L. N. M., vol 1436, (1987), 30-58.
- [2] Avritzer, D. *Introdução à Geometria Enumerativa: Algumas Propriedades Geométricas das Grassmannianas*, 11^a Escola de Álgebra, São Paulo, 1990.
- [3] Borel, A. *Linear Algebraic Groups*, Series: Graduate Texts in Mathematics, Vol. 126 2nd enlarged ed. 1991.
- [4] Borges, G. D. *Teoria de interseção em grassmannianas e algumas aplicações ao cálculo de Schubert*. Dissertação de Mestrado, UFPB, João Pessoa, Paraíba, 2000.
- [5] Costa, A. V. & Vainsencher, I. *Bases de Grobner: resolvendo equações polinômiais*, Escola de Álgebra, IMECC-UNICAMP, 1994.
- [6] Elençwajg, G. & Le Barz, P. *Détermination de l'anneau de Chow de Hilb³P²*, C.R.A.S.P., série I 302, (1985), 635-638.
- [7] Ellingsrud, E. & Strømme, S. A. *On the topology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Inv. Math., 87, (1987), 343-352.
- [8] Forgy, J. *Algebraic Families on an Algebraic Surface*, Amer J. Math., n^o 90 (1968), 511-521.

- [9] Grothendieck, A. *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV, les schemas de Hilbert* *Seminaire Bourbaki*, n° 221, J.H.P., Paris 1961.
- [10] Harris, J. *Algebraic Geometry: A first course*, Graduate Texts in Math. Springer, New York, 1995.
- [11] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. Springer, New York, 1977.
- [12] Mallavibarrena, R. & I. Sols *A base of the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, (1987).
- [13] Sernesi, E. *Topics on Families of Projective Scheme*, Managing Editor, n° 73, 1986.
- [14] Shafarevich, I. R. *Basic Algebraic Geometry*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, New York, 1974.
- [15] Springer, T. A. *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser Boston, 1981.
- [16] Vainsencher, I. *Classes Características em Geometria Algébrica*. 15° Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas , 1985.
- [17] Vainsencher, I. *Twisted cubics, bis*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)32 (2001), no. 1, 37-44.
- [18] Vainsencher, I. & Avritzer, D. *The Hilbert scheme component of the interserction of two quadrics*, Communications in Algebra, 6(28), 2995-3008.
- [19] Vainsencher, I. & Loo, B. *Limits of graphs II*, XII School of Algebra, Part I (Portuguese) (Diamantina, 1992). Mat. Contemp. 6 (1994), 41–59.
- [20] Vainsencher, I. & Xavier, F. *A compactification of the space of twisted cubics*, Math Scand. 91(2002), no. 2, 221-243.

- [21] Vasconcelos, V. W. *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [22] Xavier, F. *Uma compactificação do espaço das cúbicas reversas*, Tese de Doutorado, UFPE, Recife, 2000.
- [23] Vainsencher, I. & Xavier, F. *Counting curves in \mathbb{P}^3* , pre-print