

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma Compactificação do Espaço das
Quádruplas de Pontos em \mathbb{P}^2

por

Eben Alves da Silva

Sob orientação de

Prof. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Conteúdo

Introdução	xii
0.1 Notações Preliminares	4
1 Determinação de Órbitas Fechadas em $G(2, S_2)$.	8
1.1 Determinação das Órbitas de $G(2, S_2)$	8
1.2 Descrição de Y : o primeiro centro de explosão	9
1.2.1 Determinação das órbitas de Y	9
1.2.2 Descrição das órbitas dos pontos $\pi \in X$ que representam quádruplas de pontos.	17
1.2.3 Descrição das dimensões das órbitas dos pontos $\pi \in X - Y$	28
1.3 Determinação das órbitas de \mathcal{X}	43
2 $Hilb^4\mathbb{P}^2$	46
2.1 Esquema de Hilbert de pontos de \mathbb{P}^2	46
2.2 Quádruplas de Pontos determinadas por Cônicas.	46
2.3 Quádruplas de pontos geradas em grau 3.	48
2.4 Quádruplas de pontos geradas em grau 4.	58
3 Compactificação de $X - Y$	60
3.1 Obtenção de geradores em grau 3	60
3.1.1 Descrição de \mathcal{G}_3^6	63
3.2 Obtenção de Geradores de grau 4.	67
3.2.1 Descrição de \mathcal{G}_4^{11}	67
4 Apêndice A	75
4.1 Definições Básicas	75
4.2 Retas, Dimensões e Singularidades	75
4.3 Topologia de Zariski	78
4.4 Morfismos	82

4.5	Produto de Variedades	84
4.6	Blowing Up	87
4.7	Polinômio de Hilbert	87
5	Apêndice B	91
5.1	Ação de Grupos	91
5.2	AÇÃO DE $PGL(n)$	92
5.2.1	Ação de $GL(n + 1)$ em R_d	92
5.2.2	Ação de $PGL(n)$ em \mathbb{P}^n e $G(k, R_d)$	94
5.3	Determinação da Órbitas de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^v}$	96
5.4	Alguns Fatos sobre Ação de Grupos em Variedades Algébricas.	97
6	Apêndice C	100
6.1	Cálculos no Maple	100
	Bibliografia	132

RESUMO

O objetivo deste trabalho é construir uma família plana em que cada elemento da família seja uma quádrupla de pontos no plano. Para isto, construímos uma sequência explícita de duas explosões a partir da Grassmaniana de feixes de cônicas, que denotamos por $X = G(2, S_2)$. Desde que Bézout nos garante que duas cônicas sem componentes em comum determinam uma quádrupla de pontos em \mathbb{P}^2 podemos definir o mapa racional $\gamma : X \dashrightarrow \text{Hilb}^4\mathbb{P}^2$ (veja teorema 3.2.5), cujo lugar de indeterminação é $Y = \{[q_1, q_2] \in X \mid \text{mdc}(q_1, q_2) \neq 1\}$. Com o objetivo de estender este mapa, realizamos a primeira explosão, obtendo um mapa racional $\tau : X^1 = \text{Bl}_Y X \dashrightarrow \text{Hilb}^4\mathbb{P}^2$ cujo lugar de indeterminação é $Y^1 = \{x^1 \in X^1 \mid \text{o subespaço determinado por } x^1 \text{ em grau 4 é } lS_3\}$. Finalmente realizamos a última explosão, $X^2 = \text{Bl}_{Y^1} X^1$, e obtemos um morfismo sobrejetivo $\sigma : X^2 \rightarrow \text{Hilb}^4\mathbb{P}^2$ que estende γ , e que σ deixa de ser injetivo ao longo das quádruplas de pontos alinhadas.

ABSTRACT

The aim of this work is to construct a plane family whose fibers will correspond to a quadruple of points in the plane. For this, we construct an explicit sequence of two blow-ups beginning from the Grassmannian variety of 2-planes in S_2 . We note that Bézout's Theorem says that two plane conics without common components will intersect each other in at a most four points counted with multiplicities. Thus we can define the rational map $\gamma : X \cdots \longrightarrow \text{Hilb}^4\mathbb{P}^2$ (see theorem 3.2.5), whose indetermination locus corresponds to $Y = \{[q_1, q_2] \in X \mid \text{mdc}(q_1, q_2) \neq 1\}$. If we make the first blow-up, we can extend the map γ , but this new map does not set a morphism. In fact, we obtain another rational map $\tau : X^1 = \text{Bl}_Y X \cdots \longrightarrow \text{Hilb}^4\mathbb{P}^2$ whose indetermination locus is the variety $Y^1 = \{x^1 \in X^1 \mid lS_3 \text{ is the subspace determined by } x^1 \text{ in 4th degree}\}$. Finally we make the second blow-up, $X^2 = \text{Bl}_{Y^1} X^1$, and we are able to define a surjective morphism $\sigma : X^2 \longrightarrow \text{Hilb}^4\mathbb{P}^2$ which extends γ , and we verify that σ is a non injective morphism along the aligned quadruplets of points.

0.1 Notações Preliminares

- $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ denota o anel dos polinômios a coeficientes em \mathbb{C} na variáveis x_0, \dots, x_n e $R_d = \{p \in R \mid p \text{ é homogêneo de grau } d\}$.
- Vamos trabalhar sobre o corpo \mathbb{C} dos números Complexos.
- $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ denota o anel dos polinômios a coeficientes complexos nas variáveis x_0, x_1, x_2 .
- S_d denota o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau d nas variáveis x_0, x_1, x_2 cuja dimensão é $\binom{2+d}{d} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$.
- $G(k, S_d)$ denota a Grassmaniana de subespaços de dimensão k de S_d .
- Considere a sequência Tautológica

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_d^k \longrightarrow \mathcal{F}_d|_{G(k, S_d)} \longrightarrow \overline{\mathcal{E}_d^k} \longrightarrow 0$$

onde \mathcal{E}_d^k é o fibrado vetorial (chamado Tautológico) cuja fibra sobre $\pi \in G(k, S_d)$ é $\mathcal{E}_{d, \pi}^k = \{\pi\} \times \pi$.

- $\mathcal{F}_d|_{G(k, S_d)}$ denota o fibrado vetorial trivial sobre $G(k, S_d)$ cuja fibra é S_d . Em geral $\mathcal{F}_d|_V$ denota o fibrado vetorial trivial sobre a variedade V cuja fibra é S_d .
- $\overline{\mathcal{E}_d^k}$ é o fibrado vetorial cuja fibra sobre $\pi \in G(k, S_d)$ é $\overline{\mathcal{E}_{d, \pi}^k} = \pi \times \frac{S_d}{\pi}$.
- Sejam $m_1, m_2 \in S_1$ tais que $[m_1] \neq [m_2] \in \mathbb{P}(S_1)$ então $S_{d(m_1, m_2)}$ denota o subespaço formado pelos polinômios homogêneos de grau d que se anulam no ponto determinado pela interseção das retas $V(m_1)$ e $V(m_2)$.
- $\mathcal{U}_{[x_0]}$ denota o aberto de \mathbb{P}^{2^\vee} definido pelo conjunto $\mathcal{U}_{[x_0]} = \{[x_0 + w_1x_1 + w_2x_2] \mid w_1, w_2 \in \mathbb{C}\}$. Da mesma forma podemos definir $\mathcal{U}_{[x_i]}$ para $i = 1, 2$.
- \mathcal{U}_2 denota o aberto de \mathbb{P}^2 definido pelo conjunto $\mathcal{U}_2 = \{[u_0 : u_1 : 1] \mid u_0, u_1 \in \mathbb{C}\}$. Da mesma forma podemos definir \mathcal{U}_i para $i = 0, 1$.
- Seja $X = G(2, S_2)$. Note que $\forall \pi \in X$, temos que: $\pi = [q_1, q_2]$ onde $q_1 = \sum a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k$ e $q_2 = \sum b_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k$ com $i + j + k = 2$. Podemos assim associar a seguinte matriz ao ponto π ,

$$M_\pi = \begin{bmatrix} a_{200} & a_{110} & a_{101} & a_{020} & a_{011} & a_{002} \\ b_{200} & b_{110} & b_{101} & b_{020} & b_{011} & b_{002} \end{bmatrix}.$$

Então $\mathcal{U}_{i,j} = \{\pi \in X \mid \text{o menor } i, j \text{ de } M_\pi \text{ é não nulo}\}$ com $i < j, i, j \in \{1, \dots, 6\}$ determina uma cobertura aberta de X . Analogamente seja $\pi \in G(k, S_d)$. Note que $\forall \pi \in G(k, S_d)$, temos que $\pi = [q_1, \dots, q_k]$ onde $q_j = \sum a_{j,j_0j_1j_2} x_0^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2}$ com $j_0 + j_1 + j_2 = d$. Podemos assim associar a seguinte matriz ao ponto π :

$$M_\pi = \begin{bmatrix} a_{1,d00} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,00d} \\ b_{k,d00} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{k,00d} \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k} = \{\pi \in G(k, S_d) \mid \text{o menor determinado pelas colunas } i_1, i_2, \dots, i_k \text{ da matriz } M_\pi \text{ é não nulo}\}$$

com $i_1, i_2, \dots, i_k, i_\alpha \in \{1, \dots, N\}$ onde $N = \dim S_d$, determina uma cobertura aberta de $G(k, S_d)$.

INTRODUÇÃO

A abordagem clássica do Esquema de Hilbert foi primeiro introduzido por A. Gotthendrieck por volta de 1961, (veja [16]). Após essa revolução, muitos matemáticos voltaram sua atenção para o esquema de Hilbert. R. Hartshorne em 1966 provou que $Hilb^d\mathbb{P}^n$ é conexo (veja [170]). Já J. Forgyaty em 1968 conjecturou que $Hilb^d\mathbb{P}^n$ é uma variedade reduzida e irredutível. De fato, para $d \geq 2$ e $n = 2$, Forgyaty provou que $Hilb^d\mathbb{P}^2$ é liso, irredutível de dimensão $2d$, veja ([10]). Em geral temos o seguinte resultado: $Hilb^d\mathbb{P}^n$ é irredutível se tem dimensão dn (consulte [18]). Em 1987, I. Vainsencher e D. Avritzer mostraram que $Hilb^d\mathbb{P}^n$ mergulha na Grassmaniana $G(N - d, S_d)$ onde $N = \dim S_d$, em partiucular $Hilb^4\mathbb{P}^2 \hookrightarrow G(11, S_4)$, (veja [11]). Seja $Hilb^4\mathbb{P}^2$ o esquema de Hilbert que parametriza subesquemas fechados \mathbb{P}^2 de grau 4 e dimensão zero, ou seja, quádruplas de pontos no plano. O objetivo desta dissertação é a construção de uma sequência de explosões explícita a partir de X , chamada variedade base, ao longo de Y onde $X = G(2, S_2)$ é a Grassmaniana de feixes de cônicas e $Y = \{[q_1, q_2] \mid \text{mdc}(q_1, q_2) \neq 1\}$ de tal maneira que a partir da última explosão podemos definir um mapa sobrejetivo para $Hilb^4\mathbb{P}^2$. De fato, o morfismo restrito a E^2 não é um mapa injetivo. Veja fig. 3.12 do capítulo 3 pag 73.

É importante destacar que as mesmas técnicas utilizadas neste trabalho foram usadas para estudar famílias de curvas canônicas em \mathbb{P}^3 , veja [19]. E também podem ser utilizadas para estudar problemas em aberto, tais como determinar uma compactificação das quádruplas de pontos em \mathbb{P}^3 , etc. A importância da construção de compactificação explícita se remota ao fato de que estes espaços de parâmetros podem ser utilizados para resolver alguns problemas enumerativos.

No capítulo 1 nos remetemos ao estudo das órbitas de X e Y sob a ação de $PGL(3)$. Também neste capítulo são determinadas as órbitas fechadas da subvariedade $\mathcal{X} \subseteq X \times G(6, S_3)$, (confira a definição de \mathcal{X} na seção 1.3) a qual resultará se isomorfa a $X^1 = Bl_Y X$.

No capítulo 2 são citados alguns resultados gerais sobre esquemas de

Hilbert de d pontos no plano. Dentre estes resultados é importante destacar que um deles nos permite afirmar que $Hilb^4\mathbb{P}^2$ mergulha na Grassmaniana $G(N - d, S_d)$, veja referência [11]. Ainda no capítulo 2 são apresentados vários lemas nos quais a partir de q_1 e $q_2 \in S_2$ tais que $[q_1, q_2] \in Y$ são associados ideais $I \supseteq \langle q_1, q_2 \rangle$ para os quais analisamos o tipo de geradores em grau 3 e 4 que devemos anexar para que o ideal I determine um ponto de $Hilb^4\mathbb{P}^2$.

O capítulo 3 é dedicado à construção da sequência de duas explosões necessárias para obtermos uma variedade X^2 o qual define um mapa sobrejetivo para $Hilb^4\mathbb{P}^2$.

As definições e resultados básicos para fazer uma leitura adequada dos capítulos desta dissertação são apresentados nos apêndices A e B.

Também achamos interessante colocar no apêndice C os cálculos que foram feitos usando o pacote de computação MAPLE para obtermos localmente a sequência de explosões procurada.

Capítulo 1

Determinação de Órbitas Fechadas em $G(2, S_2)$.

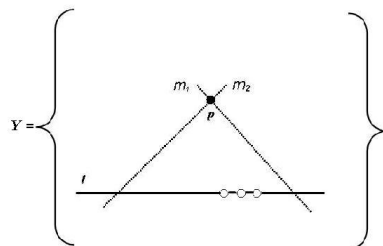
As referências básicas para este capítulo são [3] e [8].

1.1 Determinação das Órbitas de $G(2, S_2)$

Seja Y a subvariedade de $X = G(2, S_2)$ formada pelos subespaços $\pi = [q_1, q_2] \in X$ tais que q_1, q_2 admitem uma componente em comum, ou seja, $\text{mdc}(q_1, q_2) \neq 1$. Assim

$$Y = \{[lm_1, lm_2] \in X \mid l, m_1, m_2 \in S_1\} \quad (1.1)$$

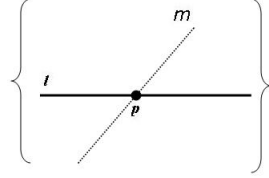
Logo, podemos representar Y por:



Considere também a subvariedade $Z \subseteq X$ definida da seguinte forma:

$$Z = \{[l^2, lm] \in X \mid l, m \in S_1\}. \quad (1.2)$$

Observe que podemos representar Z por:



1.2 Descrição de Y : o primeiro centro de explosão

1.2.1 Determinação das órbitas de Y .

1.2.1 Lema. *Considere X , Y e Z conforme as definições em 1.1 e 1.2. Então:*

1. Y é $PGL(3)$ invariante.

2.

$$\begin{aligned} i : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee} &\longrightarrow X \\ ([v], [l]) &\longmapsto [lm_1, lm_2] \end{aligned}$$

onde $\{[v]\} = V(m_1) \cap V(m_2)$. É um mergulho sobre Y .

3. $Y - Z = \mathcal{O}_{\pi_1}$ onde $\pi_1 = [x_0x_1, x_0x_2]$.

4. Seja $\Gamma = \{[l], [v] \in \mathbb{P}^{2^\vee} \mid l(v) = 0\}$. Então $j : \Gamma \longmapsto X$ definido por $j([v], [l]) = [l^2, lm]$ onde $\{[v]\} = V(l) \cap V(m)$ é um mergulho sobre Z .

5. $Z = \mathcal{O}_{\pi_0}$ onde $\pi_0 = [x_0^2, x_0x_1]$.

Demonstração.

1. A seguir verificaremos a primeira afirmação deste lema. Seja $\pi \in Y$ e $A \in PGL(3)$. Assim $\pi = [lm_1, lm_2]$, logo $A \cdot \pi = [A \cdot (lm_1), A \cdot (lm_2)] \in Y$. De fato, pois $A \cdot (lm_1) = (A \cdot l)(A \cdot m_1)$ e $A \cdot (lm_2) = (A \cdot l)(A \cdot m_2)$. Segue que $\text{mdc}(A \cdot \pi) \neq 1$. Portanto, Y é $PGL(3)$ invariante.

2. Primeiramente note que:

- i está bem definida.

Suponha que $([v], [l]) = ([v_1], [l_1])$. Então $l = \alpha l_1$ com $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Já que $[v] = [v_1]$ então temos que $\{[v]\} = V(m_1, m_2) = \{[v_1]\} = V(n_1, n_2)$. Logo, $\langle m_1, m_2 \rangle = \langle n_1, n_2 \rangle$. De onde concluímos que $[m_1, m_2] = [n_1, n_2]$. Assim temos que:

$$\begin{aligned} i([v], [l]) &= [lm_1, lm_2] \\ &= [\alpha l_1 m_1, \alpha l_1 m_2] \\ &= [l_1 m_1, l_1 m_2] \\ &= [l_1(an_1 + bn_2), l_1(cn_1 + dn_2)] \\ &= [l_1 n_1, l_1 n_2] \end{aligned}$$

- i é injetora.

Vamos mostrar que se $i([v], [l]) = i([v_1], [l_1])$ então $[v] = [v_1]$ e $[l] = [l_1]$. De fato, se $[lm_1, lm_2] = [l_1 n_1, l_1 n_2]$ com $m_1(v) = m_2(v) = n_1(v_1) = n_2(v_1) = 0$ e m_1, m_2 são LI e n_1, n_2 também. Daí, temos

$$lm_1 = \alpha l_1 n_1 + \beta l_1 n_2 = l_1(\alpha n_1 + \beta n_2) \quad (*)$$

Assim, obtemos que $l_1|l$ ou $l_1|m_1$. Se, $l_1|l$ então $l = \alpha_1 l_1$ com $\alpha_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$, logo $[l] = [l_1]$. Agora, substituindo em $(*)$ temos que $m_1 = \alpha n_1 + \beta n_2$. Da mesma forma temos que $m_2 = a_1 n_1 + b_1 n_2$. Logo, $\langle m_1, m_2 \rangle = \langle n_1, n_2 \rangle$ e $m_1(v_1) = m_2(v_1) = 0$, isto é, m_1, m_2 se anulam também em v_1 . Seja $\{u_1, u_2, w\}$ uma base de \mathbb{C}^3 tal que $u_1^* = m_1$ e $u_2^* = m_2$. Note que $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w$. Por outra parte, $m_1(v) = 0 = \alpha, m_2(v) = 0 = \beta$. Portanto, $v = \gamma w$. Analogamente, concluímos que $v_1 = \gamma_1 w$. Portanto, $[v] = [v_1]$. Se $l_1|m_1$ então $m_1 = \beta_1 l_1$ com $\beta_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Então temos que $l = a_1 n_1 + b_1 n_2$. Como $[lm_1, lm_2] = [l_1 n_1, l_1 n_2]$ temos que $lm_2 = cl_1 n_1 + dl_1 n_2 = (cn_1 + dn_2)l_1 = (c_1 n_1 + d_1 n_2)m_1$. Já que m_1 e m_2 são LI temos que $l = \gamma m_1$. De onde, segue-se que $l = \gamma \beta_1 l_1$, ou seja, $[l] = [l_1]$. voltando assim ao caso anterior.

- a imagem de i é Y .

Da definição de i segue-se que $Im(i) \subseteq Y$. Vamos mostrar que $Y \subseteq i$. De fato, seja $[q_1, q_2] \in Y$ então $mdc(q_1, q_2) \neq 1$. Logo, existe $l \in S_1$ não nula, tal que $q_i = lm_i$ com $m_i \in S_1$ $i = 1, 2$ LI .

Considere $[v] \in \mathbb{P}^2$ tal que $\{[v]\} = V(m_1, m_2)$ e $[l] \in \mathbb{P}^2$. Daí, temos que $i([v], [l]) = [lm_1, lm_2] \in \text{Im}(i)$.

- i é um mergulho.

Agora, vamos mostrar que i é um mergulho sobre Y . Para isto, vamos verificar que o diferencial de i , a saber, di é injetivo, para isto nos remeteremos a uma representação local de i (em torno de um representante da órbita fechada de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee}$ conforme lema 5.3.1). Sejam $\mathcal{U} = \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_{[x_0]}$ um aberto de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee}$ e $\mathcal{U}_{1,2}$ um aberto de X . E seja $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_{1,2}$ definida por:

$$\varphi([u_0 : u_1 : 1], [x_0 + w_1x_1 + w_2x_2]) = [q_1, q_2]$$

onde

$$q_1 = (x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)(x_0 - u_0x_2)$$

e

$$q_2 = (x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)(x_1 - u_1x_2).$$

A seguir verificaremos que $[q_1, q_2] \in \mathcal{U}_{1,2}$. De fato, note:

$$q_1 = x_0^2 + w_1x_0x_1 + (w_2 - u_0)x_0x_2 - w_1u_0x_1x_2 - w_2u_0x_2^2$$

$$q_2 = x_0x_1 - u_1x_0x_2 + w_1x_1^2 + (w_2 - w_1u_1)x_1x_2 - w_2u_1x_2^2$$

Portanto:

$$M_{[q_1, q_2]} = \begin{bmatrix} 1 & w_1 & -u_0 + w_2 & 0 & -w_1u_0 & -w_2u_0 \\ 0 & 1 & -u_1 & w_1 & -w_1u_1 + w_2 & -w_2u_1 \end{bmatrix}$$

Fazendo operações sobre as linhas obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1u_1 - u_0 + w_2 & -w_1^2 & w_1^2u_1 - w_1w_2 - w_1u_0 & w_1w_2u_1 - w_2u_0 \\ 0 & 1 & -u_1 & w_1 & -w_1u_1 + w_2 & -w_2u_1 \end{bmatrix}$$

Logo $\pi = [q_1, q_2] \in \mathcal{U}_{1,2}$.

Considere as seguintes cartas para \mathbb{P}^{2^\vee} e \mathbb{P}^2 respectivamente:

$$C_1 : \quad \mathbb{C}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{U}_{[x_0]} \\ (w_1, w_2) \longmapsto [x_0 + w_1x_1 + w_2x_2]$$

e

$$C_2 : \quad \mathbb{C}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{U}_2 \\ (u_0, u_1) \longmapsto [u_0 : u_1 : 1]$$

Analogamente, seja $D_1 : \mathbb{C}^8 \longrightarrow \mathcal{U}_{1,2}$ a carta de X definida por:
 $D_1(a_1, \dots, a_8) = [q_1, q_2]$ onde $q_1 = x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_1^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_2^2$
e $q_2 = x_0x_1 + a_5x_0x_2 + a_6x_1^2 + a_7x_1x_2 + a_8x_2^2$.
Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} = \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_{[x_0]} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U}_{1,2} \\ C_1^{-1} \times C_2^{-1} \downarrow & & \downarrow D_1^{-1} \\ \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^8 \end{array} \quad (1.3)$$

Segue-se que $d\varphi_{([0:0:1], [x_0])}$ é injetiva se e somente se $d\psi_{(0,0,0,0)}$ for injetivo. Note que

$$\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^8$$

é dado por: $\psi(w_1, w_2, u_0, u_1) = (w_2 + w_1u_1 - u_0, -w_1^2, w_1^2u_1 - w_1w_2 - w_1u_0, w_1w_2u_1 - w_2u_0, -u_1, w_1, -w_1u_1 + w_2, -w_2u_1)$. Para de fato mostrar que $d\psi_{((0,0,0,0))}$ é injetivo, basta verificar que o posto da matriz Jacobiana é igual a 4, e de fato pela observação 5.4.2, verifica-se que a matriz Jacobiana de ψ é dada por:

$$\mathcal{J}ac(\psi) = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & -1 & w_1 \\ -2w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2w_1u_1 - u_0 - w_2 & -w_1 & -w_1 & w_1^2 \\ w_2u_1 & w_1u_1 - u_0 & -w_2 & w_1w_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 & -w_1 \\ 0 & -u_1 & 0 & -w_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos em torno do ponto $([0 : 0 : 1], [x_0])$ que $w_1 = w_2 = u_0 = u_1 = 0$. Logo,

$$[d\psi_{(0,0,0,0)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que o posto da matriz jacobiana de ψ é igual a 4. Portanto $d\psi_{(0,0,0,0)}$ é injetora. Portanto i é um mergulho.

3. A continuação provaremos a afirmação 3.

Note que $Y - Z = \{\pi = [lm_1, lm_2] \in Y \mid l, m_1, m_2 \text{ é LI}\}$. Queremos verificar que $Y - Z = \mathcal{O}_{\pi_1}$.

- $Y - Z \subseteq \mathcal{O}_{\pi_1}$. Seja $\pi = [lm_1, lm_2] \in Y - Z$ então existe $A \in PGL(3)$ tal que $A \cdot \pi_1 = \pi$. É suficiente escolher A tal que $A \cdot x_0 = l, A \cdot x_1 = m_1, A \cdot x_2 = m_2$. Logo, $\pi \in \mathcal{O}_{\pi_1}$.
- $\mathcal{O}_{\pi_1} \subseteq Y - Z$. Seja $\pi \in \mathcal{O}_{\pi_1}$ então $\pi = A \cdot \pi_1$ para algum $A \in PGL(3)$. Logo, $\pi = [(A \cdot x_0)(A \cdot x_1), (A \cdot x_0)(A \cdot x_2)] \in Y - Z$.

4. A seguir verificaremos a quarta afirmação do lema. Primeiramente note que:

- j está bem definida.
Suponha que $([v], [l]) = ([v_1], [l_1])$. Então $l = \alpha l_1$ com $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Já que $[v] = [v_1]$ então temos que $\{[v]\} = V(l, m) = \{[v_1]\} = V(l_1, n)$. Logo, $\langle l, m \rangle = \langle l_1, n \rangle \Rightarrow [l, m] = [l_1, n]$. Assim temos que $i([v], [l]) = [l^2, lm] = [\alpha^2 l_1^2, \alpha l_1 m] = [l_1^2, l_1 m] = [l_1^2, l_1(\alpha l_1 + bn)] = [l_1^2, l_1 n]$.
- j é injetora.
Vamos mostrar que se $j([v], [l]) = j([v_1], [l_1])$ então $[v] = [v_1]$ e $[l] = [l_1]$. De fato, se $[l^2, lm] = [l_1^2, l_1 n]$ com $l(v) = m(v) = l_1(v_1) = n(v_1) = 0$ e l, m são *LI* e l_1, n também. Daí, temos que:

$$l^2 = \alpha l_1^2 + \beta l_1 n = l_1(\alpha l_1 + \beta n) \quad (*)$$

Assim, obtemos que $l_1 \mid l$. Daí $l = \alpha_1 l_1$ com $\alpha_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ então $[l] = [l_1]$. Agora, substituindo em (*) temos que $l = \alpha l_1 + \beta n$. Da mesma forma temos que $m = a_1 l_1 + b_1 n$. Logo, $\langle l, m \rangle = \langle l_1, n \rangle$ e $l(v_1) = m(v_1) = 0$, isto é, l, m se anulam também em v_1 . Seja $\{u_1, u_2, w\}$ uma base de \mathbb{C}^3 tal que $u_1^* = l$ e $u_2^* = m$. Note que $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w$. Por outra parte, $l(v) = 0 = \alpha, m(v) = 0 = \beta$ então $v = \gamma w$. Analogamente, concluimos que $v_1 = \gamma_1 w$. Portanto, $[v] = [v_1]$.

- a imagem de j é Z .

Da definição de j segue-se que $Im(j) \subseteq Z$. Resta-nos verificar que $Z \subseteq Im(j)$. De fato, seja $[q_1, q_2] \in Z$. Então, $q_1 = l^2$ e $q_2 = lm$ com $l, m \in S_1$ LI. Considere $[v] \in \mathbb{P}^2$ tal que $\{[v]\} = V(l, m)$ e $[l] \in \mathbb{P}^{2^\vee}$. Daí, temos que $j([v], [l]) = [l^2, lm] \in Im(j)$. Portanto, j é sobrejetora.

- j é um mergulho.

Para demonstrar que j é um mergulho sobre Z , vamos verificar que o diferencial de j , a saber, dj é injetivo, para isto nos remeteremos a uma representação local de j (em torno de um representante da órbita fechada de Γ conforme Lema 5.3.1). Seja $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_{[x_0]}) \cap \Gamma$ um aberto de Γ , então temos que $u_0 + w_1 u_1 + w_2 = 0$. Assim, $w_2 = -u_0 - w_1 u_1$. Considere $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_{1,2}$ definida por

$$\varphi([u_0 : u_1 : 1], [x_0 + w_1 x_1 - (u_0 + w_1 u_1)x_2]) = [q_1, q_2]$$

onde

$$q_1 = (x_0 + w_1 x_1 - (u_0 + w_1 u_1)x_2)^2$$

e

$$q_2 = (x_0 + w_1 x_1 - (u_0 + w_1 u_1)x_2)(x_1 - u_1 x_2)$$

A seguir verificaremos que $[q_1, q_2] \in \mathcal{U}_{1,2}$. De fato, note que:

$$q_1 = x_0^2 + 2w_1 x_0 x_1 - 2(u_0 + w_1 u_1)x_0 x_2 + w_1^2 x_1^2 - 2w_1(u_0 + w_1 u_1)x_1 x_2 + (u_0 + w_1 u_1)^2 x_2^2$$

e

$$q_2 = x_0 x_1 - u_1 x_0 x_2 + w_1 x_1^2 + (-u_0 - 2w_1 u_1)x_1 x_2 + u_1(u_0 + w_1 u_1)x_2^2$$

Portanto:

$$M_{[q_1, q_2]} = \begin{bmatrix} 1 & 2w_1 & -2(u_0 + w_1 u_1) & w_1^2 & -2w_1(u_0 + w_1 u_1) & (u_0 + w_1 u_1)^2 \\ 0 & 1 & -u_1 & w_1 & -u_0 - 2u_1 w_1 & u_1(u_0 + w_1 u_1) \end{bmatrix}$$

Fazendo operações sobre as linhas obtemos:

$$M_{[q_1, q_2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2u_0 & -w_1^2 & 2w_1^2 u_1 & u_0^2 - w_1^2 u_1^2 \\ 0 & 1 & -u_1 & w_1 & -u_0 - 2u_1 w_1 & u_1(u_0 + w_1 u_1) \end{bmatrix}$$

Logo $\pi = [q_1, q_2] \in \mathcal{U}_{1,2}$.

Considere a seguinte carta de Γ :

$$C_1 : \quad \mathbb{C}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{U} \\ (u_0, u_1, w_1) \longmapsto ([u_0 : u_1 : 1], [x_0 + w_1x_1 - (u_0 + w_1u_1)x_2])$$

Analogamente, seja $D_1 : \mathbb{C}^8 \longrightarrow \mathcal{U}_{1,2}$ a carta de X definida por:

$$D_1(a_1, \dots, a_8) = [q_1, q_2] \text{ onde } q_1 = x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_1^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_2^2 \text{ e} \\ q_2 = x_0x_1 + a_5x_0x_2 + a_6x_1^2 + a_7x_1x_2 + a_8x_2^2.$$

Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U}_{1,2} \\ C_1^{-1} \downarrow & & \downarrow D_1^{-1} \\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^8 \end{array} \quad (1.4)$$

Segue-se que $d\varphi_{([0:0:1],[x_0])}$ é injetiva se e somente se $d\psi_{(0,0,0)}$ for injetivo. Note que

$$\psi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^8$$

é dado por:

$\psi(u_0, u_1, w_1) = (-2u_0, -w_1^2, 2w_1^2u_1, u_0^2 - w_1^2u_1^2, -u_1, w_1, -u_0 - 2u_1w_1, u_1(u_0 + w_1u_1))$. Para de fato mostrar que $d\psi_{(0,0,0)}$ é injetivo, basta verificar que o posto da matriz Jacobiana é igual a 3, para isto é suficiente calcular em um representante da órbita fechada de Γ conforme Lema 5.3.1 e a observação 5.4.2. Verifica-se que a matriz Jacobiana de ψ é dada por:

$$\mathcal{J}ac(\psi) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2w_1 \\ 0 & 2w_1^2 & 4w_1u_1 \\ 2u_0 & -2w_1^2u_1 & -2w_1u_1^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2w_1 & -2u_1 \\ u_1 & u_0 + 2w_1u_1 & u_1^2 \end{bmatrix}.$$

Segue que o posto da matriz jacobiana de ψ é igual a 3. Portanto, $d(\psi_{(0,0,0)})$ é injetora. Portanto, j é um mergulho.

5. Finalmente verificaremos a quinta afirmação.

Note que $Z = \{\pi = [l^2, lm] \in Y \mid l, m \in S_1\}$. Queremos verificar que $Z = \mathcal{O}_{\pi_0}$.

- $Z \subseteq \mathcal{O}_{\pi_0}$. Seja $\pi = [l^2, lm] \in Z$ então existe $A \in PGL(3)$ tal que $A \cdot \pi_0 = \pi$. É suficiente escolher A tal que $A \cdot x_0 = l, A \cdot x_1 = m$. Logo, $\pi \in \mathcal{O}_{\pi_0}$.
- $\mathcal{O}_{\pi_0} \subseteq Z$. Seja $\pi \in \mathcal{O}_{\pi_0}$ então $\pi = A \cdot \pi_0$ para algum $A \in PGL(3)$. Logo, $\pi = [(A \cdot x_0)^2, (A \cdot x_0)(A \cdot x_1)] \in Z$.

1.2.2 Corolário. *Verifica-se que:*

1. Y é uma variedade projetiva não singular irredutível de dimensão 4.
2. Z é uma variedade projetiva não singular irredutível de dimensão 3.
3. $Y - Z$ é uma órbita aberta de X de dimensão 4.

Demonstração.

1. Vamos agora demonstrar a primeira afirmação, ou seja, que Y é uma variedade projetiva não singular irredutível de dimensão 4. De fato, da Definição 4.5.2 temos que produto de variedades projetivas é uma variedade projetiva. Como existe um isomorfismo de i na sua imagem Y , então temos que Y é uma variedade projetiva irredutível de dimensão 4 e é não singular segue do isomorfismo, pois $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^V}$ é não singular.
2. A seguir verificaremos a segunda afirmação, isto é, que Z é uma variedade projetiva não singular irredutível de dimensão 3. Para isto, vamos mostrar que Γ é uma variedade de dimensão 3. De fato, considere $p_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^2$ a projeção na segunda coordenada. Note que p_2 é sobrejetora. Com efeito, considere $[v] = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$. Suponha que $a_0 \neq 0$, então podemos considerar $v = (1, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^3$. Assim,

$$\begin{aligned}
 p_2^{-1}([v]) &= \{([l], [v]) \in \Gamma \mid l(v) = 0\} \\
 &= \{([l], [v]) \in \Gamma \mid A_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 = 0\} \text{ onde} \\
 &\quad l = A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 \in S_1. \\
 &= \mathbb{P}(V) \times \{[v]\} \text{ onde} \\
 &\quad V = \{l \in S_1 \mid l = A_1(x_1 - b_1 x_0) + A_2(x_2 - b_2 x_0)\} \cong \mathbb{C}^2 \\
 &\cong \mathbb{P}^1.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos verificado que p_2 é sobrejetiva e que a dimensão das fibras de p_2 é constante e igual a 1. Do teorema da dimensão da fibra temos que:

$$\dim \Gamma = \dim \mathbb{P}^2 + \dim p_2^{-1}([v]) = 2 + 1 = 3.$$

Como existe um isomorfismo de j na sua imagem Z conforme Lema 1.2.1, temos que a dimensão de Z é igual a 3. Agora que Z é não singular decorre da Proposição 5.4.3.

3. A continuação provaremos a afirmação três, ou seja, $Y - Z$ é uma órbita aberta de Y de dimensão 4. De fato, como Z é uma órbita fechada, logo temos que $Y - Z$ é aberta, daí pela Observação 4.3.11, temos que $\dim(Y - Z) = \dim Y = 4$.

■

1.2.2 Descrição das órbitas dos pontos $\pi \in X$ que representam quádruplas de pontos.

Seja $\pi = [q_1, q_2] \in X$ tal que $\text{mdc}(q_1, q_2) = 1$. Então, $Q_1 \cap Q_2$ consiste de quatro pontos contados com multiplicidade, onde $Q_i = V(q_i)$ $i = 1, 2$. Note que, os pontos determinados pela interseção de Q_1 e Q_2 estão em posição geral. Queremos mostrar o seguinte resultado.

1.2.3 Proposição. *Seja $\pi = [q_1, q_2] \in X$ tal que $\text{mdc}(q_1, q_2) = 1$. Então:*

1. Se $\#Q_1 \cap Q_2 = 1$ verifica-se que:

$$\mathcal{O}_\pi = \begin{cases} \mathcal{O}_{\pi_1} & \text{com } \pi_1 = [x_1^2, x_0x_1 + x_2^2] \text{ ou} \\ \mathcal{O}_{\pi_2} & \text{com } \pi_2 = [x_0^2, x_1^2] \end{cases}$$

2. $\#Q_1 \cap Q_2 = 2$ verifica-se que:

$$\mathcal{O}_\pi = \begin{cases} \mathcal{O}_{\pi_3} & \text{com } \pi_3 = [x_0^2, x_1x_2] \text{ ou} \\ \mathcal{O}_{\pi_4} & \text{com } \pi_4 = [x_0^2 + x_1x_2, x_0x_2] \end{cases}$$

- 3.

$$\mathcal{O}_\pi = \begin{cases} \mathcal{O}_{\pi_5} & \text{com } \pi_5 = [x_1x_0, x_2(x_0 + x_1)] \text{ se } \#Q_1 \cap Q_2 = 3 \\ \mathcal{O}_{\pi_6} & \text{com } \pi_6 = [x_1(x_0 - x_2), x_2(x_0 - x_1)] \text{ se } \#Q_1 \cap Q_2 = 4 \end{cases}$$

Demonstração.

1. $\#Q_1 \cap Q_2 = 1$.

Suponha que $V(\langle q_1, q_2 \rangle) = \{[1 : 0 : 0]\}$. Sabemos que as equações das quádricas são dadas por:

$$q_1 = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2$$

e

$$q_2 = Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_1^2 + Ex_1x_2 + Fx_2^2$$

Como q_1, q_2 se anulam no ponto $[1 : 0 : 0]$ temos que:

$$\begin{aligned} q_1 &= bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \\ q_2 &= Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_1^2 + Ex_1x_2 + Fx_2^2 \end{aligned}$$

Observe que se $\pi = [q_1, q_2]$ e $\nabla q_1(p_1) = 0$ e $\nabla q_2(p_1) \neq 0$ então podemos modificar a base de π , de modo que, as quádricas que estão na nova base são não singulares em p_1 . De fato, $\pi = [q_1, q_2] = [q_1 + q_2, q_2]$, portanto dividiremos o nosso estudo em dois casos.

- q_1 e q_2 são não singulares em $p_1 = [1 : 0 : 0]$, então verificaremos a seguir que um representante para órbita de $\pi = [q_1, q_2]$ é $\pi_1 = [x_1^2, x_0x_1 + x_2^2]$. De fato, como q_1 e q_2 são não singulares em p_1 então existe uma reta tangente comum a q_1 e q_2 em p_1 , logo temos que:

$$\nabla(q_1)(p_1) = \lambda \nabla(q_2)(p_1) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Já que,

$$\nabla q_1 = (bx_1 + cx_2, bx_0 + 2dx_1 + ex_2, cx_0 + ex_1 + 2fx_2)$$

e

$$\nabla q_2 = (Bx_1 + Cx_2, Bx_0 + 2Dx_1 + Ex_2, Cx_0 + Ex_1 + 2Fx_2)$$

Temos que:

$$\nabla q_1(p_1) = (0, b, c) = \lambda(0, B, C) = \lambda \nabla q_2(p_1)$$

ou seja,

$$\begin{cases} b = \lambda B \\ c = \lambda C \end{cases}$$

Daí, podemos escolher para base de π as quádricas a seguir:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \\ &\text{e} \\ \tilde{q}_2 &= Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_1^2 + Ex_1x_2 + Fx_2^2\end{aligned}$$

Assim temos que:

$$M_{[\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ 0 & B & C & D & E & F \end{bmatrix}.$$

Como $\nabla q_2(p_1) \neq 0$ temos que $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. Suponhamos então que $B \neq 0$ e considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 - Dx_1 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \\ x_2 &\longmapsto x_2\end{aligned}$$

Logo, obtemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \\ &\text{e} \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_1 + Cx_0x_2 + E_1x_1x_2 + Fx_2^2\end{aligned}$$

Analogamente, considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 - E_1x_2 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \\ x_2 &\longmapsto x_2\end{aligned}$$

De modo que obtemos:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \\ &\text{e} \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_1 + Cx_0x_2 + F_1x_2^2\end{aligned}$$

Novamente vamos considerar a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_1 - Cx_2 \\ x_2 &\longmapsto x_2\end{aligned}$$

De tal maneira que podemos escolher para a base de π as seguintes quádricas:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= d_1x_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \\ &\text{e} \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_1 + F_1x_2^2\end{aligned}$$

AFIRMAÇÃO 1: $d_1 \neq 0$.

De fato, se $d_1 = 0$, então temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= (e_1x_1 + f_1x_2)x_2 \\ &\text{e} \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_1 + F_1x_2^2\end{aligned}$$

Note que, se $x_2 = 0$ então $x_0x_1 = 0$. Assim, teríamos que $[0 : 1 : 0]$ e $[1 : 0 : 0] \in V(q_1, q_2)$, o que é um absurdo pois estamos assumindo que $\#V(q_1, q_2) = 1$. Portanto $d_1 \neq 0$. Assim:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= x_1^2 + e_1x_1x_2 + f_1x_2^2 \\ &\text{e} \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_1 + F_1x_2^2\end{aligned}$$

AFIRMAÇÃO 2: $F_1 \neq 0$.

Com efeito, se $F_1 = 0$, então $x_0x_1 = 0$ e teríamos que o sistema

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 = x_1^2 + e_1x_1x_2 + f_1x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

possui soluções diferentes de p_1 . Assim, neste caso teríamos um outro ponto $p \neq p_1 \in V(q_1, q_2)$. Logo, $F_1 \neq 0$, de modo que temos:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= x_1^2 + e_1x_1x_2 + f_1x_2^2 \\ &\text{e} \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_1 + x_2^2\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $e_1 = f_1 = 0$. Pelo absurdo, suponha que isto não acontece, então temos os seguintes três casos:

- (a) $e_1 = 0$ e $f_1 \neq 0$.
- (b) $e_1 \neq 0$ e $f_1 = 0$.
- (c) $e_1 \neq 0$ e $f_1 \neq 0$.

- (a) Note que $\tilde{q}_1 = x_1^2 + x_2^2$ e $\tilde{q}_2 = x_0x_1 + x_2^2$ e daí o ponto $[i : i : 1] \in V(q_1, q_2)$ o que é um absurdo.
- (b) Segue de modo análogo ao item anterior.
- (c) Neste caso teríamos que o ponto $[\frac{\sqrt{3i-1}}{2} : \frac{\sqrt{3i+1}}{2} : 1] \in V(q_1, q_2)$ o que é um absurdo. Portanto, $e_1 = f_1 = 0$. Assim, a órbita de $\pi = [q_1, q_2] \in X - Y$ onde q_1 e q_2 são não singulares é igual a órbita do ponto $\pi_1 = [x_1^2, x_0x_1 + x_2^2]$.
- q_1 e q_2 são singulares em $p_1 = [1 : 0 : 0]$, então verificaremos a seguir que um representante para a órbita de $\pi = [q_1, q_2]$ é $\pi_2 = [x_0^2, x_1^2]$. Note que se q_1 e q_2 são singulares em $p_1 = [1 : 0 : 0]$ temos que $b = c = 0$ e $B = C = 0$. Daí, podemos escolher para a base de π as quádricas a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \\ &\quad \text{e} \\ \tilde{q}_2 &= Dx_1^2 + Ex_1x_2 + Fx_2^2 \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$M_{[\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & D & E & F \end{bmatrix}.$$

A seguir assumiremos que $d \neq 0$ e $E \neq 0$. De modo que após fazer operações com as linhas podemos reescrever a matriz acima como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & H \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que uma base de π é dada pelas quádricas:

$$x_1^2 + hx_2^2 \quad \text{e} \quad x_1x_2 + Hx_2^2$$

Agora, vamos agir com $PGL(3)$ e encontrar uma matriz A tal que $A.\pi = [x_0^2, x_1^2]$. Considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_1 - Hx_2 \\ x_2 &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

Note que a matriz associada à transformação acima, a saber:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -H & 1 \end{bmatrix}.$$

tem determinante diferente de zero. Assim $A \in PGL(3)$. Assim temos que:

$$\begin{aligned} A \cdot \pi &= [x_1^2 - 2Hx_1x_2 + H^2x_2^2 + hx_2^2, \quad x_1x_2 - Hx_2^2 + Hx_2^2] \\ &= [x_1^2 + (h + H^2)x_2^2, \quad x_1x_2] \end{aligned}$$

A seguir estudaremos as seguintes duas possibilidades.

1ª possibilidade: Suponha que $h + H^2 = 0$ então teríamos que $A \cdot \pi = [x_1^2, x_1x_2]$. De onde temos que $mdc(q_1, q_2) \neq 1$ o que é um absurdo.

2ª possibilidade: Suponha que $h + H^2 \neq 0$, logo podemos considerar a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \\ x_2 &\longmapsto \frac{x_2}{\sqrt{h+H^2}} \end{aligned}$$

cuja matriz associada é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{h+H^2}} \end{bmatrix}.$$

Daí temos :

$$\begin{aligned} B.A.\pi &= [x_1^2 + (h + H^2)\left(\frac{x_2}{\sqrt{h+H^2}}\right)^2, \quad x_1\frac{x_2}{\sqrt{h+H^2}}] \\ &= [x_1^2 + x_2^2, \quad x_1\frac{x_2}{\sqrt{h+H^2}}] \\ &= [x_1^2 + x_2^2, \quad x_1x_2] \\ &= [(x_1 + x_2)^2, \quad x_1x_2] \end{aligned}$$

A seguir considere a transformação:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_2 \\ x_1 &\longmapsto x_0 - x_1 \\ x_2 &\longmapsto x_0 + x_1 \end{aligned}$$

cuja matriz associada é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente temos que:

$$\begin{aligned} C.B.A.\pi &= [(x_0 - x_1 + x_0 + x_1)^2, (x_0 + x_1)(x_0 - x_1)] \\ &= [(2x_0)^2, x_0^2 - x_1^2] \\ &= [4x_0^2, x_0^2 - x_1^2] \\ &= [x_0^2, x_1^2] \end{aligned}$$

Portanto a órbita de $\pi = [q_1, q_2] \in X - Y$ onde $Q_1 \cap Q_2$ consiste de um único ponto e q_1 e q_2 são singulares neste ponto é igual a órbita do ponto $\pi_2 = [x_0^2, x_1^2]$.

2. $\#Q_1 \cap Q_2 = 2$.

Vamos estudar agora o caso em que Q_1 e Q_2 se anulam em exatamente 2 pontos, a saber $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$, isto é, $V(\langle q_1, q_2 \rangle) = \{p_1, p_2\}$. A seguir analisaremos novamente três casos para determinar o representante da órbita de $\pi = [q_1, q_2]$ indicado no enunciado da Proposição 1.2.3.

- q_1, q_2 são não singulares em p_1 e p_3 .

Observe que as expressões que definem q_1 e q_2 são as seguintes:

$$q_1 = bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_1^2 + ex_1x_2$$

e

$$q_2 = Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_1^2 + Ex_1x_2$$

A seguir analisaremos o caso em que q_1 e q_2 possuem uma reta tangente em comum no ponto $p_1 = [1 : 0 : 0]$, isto é,

$$\nabla q_1(p_1) = (0, b, c) = \lambda(0, B, C) = \lambda \nabla q_2(p_1) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}$$

logo, temos que:

$$\begin{cases} b = \lambda B \\ c = \lambda C \end{cases}$$

Assim obtemos:

$$q_1 = dx_1^2 + ex_1x_2$$

e

$$q_2 = Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_1^2 + Ex_1x_2$$

Claramente $C \neq 0$. A seguir assumiremos que $d \neq 0$, daí obtemos a seguinte representação para q_1 e q_2 :

$$\tilde{q}_1 = x_1^2 + ex_1x_2$$

e

$$\tilde{q}_2 = Bx_0x_1 + x_0x_2 + E_1x_1x_2$$

Vamos mostrar agora que existe uma matriz $A \in PGL(3)$ tal que $A.\pi = [x_0^2, x_1x_2]$ ou $A.\pi = [x_0^2 + x_1x_2, x_0x_2]$. Considere então a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 - E_1x_1 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \\ x_2 &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned} A.\pi &= [x_1^2 + ex_1x_2, Bx_0x_1 - BE_1x_1^2 + x_0x_2 - E_1x_1x_2 + E_1x_1x_2] \\ &= [x_1^2 + ex_1x_2, Bx_0x_1 - BE_1x_1^2 + x_0x_2]. \end{aligned}$$

Novamente considere a transformação linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \\ x_2 &\longmapsto x_2 - Bx_1 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned} B.A.\pi &= [x_1^2 + ex_1x_2 - eBx_1^2, Bx_0x_1 - BE_1x_1^2 + x_0x_2 - Bx_0x_1] \\ &= [B_1x_1^2 + ex_1x_2, x_0x_2 + BE_2x_1^2]. \end{aligned}$$

Note que a representação matricial de \hat{q}_1 e \tilde{q}_2 é dado por:

$$M_{[\hat{q}_1, \tilde{q}_2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & B_1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que e e B_1 não podem ser não nulos ao mesmo tempo. De fato, suponha que e e B_1 são não nulos, então temos que: $\hat{q}_1 = B_1x_1^2 + ex_1x_2$ $\tilde{q}_2 = x_0x_2 + BE_2x_1^2$

Note que $[0 : 0 : 1] \in V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$. Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 = x_1(B_1x_1 + ex_2) = 0 \\ \tilde{q}_2 = x_0x_2 + E_2x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Então, temos que:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_0x_2 &= 0. \end{aligned}$$

ou

(b)

$$\begin{aligned} B_1x_1 + ex_2 &= 0 \\ x_0x_2 + E_2x_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Do sistema (a) obtemos os pontos $[0 : 0 : 1], [1 : 0 : 0] \in V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$. Já sistema (b) obtemos que $x_1(-B_1x_0 + eE_2x_1) = 0$. Assim os pontos determinados são $[1 : 0 : 0]$ e $[e^2E_2 : eB_1 : -B_1^2]$. Como e e B_1 são não nulos, então $eB_1 \neq 0$, o que é um absurdo, $eB_1 = 0$. Ou seja, um desses fatores é nulo. Portanto, se $e \neq 0$ então $B_1 = 0$ ou se $B_1 \neq 0$ então $e = 0$.

A seguir mostraremos que em cada caso temos que as órbitas de $\pi = [q_1, q_2] \in X_Y$ onde $Q_1 \cap Q_2$ consiste de dois pontos são iguais as órbitas dos pontos $\pi_3 = [x_0^2, x_1x_2]$ e $\pi_4 = [x_0^2 + x_1x_2, x_0x_2]$.

(a) Se $B_1 \neq 0$ então $e = 0$. Neste caso temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= x_1^2 \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_2 + E_2x_1^2. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o seguinte representante para a órbita: $\pi_3 = [x_1^2, x_0x_2]$.

(b) Se $e \neq 0$ então $B_1 = 0$. Neste caso obtemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= x_1x_2 \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_2 + E_2x_1^2. \end{aligned}$$

Verifica-se que $E_2 \neq 0$, assim temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= x_1x_2 \\ \tilde{q}_2 &= x_0x_2 + x_1^2.\end{aligned}$$

Consideremos agora a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_1 \\ x_1 &\longmapsto x_0 \\ x_2 &\longmapsto x_2\end{aligned}$$

Segue-se que:

$$A.\pi = [x_0^2 + x_1x_2, x_0x_2]$$

Concluindo assim que $\pi_4 = [x_0^2 + x_1x_2, x_0x_2]$ é um representante da órbita em estudo.

- q_1 é singular em p_1 e p_3 e q_2 é não singular em p_1 e p_3 .
Observe que se $\pi = [q_1, q_2]$ e se $\nabla q_1(p_1) = 0$ e $\nabla q_2(p_1) \neq 0$, $\nabla q_1(p_3) = 0$ e $\nabla q_2(p_3) \neq 0$ então podemos modificar a base de π , de modo que, as quádricas que estão na nova base são não singulares em p_1 e p_3 . De fato, $\pi = [q_1, q_2] = [q_1 + q_2, q_2]$, daí voltamos ao caso anterior. Logo, temos que o representante da órbita de π são dados pelos os pontos $\pi_3 = [x_0^2, x_1x_2]$ e $\pi_4 = [x_0^2 + x_1x_2, x_0x_2]$.
- q_1 e q_2 são singulares em p_1 e p_3 .
Vamos mostrar que tal situação não é válida. De fato, pois se q_1 e q_2 são singulares em p_1 e p_3 então temos que $b = c = e = 0$ e $B = C = E = 0$. Daí teríamos que $\pi = [dx_1^2, Dx_1^2]$ o que é um absurdo.

3. $3 \leq \#Q_1 \cap Q_2$.

Sejam q_1, q_2 definidas por:

$$\begin{aligned}q_1 &= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \\ q_2 &= Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_1^2 + Ex_1x_2 + Fx_2^2.\end{aligned}$$

Suponha que $Q_1 \cap Q_2 \supseteq \{p_1, p_2, p_3\}$ onde $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$. Então as equações que definem Q_1 e Q_2 são da seguinte forma:

$$q_1 = x_1(x_0 + \beta x_2)$$

$$q_2 = x_2(x_0 + \alpha x_1)$$

Note que: $V(q_1, q_2) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ onde $p_4 = [-\alpha\beta : \beta : \alpha]$. Assim temos duas possibilidades:

1º Possibilidade $\alpha\beta \neq 0$.

Neste caso $Q_1 \cap Q_2$ consiste de 4 pontos distintos $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ citados acima.

2º Possibilidade $\alpha\beta = 0$.

Neste caso $Q_1 \cap Q_2$ consiste de 3 pontos exatamente, a saber $\{p_1, p_2, p_3\}$. (Deixamos ao leitor interessado conferir que em qualquer um dos casos $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$) p_4 coincide com algum dos pontos anteriores.

A seguir determinaremos representantes das órbitas em cada um dos casos citados acima.

(a) Existe $A \in PGL(3)$ tal que $A.\pi = [x_1(x_0 - x_2), x_2(x_0 - x_1)]$ se $\alpha\beta \neq 0$ e $V(A.q_1, A.q_2) = \{p_1, p_2, p_3, [1 : 1 : 1]\}$. De fato, se $\alpha\beta \neq 0$ então temos que $\pi = [x_1(x_0 + \beta x_2), x_2(x_0 + \alpha x_1)]$. Considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto -\frac{x_1}{\alpha} \\ x_2 &\longmapsto -\frac{x_2}{\beta} \end{aligned}$$

Daí, basta tomar a seguinte matriz $A \in PGL(3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned} A.\pi &= \left[-\frac{x_1}{\alpha}(x_0 - \beta\frac{x_2}{\beta}), -\frac{x_2}{\beta}(x_0 - \frac{x_1}{\alpha})\right] \\ &= \left[-\frac{x_1}{\alpha}(x_0 - x_2), -\frac{x_2}{\beta}(x_0 - x_1)\right] \\ &= [x_1(x_0 - x_2), x_2(x_0 - x_1)] \end{aligned}$$

(b) Existe $A \in PGL(3)$ tal que $A.\pi = [x_0x_2, x_1(x_0 - x_2)]$ se $\alpha\beta = 0$ e $V(A.q_1, A.q_2) = \{p_1, p_2, p_3\}$. De fato, se $\alpha = 0$ então temos

que $\pi = [x_0x_2, x_1(x_0 + \beta x_2)]$. Considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: S_1 &\longrightarrow S_1 \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_2 \\ x_2 &\longmapsto \frac{x_1}{\beta} \end{aligned}$$

Daí, basta tomar a seguinte matriz $A \in PGL(3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} A.\pi &= \left[\frac{x_0x_1}{\beta}, x_2(x_1 + \alpha \frac{x_0}{\alpha}) \right] \\ &= [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)] \end{aligned}$$

Portanto, temos que um representante da órbita de π é dado por:

$$\begin{aligned} \pi_5 &= [x_1x_0, x_2(x_0 + x_1)] \text{ se } \#Q_1 \cap Q_2 = 3 \\ &\text{e} \\ \pi_6 &= [x_1(x_0 - x_2), x_2(x_0 - x_1)] \text{ se } \#Q_1 \cap Q_2 = 4 \end{aligned}$$

■

1.2.3 Descrição das dimensões das órbitas dos pontos $\pi \in X - Y$.

Vamos agora determinar as dimensões das órbitas, para isto usaremos Corolário 5.2.13.

Cálculo da Dimensão das Órbitas de pontos cuja Quádrupla associada consiste de um único ponto.

A seguir determinaremos o estabilizador de $\pi_1 = [x_1^2, x_0x_1 + x_2^2]$. Usando o Corolário 5.2.13 segue-se que se $A \in E_{\pi_1}$ então $A^t([1 : 0 : 0]) = \{[1 : 0 : 0]\}$. Ou seja, A^t fixa o ponto $p_1 = [1 : 0 : 0]$. Verifica-se que as matrizes que estabilizam o ponto p_1 são da forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} \lambda_0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix}.$$

Suponha que $A \in E_{\pi_1}$, então:

$$(A^t \cdot x_1)^2 = \alpha x_1^2 + \beta(x_0 x_1 + x_2^2) \quad (1.5)$$

$$(A^t \cdot x_0)(A^t \cdot x_1) + (A^t \cdot x_2)^2 = \alpha_1 x_1^2 + \beta_1(x_0 x_1 + x_2^2) \quad (1.6)$$

Logo, de 1.5 temos que:

$$\begin{aligned} (bx_0 + ex_1 + hx_2)^2 &= \alpha x_1^2 + \beta(x_0 x_1 + x_2^2) \\ b^2 x_0^2 + e^2 x_1^2 + h^2 x_2^2 + 2bex_0 x_1 + 2bhx_0 x_2 + 2ehx_1 x_2 &= \alpha x_1^2 + \beta(x_0 x_1 + x_2^2) \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} b^2 = 0 \\ h^2 = \beta = 0 \\ 2be = \beta = 0 \\ bh = 0 \\ eh = 0 \end{cases}$$

Da relação 1.6 temos:

$$\lambda e x_0 x_1 + c^2 x_0^2 + f^2 x_1^2 + i^2 x_2^2 + 2cf x_0 x_1 + 2ci x_0 x_2 + 2fi x_1 x_2 = \alpha_1 x_1^2 + \beta_1(x_0 x_1 + x_2^2)$$

De onde temos:

$$\begin{cases} \lambda_0 e + 2cf = \beta_1 \\ c^2 = 0 \\ f^2 = \alpha_1 \\ i^2 = \beta_1 \\ ci = 0 \\ fi = 0 \end{cases}$$

Note que $\det A^t = \lambda_0 ei \neq 0$ logo $f = 0$. Portanto:

$$A^t = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\lambda_0} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o conjunto das matrizes que pertencem ao estabilizador de π_1 , a saber, E_{π_1} é dado por:

$$E_{\pi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\lambda_0} \end{bmatrix}.$$

De onde concluímos que a $\dim(E_{\pi_1}) = 2$ e portanto temos que:

$$\dim(\mathcal{O}_{\pi_1}) = 8 - 2 = 6$$

A seguir determinaremos o estabilizador de $\pi_2 = [x_1^2, x_2^2]$. Novamente usando o Corolário 5.2.13 segue-se que se $A \in E_{\pi_2}$ então $A^t([1 : 0 : 0]) = \{[1 : 0 : 0]\}$. Ou seja, A^t fixa o ponto $p_1 = [1 : 0 : 0]$. Verifica-se que as matrizes que estabilizam o ponto p_1 são da forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} \lambda_0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix}.$$

Suponha que $A \in E_{\pi_2}$, então:

$$(A^t \cdot x_0)^2 = \alpha x_0^2 + \beta x_1^2 \quad (1.7)$$

$$(A^t \cdot x_1)^2 = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1^2 \quad (1.8)$$

Logo, de 1.7

$$\lambda_0^2 x_0^2 = \alpha x_0^2 + \beta x_1^2$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \lambda_0^2 = \alpha \\ 0 = \beta \end{cases}$$

Da relação 1.8 temos:

$$(bx_0 + ex_1 + hx_2)^2 = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1^2$$

$$b^2 x_0^2 + e^2 x_1^2 + h^2 x_2^2 + 2bex_0 x_1 + 2bhx_0 x_2 + 2ehx_1 x_2 = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1^2$$

De onde:

$$\begin{cases} b^2 = \alpha_1 \\ e^2 = \beta_1 \\ be = 0 \\ bh = 0 \\ eh = 0 \\ h^2 = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$A^t = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{\lambda_0} \\ 0 & \frac{e}{\lambda_0} & \frac{f}{\lambda_0} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\lambda_0} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o conjunto das matrizes que pertencem ao estabilizador de π_2 , a saber, E_{π_2} é dada por:

$$E_{\pi_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{\lambda_0} \\ 0 & \frac{e}{\lambda_0} & \frac{f}{\lambda_0} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\lambda_0} \end{bmatrix}.$$

De onde concluímos que a $\dim(E_{\pi_2}) = 4$ e portanto temos que

$$\dim(\mathcal{O}_{\pi_1}) = 8 - 4 = 4.$$

Cálculo da Dimensão das Órbitas de pontos cuja quádrupla associada consiste de exatamente dois pontos.

Vamos determinar agora o estabilizador de π_3 . Novamente segue-se do Corolário 5.2.13 que se $A \in E_{\pi_3}$ temos que $A^t \cdot \{p_2 = [0 : 1 : 0], p_3 = [0 : 0 : 1]\} = \{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$. Ou seja, A^t fixa o conjunto $\{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$. Assim temos os seguintes dois casos para $A \in E_{\pi_3}$.

1. $A^t \cdot [e_3] = [e_3]$ e $A^t \cdot [e_2] = [e_2]$.

Neste caso verifica-se que as matrizes $A \in PGL(3)$ que estabilizam o conjunto $\{p_2, p_3\}$ são da seguinte forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & \lambda_2 & 0 \\ g & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(A^t \cdot x_0)^2 = \alpha x_0^2 + \beta x_1 x_2 \quad (1.9)$$

$$(A^t \cdot x_1)(A^t \cdot x_2) = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1 x_2 \quad (1.10)$$

Logo, temos de 1.9 que:

$$\begin{aligned} (ax_0 + dx_1 + gx_2)^2 &= \alpha x_0^2 + \beta x_1 x_2 \\ a^2 x_0^2 + d^2 x_1^2 + g^2 x_2^2 + 2adx_0 x_1 + 2agx_0 x_2 + 2dgx_1 x_2 &= \alpha x_0^2 + \beta x_1 x_2 \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = \alpha \\ d^2 = 0 \\ g^2 = 0 \\ ag = 0 \\ 2dg = \beta \Rightarrow \beta = 0 \\ ad = 0 \end{array} \right.$$

Da relação 1.10 obtemos:

$$(\lambda_2 x_1)(\lambda_3 x_2) = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1 x_2 \quad \lambda_2 \lambda_3 x_1 x_2 = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1 x_2$$

Assim

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ \lambda_2 \lambda_3 = \beta_1 \end{cases}$$

Portanto

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \frac{\lambda_2}{a} & 0 \\ g & 0 & \frac{\lambda_3}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \theta_1 & 0 \\ g & 0 & \theta_2 \end{bmatrix} = A_{\theta}^t.$$

2. $A^t \cdot [e_3] = [e_2]$ e $A^t \cdot [e_2] = [e_3]$. Neste caso verifica-se que as matrizes $A \in PGL(3)$ que estabilizam o conjunto $\{p_2, p_3\}$ são da seguinte forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & \lambda_4 \\ g & \lambda_5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(A^t \cdot x_0)^2 = \alpha x_0^2 + \beta x_1 x_2 \quad (1.11)$$

$$(A^t \cdot x_1)(A^t \cdot x_2) = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1 x_2 \quad (1.12)$$

Logo, temos de 1.11 que:

$$\begin{aligned} (ax_0 + dx_1 + gx_2)^2 &= \alpha x_0^2 + \beta x_1 x_2 \\ a^2 x_0^2 + d^2 x_1^2 + g^2 x_2^2 + 2adx_0 x_1 + 2agx_0 x_2 + 2dgx_1 x_2 &= \alpha x_0^2 + \beta x_1 x_2 \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} a^2 = \alpha \\ d^2 = 0 \\ g^2 = 0 \\ ag = 0 \\ 2dg = \beta \Rightarrow \beta = 0 \\ ad = 0 \end{cases}$$

Da relação 1.12 temos que:

$$(\lambda_5 x_1)(\lambda_4 x_2) = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1 x_2 \quad \lambda_5 \lambda_4 x_1 x_2 = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_1 x_2$$

Logo

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ \lambda_5 \lambda_4 = \beta_1 \end{cases}$$

Assim

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_4}{a} \\ 0 & \frac{\lambda_5}{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix} = A_{\mu}^t.$$

Note que existe uma matriz $B \in PGL(3)$ tal que:

$$A_{\mu}^t \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

ou seja,

$$A_{\mu}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix} B^{-1}$$

Basta tomar B como sendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que $B^{-1} = B$.

A conclusão é que o estabilizador de π_3 é dado por:

$$E_{\pi_3} = \langle A_{\theta}^t, A_{\theta}^t B \rangle.$$

Logo, temos que $\dim(\mathcal{O}_{\pi_3}) = 8 - 2 = 6$.

A seguir iremos determinar o estabilizador de π_4 . Novamente segue-se do Corolário 5.2.13 que se $A \in E_{\pi_4}$ temos que $A^t \cdot \{p_2 = [0 : 1 : 0], p_3 = [0 : 0 : 1]\} = \{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$. Ou seja, A^t fixa o conjunto $\{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$. Assim temos os seguintes dois casos para $A \in E_{\pi_4}$.

1. $A^t \cdot [e_3] = [e_3]$ e $A^t \cdot [e_2] = [e_2]$.

Neste caso verifica-se que as matrizes $A \in PGL(3)$ que estabilizam o conjunto $\{p_2, p_3\}$ são da seguinte forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & \lambda_6 & 0 \\ g & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(A^t \cdot x_0) + (A^t \cdot x_1)(A^t \cdot x_2) = \alpha x_0^2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 \quad (1.13)$$

$$(A^t \cdot x_0)(A^t \cdot x_2) = \alpha_1 x_0^2 + \alpha_1 x_0^2 + \alpha_1 x_1 x_2 + \beta_1 x_0 x_2 \quad (1.14)$$

Logo, temos de 1.13 que:

$$\begin{aligned} (ax_0 + dx_1 + gx_2)^2 + \lambda_6 x_1 \lambda_7 x_2 &= \alpha x_0^2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 \\ a^2 x_0^2 + d^2 x_1^2 + g^2 x_2^2 + 2adx_0 x_1 + 2agx_0 x_2 + 2dgx_1 x_2 + \lambda_6 x_1 \lambda_7 x_2 &= \\ \alpha x_0^2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 & \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} a^2 = \alpha \\ 2dg + \lambda_6 \lambda_7 = \alpha \\ d^2 = 0 \\ ad = 0 \\ 2ag = \beta \end{cases}$$

Da relação 1.14 obtemos:

$$a\lambda_7 x_0 x_2 = \alpha_1 x_0^2 + \alpha_1 x_1 x_2 + \beta_1 x_0 x_2$$

Assim

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ a\lambda_7 = \beta_1 \end{cases}$$

Portanto

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_6}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_7}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \theta_3 & 0 \\ g & 0 & \theta_4 \end{bmatrix} = A_\theta^t.$$

2. $A^t \cdot [e_3] = [e_2]$ e $A^t \cdot [e_2] = [e_3]$. Neste caso verifica-se que as matrizes $A \in PGL(3)$ que estabilizam o conjunto $\{p_2, p_3\}$ são da seguinte forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & \lambda_8 \\ g & \lambda_9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(A^t \cdot x_0) + (A^t \cdot x_1)(A^t \cdot x_2) = \alpha x_0^2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 \quad (1.15)$$

$$(A^t \cdot x_0)(A^t \cdot x_2) = \alpha_1 x_0^2 + \alpha_1 x_0^2 + \alpha_1 x_1 x_2 + \beta_1 x_0 x_2 \quad (1.16)$$

Logo, temos de 1.15 que:

$$\begin{aligned} (ax_0 + dx_1 + gx_2)^2 + \lambda_8 x_1 \lambda_9 x_2 &= \alpha x_0^2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 \\ a^2 x_0^2 + d^2 x_1^2 + g^2 x_2^2 + 2adx_0 x_1 + 2agx_0 x_2 + 2dgx_1 x_2 + \lambda_8 \lambda_9 x_1 x_2 &= \\ \alpha x_0^2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 & \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = \alpha \\ d^2 = 0 \\ g^2 = 0 \\ 2ag = \beta \\ ad = 0 \\ 2dg + \lambda_8 \lambda_9 = \alpha \end{array} \right.$$

Da relação 1.16 temos que:

$$a\lambda_9 x_0 x_2 = \alpha_1 x_0^2 + \alpha_1 x_1 x_2 + \beta_1 x_0 x_2$$

Logo

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha_1 \\ a\lambda_9 = \beta_1 \end{array} \right.$$

Assim

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_8}{a} \\ 0 & \frac{\lambda_9}{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & \mu_4 & 0 \end{bmatrix} = A_\mu^t.$$

Note que existe uma matriz $B \in PGL(3)$ tal que:

$$A_\mu^t \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 \end{bmatrix}.$$

ou seja,

$$A_\mu^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 \end{bmatrix} B^{-1}$$

Basta tomar B como sendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que $B^{-1} = B$.

A conclusão é que o estabilizador de π_4 é dado por:

$$E_{\pi_4} = \langle A_\theta^t, A_\theta^t B \rangle.$$

Logo, temos que $\dim(\mathcal{O}_{\pi_4}) = 8 - 2 = 6$.

Cálculo da Dimensão das Órbitas de pontos cuja quádrupla associada consiste de exatamente três pontos.

A seguir determinaremos o estabilizador de π_5 . Novamente usando o Corolário 5.2.13 segue-se que se $A \in E_{\pi_5}$ temos que $A^t \cdot \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\} = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$. A seguir estudaremos os seguintes seis casos.

1. $A^t \cdot [e_1] = [e_1]$
 $A^t \cdot [e_2] = [e_2]$
 $A^t \cdot [e_3] = [e_3]$

Verifica-se que as matrizes $A \in PGL(3)$ que estabilizam o conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ são dadas por:

$$A^t = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(A^t \cdot x_0)(A^t \cdot x_1) = \alpha x_0 x_1 + \beta x_2(x_0 + x_1) \quad (1.17)$$

$$(A^t \cdot x_2)(A^t \cdot x_0 + A^t x_1) = \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_2(x_0 + x_1) \quad (1.18)$$

Logo, temos de 1.17 que:

$$\lambda_0 \lambda_1 x_0 x_1 = \alpha x_0 x_1 + \beta x_2(x_0 + x_1)$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \lambda_1 = \alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Agora de 1.18 temos:

$$\lambda_2 x_2 (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) = \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_2 (x_0 + x_1)$$

Assim, a outra relação é dada por:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \lambda_0 \lambda_2 = \beta_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \beta_1 \end{cases}$$

A conclusão é que $\lambda_0 = \lambda_1$. Daí a matriz é dada por:

$$A^t = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & \lambda \end{bmatrix} = A_\lambda^t.$$

Considere o caso a seguir:

2. Seja $A \in PGL(3)$ uma matriz tal que:

$$A^t \cdot [e_1] = [e_2]$$

$$A^t \cdot [e_2] = [e_1]$$

$$A^t \cdot [e_3] = [e_3]$$

então A é da seguinte forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(A^t \cdot x_0)(A^t \cdot x_1) = \alpha x_0 x_1 + \beta x_2 (x_0 + x_1) \quad (1.19)$$

$$(A^t \cdot x_2)(A^t \cdot x_0 + A^t \cdot x_1) = \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_2 (x_0 + x_1) \quad (1.20)$$

De, 1.19 obtemos:

$$\lambda_1 \lambda_0 x_0 x_1 = \alpha x_0 x_1 + \beta x_2 (x_0 + x_1)$$

Assim:

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_0 = \alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Da relação 1.20 temos que:

$$\begin{aligned}\lambda_2 x_2(\lambda_1 x_0 + \lambda_0 x_1) &= \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_2(x_0 + x_1) \\ \lambda_2 \lambda_1 x_0 x_2 + \lambda_2 \lambda_0 x_1 x_2 &= \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_0 x_2 + \beta_1 x_1 x_2\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} \lambda_2 \lambda_1 = \beta_1 \\ \lambda_2 \lambda_0 = \beta_1 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Concluimos assim que $\lambda_1 = \lambda_0$, logo, temos que:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 & 0 \\ \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = A_\sigma^t.$$

Note que podemos multiplicar a matriz A_σ^t por outra matriz fixa $B_1 \in PGL(3)$, tal que:

$$A_\sigma^t \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}.$$

ou seja,

$$A_\sigma^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} B_1^{-1}$$

Basta tomar B_1 da seguinte forma:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_1^{-1}.$$

A seguir vamos considerar o terceiro caso:

3. Seja $A \in PGL(3)$ tal que

$$A^t \cdot [e_1] = [e_3]$$

$$A^t \cdot [e_2] = [e_1]$$

$$A^t \cdot [e_3] = [e_2]$$

então A é da seguinte forma:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assi, temos:

$$(A^t \cdot x_0)(A^t \cdot x_1) = \alpha x_0 x_1 + \beta x_2(x_0 + x_1) \quad (1.21)$$

$$(A^t \cdot x_2)(A^t \cdot x_0 + A^t \cdot x_1) = \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_2(x_0 + x_1) \quad (1.22)$$

De, 1.21 temos:

$$\lambda_1 \lambda_2 x_0 x_1 = \alpha x_0 x_1 + \beta x_2(x_0 + x_1)$$

Assim:

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = \alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Da relação 1.22 segue-se que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 x_2(\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_1) &= \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_2(x_0 + x_1) \\ \lambda_0 \lambda_1 x_0 x_2 + \lambda_2 \lambda_0 x_1 x_2 &= \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_1 x_0 x_2 + \beta_1 x_1 x_2 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} \lambda_0 \lambda_1 = \beta_1 \\ \lambda_2 \lambda_0 = \beta_1 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Concluimos assim que $\lambda_1 = \lambda_2$, logo, temos que:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\lambda_0}{\lambda_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_\gamma^t.$$

Note que podemos multiplicar a matriz A_γ^t por outra matriz fixa $B_2 \in PGL(3)$, tal que:

$$A_\gamma^t \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

isot é,

$$A_\gamma^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} B_2^{-1}$$

Basta tomar B_2 da seguinte forma:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B_1^{-1}.$$

Nos outros três casos a saber:

4. $A^t \cdot [e_1] = [e_2]$
 $A^t \cdot [e_2] = [e_3]$
 $A^t \cdot [e_3] = [e_1]$

Verifica-se que a matriz $A^t \in PGL(3)$ é dada por:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_1}{\mu_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 \end{bmatrix} = A_\varphi^t.$$

Note que existe uma matriz $B_3 \in PGL(3)$ tal que:

$$A_\varphi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi \end{bmatrix} = B_3^{-1}$$

Basta tomar B_3 como sendo:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_3^{-1}$$

5. $A^t \cdot [e_1] = [e_1]$
 $A^t \cdot [e_2] = [e_3]$
 $A^t \cdot [e_3] = [e_2]$

Verifica-se que a matriz $A^t \in PGL(3)$ é dada por:

$$A^t = \begin{bmatrix} \mu_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_5 \\ 0 & \mu_6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\mu_6}{\mu_5} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \psi & 0 \end{bmatrix} = A_\psi^t.$$

Segue-se que existe uma matriz $B_4 \in PGL(3)$ tal que:

$$A_\psi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \psi \end{bmatrix} = B_4^{-1}$$

Basta considerar B_4 como sendo:

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad A^t \cdot [e_1] &= [e_3] \\
A^t \cdot [e_2] &= [e_2] \\
A^t \cdot [e_3] &= [e_1]
\end{aligned}$$

Verifica-se neste caso que a matriz $A^t \in PGL(3)$ é dada por:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_8 \\ 0 & \mu_8 & 0 \\ \mu_7 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu_7}{\mu_8} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_\tau^t.$$

E de fato, existe uma matriz $B_5 \in PGL(3)$ de modo que:

$$A_\tau^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} = B_5^{-1}$$

Note que basta considerar B_5 como sendo:

$$B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O raciocínio segue de modo análogo aos anteriores e chegamos que o estabilizador de π_5 é dado por:

$$E_{\pi_5} = \{ \langle A_\lambda^t, A_\lambda^t B_i \rangle \}_{i=1}^5.$$

Assim, temos que $\dim(\mathcal{O}_{\pi_5}) = 8 - 1 = 7$.

Cálculo da Dimensão das Órbitas de pontos cuja quádrupla associada consiste de exatamente quatro pontos.

Novamente usando o Corolário 5.2.13 segue-se que se $A \in E_{\pi_6}$ então $A^t \cdot \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 1 : 1]\} = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 1 : 1]\}$. Isto é, A^t fixa o conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Pode-se verificar que a cardinalidade do conjunto estabilizador da órbita de π_6 é finita contendo 24 elementos. Deixamos ao leitor interessado a verificação desse fato. Assim, verifica-se que $\dim(\mathcal{O}_{\pi_6}) = 8 - 0 = 8$.

1.2.4 Proposição. Z é a única órbita fechada de X .

Demonstração. Com efeito, sabemos que Z é uma órbita fechada conforme 5.4.3. E temos que:

$$X = \left[\bigsqcup_{\pi \notin Y} \mathcal{O}_\pi \right] \bigsqcup (Y - Z) \bigsqcup Z.$$

Observe que a dimensão das órbitas que compõem em $\bigsqcup_{\pi \notin Y}$ é no mínimo 4. Já $Y - Z$ tem dimensão 4 e Z tem dimensão 3. Portanto, Z é a única órbita de menor dimensão. Assim segue-se da Proposição 5.4.3 que Z é a única órbita fechada de X .

1.3 Determinação das órbitas de \mathcal{X} .

Considere $\mathcal{X} = \{(\pi, V) \mid \pi \in X \text{ e } V \in G(6, S_3)\}$ onde

$$V = \begin{cases} q_1 S_1 \oplus q_2 S_1 & \text{se } \pi = [q_1, q_2] \in X - Y \\ lS_{2(m_1, m_2)} + [h_3] & \text{se } \pi = [lm_1, lm_2] \in Y \end{cases}$$

para uma única escolha de h_3 tal que $\overline{[h_3]} \in \mathbb{P}\left(\frac{S_3(m_1, m_2)}{lS_{2(m_1, m_2)}}\right)$. Note que $\mathcal{X} \subseteq G(2, S_2) \times G(6, S_3)$ e o grupo $PGL(3)$ age neste produto de grassmanianas.

1.3.1 Observação. Note que se $(\pi, V) \in \mathcal{X}$ com $\pi \in X - Y$ então V está unicamente determinado. De fato, $V_\pi = q_1 S_1 \oplus q_2 S_1$ se $\pi = [q_1, q_2]$. Neste caso, denotaremos V por V_π .

então, verifica-se que:

1.3.2 Lema. \mathcal{X} é $PGL(3)$ - invariante.

Demonstração. Vamos mostrar que $A \cdot (\pi, V) = (A \cdot \pi, A \cdot V) \in \mathcal{X}$. Analisaremos dois casos:

1. caso: Se $\pi \in X - Y$ então temos que $\pi = [q_1, q_2]$ e $V = V_\pi = q_1 S_1 \oplus q_2 S_1$. Logo, $A \cdot \pi = [A \cdot q_1, A \cdot q_2] \in X - Y$. Note que $V_{A \cdot \pi} = (A \cdot q_1) S_1 \oplus (A \cdot q_2) S_1$. Basta mostrar que $A \cdot V_\pi = V_{A \cdot \pi}$. Note que $V_\pi = [q_1 x_0, q_1 x_1, q_1 x_2, q_2 x_0, q_2 x_1, q_2 x_2] \in G(6, S_3)$, daí $A \cdot V_\pi = [(A \cdot q_1)(A \cdot x_0), \dots, (A \cdot q_2)(A \cdot x_2)] = V_{A \cdot \pi}$. Portanto, $A \cdot (\pi, V_\pi) = (A \cdot \pi, V_{A \cdot \pi}) \in \mathcal{X}$.

2. caso: Se $\pi \in Y$ onde $\pi = [lm_1, lm_2]$ temos que $V = lS_{2(m_1, m_2)} + [h_3]$ onde $\overline{h_3} \in \frac{S_3(m_1, m_2)}{lS_{2(m_1, m_2)}}$. Como Y é $PGL(3)$ invariante temos que $A \cdot \pi \in Y$. Vamos mostrar que $A \cdot (\pi, V) \in \mathcal{X}$. De fato, pois temos que $A \cdot (\pi, V) = (A \cdot \pi, A \cdot V)$ onde $A \cdot V = (A \cdot l)S_{2(A \cdot m_1, A \cdot m_2)} + [A \cdot h_3]$ onde $\overline{A \cdot h_3} \in \mathbb{P}\left(\frac{S_3(A \cdot m_1, A \cdot m_2)}{(A \cdot l)S_{2(A \cdot m_1, A \cdot m_2)}}\right)$. Como a cúbica é escolhida de maneira única temos que $A \cdot (\pi, V) \in \mathcal{X}$. Portanto \mathcal{X} é $PGL(3)$ invariante. ■

1.3.3 Lema. *Existem exatamente 2 órbitas fechadas em \mathcal{X} representadas pelos pontos:*

1. $x_1^1 = ([x_0^2, x_0x_1], x_0V_1)$ onde, $V_1 = x_0S_1 + x_1[x_1, x_2] + [x_2^2]$
2. $x_1^1 = ([x_0^2, x_0x_1], V_2)$ onde, $V_2 = x_0^2S_1 + x_0x_1[x_1, x_2] + [x_1^3]$.

Demonstração. Seja $\mathcal{O}_{(\pi, V)}$ uma órbita de \mathcal{X} . Verifica-se que $\mathcal{O}_{\pi, V}$ projeta-se em uma órbita de X , a saber \mathcal{O}_π , isto é, $proj(\mathcal{O}_{(\pi, V)}) = \mathcal{O}_\pi$. Note que se $\mathcal{O}_{(\pi, V)}$ for uma órbita fechada de \mathcal{X} então \mathcal{O}_π é uma órbita fechada de X , ou seja, $\mathcal{O}_\pi = Z = \mathcal{O}_{\pi_0}$ com $\pi_0 = [x_0^2, x_0x_1]$. A seguir mostraremos que \mathcal{X} tem exatamente duas órbitas fechadas. Para isto vamos agir com o estabilizador de $\pi_0 = [x_0^2, x_0x_1]$, sobre $\mathcal{X}_{\pi_0} = \{(\pi_0, V) \mid (\pi_0, V) \in \mathcal{X}\}$ pela ação natural.

$$\begin{aligned} \varphi : E_{\pi_0} \times \mathcal{X}_{\pi_0} &\longrightarrow \mathcal{X}_{\pi_0} \\ (A, (\pi_0, V)) &\longmapsto (\pi_0, A \cdot V) \end{aligned}$$

Considere $V = x_0S_{2(x_0, x_1)} + [h_3]$ onde $h_3 = x_0x_2^2 + b_2x_1^3 + b_3x_1^2x_2 + b_4x_2^3$. Note que

$$\begin{aligned} A \cdot V &= (A \cdot x_0)(A \cdot S_{2(x_0, x_1)} + [A \cdot h_3]) \\ &= x_0S_{2(x_0, x_1)} + [A \cdot h_3] \end{aligned}$$

Considere a seguinte família a 1-parâmetro de elemento do grupo

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} A_\epsilon \cdot V &= x_0S_{2(x_0, x_1)} + [A_\epsilon \cdot h_3] \\ &= x_0S_{2(x_0, x_1)} + [x_0x_2^2 + b_2\epsilon x_1^3 + b_3\epsilon x_1^2x_2 + \epsilon x_2^3] \end{aligned}$$

De onde temos que $(\pi_0, x_0 S_{2(x_0, x_1)} + [x_0 x_2^2])$ está no fecho da órbita de $(\pi_0, x_0 S_{2(x_0, x_1)} + [h_3])$.

Para determinarmos a segunda órbita, consideremos novamente a seguinte família a 1-parâmetro:

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} A_\epsilon \cdot V &= x_0 S_{2(x_0, x_1)} + [A_\epsilon \cdot h_3] \\ &= x_0 S_{2(x_0, x_1)} + [\epsilon^3 x_0 x_2^2 + b_2 x_1^3 + b_3 \epsilon x_1^2 x_2 + b^4 \epsilon^3 x_2^3] \end{aligned}$$

De onde temos que $(\pi_0, x_0 S_{2(x_0, x_1)} + [x_1^3])$ está no fecho da órbita de $(\pi_0, x_0 S_{2(x_0, x_1)} + [h_3])$. :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{x_1^1} &= \{([l^2, lm], lS_2) \mid l, m \in S_1 \text{ LI}\} \\ \mathcal{O}_{x_2^1} &= \{([l^2, lm], lS_{2(l, m)} + [m^3]) \mid l, m \in S_1 \text{ LI}\} \end{aligned}$$

Verifica-se também que $\mathcal{O}_{x_1^1} \cong \Gamma \cong Z$ e $\mathcal{O}_{x_2^1} \cong \Gamma \cong Z$. Para isto basta definir os seguintes mapas:

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma &\longrightarrow \mathcal{O}_{x_1^1} \\ (p, l) &\longmapsto ([l^2, lm], lS_2) \end{aligned}$$

onde $\{p\} = V(l) \cap V(m)$

e

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma &\longrightarrow \mathcal{O}_{x_2^1} \\ (p, l) &\longmapsto ([l^2, lm], lS_{2(l, m)} + [m^3]) \end{aligned}$$

onde $\{p\} = V(l) \cap V(m)$.

Portanto, $\mathcal{O}_{x_1^1}$ e $\mathcal{O}_{x_2^1}$ são órbitas fechadas. Segue-se do Lema 5.4.5 e do Corolário 5.4.6 que $\mathcal{O}_{x_1^1}$ e $\mathcal{O}_{x_2^1}$ são as únicas órbitas fechadas de \mathcal{X} . ■

Capítulo 2

$Hilb^d \mathbb{P}^2$

As referências básicas para este capítulo são [2],[10],[11],[12],[13] e [15].

2.1 Esquema de Hilbert de pontos de \mathbb{P}^2

Seja $Hilb^d \mathbb{P}^2$ o esquema projetivo que parametriza os subesquemas fechados de \mathbb{P}^2 de dimensão zero e grau d . Ou equivalentemente todos os ideais homogêneos saturados $I \subset S$ tais que $p_{\frac{S}{I}}(t) = d$, (ou seja, o Polinômio de Hilbert da variedade associada é d), veja Definição 4.7.2 e resultados afins no apêndice **A**.

2.1.1 Proposição. *$Hilb^d \mathbb{P}^2$ é não singular de dimensão $2d$.*
Demonstração. *Veja referência [10].*

2.1.2 Proposição. *O esquema de Hilbert de d pontos em \mathbb{P}^2 mergulha na Grassmaniana $G(N - d, S_d)$ onde $N = \dim S_d$.*
Demonstração. *Veja referência [11].*

2.2 Quádruplas de Pontos determinadas por Cônicas.

Seja $\pi = [q_1, q_2]$ em X . Então podemos associar a π o ideal $I_\pi = \langle q_1, q_2 \rangle$ de S . Se denotarmos por $Q_i = V(q_i)$ $i = 1, 2$ a cônica em \mathbb{P}^2 definida por q_i então $V(I_\pi) = Q_1 \cap Q_2$. Ou seja, I_π determina o subesquema fechado de \mathbb{P}^2 que corresponde à interseção das cônicas Q_1 e Q_2 . Do teorema de Bezout, sabemos que $\#Q_1 \cap Q_2 = 4$ se e somente se Q_1 e Q_2 não possuem

componentes em comum, ou seja, $\text{mdc}(q_1, q_2) = 1$. Isto é, cada ponto $\pi \in \{[q_1, q_2] \in X \mid \text{mdc}(q_1, q_2) = 1\} = X - Y$ determina um ponto de $\text{Hilb}^4\mathbb{P}^2$.

2.2.1 Observação. Suponha que $\pi = [q_1, q_2] = [p_1, p_2] \in X$ e $\text{mdc}(q_1, q_2) = 1$ então verifica-se que $\text{mdc}(p_1, p_2) = 1$.

De fato, suponha que o $\text{mdc}(p_1, p_2) \neq 1$, logo existe $l \in S_1$ talque $p_1 = m_1l$ e $p_2 = m_2l$ com $m_1, m_2 \in S_1$. Note que $[q_1, q_2] = [p_1, p_2]$ então existem $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha_1\beta - \alpha\beta_1 \neq 0$ e $p_1 = \alpha q_1 + \beta q_2$ e $p_2 = \alpha_1 q_1 + \beta_1 q_2$. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 - \alpha p_2 &= \alpha_1 \beta q_2 - \alpha \beta_1 q_2 \\ \alpha_1 m_1 l - \alpha m_2 l &= (\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1) q_2 \\ (\alpha_1 m_1 - \alpha m_2) l &= (\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1) q_2 \\ Ml &= q_2 \end{aligned}$$

onde $M = \frac{(\alpha_1 m_1 - \alpha m_2)}{(\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1)}$, então $l|q_2$. Usando o mesmo procedimento acima concluímos também que $q_1 = Nl$, então $l|q_1$, isto é, $\text{mdc}(q_1, q_2) \neq 1$, o que é um absurdo, pois por hipótese temos que $\text{mdc}(q_1, q_2) = 1$. Portanto, segue que $\text{mdc}(p_1, p_2) = 1$.

Lembre que

$$Y = \{[q_1, q_2] \in X \mid \text{mdc}(q_1, q_2) \neq 1\}.$$

Note que se $\pi = [q_1, q_2] \in Y$ então $\text{mdc}(q_1, q_2) \neq 1$ logo existe $l \in S_1$ tal que $q_1 = lm_1$ e $q_2 = lm_2$ com $m_1, m_2 \in S_1$ L.I.

Assim $I_\pi = \langle lm_1, lm_2 \rangle$ e $V(I_\pi) = V(m_1) \cap V(m_2) \cup V(l)$. Portanto, I_π determina uma subvariedade de \mathbb{P}^2 cujo polinômio de Hilbert é $p(t) = t + 2$.

2.2.2 Observação. Assim a menos de uma mudança de coordenadas os pontos de Y são da forma $[x_0^2, x_0x_1]$ e $[x_0x_1, x_0x_2]$ e em cada caso temos que

1. $V(I_{[x_0^2, x_0x_1]}) = V(\langle x_0^2, x_0x_1 \rangle) = V(x_0) \cup V(x_0, x_1)$
onde $l = V(x_0)$ e $p = V(x_0, x_1)$.
2. $V(I_{[x_0x_1, x_0x_2]}) = V(\langle x_0x_1, x_0x_2 \rangle) = V(x_0) \cup V(x_1, x_2)$
onde $l = V(x_0)$ e $p = V(x_1, x_2)$.

2.3 Quádruplas de pontos geradas em grau 3.

A seguir descreveremos o tipo de cúbica que precisamos adicionar ao ideal $I_\pi = \langle lm_1, lm_2 \rangle$ para obtermos a quádrupla de pontos.

2.3.1 Lema. *Seja $I = \langle lm_1, lm_2, f \rangle$ um ideal de S onde l, m_1 e m_2 formam uma base de S_1 e $f \in S_3 - \langle lm_1, lm_2 \rangle_3$. Então*

1. $f \notin \langle l \rangle$ e $f \in \langle m_1, m_2 \rangle$ então $p_{\frac{S}{I}}(t) = 4$.
2. Se $f \notin \langle l \rangle$ e $f \notin \langle m_1, m_2 \rangle$ então $p_{\frac{S}{I}}(t) = 3$.
3. Se $f \in \langle l \rangle$ então $p_{\frac{S}{I}}(t) = t + 1$.

Demonstração. Já que l, m_1 e m_2 formam uma base de S_1 então

$$\{l^3, l^2m_1, l^2m_2, lm_1^2, lm_1m_2, lm_2^2, m_1^3, m_1^2m_2, m_1m_2^2, m_2^3\} \quad (2.1)$$

é uma base de S_3

1. Se $f \in S_3$ então podemos exprimir f da seguinte forma

$$f = a_0l^3 + a_1l^2m_1 + a_2l^2m_2 + a_3lm_1^2 + a_4lm_1m_2 + a_5lm_2^2 + a_6m_1^3 + a_7m_1^2m_2 + a_8m_1m_2^2 + a_9m_2^3.$$

Lembremos que $I = \langle lm_1, lm_2, f \rangle$ e $f \notin \langle lm_1, lm_2 \rangle$. De fato, podemos assumir que:

$$\begin{aligned} f &= a_0l^3 + a_6m_1^3 + a_7m_1^2m_2 + a_8m_1m_2^2 + a_9m_2^3, \\ f &= a_0l^3 + g_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $g_3 = a_6m_1^3 + a_7m_1^2m_2 + a_8m_1m_2^2 + a_9m_2^3$ é uma cúbica não nula, pois $f \notin \langle l \rangle$.

Por outra parte, temos que $f \in \langle m_1, m_2 \rangle$. De onde concluímos que $a_0 = 0$ e portanto

$$f = g_3 = a_6m_1^3 + a_7m_1^2m_2 + a_8m_1m_2^2 + a_9m_2^3. \quad (2.3)$$

Agora vamos calcular a função de Hilbert associada a $\frac{S}{I}$, que simplesmente denotaremos por $F_I(t)$. Podemos facilmente verificar que

t	$\dim_{\mathbb{C}} S_t$	$\dim_{\mathbb{C}} I_t$	$F_I(t)$
0	1	0	1
1	3	0	3
2	6	2	4
3	10	6	4

Vamos determinar $\dim_{\mathbb{C}} I_t$ usando a seguinte aplicação linear sobrejetiva para $t \geq 4$.

$$\begin{aligned} \varphi : S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} &\longrightarrow I_t \\ (A, B, C) &\longmapsto Alm_1 + Blm_2 + Cf \end{aligned}$$

Note que: $\dim_{\mathbb{C}} I_t = \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi)$. Portanto temos que determinar o núcleo de φ .

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid Alm_1 + Blm_2 + Cf = 0\}.$$

Se $Alm_1 + Blm_2 + Cf = 0$ então $C = lC_1$ com $C_1 \in S_{t-4}$, já que $f \notin \langle l \rangle$. Logo,

$$\begin{aligned} Am_1 + Bm_2 + C_1 f &= 0 = Am_1 + Bm_2 + C_1(a_6 m_1^3 + a_7 m_1^2 m_2 + a_8 m_1 m_2^2 \\ &\quad + a_9 m_2^3) \\ 0 &= Am_1 + Bm_2 + C_1 D m_1 + C_1 E m_2 \end{aligned}$$

onde $D = a_6 m_1^2 + a_7 m_1 m_2 + a_8 m_2^2$ e $E = a_9 m_2^2$. Portanto,

$$(A + C_1 D)m_1 = -(B + C_1 E)m_2$$

Assim temos que: $A + C_1 D = A_1 m_2$ e $B + C_1 E = -A_1 m_1$ com $A_1 \in S_{t-3}$. Em resumo temos que:

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid A = A_1 m_2 - C_1 D, B = -A_1 m_1 - C_1 E \text{ e } C = lC_1\}.$$

De onde concluímos que $\mathcal{N}(\varphi) \cong S_{t-3} \times S_{t-4}$. Logo,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} I_t &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-4} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-4} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-4} \\ &= \frac{2(t-1)t}{2} - \frac{(t-3)(t-2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_I(t) &= \dim_{\mathbb{C}} S_t - \dim_{\mathbb{C}} I_t \\ &= \frac{(t+1)(t+2)}{2} - \frac{2(t-1)t}{2} + \frac{(t-3)(t-2)}{2} \\ &= \frac{t^2+3t+2-2t^2+2t+t^2-5t+6}{2} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Já que $f \notin \langle m_1, m_2 \rangle$. De (2.2) concluímos que $a_0 \neq 0$ e portanto

$$f = l^3 + h_3 \quad (2.4)$$

onde $h_3 = b_1 m_1^3 + b_2 m_1^2 m_2 + b_3 m_1 m_2^2 + b_4 m_2^3$ é uma cúbica não nula.

Agora vamos calcular a função de Hilbert associada a $\frac{S}{I}$, que simplesmente denotaremos por $F_I(t)$. Podemos facilmente verificar que

t	$\dim_{\mathbb{C}} S_t$	$\dim_{\mathbb{C}} I_t$	$F_I(t)$
0	1	0	1
1	3	0	3
2	6	2	4
3	10	6	4

Vamos determinar $\dim_{\mathbb{C}} I_t$ usando a seguinte aplicação linear sobrejetiva para $t \geq 4$.

$$\begin{aligned} \varphi : S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} &\longrightarrow I_t \\ (A, B, C) &\longmapsto Alm_1 + Blm_2 + Cf \end{aligned}$$

Note que $\dim_{\mathbb{C}} I_t = \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi)$. Portanto temos que determinar o núcleo de φ .

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid Alm_1 + Blm_2 + Cf = 0\}.$$

Se $Alm_1 + Blm_2 + Cf = 0$ então $C = lC_1$ com $C_1 \in S_{t-4}$, já que $f \notin \langle l \rangle$. Logo

$$Am_1 + Bm_2 + C_1 f = 0$$

De onde concluímos que $C_1 f \in \langle m_1, m_2 \rangle$. Logo $C_1 \in \langle m_1, m_2 \rangle$. Portanto,

$$C_1 = C_{11}m_1 + C_{12}m_2 \quad \text{com } C_{1i} \in S_{t-5} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= Am_1 + Bm_2 + (C_{11}m_1 + C_{12}m_2)f \\ 0 &= Am_1 + Bm_2 + C_{11}fm_1 + C_{12}fm_2 \\ 0 &= (A + C_{11}f)m_1 + (B + C_{12}f)m_2 \end{aligned}$$

Assim temos que: $A + C_{11}f = A_1m_2$ e $B + C_{12}f = -A_1m_1$ com $A_1 \in S_{t-3}$. Ou seja,

$$A = -C_{11}f + A_1m_2 \quad \text{e} \quad B = -C_{12}f - A_1m_1.$$

Para de fato calcularmos $\mathcal{N}(\varphi)$, considere a seguinte aplicação linear sobrejetiva:

$$\begin{aligned} \psi : S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} &\longrightarrow \mathcal{N}(\varphi) \\ (A_1, C_{11}, C_{12}) &\longmapsto (-C_{11}f + A_1m_2, -C_{12}f - A_1m_1, C_{11}m_1 + C_{12}m_2) \end{aligned}$$

Assim $\dim \mathcal{N}(\varphi) = \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\psi)$. Note que,

$$\mathcal{N}(\psi) = \left\{ (A_1, C_{11}, C_{12}) \in S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} \mid \begin{array}{l} -C_{11}f + A_1m_2 = 0, \quad (i) \\ -C_{12}f - A_1m_1 = 0, \quad (ii) \\ C_{11}m_1 + C_{12}m_2 = 0 \quad (iii) \end{array} \right\}.$$

De (iii) temos que: $C_{11}m_1 = -C_{12}m_2$ ou seja, $C_{11} = Dm_2$ e $C_{12} = -Dm_1$ com $D \in S_{t-6}$. Tanto de (i) quanto de (ii) temos que $A_1 = Df$. Logo, $\mathcal{N}(\psi) \cong S_{t-6}$. Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi) = \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-6}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} I_t &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-6} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} - 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-5} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-6} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} - 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-5} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-6} \\ &= \frac{2(t-1)t}{2} - \frac{2(t-4)(t-3)}{2} + \frac{(t-5)(t-4)}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_I(t) &= \dim_{\mathbb{C}} S_t - \dim_{\mathbb{C}} I_t \\ &= \frac{(t+1)(t+2)}{2} - \frac{2(t-1)t}{2} + \frac{2(t-4)(t-3)}{2} - \frac{(t-5)(t-4)}{2} \\ &= \frac{t^2+3t+2-2t^2+2t+2t^2-14t+24-t^2+9t-20}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

3.

Como f é uma cúbica tal que $f \in \langle l \rangle - \langle lm_1, lm_2 \rangle$ e $I = \langle lm_1, lm_2, f \rangle$. Podemos assumir que $f = l^3$. Verifica-se que a função de Hilbert para $t = 0, 1, 2, 3$.

t	$\dim_{\mathbb{C}} S_t$	$\dim_{\mathbb{C}} I_t$	$F_I(t)$
0	1	0	1
1	3	0	3
2	6	2	4
3	10	6	4

Vamos agora determinar a função de Hilbert para $t \geq 4$ para isto considere a seguinte aplicação sobrejetiva:

$$\begin{aligned} \varphi : S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} &\longrightarrow \mathcal{N}(\varphi) \\ (A, B, C) &\longmapsto Alm_1 + Blm_2 + Cf. \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid Alm_1 + Blm_2 + Cf = 0\}.$$

Se

$$\begin{aligned} Alm_1 + Blm_2 + Cf &= 0 \\ Alm_1 + Blm_2 + Cl^3 &= 0 \\ Am_1 + Bm_2 + Cl^2 &= 0 \\ -(Am_1 + Bm_2) &= Cl^2 \end{aligned}$$

Como $\langle m_1, m_2 \rangle$ é um ideal primo, temos que: $C \in \langle m_1, m_2 \rangle$ ou $l^2 \in \langle m_1, m_2 \rangle$. Note que $l^2 \notin \langle m_1, m_2 \rangle$, daí $C \in \langle m_1, m_2 \rangle$ isto é, $C = C_{11}m_1 + C_{12}m_2$ com $C_{1i} \in S_{t-4}$. substituindo na terceira equação acima temos que:

$$\begin{aligned} Am_1 + Bm_2 + (C_{11}m_1 + C_{12}m_2)l^2 &= 0 \\ (A + C_{11}l^2)m_1 + (B + C_{12}l^2)m_2 &= 0 \\ (A + C_{11}l^2)m_1 &= -(B + C_{12}l^2)m_2. \end{aligned}$$

Daí temos que $A + C_{11}l^2 = A_1m_2$ e $B + C_{12}l^2 = -A_1m_1$ com $A_1 \in S_{t-3}$. Portanto temos que o $\mathcal{N}(\varphi)$ é dado por:

$$\mathcal{N}(\varphi) = \left\{ (A, B, C) \in S_{t-3} \times S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid \begin{array}{l} A = -C_{11}l^2 + A_1m_2, \quad (i) \\ B = -C_{12}l^2 - A_1m_1, \quad (ii) \\ C = C_{11}m_1 + C_{12}m_2 \quad (iii) \end{array} \right\}.$$

Note que ainda não é possível determinar o $\mathcal{N}(\varphi)$ para isto devemos novamente considerar a seguinte aplicação sobrejetiva:

$$\begin{aligned} \psi : S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} &\longrightarrow \mathcal{N}(\varphi) \\ (A_1, C_{11}, C_{12}) &\longmapsto (-C_{11}l^2 + A_1m_2, -C_{12}l^2 - A_1m_1, C_{11}m_1 + C_{12}m_2). \end{aligned}$$

Assim $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}(\varphi) = \dim_{\mathbb{C}}S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} - \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}(\psi)$. Note que,

$$\mathcal{N}(\psi) = \left\{ (A_1, C_{11}, C_{12}) \in S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} \mid \begin{array}{l} -C_{11}l^2 + A_1m_2 = 0, \quad (i) \\ -C_{12}l^2 - A_1m_1 = 0, \quad (ii) \\ C_{11}m_1 + C_{12}m_2 = 0 \quad (iii) \end{array} \right\}.$$

De (iii) temos que: $C_{11}m_1 = -C_{12}m_2$ ou seja, $C_{11} = Dm_2$ e $C_{12} = -Dm_1$ com $D \in S_{t-5}$. Tanto de (i) quanto de (ii) temos que $A_1 = Dl^2$. Logo, $\mathcal{N}(\psi) \cong S_{t-5}$. Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}(\varphi) = \dim_{\mathbb{C}}S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} - \dim_{\mathbb{C}}S_{t-5}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} I_t &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-5} \\
&= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} - 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-4} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-5} \\
&= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} - 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-4} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-5} \\
&= \frac{2(t-1)t}{2} - \frac{2(t-2)(t-3)}{2} + \frac{(t-3)(t-4)}{2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F_I(t) &= \dim_{\mathbb{C}} S_t - \dim_{\mathbb{C}} I_t \\
&= \frac{(t+1)(t+2)}{2} - \frac{2(t-1)t}{2} + \frac{2(t-2)(t-3)}{2} - \frac{(t-3)(t-4)}{2} \\
&= \frac{t^2+3t+2-2t^2+2t+2t^2-10t+12-t^2+7t-12}{2} \\
&= \frac{2t+2}{2} \\
&= t+1
\end{aligned}$$

■

2.3.2 Lema. *Seja $I = \langle l^2, lm, f \rangle$ um ideal de S onde l e $m \in S_1$ são L.I. e $f \in S_3 - \langle l^2, lm \rangle$. Então*

1. *Se $f \notin \langle l \rangle$ e $f \in \langle l, m \rangle$ então $p_{\bar{S}}(t) = 4$.*
2. *Se $f \notin \langle l \rangle$ e $f \notin \langle l, m \rangle$ então $p_{\bar{S}}(t) = 3$.*
3. *Se $f \in \langle l \rangle$ então $p_{\bar{S}}(t) = t + 1$.*

Demonstração. Escolha $n \notin \langle l, m \rangle$, então l, m, n formam uma base de S_1 . Logo temos que:

$$\{l^3, l^2m, l^2n, lm^2, lmn, ln^2, m^3, m^2n, mn^2, n^3\}$$

formam uma base de S_3 .

[1.] Como $f \in s_3$ f pode ser expresso como uma combinação linear dessa base, ou seja,

$$f = a_0l^3 + a_1l^2m + a_2l^2n + a_3lm^2 + a_4lmn + a_5ln^2 + a_6m^3 + a_7m^2n + a_8mn^2 + a_9n^3$$

sabemos que $I = \langle l^2, lm, f \rangle$, logo podemos assumir que:

$$\begin{aligned}
f &= a_5ln^2 + a_6m^3 + a_7m^2n + a_8mn^2 + a_9n^3 \\
&= a_5ln^2 + a_6m^3 + a_7m^2n + a_8mn^2 \\
&= a_5ln^2 + mg_2
\end{aligned}$$

onde $g_2 = a_6m^2 + a_7mn + a_8n^2$ com $g_2 \neq 0$ pois $f \notin \langle l \rangle$. Calculando a Função de Hilbert é fácil verificar que:

t	$\dim_{\mathbb{C}} S_t$	$\dim_{\mathbb{C}} I_t$	$F_I(t)$
0	1	0	1
1	3	0	3
2	6	2	4
3	10	6	4

Vamos determinar $\dim_{\mathbb{C}} I_t$ usando a seguinte aplicação sobrejetiva para $t \geq 4$.

$$\begin{aligned} \varphi : S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} &\longrightarrow I_t \\ (A, B, C) &\longmapsto Al^2 + Blm + Cf \end{aligned}$$

Note que: $\dim_{\mathbb{C}} I_t = \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi)$. Portanto temos que determinar o núcleo de φ .

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid Al^2 + Blm + Cf = 0\}.$$

Se $Al^2 + Blm + Cf = 0$ então $C = lC_1$ com $C_1 \in S_{t-4}$, já que $f \notin \langle l \rangle$. Logo,

$$\begin{aligned} Al + Bm + C_1f &= 0 \\ Al + Bm + C_1(a_5ln^2 + mg_2) &= 0 \\ (A + C_1a_5n^2)l + (B + C_1g_2)m &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $A + C_1a_5n^2 = A_1m$ e $B + C_1g_2 = -A_1l$ com $A_1 \in S_{t-3}$. Assim, temos que:

$$A = A_1m - C_1a_5n^2 \text{ e } B = -A_1l - C_1g_2, \text{ isto é,}$$

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid A = A_1m - C_1D, B = -A_1l - C_1E, C = C_1l\}$$

Portanto, $\mathcal{N}(\varphi) \cong S_{t-3} \times S_{t-4}$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} I_t &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-4} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} + \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-4} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-4} \\ &= \frac{2(t-1)t}{2} - \frac{(t-2)(t-3)}{2} \\ &= \frac{t^2+3t-6}{2} \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} F_I(t) &= \dim_{\mathbb{C}} S_t - \dim_{\mathbb{C}} I_t \\ &= \frac{(t+1)(t+2)}{2} - \frac{t^2+3t-6}{2} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Se $f \notin \langle l \rangle$ e $f \notin \langle l, m \rangle$ então $P_{\frac{S}{I}}(t) = 3$.

Como $f \notin \langle l, m \rangle$ concluímos que $a_9 \neq 0$. Calculando a função de Hilbert associada a $\frac{S}{I}$, temos:

t	$\dim_{\mathbb{C}} S_t$	$\dim_{\mathbb{C}} I_t$	$F_I(t)$
0	1	0	1
1	3	0	3
2	6	2	4
3	10	6	4

Vamos mostrar que $F_I(t)$ para $t \geq 4$ é igual a 3. Para isto vamos calcular primeiro a $\dim_{\mathbb{C}} I_t$ usando a aplicação linear sobrejetiva:

$$\begin{aligned} \varphi : S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} &\longrightarrow I_t \\ (A, B, C) &\longmapsto Al^2 + Blm + Cf \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid Al^2 + Blm + Cf = 0\}.$$

Se $Al^2 + Blm + Cf = 0 \Rightarrow C = lC_1$ com $C_1 \in S_{t-4}$ pois $f \notin \langle l \rangle$, logo, temos: $Al + Bm + C_1f = 0 \Rightarrow C_1f = -Al - Bm \Rightarrow C_1f \in \langle l, m \rangle$ agora como $f \notin \langle l, m \rangle \Rightarrow C_1 \in \langle l, m \rangle$ assim $C_1 = C_{11}l + C_{12}m$ com $C_{1i} \in S_{t-5}$ $i = 1, 2$. Portanto:

$$\begin{aligned} 0 &= Al + Bm + C_1f \\ 0 &= Al + Bm + (C_{11}l + C_{12}m)f \\ 0 &= (A + C_{11}f)l + (B + C_{12}f)m \end{aligned}$$

Daí temos que $(A + C_{11}f)l = -(B + C_{12}f)m \Rightarrow (A + C_{11}f) = A_1m$ e $(B + C_{12}f) = -A_1m$ com $A_1 \in S_{t-3}$, isto é, $A = A_1m - C_{11}f$ e $B = -A_1m - C_{12}f$. Mas ainda não é possível determinar o $\mathcal{N}(\varphi)$, para isto vamos considerar novamente a seguinte aplicação sobrejetiva:

$$\begin{aligned} \psi : S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} &\longrightarrow \mathcal{N}(\varphi) \\ (A_1, C_{11}, C_{12}) &\longmapsto (A_1m - C_{11}f, -A_1m - C_{12}f, C_{11}l + C_{12}m). \end{aligned}$$

Assim, $\dim \mathcal{N}(\varphi) = \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} - \dim \mathcal{N}(\psi)$ logo,

$$\mathcal{N}(\psi) = \left\{ (A_1, C_{11}, C_{12}) \in S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} \mid \begin{array}{l} -C_{11}f + A_1m = 0, \quad (i) \\ -C_{12}f - A_1m = 0, \quad (ii) \\ C_{11}l + C_{12}m = 0 \quad (iii) \end{array} \right\}.$$

De (iii) temos que: $C_{11}l = -C_{12}m$ ou seja, $C_{11} = Dm$ e $C_{12} = -Dl$ com $D \in S_{t-6}$. Tanto de (i) quanto de (ii) temos que $A_1 = Df$. Logo, $\mathcal{N}(\psi) \cong S_{t-6}$.

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(\varphi) &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} - \dim \mathcal{N}(\psi) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-3} \times S_{t-5} \times S_{t-5} - \dim S_{t-6} \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\dim I_t &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim \mathcal{N}(\varphi) \\
&= 2\dim S_{t-2} + \dim S_{t-3} - \dim S_{t-3} - 2\dim S_{t-5} + \dim S_{t-6} \\
&= \frac{2t(t-1)}{2} - \frac{2(t-4)(t-3)}{2} + \frac{(t-5)(t-4)}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
F_I(t) &= \dim S_t - \dim I_t \\
&= \frac{(t+1)(t+2)}{2} - \frac{2t(t-1)}{2} + \frac{2(t-3)(t-4)}{2} - \frac{(t-5)(t-6)}{2} \\
&= \frac{t^2+3t+2-2t^2+2t+2t^2-14t+24-t^2+9t-20}{2} \\
&= \frac{2+24-20}{2} \\
&= \frac{26-20}{2} \\
&= \frac{6}{2} \\
&= 3
\end{aligned}$$

3.

Como f é uma cúbica tal que $f \in \langle l \rangle - \langle l^2, lm \rangle$ e $I = \langle lm_1, lm_2, f \rangle$ podemos assumir que:

$f = l^3 + a_5 l n^2 = l(l^2 + a_5 n^2)$. Vamos determinar a função de Hilbert para $t = 0, 1, 2, 3$.

t	$\dim_{\mathbb{C}} S_t$	$\dim_{\mathbb{C}} I_t$	$F_I(t)$
0	1	0	1
1	3	0	3
2	6	2	4
3	10	6	4

Vamos determinar a função de Hilbert para $t \geq 4$. Para isto considere a seguinte aplicação sobrejetiva:

$$\begin{aligned}
\varphi : S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} &\longrightarrow \mathcal{N}(\varphi) \\
(A, B, C) &\longmapsto Al^2 + Blm + Cf.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B, C) \in S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid Al^2 + Blm + Cf = 0\}.$$

Se

$$\begin{aligned}
Al^2 + Blm + Cf &= 0 \\
Al^2 + Blm + Cl(l^2 + a_5 n^2) &= 0 \\
Al + Bm + C(l^2 + a_5 n^2) &= 0 \\
Al + Bm &= -C(l^2 + a_5 n^2)
\end{aligned}$$

Como $\langle l, m \rangle$ é um ideal primo, temos que: $C \in \langle l, m \rangle$ ou $l^2 + a_5 n^2 \in \langle m_1, m_2 \rangle$. Note que $(l^2 + a_5 n^2) \notin \langle l, m \rangle$, daí $C \in \langle l, m \rangle$ isto é,

$C = C_{11}l + C_{12}m$ com $C_{1i} \in S_{t-4}$. substituindo na terceira equação acima temos que:

$$\begin{aligned} Al + Bm + (C_{11}l + C_{12}m)(l^2 + a_5n^2) &= 0 \\ (A + C_{11}(l^2 + a_5n^2))l + (B + C_{12}(l^2 + a_5n^2))m &= 0 \\ (A + C_{11}Q_3)l &= -(B + C_{12}Q_3)m. \end{aligned}$$

Onde $Q_3 = l^2 + a_5n^2$. Daí temos que $A + C_{11}Q_3 = A_1m$ e $B + C_{12}Q_3 = -A_1l$ com $A_1 \in S_{t-3}$. Portanto temos que o $\mathcal{N}(\varphi)$ é dado por:

$$\mathcal{N}(\varphi) = \left\{ (A, B, C) \in S_{t-3} \times S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} \mid \begin{array}{l} A = -C_{11}Q_3 + A_1m, \quad (i) \\ B = -C_{12}Q_3 - A_1l, \quad (ii) \\ C = C_{11}l + C_{12}m \quad (iii) \end{array} \right\}.$$

Note que ainda não é possível determinar o $\mathcal{N}(\varphi)$ para isto devemos novamente considerar a seguinte aplicação sobejetiva:

$$\begin{aligned} \psi : S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} &\longrightarrow \mathcal{N}(\varphi) \\ (A_1, C_{11}, C_{12}) &\longmapsto (-C_{11}Q_3 + A_1m, -C_{12}Q_3 - A_1l, C_{11}l + C_{12}m). \end{aligned}$$

Assim $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}(\varphi) = \dim_{\mathbb{C}}S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} - \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}(\psi)$. Note que,

$$\mathcal{N}(\psi) = \left\{ (A_1, C_{11}, C_{12}) \in S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} \mid \begin{array}{l} -C_{11}Q_3 + A_1m = 0, \quad (i) \\ -C_{12}Q_3 - A_1l = 0, \quad (ii) \\ C_{11}l + C_{12}m = 0 \quad (iii) \end{array} \right\}.$$

De (iii) temos que: $C_{11}l = -C_{12}m$ ou seja, $C_{11} = Dm$ e $C_{12} = -Dl$ com $D \in S_{t-5}$. Tanto de (i) quanto de (ii) temos que $A_1 = DQ_3$. Logo, $\mathcal{N}(\psi) \cong S_{t-5}$. Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}(\varphi) = \dim_{\mathbb{C}}S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} - \dim_{\mathbb{C}}S_{t-5}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}I_t &= \dim_{\mathbb{C}}S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}(\varphi) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}S_{t-2} \times S_{t-2} \times S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}}S_{t-3} \times S_{t-4} \times S_{t-4} + \dim_{\mathbb{C}}S_{t-5} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}}S_{t-2} + \dim_{\mathbb{C}}S_{t-3} - \dim_{\mathbb{C}}S_{t-3} - 2\dim_{\mathbb{C}}S_{t-4} + \dim_{\mathbb{C}}S_{t-5} \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}}S_{t-2} - 2\dim_{\mathbb{C}}S_{t-4} + \dim_{\mathbb{C}}S_{t-5} \\ &= \frac{2(t-1)t}{2} - \frac{2(t-2)(t-3)}{2} + \frac{(t-3)(t-4)}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F_I(t) &= \dim_{\mathbb{C}} S_t - \dim_{\mathbb{C}} I_t \\
&= \frac{(t+1)(t+2)}{2} - \frac{2(t-1)t}{2} + \frac{2(t-2)(t-3)}{2} - \frac{(t-3)(t-4)}{2} \\
&= \frac{t^2+3t+2-2t^2+2t+2t^2-10t+12-t^2+7t-12}{2} \\
&= \frac{2t+2}{2} \\
&= t+1.
\end{aligned}$$

■

2.4 Quádruplas de pontos geradas em grau 4.

As contas realizadas no maple (veja apêndice C, pag 118) nos permitiram detectar que aqueles pontos de $X^1 = Bl_Y X$ onde o polinômio de Hilbert não é esperado ($p_{\bar{S}} = 4$) determinam um ideal $J = \langle l^2, lm, f_3 \rangle$ onde f_3 é a cúbica (a menos de múltiplos escalares) tal que $J_3 = lS_2$. De fato, neste caso temos que $\bar{J} = \langle l \rangle$ e o polinômio de Hilbert da variedade determinada por este ideal é $t+1$. Assim a procura de novos geradores será em grau 4. O Teorema de Bézout mais uma vez nos garante que é suficiente escolher um polinômio de grau 4 que não seja múltiplo da reta l , para termos 4 pontos contados com multiplicidades. De fato, temos que:

2.4.1 Lema. *Seja $I = \langle l, h \rangle$ um ideal de S onde $l \in S_1$ e $h \in S_4 - lS_3$. Então $P_{\bar{S}}(t) = 4$.*

Demonstração. Seja $\{l, m, n\}$ uma base de S_1 , logo temos que

$$\{l^4, l^3m, l^3n, l^2mn, l^2n^2, lm^3, lm^2n, lmn^2, ln^3, m^4, m^3n, m^2n^2, mn^3, n^4\}$$

formam uma base de S_4 . Como $h \in S_4 - lS_3$ podemos assumir que

$$h = a_0m^4 + a_1m^3n + a_2m^2n^2 + a_3mn^3 + a_4n^4.$$

Verifica-se que a Função de Hilbert para $t = 0, 1, 2, 3, 4$ é dado por:

t	$\dim_{\mathbb{C}} S_t$	$\dim_{\mathbb{C}} I_t$	$F_I(t)$
0	1	0	1
1	3	1	2
2	6	6	0
3	10	6	4
4	15	11	4

Vamos determinar a função de Hilbert para $t > 4$. Para isto, vamos determinar $\dim_{\mathbb{C}} I_t$ usando a seguinte aplicação sobrejetiva.

$$\begin{aligned} \varphi : S_{t-1} \times S_{t-4} &\longrightarrow I_t \\ (A, B) &\longmapsto Al + Bh. \end{aligned}$$

Note que $\dim_{\mathbb{C}} I_t = \dim_{\mathbb{C}} S_{t-1} \times S_{t-4} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi)$. Assim é suficiente determinar o núcleo de φ .

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B) \in S_{t-1} \times S_{t-4} \mid Al + Bh = 0\}.$$

Note que, como $h \notin lS_3$ então $l \nmid h$. Daí, temos que $Al + Bh = 0 \Rightarrow Al = -Bh$. Daí, concluímos que $A = A_1h$ e $B = -A_1l$ com $A_1 \in S_{t-5}$. Logo, $\mathcal{N}(\varphi) = \{(A, B) \in S_{t-1} \times S_{t-4} \mid A = A_1h \text{ e } B = -A_1l\}$.

Portanto $\mathcal{N}(\varphi) \cong S_{t-5}$. Segue que:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} I_t &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-1} \times S_{t-4} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\varphi) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} S_{t-1} \times S_{t-4} - \dim_{\mathbb{C}} S_{t-5} \\ &= \frac{(t+1)t}{2} + \frac{(t-2)(t-3)}{2} - \frac{(t-3)(t-4)}{2} \\ &= \frac{t^2+3t-6}{2} \end{aligned}$$

assim obtemos,

$$\begin{aligned} F_I(t) &= \dim_{\mathbb{C}} S_t - \dim_{\mathbb{C}} I_t \\ &= \frac{(t+1)(t+2)}{2} - \frac{t^2+3t-6}{2} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

2.4.2 Observação. A porposição 2.1.2 nos permite afirmar que um ideal $I \subseteq S$ tal que $p_{\frac{S}{I}} = 4$ está completamente determinado pelas 11 quárticas que geram I_4 como espaço vetorial.

Capítulo 3

Compactificação de $X - Y$

As referências básicas para este capítulo são [2],[11],[12],[13] e [15].

É importante observar mais uma vez que um ideal $I \subseteq S$ gerado por dois polinômios homogêneos $q_1, q_2 \in S_2$ determina um ponto de $Hilb^4\mathbb{P}^2$ se $\text{mdc}(q_1, q_2) = 1$. Do contrário teremos um ideal cujo polinômio de Hilbert é $t + 2$, ou seja, uma curva. Assim, é importante neste caso determinar geradores de maior grau para um ideal $J \supseteq I = \langle q_1, q_2 \rangle$ de maneira que $P_S^J = 4$.

No capítulo 2 apresentamos alguns lemas nos quais os ideais são gerados em grau 3 e 4 respectivamente. É importante destacar como o suporte da variedade determinada pelos gerados em grau 2 em cada ideal, nos permite por exemplo escolher uma cúbica que passa pelo ponto isolado deixando um traço de 3 pontos na real suporte, veja Lema 2.3.1, determinando assim um ponto de $Hilb^4\mathbb{P}^2$. Já no Lema 2.4.1 aparece um gerador novo em grau 4. Fechando assim a descrição do tipo de ideal saturado que vem definir um ponto de $Hilb^4\mathbb{P}^2$ conforme Proposição 2.1.2.

3.1 Obtenção de geradores em grau 3

3.1.1 Lema. *Considere o mapa induzido por multiplicação:*

$$\mu_3 : \mathcal{E}_2^2 \otimes \mathcal{F}_1|_X \longrightarrow \mathcal{F}_3|_X.$$

Então:

1. $\Lambda^5 \mu_3$ é nunca nulo.

2. $V(\Lambda^6 \mu_3) = Y$.

Demonstração.

1. Primeiramente observe o seguinte:

- $\pi \in X - Y \Rightarrow \text{posto}(\mu_{3,\pi}) = 6$.

De fato, considere $\pi = [q_1, q_2] \in X - Y$ então o $\text{mdc}(q_1, q_2) = 1$. Note que, $\text{Im}(\mu_{3,\pi}) = \{\alpha q_1 + \beta q_2 \mid \alpha, \beta \in S_1\}$ é um subespaço de S_3 de dimensão exatamente 6. Desde que:

$$\begin{aligned} \varphi : S_1 \times S_1 &\longrightarrow S_3 \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha q_1 + \beta q_2 \end{aligned}$$

é uma aplicação linear sobrejetiva, cujo $\mathcal{N}(\varphi) = \{(0, 0)\}$.

- $\pi \in Y$ então $\text{posto}(\mu_{3,\pi}) = 5$.

De fato, como $\pi \in Y$ então $\pi = [lm_1, lm_2]$. Consideremos a seguinte aplicação linear:

$$\begin{aligned} \varphi : S_1 \times S_1 &\longrightarrow S_3 \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha lm_1 + \beta lm_2 \end{aligned}$$

É suficiente mostrar que $\dim \mathcal{N}(\varphi) = 1$. De fato, temos que $\mathcal{N}(\varphi) = \{(\alpha, \beta) \in S_1 \times S_1 \mid \alpha lm_1 + \beta lm_2 = 0\}$. Daí, segue $\mathcal{N}(\varphi) = \{(\alpha, \beta) \in S_1 \times S_1 \mid \alpha = -\lambda m_2, \beta = \lambda m_1 \text{ com } \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Assim $\mathcal{N}(\varphi) \cong \mathbb{C}$. Portanto temos que $\dim(\text{Im} \varphi) = \dim S_1 \times S_1 - \dim(\mathcal{N}(\varphi)) = 6 - 1 = 5$. Concluimos assim que o $\text{post}(\mu_{3,\pi})$ é igual a 5.

Assim, concluimos que o posto mínimo de μ_3 é 5. Portanto $\Lambda^5 \mu_3$ é nunca nulo. (Note que $\Lambda^5 \mu_3$ nulo, significa dizer que todo menor de ordem 5 de $[\mu_3]$ é nulo, ou seja, o posto teria que ser menor que 5). Concluimos assim a verificação de 1.

2. Agora vamos verificar que a segunda afirmação deste lema. Seja $\pi \in Y$ então o $\text{posto}(\mu_{3,\pi}) = 5$, assim $\Lambda^6 \mu_3$ é nulo. Portanto, $Y \subset V(\Lambda^6 \mu_3)$. Para mostrar a outra inclusão considere uma representação local de μ_3 . Seja $\mathcal{U}_{1,2} \subset X$ um aberto isomorfo a \mathbb{C}^8 , escolhido de maneira que:

$$\begin{cases} q_1 &= x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2 \\ q_2 &= x_0 x_1 + a_5 x_0 x_2 + a_6 x_1^2 + a_7 x_1 x_2 + a_8 x_2^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

seja uma base de $\mathcal{E}_2^2|_{\mathcal{U}_{1,2}}$. Neste mesmo aberto consegue-se que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_3 trivializem com base local formada pelos monômios ordenados: x_0, x_1, x_2 e $x_0^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_1x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3$ respectivamente. A restrição de μ_3 sobre $\mathcal{U}_{1,2}$ é representada por uma matriz 6×10 . Após algumas operações elementares em suas linhas, podemos representar μ_3 por:

$$\mu_3|_{\mathcal{U}_{1,2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \dots & \dots & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{pmatrix}.$$

Verificamos que $\Lambda^6\mu_3 = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ e estes geradores correspondem exatamente àqueles f_i 's que possuem termo linear não nulo. De fato, os geradores de $\Lambda^6\mu_3$ são:

$$\begin{cases} f_1 = -a_8 + a_5a_7 - a_6a_5^2 \\ f_2 = a_2 + a_6^2 \\ f_3 = a_3 + 2a_6a_7 - 2a_6^2a_5 - a_6a_1 \\ f_4 = a_4 + a_7^2 - a_7a_1 + a_6^2a_5^2 - 2a_7a_6a_5 + a_5a_6a_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

apêndice C pag 110 e 111. Note que se $\pi \in V(\Lambda^6\mu_3)$ então:

$$(*) \begin{cases} f_1 = 0 \Leftrightarrow a_8 = a_5a_7 - a_1a_5^2 \\ f_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -a_6^2 \\ f_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = -2a_6a_7 + 2a_6^2a_5 + a_6a_1 \\ f_4 = 0 \Leftrightarrow a_4 = -a_7^2 + a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 \end{cases}$$

Susbtituindo (*) na representação de q_1 e q_2 em 3.1, obtemos:

$$\begin{aligned} q_1 &= lm_1 \\ q_2 &= lm_2 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} l &= x_0 + a_6x_1 + (a_7 - a_5a_6)x_2 \\ m_1 &= x_0 - a_6x_1 + (a_5a_6 - a_7 + a_1)x_2 \\ m_2 &= x_1 + a_5x_2 \end{aligned}$$

Logo, $\pi = [q_1, q_2] \in Y$.

3.1.1 Descrição de \mathcal{G}_3^6

Considere o seguinte diagrama de explosão:

$$\begin{array}{ccc} E^1 & \longrightarrow & X^1 \\ \downarrow & & \downarrow \rho_1 \\ Y & \hookrightarrow & X \end{array} \quad (3.3)$$

onde $X^1 = Bl_Y X$

3.1.2 Lema. X^1 mergulha em $G(2, S_2) \times G(6, S_3)$:

Demonstração. Considere

$$\vartheta : X^1 \longrightarrow G(2, S_2) \times G(6, S_3)$$

definida da seguinte maneira:

Sejam $\{\mathcal{U}_{i,j}\}$ a cobertura aberta canônica de X e $\{U_{i_1, \dots, i_6}\}$ a cobertura aberta canônica de $G(6, S_3)$. Seja $\{\mathcal{U}_{i,j;k}\}$ a cobertura aberta de X^1 obtida da seguinte forma: Note que $\rho_1^{-1}(\mathcal{U}_{i,j}) \subset X^1$ é um aberto de X^1 então temos que $\rho_1^{-1}(\mathcal{U}_{i,j}) = \bigcup \mathcal{U}_{i,j;k}$ com $k = 1, 2, 3, 4$ onde $\mathcal{U}_{i,j;k}$ é o aberto determinado pelo fato que f_k é o gerador do ideal do divisor excepcional. Ou seja, $E^1 \cap \mathcal{U}_{i,j;k} = V(f_k)$. De fato, a explosão de $\mathcal{U}_{1,2}$ ao longo de $\mathcal{U}_{1,2} \cap Y$, $Bl_{(\mathcal{U}_{1,2} \cap Y)} \mathcal{U}_{1,2} \subset \mathcal{U}_{1,2} \times \mathbb{P}^3$ é dado por:

$$Bl_{(\mathcal{U}_{1,2} \cap Y)} \mathcal{U}_{1,2} = \{(a, [B_1 : B_2 : B_3 : B_4]) \mid f_i(a)B_j = f_j(a)B_i \ \forall \ i \neq j\}$$

onde $\mathcal{U}_{1,2} \cap Y = V(f_1, \dots, f_4)$ e os f_i 's como em 3.2.

Considere então $\mathcal{U}_{1,2;1} \subset Bl_{(\mathcal{U}_{1,2} \cap Y)} \mathcal{U}_{1,2}$ definido por:

$$\mathcal{U}_{1,2;1} = \{(a, [1 : b_1 : b_2 : b_3]) \mid f_i(a) = f_1(a)b_i \ \forall \ i = 2, 3, 4\}$$

Assim, definiremos ϑ localmente por:

$$\vartheta|_{\mathcal{U}_{1,2;1}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{1,2;1} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{1,2} \times \mathcal{U}_{(1, \dots, 6)} \\ x^1 & \longmapsto & (\rho_1(x^1), V_{x^1}) \end{array}$$

onde

$$V_{x^1} = \begin{cases} q_1 S_1 \oplus q_2 S_1 & \text{se } \rho_1(x^1) = [q_1, q_2] \in X - Y \\ l(S_2)_{(m_1, m_2)} + [g_3] & \text{se } \rho_1(x^1) = [lm_1, lm_2] \in Y \end{cases}$$

onde $g_3 = x_0 x_2^2 - b_1 x_1^3 - (b_1 + a_5 b_1) x_1^2 x_2 - (b_3 + b_2 a_5 + a_6) x_1 x_2^2 - (-a_1 + a_7 - a_6 a_5 + b_3 a_5) x_2^3$, $l = x_0 + a_6 x_1 + (a_7 - a_5 a_6) x_2$, $m_1 = x_0 - a_6 x_1 + (a_5 a_6 - a_7) x_2$ e $m_2 = x_1 + a_5 x_2$.

A seguir consideremos as seguintes cartas de X^1 e $X \times G(6, S_3)$ respectivamente:

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^8 & \longrightarrow & \mathcal{U}_{1,2;1} \\ (a_1, b_1, b_2, b_3, a_5, a_6, a_7, a_8) & \longmapsto & (a, [1 : b_1 : b_2 : b_3]) \end{array}$$

onde $a = (a_1, b_1 f_1 - a_6^2, b_2 f_1 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1, b_3 f_1 + a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 - a_7^2, a_5, a_6, a_7, a_8)$ com $f_1 = a_8 - a_5 a_7 + a_6 a_5^2$.

$$v_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^8 \times \mathbb{C}^{24} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{1,2} \times \mathcal{U}_{(1, \dots, 6)} \\ (a_1, \dots, a_8, c_1, \dots, c_{24}) & \longmapsto & ([q_1, q_2], [C_1, \dots, C_6]) \end{array}$$

onde

1. a_1, \dots, a_8 são coordenadas que determinam q_1, q_2 conforme 3.1.
2. c_1, \dots, c_{24} são as coordenadas que determinam C_1, \dots, C_6 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_1 &= c_1 x_1^3 + c_2 x_1^2 x_2 + c_3 x_1 x_2^2 + c_4 x_2^3 \\ &\vdots \\ C_6 &= c_{21} x_1^3 + c_{22} x_1^2 x_2 + c_{23} x_1 x_2^2 + c_{24} x_2^3 \end{aligned}$$

De fato, temos que os c_j 's são dados por:

$$\begin{aligned} c_1 &= -a_6(b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7 - b_1(a_1^2 - a_7 a_1 + a_6^2 a_5^2 - 2a_7 a_6 a_5 + a_5 a_6 a_1 - b_3 a_6 a_5^2 + a_7^2 - b_3 a_8 + b_3 a_5 a_7 - a_5^2(b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7) + (b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_5) \\ c_2 &= (b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7)(a_5 a_6 - a_7) - a_6(b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) - (b_2 + a_5 b_1)(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7) - a_1^2 + (b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7) a_5^2 - (b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_5 \\ c_3 &= (b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7)(a_5 a_7 - a_8) - (b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_7 - (b_3 + b_2 a_5 + a_6)(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7) - a_1^2 + (b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7) a_5^2 - (b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_5 \\ c_4 &= -(b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7) a_5 a_8 - (b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_8 - (a_7 - a_1 + b_3 a_5 - a_6 a_5)(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7) - a_1^2 + (b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7) a_5^2 - (b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_5 \\ c_5 &= -a_6^2 - b_1(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7 - a_1^2 + (b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7) a_5^2 - (b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_6 &= -(b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7) a_5 + a_5 a_6^2 - 2a_6 a_7 - (b_2 + a_5 b_1)(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7 - a_1 a_5 + a_5^2 a_6 - a_5 a_7) \\
c_7 &= -(b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2) a_5 - a_6 a_8 + a_5 a_6 a_7 - a_7^2 - (b_3 + a_5 b_2 + a_6)(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7 - a_1 a_5 + a_5^2 a_6 - a_5 a_7) \\
c_8 &= -(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7) a_5 + a_5 a_6 a_8 - a_7 a_8 - (-a_1 + a_7 - a_6 a_5 + b_3 a_5)(a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7 - a_1 a_5 + a_5^2 a_6 - a_5 a_7) \\
c_9 &= -a_1 b_1 \\
c_{10} &= b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7 - a_1 b_2 - a_1 a_5 b_1 \\
c_{11} &= b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2 - a_1 b_3 - a_1 a_5 b_2 - a_1 a_6 \\
c_{12} &= a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7 + a_1^2 - a_1 a_7 + a_1 a_6 a_5 - a_1 a_5 b_3 \\
c_{13} &= a_6 + a_5^2 b_1 \\
c_{14} &= a_7 - a_5 a_6 + a_5^2 b_2 + a_5^3 b_1 \\
c_{15} &= a_8 - a_5 a_7 + a_5^2 b_3 + a_5^3 b_2 + a_6 a_5^2 \\
c_{16} &= -a_5 a_8 + a_1 a_5^2 - a_7 a_5^2 - a_6 a_5^3 + b_3 a_5^3 \\
c_{17} &= -a_5 b_1 \\
c_{18} &= a_6 - a_5 b_2 - a_5^2 b_1 \\
c_{19} &= a_7 - a_5 b_3 - a_5^2 b_2 - a_5 a_6 \\
c_{20} &= a_8 + a_1 a_5 - a_5 a_7 + a_6 a_5^2 - b_3 a_5^2 \\
c_{21} &= b_1 \\
c_{22} &= b_2 + a_5 b_1 \\
c_{23} &= b_3 + a_5 b_2 + a_6 \\
c_{24} &= -a_1 + a_7 - a_6 a_5 + b_3 a_5.
\end{aligned}$$

É importante destacar que as cúbicas C_1, \dots, C_6 são determinadas a partir das linhas da matriz $[\rho_*^1 \mu_3 | \mathcal{U}_{1,2,1}]$. Ditos cálculos são feitos utilizando o pacote **MAPLE**, para mais detalhes veja **apêndice C** pag 114.

Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^8 & \xrightarrow{v} & \mathcal{U}_{1,2} \\
\psi \downarrow & & \downarrow \vartheta|_{\mathcal{U}_{1,2,1}} \\
\mathbb{C}^8 \times \mathbb{C}^{24} & \xrightarrow{v_1} & \mathcal{U}_{1,2} \times \mathcal{U}_{(1,\dots,6)}
\end{array}$$

A seguir verificaremos que:

- $\vartheta|_{\mathcal{U}_{1,2,1}}$ é injetivo.

De fato, para isto é suficiente verificar que o mapa ψ é injetivo. Sejam A e $B \in \mathbb{C}^8$ tais que $\psi(A) = \psi(B)$. então queremos mostrar que $A = B$.

Observe que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 \\ \alpha_2 = a_8 \\ \alpha_3 = a_5 \\ \alpha_4 = b_1 \\ \alpha_5 = a_6 \\ \alpha_6 = b_2 + a_5 b_1 \\ \alpha_7 = a_7 \\ \alpha_8 = b_3 + a_5 b_2 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

são partes das funções coordenadas de ψ . Então segue-se que $A = B$.

- $d\vartheta|_{\mathcal{U}_{1,2;1}}$ é injetivo.

Para isto é suficiente verificar que $d\psi$ é injetivo. Assim basta mostrar que o posto da matriz Jacobiana de $d\psi$ é igual a 8. Considere a submatriz da matriz Jacobiana de ψ determinada pelas funções coordenadas em 3.4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Após algumas operações elementares sobre as linhas da matriz acima verifica-se que o posto da submatriz é igual a 8. Portanto, o posto da matriz Jacobiana de $d\psi$ é igual a 8. Assim concluímos que $d\psi$ é injetora. De onde segue-se que ϑ é um mergulho. É importante notar que a definição de $\vartheta|_{\mathcal{U}_{i,j;k}}$ pode ser obtida de maneira inteiramente análoga ao caso considerado nesta prova. Deixamos ao cargo do leitor interessado fazer tais verificações. como também o fato de que estas descrições locais de ϑ são compatíveis no sentido que é possível estender a definição de ϑ a todo X^1 . Note que as contas foram realizadas num aberto em torno de uma órbita fechada.

■

3.1.3 Definição. *Seja $\mathcal{Y}^1 = \{([l^2, lm]) \mid l, m \in S_1 \text{ LI}\} \subseteq \mathcal{X} \subseteq X \times G(6, S_3)$. Seja $\vartheta : X^1 \rightarrow G(2, S_3) \times G(6, S_3)$ o mergulho definido acima. Então seja $Y^1 = \vartheta^{-1}(\mathcal{Y}^1)$.*

3.1.4 Observação. Note que $Y^1 \subseteq E^1$, pois $\rho_1(Y^1) = Z \subset Y$.

3.1.5 Lema. Considere $\mathcal{Y}^1 = \{([l^2, lm]) \mid l, m \in S_1 \text{ LI}\}$ então:

$$\zeta : \begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ ([p], [l]) & \longmapsto & ([l^2, lm], lS_2) \end{array}$$

onde $\{[p]\} = V(l) \cap V(m)$.   um mergulho sobre \mathcal{Y}^1 .

Demonstraao. A demonstraçao   análoga a que foi feito no Lema 1.2.1 item 4. ■

3.1.6 Definiao. Considere o diagrama: $X^1 \xrightarrow{\vartheta} X \times G(6, S_3) \xrightarrow{\rho_2} G(6, S_3)$. Então seja $\mathcal{G}_3^6 = \vartheta^*(\rho_2^*\mathcal{E}_3^6)$. Então podemos verificar que:

3.1.7 Lema. Seja \mathcal{G}_3^6 o feixe sobre X^1 definido acima. Então:

- (a) Se $x^1 \in X^1 - E^1$ então $\rho_1(x^1) = [q_1, q_2] \in X - Y$. E temos que $\mathcal{G}_{3, x^1}^6 = q_1 S_1 \oplus q_2 S_1$.
- (b) Se $x^1 \in E^1 - Y^1$ então $\vartheta(x_1) = ([lm_1, lm_2], l(S_2)_{(m_1, m_2)} + [f_3])$. E temos que $\mathcal{G}_{3, x^1}^6 = l(S_2)_{(m_1, m_2)} + [f_3]$ com $f_3 \notin lS_2$ e $f_3 \in \langle m_1, m_2 \rangle_3$.
- (c) Se $x^1 \in Y^1$ então $\rho_1(x^1) = [l^2, lm] \in Z$. E temos que $\mathcal{G}_{3, x^1}^6 = lS_2$.

Demonstraao. Segue-se do fato que a variedade \mathcal{X} descrita na seao 1.3   igual a $\vartheta(X^1)$ onde $X^1 \xrightarrow{\vartheta} X \times G(6, S_3)$   o mergulho definido no Lema 3.1.2 e da definiçao de $\mathcal{G}_3^6 = \vartheta^*(\rho_2^*\mathcal{E}_3^6)$.

3.2 Obtenao de Geradores de grau 4.

3.2.1 Descriao de \mathcal{G}_4^{11}

3.2.1 Lema. Seja $\mu_4 : \mathcal{G}_3^6 \otimes \mathcal{F}_1|_{X^1} \longrightarrow \mathcal{F}_4|_{X^1}$ o mapa induzido por multiplicaao. Então

- (a) $\Lambda^{10}\mu_4$   nunca nulo.
- (b) $V(\Lambda^{11}\mu_4) = Y^1$.

Demonstração.

(a) Para mostrar que $\Lambda^{10}\mu_4$ é nunca nulo verificaremos que:

- Se $x^1 \in X^1 - E^1$ assim $\rho_1(x^1) = [q_1, q_2] \in X - Y$. Então o $\text{posto}(\mu_{4,x^1}) = 11$. De fato, considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : S_2 \times S_2 &\longrightarrow S_4 \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha q_1 + \beta q_2 \end{aligned}$$

É suficiente mostrar que a dimensão do núcleo de φ é igual a 1. De fato, temos que $\mathcal{N}(\varphi) = \{(\alpha, \beta) \in S_2 \times S_2 \mid \alpha q_1 + \beta q_2 = 0\}$. Daí, temos que $\alpha q_1 + \beta q_2 = 0$ então $\alpha q_1 = -\beta q_2$. Logo, $\alpha = \kappa_1 \beta$ e $\beta = -\kappa_1 \alpha$ com $\kappa \in \mathbb{C}$. Assim, $\mathcal{N}(\varphi) \cong \mathbb{C}$. Portanto, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 12 - 1 = 11$.

- Se $x^1 \in E^1 - Y^1$ logo $\vartheta(x^1) = \{([lm_1, lm_2], lS_{2m_1, m_2} + [h_3])\}$. Então $\text{posto}(\mu_{4,x^1}) = 11$. De fato, considere a aplicação linear:

$$\begin{aligned} \varphi : S_2 \times S_2 \times S_1 &\longrightarrow S_4 \\ (\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto \alpha lm_1 + \beta lm_2 + \gamma h_3 \end{aligned}$$

Logo é suficiente mostrar que a dimensão do núcleo de φ é igual a 4. Note que $\mathcal{N}(\varphi) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in S_2 \times S_2 \times S_1 \mid \alpha lm_1 + \beta lm_2 + \gamma h_3 = 0\}$. Daí, temos que:

$$\alpha lm_1 + \beta lm_2 + \gamma h_3 = 0(*)$$

Então $\gamma h_3 = -l(\alpha m_1 + \beta m_2)$. Como $l \nmid h_3$ então $l \mid \gamma$, daí $\gamma = \gamma_1 l$ com $\gamma_1 \in \mathbb{C}$. Substituindo em (*) obtemos que $\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma_1 h_3 = 0$. Note que $h_3 = r_1 m_1 + r_2 m_2$ com $r_1, r_2 \in S_2$. Logo temos que $(\alpha + \gamma_1 r_1)m_1 + (\beta + \gamma_1 r_2)m_2 = 0$, verifica-se que $\alpha + \gamma_1 r_1 = sm_2$ e $\beta + \gamma_1 r_2 = -sm_1$ com $s \in S_1$. Portanto, temos que $\mathcal{N}(\varphi) \cong \mathbb{C} \times S_1$. Assim, verifica-se que $\dim \text{Im}(\varphi) = 15 - 4 = 11$.

- (b) Seja $\pi \in Y^1$ então o $\text{posto}(\mu_{4,\pi}) = 10$. Assim $\Lambda_{\mu_{4,\pi}}^{11}$ é nulo. Portanto, $Y^1 \subseteq V(\Lambda^{11}\mu_4)$. Para mostrar que $V(\Lambda^{11}\mu_4) \subseteq Y^1$ consideraremos a representação local de μ_4 . Seja $\mathcal{U}_{(1,2;1)} \subseteq X^1$ um aberto isomorfo a \mathbb{C}^8 , escolhido de maneira que $\{q_1 x_i, q_2 x_i\}_3^{i=1} \cup \{h_3\}$ de-

termina uma base de $\mathcal{G}_3^6 |_{\mathcal{U}_{1,2;1}}$, onde:

$$\begin{aligned}
q_1 &= x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + x_1^2 b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 x_1^2 + x_1^2 b_1 a_8 & (3.5) \\
&\quad - x_1^2 b_1 a_5 a_7 + x_1 x_2 b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 x_1 x_2 - 2x_1 x_2 a_6 a_7 \\
&\quad + x_1 x_2 a_6 a_1 - x_1 x_2 b_2 a_5 a_7 + x_1 x_2 b_2 a_6 a_5^2 + x_2^2 a_7 a_1 \\
&\quad - x_2^2 a_6^2 a_5^2 + 2x_2^2 a_7 a_6 a_5 - x_2^2 a_5 a_6 a_1 \\
&\quad + x_2^2 b_3 a_6 a_5^2 - x_2^2 a_7^2 + x_2^2 b_3 a_8 - x_2^2 b_3 a_5 a_7 \\
q_2 &= x_0 x_1 + a_5 x_0 x_2 + a_6 x_1^2 + a_7 x_1 x_2 + a_8 x_2^2 \\
h_3 &= -x_0 x_2^2 + b_1 x_1^3 + (b_2 + a_5 b_1) x_2 x_1^2 + (b_3 + b_2 a_5 + a_6) x_1 x_2^2 \\
&\quad + (-a_1 + a_7 - a_6 a_5 + b_3 a_5) x_2^3
\end{aligned}$$

Nesse mesmo aberto consegue-se \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_4 trivializem com base local formada pelos monômios ordenados:

$$x_0, x_1, x_2$$

e

$$x_0^4, x_0^3 x_1, x_0^3 x_2, x_0^2 x_1^2, x_0^2 x_1 x_2, x_0^2 x_2^2, x_0 x_1^3, x_0 x_1^2 x_2, x_0 x_1 x_2^2, x_0 x_2^3, x_1^4, x_1^3 x_2, x_1^2 x_2^2, x_1 x_2^3, x_2^4.$$

A restrição de μ_4 sobre $\mathcal{U}_{(1,2;1)}$ é representada por uma matriz 18×15 . Após algumas operações elementares em suas linhas verificamos que as últimas 7 linhas são nulas, assim a submatriz de $\mu_4 |_{\mathcal{U}_{(1,2;1)}}$ formada pelas linhas não nulas é:

$$\begin{pmatrix}
1 & & & * & \cdots & & * \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & * & \cdots & & * \\
0 & \cdots & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5
\end{pmatrix}.$$

onde

$$\begin{aligned}
p_1 &= b_1 & (3.6) \\
p_2 &= b_2 \\
p_3 &= 2a_6 + b_3 \\
p_4 &= a_1 - 2a_7 - 2b_3 a_5 \\
p_5 &= a_8 - a_5 a_7 - \frac{1}{2} a_5^2 b_3.
\end{aligned}$$

apêndice C pag 123. Verificamos que $\Lambda_{\mu_4}^{11} = \langle p_1, \dots, p_5 \rangle$. Daí, se $\pi \in V(\Lambda_{\mu_4}^{11})$ então:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0 \Leftrightarrow b_1 = 0 \\
p_2 &= 0 \Leftrightarrow b_2 = 0 \\
p_3 &= 0 \Leftrightarrow 2a_6 + b_3 = 0 \Rightarrow a_6 = -\frac{1}{2} b_3 \\
p_4 &= 0 \Leftrightarrow a_1 - 2a_7 - 2b_3 a_5 = 0 \Rightarrow a_1 = 2a_7 + 2b_3 a_5 \\
p_5 &= 0 \Leftrightarrow a_8 - a_5 a_7 - \frac{1}{2} a_5^2 b_3 = 0 \Rightarrow a_8 = a_5 a_7 + \frac{1}{2} a_5^2 b_3.
\end{aligned}$$

Substituindo as relações acima nas equações que definem q_1, q_2 e h_3 conforme 3.5, temos que:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{4}(2x_0 + 2a_7x_2 + 3a_5b_3x_2 + b_3x_1)(2x_0 + 2a_7x_2 + a_5b_3x_2 - b_3x_1) \\ q_2 &= \frac{1}{2}(a_5x_2 + x_1)(2x_0 + 2a_7x_2 + a_5b_3x_2 - b_3x_1) \\ h_3 &= -\frac{1}{2}x_2^2(2x_0 + 2a_7x_2 + a_5b_3x_2 - b_3x_1). \end{aligned}$$

assim concluímos que $\pi \in Y^1$.

Considere o diagrama de explosão:

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & X^2 \\ \rho_2 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ Y^1 & \hookrightarrow & X^1 \end{array} \quad (3.7)$$

onde $X^2 = Bl_{Y^1}X^1$.

3.2.2 Lema. X^2 mergulha em $X^1 \times G(11, S_4)$.

Demonstração. Considere

$$\varphi : X^2 \longrightarrow X^1 \times G(11, S_4)$$

definida da seguinte maneira:

Sejam $\{\mathcal{U}_{i,j;k}\}$ a cobertura aberta de X^1 citada no Lema 3.1.2 e $\mathcal{U}_{i,j;k;l}$ a cobertura aberta de X^2 obtida da seguinte forma: note que $\rho_2^{-1}(\mathcal{U}_{i,j;k;l}) \subseteq X^2$ é um aberto de X^2 então temos que $\rho_2^{-1}(\mathcal{U}_{i,j;k}) = \cup \mathcal{U}_{i,j;k;l}$ com $l = 1, 2, 3, 4, 5$ onde $\mathcal{U}_{i,j;k;l}$ é o aberto determinado pelo fato que p_k é o gerador do ideal do divisor excepcional. Ou seja, $E^2 \cap (\mathcal{U}_{i,j;k;l}) = V(p_k)$. Considere a explosão de $\mathcal{U}_{1,2;1}$ ao longo de $\mathcal{U}_{1,2;1} \cap Y^1$, $Bl_{(\mathcal{U}_{1,2;1} \cap Y^1)}\mathcal{U}_{1,2;1} \subseteq \mathcal{U}_{1,2;1} \times \mathbb{P}^4$, é dado por:

$$Bl_{(\mathcal{U}_{1,2;1} \cap Y^1)}\mathcal{U}_{1,2;1} = \{(a, b, [C_1 : C_2 : C_3 : C_4 : C_5]) \mid p_i(a, b)C_j = p_j(a, b)C_i \forall i \neq j\}$$

Assim definiremos φ localmente por:

$$\varphi |_{\mathcal{U}_{(1,2;1;1)}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{(1,2;1;1)} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{1,2} \times \mathcal{U}_{(1,\dots,11)} \\ x^2 & \longmapsto & (\rho_2(x^2), V_{x^2}) \end{array}$$

com

$$V_{x^2} = \begin{cases} q_1 S_2 \oplus q_2 S_2 & \text{se } \rho_2(x^2) \in X^1 - E^1 \text{ com } \rho_1(\rho_2(x^2)) = [q_1, q_2] \in X - Y \\ l(S_3)_{(m_1, m_2)} + g_3 S_1 & \text{se } \rho_2(x^2) \in E^1 - Y^1 \text{ com } \rho_2(x^2) = ([q_1, q_2], [q_1, q_2]_3 + [g_3]) \\ lS_3 + [h_4] & \text{se } \rho_2(x^2) \in Y^1 \end{cases}$$

onde $h_4 = x_1^4 + c_1 x_1^3 x_2 + 2c_2 x_1^2 x_2^2 - c_3 x_1 x_2^3 + c_4 x_2^4$, verifica-se que $h_4 \notin lS_3$. Consideremos as seguintes cartas para X^2 e $X^1 \times G(11, S_4)$ respectivamente:

$$\kappa : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^8 & \longrightarrow & \mathcal{U}_{(1,2;1;1)} \\ (a_5, a_7, b_1, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4) & \longmapsto & (a, b, [1 : c_1 : c_2 : c_3 : c_4]) \end{array}$$

onde $a = (2a_7 + 2b_3 a_5 + c_3 b_1, b_1, c_1 b_1, b_3, a_5, -\frac{1}{2}b_3 + c_2 b_1, a_7, a_5 a_7 + \frac{1}{2}b_3 a_5^2 + c_4 b_1)$ e, e,

$$\kappa_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^8 \times \mathbb{C}^{44} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{1,2} \times \mathcal{U}_{(1,\dots,11)} \\ (a_1, b_1, b_2, b_3, a_5, \dots, a_8, h_1, \dots, h_{44}) & \longmapsto & ([a_1, a_2, \dots, a_8], [1 : b_1 : b_2 : b_3], H_1, \dots, H_{11}) \end{array}$$

onde

$$(*) \begin{cases} a_2 = b_1 f_1 - a_6^2 \\ a_3 = b_2 f_1 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 \\ a_4 = b_3 f_1 + a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 - a_7^2 \end{cases}$$

com $f_1 = a_8 - a_5 a_7 + a_6 a_5^2$. Note que:

- (a) a_1, \dots, a_8 são as coordenadas que determinam q_1, q_2 conforme 3.1.
- (b) Analogamente h_1, \dots, h_{44} determinam H_1, \dots, H_{11} da seguinte forma:

$$H_1 = h_1 x_1^3 x_2 + h_2 x_1^2 x_2^2 + h_3 x_1 x_2^3 + h_4 x_2^4$$

⋮

$$H_{11} = h_{41} x_1^3 x_2 + h_{42} x_1^2 x_2^2 + h_{43} x_1 x_2^3 + h_{44} x_2^4$$

Assim, consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^8 & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{U}_{(1,2;1;1)} \\
\psi_1 \downarrow & & \downarrow \psi \\
\mathbb{C}^8 \times \mathbb{C}^{44} & \xrightarrow{\kappa_1} & \mathcal{U}_{1,2} \times \mathcal{U}_{(1,\dots,11)}
\end{array} \tag{3.1}$$

De modo análogo ao que foi feito no Lema 3.1.2 segue-se que φ é um mergulho.

3.2.3 Definição. *Considere o diagrama: $X^2 \xrightarrow{\varphi} X^1 \times G(11, S_4) \xrightarrow{\rho_2} G(11, S_4)$. Então $\mathcal{G}_4^{11} = \varphi^*(\rho_2^* \mathcal{E}_4^{11})$.*

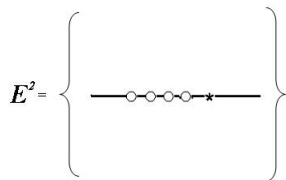
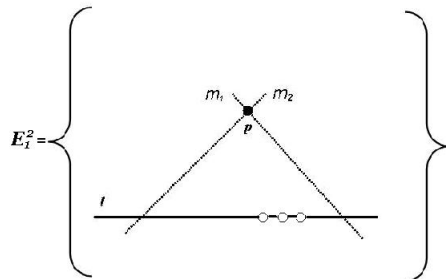
3.2.4 Lema. *Seja \mathcal{G}_4^{11} o fibrado sobre X^2 definido acima e $E_2^1 = \rho_2^{-1}(E^1)$. Então para $x^2 \in X^2$ temos que:*

- (a) Se $x^2 \in X^2 - E^2 \cup E_2^1$ então $\rho_1(\rho_2(x^2)) = [q_1, q_2] \in X - Y$. Assim temos que $\mathcal{G}_4^{11} = q_1 S_2 + q_2 S_2$.
- (b) Se $x^2 \in E_2^1 - E_2^1 \cap E^2$ logo, $\rho_2(x^2) \in E^1 - Y^1$, ou seja, $\rho_1(\rho_2(x^2)) = [lm_1, lm_2] \in Y$ então temos que $\mathcal{G}_4^{11} = lm_1 S_2 + lm_2 S_2 + g_3 S_1$ onde $g_3 \in \langle m_1, m_2 \rangle_3 - l S_{2(m_1, m_2)}$.
- (c) Se $x^2 \in E^2$ então $\rho_2(x^2) \in Y^1$ então $\rho_1(\rho_2(x^2)) = [l^2, lm] \in Z$. Assim temos que $\mathcal{G}_4^{11} = l S_3 + [h_4]$ para uma única escolha de h_4 tal que $\overline{h_4} \in \mathbb{P}(\frac{S_4}{l S_3})$.

Demonstração. Segue-se do Lema 3.2.2 onde afirma que X^2 mergulha em $X^1 \times G(11, S_4)$.

3.2.5 Teorema. *Seja $\gamma : X \cdots \rightarrow \text{Hilb}^4 \mathbb{P}^2$ o mapa racional definido por: $\gamma(\pi) = \mathcal{I}_\pi$ onde $\pi = [q_1, q_2]$. Seja Y o complementar do domínio de regularidade de γ . Então existe uma sequencia de explosões com centros não singulares $X^2 \rightarrow X^1 \rightarrow X$ tal que*

- (a) X^2 parametriza uma família plana de quádruplas de pontos e o mapa $X^2 \rightarrow \text{Hilb}^4 \mathbb{P}^2$ estende γ e é um morfismo.
- (b) O mapa $X^2 \rightarrow X$ é um isomorfismo sobre $X - Y$.
- (c) A subvariedade de X^2 que se projeta sobre Y consiste de 2 hipersuperfícies, cujos membros genéricos são indicados na figura abaixo: onde \circ denota um ponto no suporte das quádruplas de pontos associados.



Demonstração.

(a) Da construção segue-se que podemos definir um mapa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma : X^2 &\longrightarrow \text{Hilb}^4\mathbb{P}^2 \\ x^2 &\longmapsto \sigma(x^2) \end{aligned}$$

onde $\sigma(x^2)$ é o saturado do ideal determinado pelos geradores do subespaço $\varphi(x^2) \in G(11, S_4)$. Sabe-se que ter um morfismo de uma variedade V em $\text{Hilb}^4\mathcal{P}^2$, $\psi : V \longrightarrow \text{Hilb}^4\mathcal{P}^2$, é equivalente a ter uma família plana de quádruplas de pontos parametrizada por V . Veja referência [12] pag 53. Por outra parte observe que $\gamma : X \cdots \longrightarrow \text{Hilb}^4\mathcal{P}^2$ é definido por $\gamma(\pi) = \mathcal{I}_\pi = \langle q_1, q_2 \rangle$. Assim o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
X^2 & & \\
\downarrow \rho_2 & \searrow \sigma & \\
X^1 & & \\
\downarrow \rho_1 & & \\
X \cdots & \xrightarrow{\gamma} & Hilb^4 \mathbb{P}^2
\end{array} \tag{3.2}$$

De fato, $\gamma(\rho_1(\rho_2(x^2))) = \langle q_1, q_2 \rangle = \sigma(x^2)$ se $x^2 \in X^2 - (E^2 \cup E_1^2)$. Concluindo assim a verificação da primeira afirmação.

- (b) Segue-se das propriedades dos mapas de explosão citadas no apêndice A.
- (c) Observe que temos o seguinte diagrama de explosões:

$$\begin{array}{ccccc}
E^2 & & E_1^2 \hookrightarrow & X^2 & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow \rho_2 & \\
Y^1 \hookrightarrow & E^1 \hookrightarrow & X^1 & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \rho_1 & & \\
Z \hookrightarrow & Y \hookrightarrow & X & &
\end{array} \tag{3.3}$$

onde $E_1^2 = \rho_2^{-1}(E^1)$. Observe que para todo $x^2 \in X^2 - (E^1 \cup E_1^2)$ verifica-se que $\rho_1(\rho_2(x^2)) \in X - Y$. De fato, note que $\rho_2(E^2 \cup E_1^2) = E^1$. Logo, $\rho_1(\rho_2(E^2 \cup E_1^2)) = \rho_1(E^1) = Y$. Portanto, a subvariedade de X^2 cuja imagem pelo morfismo $\rho_1 \circ \rho_2$ é Y , consiste das duas hipersuperfícies E^2 e E_1^2 . Da construção segue-se que

e

De fato, em 3.11 a quádrupla de pontos é obtida ao adicionarmos um gerador de grau, tal polinômio, passa pelo ponto p e determina 3 pontos sobre a reta l . Já no caso de 3.12 é preciso adicionar um gerador de grau 4 para obtermos a quádrupla de pontos. Tal quádrlica é escolhida módulo a equação da reta l . ■

Capítulo 4

Apêndice A

4.1 Definições Básicas

Este apêndice contém os conceitos básicos e resultados fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos desta dissertação . As idéias a seguir são desenvolvidas sobre o corpo \mathbb{C} .

4.2 Retas, Dimensões e Singularidades

4.2.1 Definição. *Seja K um corpo e V um espaço vetorial de dimensão $n + 1$ sobre K . O Espaço Projetivo associado a V é definido pelo quociente:*

$$\mathbb{P}(V) := V - \{0\} / \sim$$

onde $u \sim v, \forall u, v \in V \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, \lambda \in K$ tal que $u = \lambda v$.

Assim, $\mathbb{P}(V) = \{[v] \mid v \in V - \{0\}\}$ onde $[v] = \{u \in V - \{0\} \mid u \sim v\}$.

Se $K = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{C}^{n+1}$, então $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{P}^n$ é chamado de n -Espaço Projetivo. Cada ponto $p \in \mathbb{P}^n$ será denotado por $[p] = [p_0 : p_1 : \dots : p_n]$, onde $p_i \in \mathbb{C}$ são chamadas de coordenadas homogêneas de p .

4.2.2 Definição. Seja $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Chamamos f de polinômio homogêneo de grau d se $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tivermos:

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n).$$

4.2.3 Observação. Sempre iremos considerar polinômios homogêneos, caso contrário especificaremos. Também consideraremos R com a graduação Standard tal que $R = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} R_t$, onde $R_t = \{f \in R \mid f \text{ é homogêneo e } gr(f) = t\}$.

4.2.4 Definição. Um subconjunto Z de \mathbb{P}^n é dito uma variedade projetiva se existem polinômios homogêneos $f_1, \dots, f_s \in R$ tais que Z é o conjunto solução do sistema polinomial $f_i(x_0, \dots, x_n) = 0$ com $i = 1, \dots, s$.

Chamamos este conjunto de os zeros de f_1, \dots, f_s e o denotamos por $V(f_1, \dots, f_s)$. Isto é, $V(f_1, \dots, f_s) = \{[p_0 : p_1 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_i(p_0, \dots, p_n) = 0, \quad i = 1, \dots, s\}$.

4.2.5 Observação. Seja $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq R$ um ideal tal que f_i com $i = 1, \dots, s$ são polinômios homogêneos. Então $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$.

4.2.6 Exemplo. São variedades projetivas $\mathbb{P}^n = V(0) \quad \forall n$ e $\emptyset = V(1)$.

4.2.7 Definição. As variedades definidas por um ou mais polinômios em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1$ são chamadas de variedades lineares ou variedades projetivas lineares em \mathbb{P}^n .

4.2.8 Exemplo. As variedades em \mathbb{P}^n dadas por apenas um polinômio não constante são chamadas de hipersuperfícies, e possuem o grau do polinômio que as define.

- (a) Uma hipersuperfície de grau um em \mathbb{P}^n é uma variedade linear chamada de hiperplano;
- (b) Uma hipersuperfície de grau dois em \mathbb{P}^2 é chamada de cônica;

4.2.9 Definição. Consideremos a variedade linear $l = V(l_1, \dots, l_{n-1}) \subseteq \mathbb{P}^n$ onde $l_i = \alpha_{i0}x_0 + \dots + \alpha_{in}x_n \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1$, $i = 1, \dots, n-1$. Seja J_l a seguinte matriz:

$$J_l = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n-10} & \alpha_{n-11} & \dots & \alpha_{n-1n} \end{pmatrix}$$

Dizemos que l é uma reta em \mathbb{P}^n se posto $J_l = n-1$.

4.2.10 Observação. As linhas de J_l são formadas pelos coeficientes das formas lineares l_i que compõem a variedade l ; Notemos ainda que uma reta em \mathbb{P}^2 será dada por uma forma linear não nula e portanto J_l deve ter posto igual a um.

4.2.11 Observação. Uma reta é determinada de maneira única por dois pontos distintos. Podemos verificar que dados $p = [p_0 : \dots : p_n] \neq q = [q_0 : \dots : q_n] \in \mathbb{P}^n$ temos que $l_{pq} = \{ap + bq \in \mathbb{P}^n \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1\}$ define uma reta em \mathbb{P}^n , onde l_{pq} é a única que passa por p e q .

De fato, as $n-1$ equações que define l_{pq} são :

$$x_k = \frac{x_i q_j - x_j q_i}{p_i q_j - p_j q_i} p_k - \frac{x_i p_j - x_j p_i}{p_i q_j - p_j q_i} q_k, \text{ com } k \in \{0, \dots, n\} \text{ e } k \neq i, j.$$

(Notemos que existem $i \neq j$, tais que $p_i q_j - p_j q_i \neq 0$, desde que $p \neq q$.)

O nosso objetivo agora é definir a dimensão das variedades projetivas.

4.2.12 Definição. Seja X um subconjunto de \mathbb{P}^n . Definimos o ideal associado a X , $\mathfrak{S}(X)$, por:

$$\mathfrak{S}X = \{f \in R \mid f(a) = 0 \quad \forall a \in X\}.$$

4.2.13 Teorema. (Teorema dos zeros de Hilbert). Seja $V(I)$ uma variedade de \mathbb{P}^n tal que $\sqrt{I} \neq \langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Então $\mathfrak{S}(V(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. Consultar referência [14], pg.375-376. e [7] pag 34. ■

4.3 Topologia de Zariski

Considere a família $\wp = \{V(I)\}$, onde I percorre os ideais homogêneos de R . Então note que:

- (a) $\mathbb{P}^n, \emptyset \in \wp$;
- (b) Se $V(I), V(J) \in \wp$ então $V(I) \cup V(J) \in \wp$;
- (c) $V(I_\alpha) \in \wp$, $\alpha \in \Lambda$, então $\cap V(I_\alpha) \in \wp$.

A família \wp determina a chamada Topologia de Zariski (1899-1986) no Espaço Projetivo \mathbb{P}^n , onde os conjuntos $V(I)$ são fechados da topologia. Esta será a Topologia usada durante todo o texto. Além disso, se $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ e $J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle \subseteq R$ temos ainda que:

- (d) $V(I) \cap V(J) = V(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t)$;
- (e) $V(I) \cup V(J) = V(f_i g_j)$ desde que $1 \leq i \leq s$ e $1 \leq j \leq t$;
- (f) $I \subseteq J \Rightarrow V(I) \supseteq V(J)$;

4.3.1 Definição. Um espaço topológico é dito irredutível se não for possível decompô-lo como união de dois subconjuntos fechados próprios. Uma variedade $W \subset \mathbb{P}^n$ é dita irredutível se W é irredutível como um espaço com a topologia de Zariski induzida.

4.3.2 Proposição. Seja X um subconjunto de \mathbb{P}^n . $\mathfrak{S}(X)$ é primo se, e só se, X é irredutível.

Demonstração. Consultar referência [5] pag. 4.

4.3.3 Definição. Seja V um espaço vetorial sobre K de dimensão $n + 1$. Então definimos $\dim \mathbb{P}(V) = n$.

4.3.4 Exemplo. Vejamos o caso do espaço vetorial R_d . Sabemos que $\dim R_d = \frac{(n+d)!}{n!d!}$ e portanto temos que $\dim \mathbb{P}(R_d) = \frac{(n+d)!}{n!d!} - 1$.

4.3.5 Definição. Seja $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ e $p \in Z$. Definimos o Espaço Tangente Projetivo de Z em p como sendo o conjunto:

$$T_p Z = \{[a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid \nabla f(p) \cdot (a_0, \dots, a_n) = 0, \forall f \in \mathfrak{S}(Z)\}.$$

onde $\nabla f(p)$ denota o vetor gradiente e \cdot denota o produto interno usual.

4.3.6 Observação. Sejam $p \in Z \subseteq \mathbb{P}^n$ e $\mathfrak{S}(Z) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Observemos que,

$$T_p Z = V \left(\sum_{j=0}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p)x_j, \dots, \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(p)x_j \right).$$

Isto é, $T_p Z$ é uma variedade linear de \mathbb{P}^n .

Em particular se $Z = V(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ e p é tal que $\nabla f(p) \neq 0$, então $T_p Z = V(h)$ é uma reta onde $h = \frac{\partial f}{\partial x_0}(p)x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p)x_3$.

4.3.7 Exemplo. $T_p \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n$. De forma geral, se $Z = V(l_1, \dots, l_s)$ é uma variedade linear em \mathbb{P}^n e $p \in Z$, então $T_p Z = Z$. Basta observar que $\mathfrak{S}(Z) = \langle l_1, \dots, l_s \rangle$, e para cada $i = 1, \dots, s$ temos $\nabla l_i(p) = (\alpha_{i0}, \dots, \alpha_{in})$, conforme a notação em 4.2.9.

4.3.8 Definição. Se $Z = V(l_1, \dots, l_s) \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade linear conforme na definição 4.2.9, definimos a dimensão de Z como sendo:

$$\dim Z = n - \text{posto} J_z$$

4.3.9 Definição. Seja Z uma variedade irredutível em \mathbb{P}^n . Definimos a dimensão de Z como sendo $\dim Z = \min \{ \dim(T_p Z) \mid p \in Z \}$.

4.3.10 Definição. Seja Y uma variedade redutível em \mathbb{P}^n e Y_i suas componentes irredutíveis. Definimos a dimensão de Y como sendo $\dim Y = \max \{ \dim(Y_i) \}$.

Das definições acima segue-se que:

- Para $p = [p_0 : \dots : p_n]$, $\dim \{p\} = 0$, visto que $\{p\} = V(I)$, onde $I = \langle p_0 x_1 - x_0 p_1, \dots, p_0 x_n - x_0 p_n \rangle$;

- Uma reta em \mathbb{P}^3 tem dimensão 1, enquanto que um plano tem dimensão 2.

4.3.11 Observação. Seja X uma variedade irredutível e $U \subseteq X$ um aberto não vazio. Então $\dim U = \dim X$. Veja referência [3] pg 54.

4.3.12 Definição. Seja $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade. Dizemos que Z é uma curva se $\dim Z = 1$.

4.3.13 Teorema. (Teorema de Bézout) Sejam F, G curvas planas projetivas de grau m e n respectivamente. Assuma que F, G não possui componente em comum. Então:

$$\#(F \cap G) = mn$$

pontos contados com multiplicidades.

Demonstração. Consultar referências [3] pag 133, [13] pag 62-64, [14] pag 420-421 e [1] pag 112.

4.3.14 Definição. Seja Z uma subvariedade de \mathbb{P}^n de dimensão m . Dizemos que $p \in Z$ é ponto singular de Z se, e somente se, $\dim T_p Z > m$. O conjunto dos pontos singulares de Z é denotado por $\text{Sing} Z$. Quando Z não possui pontos singulares dizemos que Z é não singular.

4.3.15 Proposição. Seja $Z = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva tal que f é livre de quadrados. Então temos que

$$p \in Z \text{ é singular} \Leftrightarrow \nabla f(p) = 0$$

Demonstração. De fato, lembremos que

$$T_p Z = V\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(p)x_0 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)x_n\right)$$

e que $\dim T_p Z = n - \text{posto} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_0}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{array} \right)$.

Portanto temos as seguintes possibilidades:

$\dim T_p Z = n$ se $\nabla f(p) = 0$ ou $\dim T_p Z = n - 1$ se $\nabla f(p) \neq 0$.

Como $\dim Z = \min \{n, n - 1\}$, temos que $\dim Z = n - 1$. Portanto, $p \in Z$ é singular $\Leftrightarrow \dim T_p Z > n - 1 \Leftrightarrow \dim T_p Z = n \Leftrightarrow \nabla f(p) = 0$. ■

4.3.16 Exemplo.

- (a) \mathbb{P}^n é não singular;
- (b) $F = V(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2$ é uma cônica não singular;
- (c) $Y = V(x_0 x_1)$ é uma cônica singular onde $\text{Sing} Y = V(x_0, x_1)$.

4.3.17 Observação. Seja $g = Ax_0^2 + Bx_0 x_1 + Cx_1^2 + Dx_0 x_2 + Ex_1 x_2 + Fx_2^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$ não nulo. Notemos que $C = V(g) \subseteq \mathbb{P}^2$ define uma cônica. Sabemos que $p \in C$ é ponto singular se, e somente se, $\nabla g(p) = 0$. Ou seja,

$$p = [p_0 : p_1 : p_2] \in \text{Sing}(C) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial x_0}(p), \frac{\partial g}{\partial x_1}(p), \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \right) = 0$$

$$p \in \text{Sing}(C) \Leftrightarrow 2Ap_0 + Bp_1 + Dp_2 = 0$$

$$Bp_0 + 2Cp_1 + Ep_2 = 0$$

$$Dp_0 + Ep_1 + 2Fp_2 = 0$$

$$p \in \text{Sing}(C) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $p \in \text{Sing}(C)$ se, e só se,

$$\det \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto, C é não singular $\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \neq 0$.

4.4 Morfismos

4.4.1 Definição. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Dizemos que X é uma variedade quase-projetiva se for possível encontrar $A, F \subseteq \mathbb{P}^n$, A aberto e F fechado, tais que $X = A \cap F$.

4.4.2 Definição. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade quase-projetiva. Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$, uma função. Dizemos que φ é regular em $p \in X$ se existe uma vizinhança aberta V_p de p e também $g, h \in R_t$, ou seja, polinômios homogêneos de mesmo grau, tais que $\varphi = g/h$ em V_p e $h(q) \neq 0 \forall q \in V_p$.

Dizemos que φ é regular se for regular em todos os pontos de X .

4.4.3 Definição. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades quase-projetivas. Dizemos que a função $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo se:

- (a) f é contínua;
- (b) \forall aberto $V \subset Y$, $V \neq \emptyset$ e $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ regular verifica-se que $\Phi \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ é também regular.

Observemos o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(V) \subseteq X & \xrightarrow{f} & V \subseteq Y \\
 & \searrow \Phi \circ f & \swarrow \Phi \\
 & & \mathbb{C}
 \end{array} \tag{4.1}$$

4.4.4 Lema. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades quase-projetivas tais que $X \subseteq Y$. Então a inclusão $i : X \hookrightarrow Y$ tal que $i(x) = x, \forall x \in X$ é um morfismo.

Demonstração.

- (a) Seja $V \subseteq Y$ um aberto de Y e notemos que $i^{-1}(V) = X \cap V$. Como V é aberto em Y temos que existe A aberto, tal que $V = A \cap Y$. Então podemos escrever que $X \cap V = X \cap A$ que é um aberto em X . E assim temos que i é contínua.

(b) Dado um aberto $V \subset Y$, $V \neq \emptyset$ e $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ regular, verificaremos que $\Phi \circ i$ é regular em $p \in i^{-1}(V)$, $\forall p$.

De fato, seja $p \in i^{-1}(V) = X \cap V$ então $i(p) = p \in V$. Como Φ é regular em p , temos que existe $V_p \subseteq V$ um aberto e $g, h \in R_d$ tais que $\Phi = g/h$ em V_p .

Notemos que $X \cap V_p$ é um aberto de $X \cap V$, e que contém p . Assim,

$$(\Phi \circ i)(p) = \Phi(i(p)) = \Phi(p) = g(p)/h(p).$$

Portanto, $\Phi \circ i = g/h$ em $X \cap V_p$, ou seja, $\Phi \circ i$ é regular, e portanto i é morfismo.

■

Com raciocínio análogo podemos concluir que a função identidade $id_{\mathbb{P}^n}$ também é um morfismo.

4.4.5 Lema. *Sejam X, Y, Z variedades projetivas, e $f : Y \rightarrow Z$ e $g : X \rightarrow Y$ morfismos. Então $f \circ g$ também é um morfismo.*

Observemos o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow f \circ g & \downarrow f \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \varphi \circ f \\ \xrightarrow{\varphi} \\ \mathbb{C} \end{array} \quad (4.2)$$

Demonstração. Claramente $(f \circ g)$ é contínua. Suponhamos então que $\varphi : V \subseteq Z \rightarrow \mathbb{C}$ seja regular, então $\varphi \circ f$ também é regular já que V é um aberto de Z e f é morfismo. Assim, $(\varphi \circ f) \circ g$ é regular e como $(\varphi \circ f) \circ g|_{(f \circ g)^{-1}(V)} = \varphi \circ (f \circ g)|_{(f \circ g)^{-1}(V)}$ temos que $\varphi \circ (f \circ g)$ é morfismo como queríamos mostrar.

■

A seguir, enunciaremos o Teorema da Dimensão das Fibras.

4.4.6 Teorema. *(Teorema da Dimensão das Fibras) Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades quase projetivas e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo sobrejetivo. então :*

- (a) $\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y$, para qualquer $y \in Y$;
- (b) Existe $U \neq \emptyset$, $U \subseteq Y$, aberto tal que $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$, com $y \in U$.

Demonstração. Consultar referência [9], pg. 76 e [3] pag 60.

4.5 Produto de Variedades

Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ duas variedades quase-projetivas. Gostaríamos de dar uma estrutura de variedade quase-projetiva ao conjunto:

4.5.1 Definição.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

4.5.2 Definição. (*Mergulho de Segre*) Seja $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N$ definido por $\sigma([a], [b]) = [\dots : a_i b_j : \dots]$ onde $N = mn + m + n$. Dizemos que $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é uma variedade quase-projetiva se $\sigma(Z) \subseteq \mathbb{P}^N$ é uma variedade quase-projetiva. As subvariedades de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ são chamadas de biprojetivas.

Assim pode-se concluir que $X \times \mathbb{P}^m$, $\mathbb{P}^n \times Y$ e $X \times Y$ são variedades quase-projetivas.

4.5.3 Definição. Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades quase-projetivas, $p \in X \times Y$ e a $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é regular em p se, e somente se,

$$f \circ \sigma^{-1} : \sigma(X \times Y) \rightarrow \mathbb{C}$$

for regular em $\sigma(p)$, onde $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$ é o mergulho de Segre.

4.5.4 Lema. Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades quase-projetivas. Seja $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ a função definida por $p_2(x, y) = y$ (a projeção na segunda coordenada). Então p_2 é um morfismo.

Demonstração.

(a) Seja $V \subseteq Y$ um aberto. Notemos que $p_2^{-1}(V) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in V\} = X \times V$. Como V é aberto em Y e X é aberto em X , temos que $X \times V$ é aberto em $X \times Y$. Logo p_2 é contínua.

(b) Seja $V \subset Y$, um aberto qualquer, $V \neq \emptyset$ e $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ regular, verificaremos que $\Phi \circ p_2$ é regular em $p \in X \times V$, $\forall p$. De fato,

seja $p \in X \times V$ então $p_2(p) = q \in V$. Como Φ é regular em q , temos que existe $V_s \subseteq V$ aberto e $g, h \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_m]_d$ e $\Phi = g/h$ em V_s . Temos que $X \times V_s$ é um aberto de $X \times V$. Notemos que a função $\Phi \circ p_2 : X \times V_s \rightarrow \mathbb{C}$ é regular em p .

Da definição anterior, é suficiente verificar que

$$(\Phi \circ p_2) \circ \sigma^{-1} : \sigma(X \times V_s) \rightarrow \mathbb{C} \text{ é regular em } \sigma(p).$$

Notemos que, $\forall x \in \sigma(X \times V_s)$,

$$(\Phi \circ p_2) \circ \sigma^{-1}(x) = \Phi(p_2(\sigma^{-1}(x))) = \frac{g(p_2(\sigma^{-1}(x)))}{h(p_2(\sigma^{-1}(x)))}.$$

Assim, $\Phi \circ p_2$ é regular, e portanto p_2 é morfismo. ■

4.5.5 Definição. *Sejam X, Y variedades e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo. Definimos o gráfico de f como sendo o conjunto*

$$\Gamma_f = \overline{\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}}.$$

4.5.6 Lema. *O gráfico de f é um subconjunto fechado de $X \times Y$.*

Demonstração. veja referência [3] pag 45.

4.5.7 Teorema. *Se X é uma variedade projetiva, e Y uma variedade quase-projetiva, a segunda projeção $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ leva conjuntos fechados em fechados.*

Demonstração. Consultar referência [3], pg. 45.

4.5.8 Proposição. *Seja X uma variedade projetiva de \mathbb{P}^n , Y variedade quase-projetiva de \mathbb{P}^m e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo. Então $f(X) \subseteq Y$ é um fechado de Y .*

Demonstração. De fato, como $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ é um fechado, temos que $p_2(\Gamma_f) = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$ é um fechado de Y . ■

4.5.9 Definição. *Seja X uma variedade irredutível e Y uma variedade. Um mapa racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ é definido como uma classe de equivalência de pares $\langle U, \gamma \rangle$ com $U \subset X$ um aberto não vazio de X , e $\gamma : U \rightarrow Y$ é um morfismo, onde dados dois pares $\langle U, \gamma \rangle$ e $\langle V, \eta \rangle$ são equivalentes se $\gamma|_{U \cap V} = \eta|_{U \cap V}$. O mapa racional φ é dominante se para algum par $\langle U, \gamma \rangle$, a imagem de γ é denso em Y .*

4.5.10 Exemplo. Considere o seguinte mapa racional $\varphi : \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ definida por: $\varphi(x, y) = [x : y]$. Note que o mapa está bem definido exatamente em $\mathbb{A}^2 - \{(0, 0)\}$. Observe que φ manda retas passando pela origem em \mathbb{A}^2 nos pontos de \mathbb{P}^1 que eles representam, em particular não existe uma maneira de estender continuamente para todo \mathbb{A}^2 . Assim podemos pensar φ como um mapa racional de \mathbb{P}^2 para \mathbb{P}^1 .

4.5.11 Definição. *Dizemos que um mapa racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ é birracional se existe um mapa racional $\psi : Y \dashrightarrow X$ tal que $\varphi \circ \psi$ e $\psi \circ \varphi$ são ambas definidas e iguais a identidade. Dizemos que duas variedades X e Y são birracionalmente isomorfas, ou simplesmente birracionais, se existe um mapa birracional entre eles.*

4.5.12 Exemplo. Considere:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ [x, y] & \longmapsto & \frac{y}{x} \end{array}$$

e

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [1 : t] \end{array}$$

Note que $\psi = \varphi^{-1}$, portanto $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = Id$. Daí, segue-se que φ é birracional.

4.6 Blowing Up

4.6.1 Definição. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim e $Y \subset X$ uma subvariedade. Escolha o conjunto de geradores $f_1, \dots, f_{k+1} \in A(X)$ para o ideal de Y em X e considere o mapa racional:

$$\begin{aligned} \varphi: X &\dashrightarrow \mathbb{P}^k \\ x &\longmapsto [f_1(x) : \dots : f_{k+1}(x)] \end{aligned}$$

Seja Y o lugar onde φ não está definida. Então a explosão de X ao longo de Y é definido por:

$$Bl_Y X = \overline{\{(x, \varphi(x)) \in \mathcal{U} \times \mathbb{P}^k \mid x \in \mathcal{U} = X - Y\}} \subseteq X \times \mathbb{P}^k$$

considere $\pi : Bl_Y X \rightarrow X$ determinado pela projeção na primeira coordenada. No caso em f_1, \dots, f_{k+1} formam uma sequência regular, temos que:

$$Bl_Y X = \{(x, [b_1 : \dots : b_{k+1}]) \in X \times \mathbb{P}^k \mid f_i(x)b_j = f_j(x)b_i \quad i, j \in \{1, \dots, k+1\}\}$$

4.6.2 Exemplo. Considere a explosão de \mathbb{A}^2 ao longo de $\{(0, 0)\}$. Pode-se verificar que $Bl_{\{(0,0)\}} \mathbb{A}^2 = \{((a_1, a_2), [b_1 : b_2]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid b_1 a_2 = b_2 a_1\}$. Assim $\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, 0)\} \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1$ é o divisor excepcional.

4.6.3 Observação. Se $\pi : Z \rightarrow X$ é um morfismo e suponha que temos uma cobertura de X por abertos \mathcal{U} tal que $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cong Bl_{\mathcal{U} \cap Y} \mathcal{U}$ sobre X , então $Z \cong Bl_Y X$. Blowing-up são determinados localmente. Consulte referência [6] pag 168.

4.7 Polinômio de Hilbert

O Nosso objetivo agora é definir o polinômio de Hilbert (1862-1943) de uma variedade projetiva. A idéia é associar a cada variedade em \mathbb{P}^n um polinômio de forma que nós possamos obter informações sobre ela, como grau e dimensão. Para maiores detalhes consultar ao menos as seguintes referências: [2], pg. 163.

4.7.1 Definição. Seja $I \subseteq P$ um ideal homogêneo. Definimos o \mathbb{C} -espaço vetorial I_t como sendo

$$I_t = \{p \in I \mid p \text{ é homogêneo de grau } t\} \text{ e } t = 0, 1, \dots$$

Tem-se claramente $I = \bigoplus_{t \geq 0} I_t$

4.7.2 Definição. A função de Hilbert de R/I , e denotada por $F_{R/I}$, é dada por:

$$F_{R/I}(t) = \dim R_t - \dim I_t$$

onde $t = 0, 1, \dots$ e

$$\dim R_t = \binom{n+t}{n}$$

4.7.3 Proposição. Seja $I \subseteq R$ um ideal homogêneo e $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ a variedade definida por I . Então existe um polinômio $H_{R/I} \in \mathbb{Q}[T]$ tal que, para todo t suficientemente grande, $H_{R/I}(t) = F_{R/I}(t)$.

Demonstração. Consultar referência [2] pg. 165 e [4] pag 117-118. ■

4.7.4 Definição. O polinômio descrito na proposição acima é chamado de polinômio de Hilbert de R/I .

4.7.5 Definição. Seja Z uma variedade de dimensão m e V uma subvariedade linear qualquer de \mathbb{P}^n de dimensão $n - m$ tal que $Z \cap V$ consiste de um número finito de pontos, digamos n_λ . Então definimos o grau da variedade Z como sendo o máximo da cardinalidade do conjunto $Z \cap V$, para toda variedade V . Ou seja,

$$\text{grau} Z = \max \{n_\lambda \mid \# \{Z \cap V\} = n_\lambda\}.$$

4.7.6 Observação. É importante notar que na definição acima deveríamos verificar que o grau de uma variedade independe da escolha da subvariedade linear. De fato, para termos consciência das dificuldades que envolvem esta noção, na referência [2], pg. 225, encontramos um capítulo inteiro dedicado ao estudo do grau de uma variedade.

4.7.7 Teorema. *Seja $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade cujo polinômio de Hilbert é dado por*

$$H_{R/I}(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots, a_i \in \mathbb{Q}, a_k \neq 0.$$

Então, o grau e a dimensão de $V(I)$ são dados por:

$$\text{grau}V(I) = a_k(k!) \text{ e } \dim V(I) = \text{grau}H_{R/I}(t) = k.$$

Demonstração. Consultar referência [2], pg. 165-166. ■

4.7.8 Proposição. *Consideremos $I = \langle f \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, onde $\text{grau}f = d$. Então $\text{grau}V(I) = d$ e $\dim V(I) = n - 1$.*

Demonstração. De fato, notemos que $\langle f \rangle_t = \{ hf/h \in R_{t-d} \}$. Afir-mamos que $\dim \langle f \rangle_t = \binom{n+t-d}{n}$. Para tanto notemos que $\langle f \rangle_t \cong R_{t-d}$. Consideremos no caso o isomorfismo $\varphi : R_{t-d} \rightarrow \langle f \rangle_t$ dado por $\varphi(h) = hf$.

Assim, $H_{R/\langle f \rangle}(t) = \binom{n+t}{n} - \binom{n+t-d}{n} = \frac{dt^{n-1}}{(n-1)!} + \text{termos de menor grau}$.

Portanto, $\text{grau}V(I) = d$ e $\dim V(I) = n - 1$. ■

4.7.9 Proposição. *Consideremos $I = \langle f, g \rangle \subseteq \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$, tal que $\text{grau}(f) = d, \text{grau}(g) = e$ e $\text{mdc}(f, g) = 1$. Então $\text{grau}V(I) = de$ e $\dim V(I) = n - 2$.*

Demonstração. De fato, notemos que

$$\langle f, g \rangle_t = \{ h_1 f + h_2 g / h_1 \in P_{t-d}, h_2 \in R_{t-e} \}.$$

Afirmamos que $\dim \langle f, g \rangle_t = \dim R_{t-d} + \dim R_{t-e} - \dim R_{t-e-d}$. Para tanto, tomemos a aplicação linear $\varphi : R_{t-d} \times R_{t-e} \rightarrow \langle f, g \rangle_t$ dado por $\varphi(h_1, h_2) = h_1 f + h_2 g$.

Assim, observemos que $\dim \langle f, g \rangle_t = \dim R_{t-d} \times R_{t-e} - \dim N_\varphi$. Note-mos então que $N_\varphi = \{(h_1, h_2) / h_1 f + h_2 g = 0\} = \{(-h_0 g, h_0 f) / h_0 \in R_{t-e-d}\}$. Concluimos então que $\dim N_\varphi \cong R_{t-e-d}$.

Portanto, $H_{R/\langle f, g \rangle}(t) = \dim R_{t-d} + \dim R_{t-e} + \dim R_{t-e-d}$. Donde concluimos que $H_{R/\langle f, g \rangle}(t) = \binom{n+t}{n} - \binom{n+t-d}{n} - \binom{n+t-e}{n} + \binom{n+t-e-d}{n} = \frac{\det^{n-2}}{(n-2)!} + \text{termos de menor grau}$. Portanto, $\text{grau}V(I) = ed$ e $\dim V(I) = n - 2$. ■

4.7.10 Definição. *Seja I um ideal de $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ então a saturação de I é dado por:*

$$\bar{I} = \{g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n] \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } gx_i^m \in I \ i = 0, 1, \dots, n\}$$

.

4.7.11 Exemplo. *Seja $I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2 \rangle \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Podemos mostrar que a saturação de I é dado por: $\bar{I} = \langle x_0 \rangle$. De fato, note que $x_0 \in \bar{I}$ pois $x_0 S_1 \subseteq \bar{I}$. Agora seja $g \in \bar{I}$ então podemos escrever g na forma $g = \tilde{g} + x_0 h$, onde \tilde{g} não depende de x_0 . Daí $gx_1^n = \tilde{g}x_1^n + x_0 h x_1^n$ como $gx_1^n \in \bar{I}$ temos que $\tilde{g}x_1^n \in I$ logo $x_0 | \tilde{g}$, já que \tilde{g} não depende de x_0 então necessariamente $\tilde{g} = 0$ Portanto, $g = x_0 h$. Assim temos que $\bar{I} = \langle x_0 \rangle$.*

4.7.12 Proposição. *Seja $I \subseteq R$ um ideal e $\bar{I} \subseteq R$ o saturado de I . Então*

$$P_{\bar{I}} = P_{\bar{I}}$$

Demonstração. *Veja referência [15] pag 350-354.*

Capítulo 5

Apêndice B

5.1 Ação de Grupos

5.1.1 Definição. *Seja G um grupo e X um conjunto. Então $\vartheta : G \times X \rightarrow X$ é uma ação de G sobre X pela esquerda se*

- (a) $e.x = x \quad \forall x \in X$
- (b) $h.(g.x) = hg.x \quad \forall x \in X, \forall h, g \in G$

5.1.2 Exemplo. Seja

$$\begin{aligned} \varphi : PGL(3) \times \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (A, [p]) &\longmapsto A.[p] = [Ap] \end{aligned}$$

φ define uma ação do grupo $PGL(3)$ em

$$E_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

A órbita de um elemento $x \in X$ é definido por:

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

Pode-se verificar que existe um isomorfismo entre G/E_x e \mathcal{O}_x , ou seja, $\mathcal{O}_x \cong G/E_x$. Logo, para calcular as dimensões das órbitas estudadas no **Capítulo 1**, basta saber quem é o estabilizador de cada uma delas. Daí, a dimensão de cada órbita será dada por:

$$\dim \mathcal{O}_x = \dim(G) - \dim(E_x)$$

5.2 AÇÃO DE $PGL(n)$

5.2.1 Definição. *Seja $GL(n+1)$ o grupo formado pelas matrizes invertíveis de ordem $n+1$ a coeficientes em \mathbb{C} . Então o grupo projetivo linear*

$$PGL(n) = GL(n+1)/\sim$$

é o conjunto quociente determinado pela relação:

$$A \sim B \iff A = \lambda B \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

a operação em $PGL(n)$ é induzida pela multiplicação usual de matrizes, ou seja, $[A] \cdot [B] = [AB]$.

Notação: Os elementos de $PGL(n)$ serão simplesmente denotados por A .

5.2.1 Ação de $GL(n+1)$ em R_d

5.2.2 Proposição. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} de dimensão $n+1$ e $Sim_d(V) = \{f : V^d \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é multilinear e simétrica}\}$. Então $Sim_d(V)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} de dimensão $\binom{n+d}{d}$.*

Demonstração.

5.2.3 Proposição. *Existe um isomorfismo linear natural entre R_d e $Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*)$.*

Demonstração. Note que R_d e $Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*)$ são espaços vetoriais sobre \mathbb{C} de mesma dimensão $\binom{n+d}{d}$. Logo é suficiente exibirmos bases de cada um destes espaços vetoriais e a regra que vai definir o isomorfismo linear $T_d : R_d \rightarrow Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*)$ nestas bases. Logo, podemos definir da seguinte maneira: $T_d(x_i) = e_{i+1}^*$ com $i = 0 \dots n$

5.2.4 Observação. Note que $T_1 : R_1 \rightarrow Sim_1((\mathbb{C}^{n+1})^*) = (\mathbb{C}^{n+1})^*$ é tal que $T_1(x_i) = e_{i+1}^*$ para $i = 0, \dots, n$. Se $n = 2$ então T_1 define um isomorfismo linear entre S_1 e $(\mathbb{C}^3)^*$ que denotaremos simplesmente por T .

5.2.5 Proposição. *Seja $\mathcal{A} : GL(n+1) \times Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*) \longrightarrow Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*)$ a função definida por $\mathcal{A}(A, f)(v_1, \dots, v_d) = f(A^t v_1, \dots, A^t v_d)$, onde A^t denota a transposta da matriz A . Então \mathcal{A} define uma ação a esquerda sobre $Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*)$. $\mathcal{A}(A, f)$ será simplesmente denotada por $A \cdot f$.*

Demonstração. Vamos mostrar que \mathcal{A} satisfaz as seguintes condições:

$$i) \forall f \in Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*), \quad I \cdot f = f.$$

$$ii) \forall A, B \in GL(n+1) \text{ e } \forall f \in Sim_d((\mathbb{C}^{n+1})^*) \quad A \cdot (B \cdot f) = (AB) \cdot f.$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} (I \cdot f)(v_1, \dots, v_d) &= f(I^t v_1, \dots, I^t v_d) \\ &= f(I v_1, \dots, I v_d) \\ &= f(v_1, \dots, v_d) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [A \cdot (B \cdot f)](v_1, \dots, v_d) &= (B \cdot f)(A^t v_1, \dots, A^t v_d) \\ &= f(B^t(A^t v_1), \dots, B^t(A^t v_d)) \\ &= f((B^t A^t) v_1, \dots, (B^t A^t) v_d) \\ &= f((AB)^t v_1, \dots, (AB)^t v_d) \\ &= [(AB) \cdot f](v_1, \dots, v_d) \end{aligned}$$

■

5.2.6 Corolário. *Notações como em 5.2.3 e 5.2.5. Seja $\mathbf{a} : GL(n+1) \times R_d \longrightarrow R_d$ a função definida por $\mathbf{a}(A, p) := T_d^{-1}(\mathcal{A}(A, T_d(p)))$. Então \mathbf{a} define uma ação de $GL(n+1)$ sobre R_d . $\mathbf{a}(A, p)$ será simplesmente denotada por $A \cdot p$.*

Demonstração.

Decorre da Proposição anterior que $\mathbf{a} : GL(n+1) \times R_d \longrightarrow R_d$ é uma ação de $GL(n+1)$ sobre R_d . ■

5.2.7 Observações.

- (a) Para cada $A \in GL(n+1)$ temos que a aplicação $L_A : R_d \longrightarrow R_d$ definida por $L_A(p) = A \cdot p$ é um isomorfismo linear.
- (b) Seja $m = x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in R_d$ então $A \cdot m = (A \cdot x_0)^{i_0} (A \cdot x_1)^{i_1} \dots (A \cdot x_n)^{i_n}$.

5.2.2 Ação de $PGL(n)$ em \mathbb{P}^n e $G(k, R_d)$

5.2.8 Proposição. Para cada $A \in PGL(n)$ e $[v] \in \mathbb{P}^n$ (respectivamente $[p_1, \dots, p_k] \in G(k, R_d)$) $[A] \cdot [v] = [A \cdot v] = [Av]$ (respectivamente $A \cdot [p_1, \dots, p_k] = [A \cdot p_1, \dots, A \cdot p_k]$) define uma ação de $PGL(n)$ em \mathbb{P}^n (respectivamente em $G(k, R_d)$).

5.2.9 Exemplo. Seja l a reta em \mathbb{P}^2 determinada pela equação $x_0 = 0$. Então queremos determinar todos os elementos $A \in PGL(3)$ tais que $A \cdot x_0 = x_0$. Ou seja, queremos determinar o estabilizador da reta l .

Considere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Note que $A \cdot x_0 = a_{11}x_0 + a_{21}x_1 + a_{31}x_2$

e a última expressão é igual a x_0 se e somente se $a_{11} = 1$ e $a_{21} = a_{31} = 0$.

De onde concluímos que:

$$\begin{aligned} E_l &= \{A \in PGL(3) \mid A \cdot l = l\} \\ E_l &= \{A \in PGL(3) \mid a_{11} = 1 \text{ e } a_{21} = a_{31} = 0\} \end{aligned}$$

5.2.10 Exemplo. Considere $X = G(2, S_2)$ e $\pi_0 = [x_0^2, x_0x_1] \in X$. Vamos calcular o estabilizador de π_0 . Para isto considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Note que

$$(A \cdot x_0)^2 = \alpha x_0^2 + \beta x_0x_1 \quad (5.1)$$

$$(A \cdot x_0)(A \cdot x_1) = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_0x_1 \quad (5.2)$$

De 5.1 temos que:

$$a^2x_0^2 + b^2x_1^2 + c^2x_2^2 + 2abx_0x_1 + 2acx_0x_2 + 2bcx_1x_2 = \alpha x_0^2 + \beta x_0x_1$$

e as seguintes relações:

$$\begin{cases} a^2 = \alpha \\ b^2 = 0 \\ c^2 = 0 \\ 2ab = \beta \\ ac = 0 \\ bc = 0 \end{cases}$$

Agora de 5.2 temos:

$$(dx_0 + ex_1 + fx_2)ax_0 = \alpha_1x_0^2 + \beta_1x_0x_1$$

e as seguintes relações:

$$\begin{cases} ad = \alpha_1 \\ ae = \beta_1 \\ af = 0 \end{cases}$$

Claramente, $a \neq 0$ logo, $f = 0$. Assim a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Portanto o estabilizador de π_0 é dado por:

$$E_{\pi_0} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{a} & \frac{g}{a} \\ 0 & \frac{e}{a} & \frac{h}{a} \\ 0 & 0 & \frac{i}{a} \end{pmatrix} \right) \right\rangle.$$

5.2.11 Lema. *Sejam $p_1 = [v_1], \dots, p_4 = [v_4] \in \mathbb{P}^2$ pontos em posição geral, então existe $\mathcal{A} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ isomorfismo linear tal que $[\mathcal{A}v_1] = [1 : 0 : 0], [\mathcal{A}v_2] = [0 : 1 : 0], [\mathcal{A}v_3] = [0 : 0 : 1]$ e $[\mathcal{A}v_4] = [1 : 1 : 1]$.*

Demonstração. Já que p_1, \dots, p_4 estão em posição geral temos que v_1, v_2, v_3 são *LI*. Logo, $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, com $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ pois p_1, \dots, p_4 estão em posição geral. Defina:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ v_0 &\longmapsto \frac{e_0}{\alpha} \\ v_1 &\longmapsto \frac{e_1}{\beta} \\ v_2 &\longmapsto \frac{e_2}{\gamma} \\ v_3 &\longmapsto e_0 + e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Vamos enunciar e demonstrar uma preposição que será útil para determinar o esbilizador de algumas órbitas de X . ■

5.2.12 Proposição. *Seja $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo. Para cada $A \in PGL(3)$ considere $A.I = \{A.f \mid f \in I\}$. Então $V(I) = A^t(V(A.I))$.*

Demonstração. Seja $p \in A^t(V(A.I))$ então $p = A^t.q$ para algum $q \in V(A.I)$. Já que $q \in V(A.I)$ temos que:

$$\begin{aligned} f(q) &= 0 \forall f \in A.I \Rightarrow A.g(q) = 0 \quad \forall g \in I \\ &\Rightarrow g(A^t.q) = 0 \quad \forall g \in I \\ &\Rightarrow A^t.q \in V(I) \\ &\Rightarrow p \in V(I) \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $p \in V(I)$ logo, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= 0 \forall g \in I \Rightarrow g(A^t(A^t)^{-1}p) = 0 \quad \forall g \in I \\ &\Rightarrow A.g((A^t)^{-1}p) = 0 \quad \forall g \in I \\ &\Rightarrow f((A^t)^{-1}.p) = 0 \in f \in A.I \\ &\Rightarrow (A^t)^{-1}.p \in V(A.I) \\ &\Rightarrow p \in A^t(V(A.I)) \end{aligned}$$

■

5.2.13 Corolário. *Se $A \in E_\pi$ então $A^t.(V(I_\pi)) = v(I_\pi)$.*

Demonstração. Com efeito, se $A \in E_\pi$ então $A.\pi = \pi$ e verifica-se que $A.I_\pi = I_\pi$. Assim, segue-se que da Proposição 5.2.12 o resultado desejado. ■

5.3 Determinação da Órbitas de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee}$.

5.3.1 Lema. *Considere $\Gamma = \{([v], [l]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee} \mid l(v) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee}$. Então:*

- (a) $\Gamma = \mathcal{O}_{([0:0:1], [x_0])}$.
- (b) $(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee}) - \Gamma = \mathcal{O}_{([1:0:0], [x_0])}$

Demonstração.

- (a) Seja $\pi \in \mathcal{O}_{([0:0:1],[x_0])}$ então $\pi = A.([0 : 0 : 1], [x_0])$ para algum $A \in PGL(3)$. Logo, $\pi = (A.[0 : 0 : 1], A.[x_0]) \in \Gamma$, então existe $A \in PGL(3)$ tal que $A.([0 : 0 : 1], [x_0]) = \pi$. É suficiente escolher A tal que $A.x_0 = l$ e $A.[0 : 0 : 1] = v$. Logo, $\pi \in \mathcal{O}_{([0:0:1],[x_0])}$.
- (b) Seja $\pi = ([v], [l]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee} - \Gamma$, isto é, $l(v) \neq 0$ então existe $A \in PGL(3)$ tal que $\pi = A.([1 : 0 : 0], [x_0])$. É suficiente escolher $A \in PGL(3)$ tal que $A.x_0 = l$ e $A.[1 : 0 : 0] = v$. Reciprocamente seja $\pi \in \mathcal{O}_{([1:0:0],[x_0])}$ então $\pi = A.([1 : 0 : 0], [x_0])$ para algum $A \in PGL(3)$. Assim, $\pi = (A.[1 : 0 : 0], A.[x_0]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee} - \Gamma$. Já que $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee} = \Gamma \sqcup (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee}) - \Gamma$, e $\dim(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^\vee}) - \Gamma = 4$ conforme Observação 4.3.11, e $\dim\Gamma = 3$ concluímos que Γ é a única órbita fechada, conforme a Proposição 5.4.3. ■

5.4 Alguns Fatos sobre Ação de Grupos em Variedades Algébricas.

5.4.1 Observação. Sejam X, Y variedades e G um grupo que age em X e em Y respectivamente. Seja: $\Psi : X \longrightarrow Y$ um mapa G -equivariante, isto é, $\Psi(g.x) = g.\Psi(x)$. Para cada $x \in X$ considere $(d\Psi)_x : T_x X \longrightarrow T_{\Psi(x)} Y$. Seja:

$$r_0 = \min \{ \text{posto}((d\Psi)_x) \mid x \in X \}$$

então podemos considerar o conjunto:

$$X_{\min} = \{ x \in X \mid \text{posto}((d\Psi)_x) = r_0 \}$$

Verifica-se que X_{\min} é um fechado G -invariante de X .

5.4.2 Observação. Se X é uma variedade que possui uma única órbita fechada, digamos $\mathcal{O}_{x_0}(x_0 \in X)$ então $\mathcal{O}_{x_0} \subseteq X_{\min}$. Logo, para determinarmos o posto mínimo possível de $d\Psi$ é suficiente calcular o posto de $d\Psi_{x_0}$.

5.4.3 Proposição. *Seja G um grupo algébrico agindo morficamente em uma variedade não vazia V . Então cada órbita é uma variedade lisa a qual é aberta em seu fecho em V . Seu limite é uma união de órbitas de dimensão estritamente menor. Em particular, as órbitas de dimensão menor são fechadas.*

Demonstração. Veja referência [8] pag 53.

5.4.4 Corolário. *Órbitas fechadas existem.*

Demonstração. Segue-se da Proposição 5.4.3 acima.

5.4.5 Lema. *Sejam H, V e W variedades projetivas e G um grupo agindo em H, V e W respectivamente. Suponha que $H \subseteq V \times W$ e seja $p_1 : H \rightarrow V$ a projeção na primeira coordenada. Então verifica-se que:*

- (a) *Se \mathcal{O}_h é uma órbita fechada de H então $p_1(\mathcal{O}_h)$ é uma órbita fechada de V .*
- (b) *Se \mathcal{O}_h é uma órbita fechada de H então $\mathcal{O}_h \cap p_1^{-1}(v_0)$ é uma órbita fechada de $H_{v_0} = p_1^{-1}(v_0)$ sob a ação de E_{v_0} .*

Demonstração.

- (a) Seja $h = (v, w) \in H$. Então verifica-se que $p_1(\mathcal{O}_h) = \mathcal{O}_v$. Se \mathcal{O}_h for uma órbita fechada, como p_1 é um morfismo entre variedades projetivas concluímos que $p_1(\mathcal{O}_h) = \mathcal{O}_v$ é fechada em V .
- (b) Note que se $x \in \mathcal{O}_h \cap H_{v_0}$ então $x = (v_0, w_0)$ para algum $w_0 \in W$. Assim podemos assumir que $h = (v_0, w_0)$. A seguir vamos mostrar que $\mathcal{O}_{(v_0, w_0)} \cap H_{v_0} = E_{v_0} \cdot (v_0, w_0)$. De fato, seja $x \in \mathcal{O}_{(v_0, w_0)} \cap H_{v_0}$ então temos que $h \in \mathcal{O}_{(v_0, w_0)}$ e $h \in H_{v_0}$. Logo,, $h = (A.v_0, A.w_0)$ para alguma matriz $A \in PGL(3)$ e $h \in H_{v_0}$. Assim, $A.v_0 = v_0$ daí temos que $A \in E_{v_0}$. Dáí segue que $h = A \cdot (v_0, w_0)$ com $A \in E_{v_0}$. Concluímos então que $h \in E_{v_0} \cdot (v_0, w_0)$. Reciprocamente, se $h \in E_{v_0} \cdot (v_0, w_0)$ então $h = A \cdot (v_0, w_0)$ com $A \in E_{v_0}$, logo $h = (v_0, A.w_0)$ com $A \in E_{v_0}$. Assim, $h \in \mathcal{O}_{(v_0, w_0)}$ e $h \in E_{v_0}$, ou seja, $h \in \mathcal{O}_{(v_0, w_0)} \cap E_{v_0}$.

■

5.4.6 Corolário. *Com as notações da seção 1.3 verifica-se que:*

$$\#\{\text{órbitas fechadas em } \mathcal{X}\} \leq \#\{\text{órbitas fechadas em } \mathcal{X}_{\pi_0} \text{ pela ação de } E_{v_0}\}$$

Demonstração. Segue-se do Lema acima.

Capítulo 6

Apêndice C

6.1 Cálculos no Maple

Lista de Variáveis.

```
> restart :
```

```
> read("c : /Eben2004/jprosjr6.txt");
```

```
> read("jprosjr6.txt");
```

```
xx := [x0, x1, x2];
```

Cálculo da base para o espaço vetorial das formas homogêneas de grau 2 nas variáveis

```
> evalm([[x0], [x1], [x2], [xx]]);
```

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

```
> convert(%, set);
```

```
{x0^2, x0x1, x0x2, x1^2, x1x2, x2^2}
```

Procedimento que fixa a ordem lexicográfica.

```

> fixorder(lister(%), xx);
[x0^2, x0x1, x0x2, x1^2, x1x2, x2^2]
> s2f0 := %;
s2f0 := [x0^2, x0x1, x0x2, x1^2, x1x2, x2^2]
> nops(%);
6 Cônicas do aberto  $\mathcal{U}_{1,2} \in X = G(2, S_2)$ .

```

```

> q1 := s2f0[1] + sum('a[i] * s2f0[i + 2]', 1' = 1..4);
q1 := x0^2 + a1x0x2 + a2x1^2 + a3x1x2 + a4x2^2

```

```

> q2 := s2f0[2] + sum('a[i + 2] * s2f0[i]', 1' = 3..6);
q2 := x0x1 + a5x0x2 + a6x1^2 + a7x1x2 + a8x2^2

```

```

> coefmon(q1, s2f0[1]);

```

1

```

> coefmon(q1, s2f0[2]);

```

0

```

> coefmon(q1, s2f0[4])

```

a_2

Procedimento que coleta os coeficientes dos monômios.

```

> seq(coefmon(q1, s2f0[i], i = 1..nops(s2f0)));
1, 0, a1, a2, a3, a4

```

```

> seq(coefmon(q2, s2f0[i], i = 1..nops(s2f0)));
0, 1, a5, a6, a7, a8

```

```

> eqx := [q1, q2];

```

```

eqx := [x0^2+a1x0x2+a2x1^2+a3x1x2+a4x2^2, x0x1+a5x0x2+a6x1^2+a7x1x2+a8x2^2]

```

```

> [seq([seq(coefmon(eqx[j], s2f0[i]), i = 1..nops(s2f0))], j = 1..2)];

```

[[1, 0, a1, a2, a3, a4], [0, 1, a5, a6, a7, a8]]

> $M := \text{matrix}(\%);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{bmatrix}.$$

Cálculo da base para o espaço vetorial das formas homogêneas de grau 3 nas variáveis x_0, x_1, x_2 .

> $s_3f_0 := \text{mon}(3, xx);$

$$s_3f_0 := [x_0^3, x_1x_0^2, x_2x_0^2, x_0x_1^2, x_2x_0x_1, x_0x_2^2, x_1^3, x_2x_1^2, x_1x_2^2, x_2^3]$$

Cálculo da matriz que nos dar a imagem de μ_3 .

> $M := \text{matrix}([\text{seq}(\text{seq}([\text{seq}(\text{coefmon}(eqx[j]*x||k, s_3f_0[i]), i = 1..nops(s_3f_0)]), j = 1..2), k = 0..2)]);$

Procedimento que faz a eliminação gaussiana.

> $B := \text{gausselim}(M);$

$B :=$

$$[1, 0, a_1, a_2, a_3, a_4, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, a_5, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, a_2, a_3, a_4]$$

$$[0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, -a_8 + a_5a_7 - a_6a_5^2, a_2 + a_6^2, a_3 + a_5a_2 + 2a_6a_7 - a_6a_1 - a_6^2a_5, a_4 + a_5a_3 + a_6a_8 - a_7a_1, a_7^2 - a_7a_6a_5, a_5a_4 - a_8a_1 + a_8a_7 - a_8a_6a_5]$$

Procedimento que calcula o número de linhas da matriz, a localização dos pivôs, e também a eliminação gaussiana.

> $M1 := \text{rows} - \text{no} - \text{pivo}(M);$

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

```
M1 := [{3}, {2, 2}, [1, 1], [5, 3], [4, 4], [6, 5]],  
[1, 0, a1, a2, a3, a4, 0, 0, 0, 0]  
[0, 1, a5, a6, a7, a8, 0, 0, 0, 0]  
[0, 0, 0, 0, 0, %1a5 - a8 + a5a1, a2 + a6^2, %1a6 + a3 + a5a2 + a6a7, %1a7 + a4 +  
a5a3 + a6a8, %1a8 + a5a4]  
[0, 0, 0, 1, a5, 0, a6, a7, a8, 0]  
[0, 0, 1, 0, 0, a1, 0, a2, a3, a4]  
[0, 0, 0, 0, 1, a5, 0, a6, a7, a8]]
```

%1 := -a1 + a7 - a6a5

> M1[1];

{3}

> rows - no - pivo - mu := M1[1];

rows - no - pivo - mu := {3}

> pivos - mu := M1[2];

pivo - mu := {[2, 2], [1, 1], [5, 3], [4, 4], [6, 5]}

> print(nops(%));

5

> M1 := M1[3]

M1 :=

```
[1, 0, a1, a2, a3, a4, 0, 0, 0, 0]  
[0, 1, a5, a6, a7, a8, 0, 0, 0, 0]
```

$$[0, 0, 0, 0, 0, \%1a_5 - a_8 + a_5a_1, a_2 + a_6^2, \%1a_6 + a_3 + a_5a_2 + a_6a_7, \%1a_7 + a_4 + a_5a_3 + a_6a_8, \%1a_8 + a_5a_4]$$

$$[0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, a_2, a_3, a_4]$$

$$[0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8]]$$

$$\%1 := -a_1 + a_7 - a_6a_5$$

$$> \text{vars0} := [a[1], a[2], a[3], a[4], a[5], a[6], a[7], a[8]];$$

$$\text{vars0} := [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]$$

Procedimento que determina as equações locais do primeiro centro de explosão.

$$> i := \text{eqs}(M_1, \text{rows} - \text{no} - \text{pivo} - \text{mu}, \text{vars0});$$

$$i := [\{3\}, [[3, 6], [3, 7], [3, 8], [3, 9]], [-a_8 + a_5a_7 - a_6a_5^2, a_2a_6^2, a_3 + a_5a_2 + 2a_6a_7 - a_6a_1 - a_6^2a_5, a_4 + a_5a_3 + a_5a_8 - a_7a_1 + a_7^2 - a_7a_6a_5], [a_8, a_2, a_3, a_4]]$$

$$> y := i[3];$$

$$y := [-a_8 + a_5a_7 - a_6a_5^2, a_2a_6^2, a_3 + a_5a_2 + 2a_6a_7 - a_6a_1 - a_6^2a_5, a_4 + a_5a_3 + a_5a_8 - a_7a_1 + a_7^2 - a_7a_6a_5]$$

$$> y_1 := i[4];$$

$$y_1 := [a_8, a_2, a_3, a_4]$$

$$> y := \text{solv}(y, y_1);$$

$$y := [a_8 = a_5a_7 - a_6a_5^2, a_2 = -a_6^2, a_3 = 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1, a_4 = a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 - a_7^2]$$

Procedimento que substitui os valores das equações do primeiro centro de explosão Y nas equações que definem $q_1, q_2 \in X$.

$> fsubs(y, eqx[1..2]) : see(\%);$

$$1, (x_0 + x_1 * a[6] + a[7] * x_2 - x_2 * a[5] * a[6]) * (x_2 * a[5] * a[6] - x_1 * a[6] - a[7] * x_2 + a[1] * x_2 + x_0)$$

$$2, (a[5]x_2 + x_1) * (x_0 + x_1 * a[6] + a[7] * x_2 - x_2 * a[5] * a[6])$$

$h_2 := mdc(\%);$

$$h_2 := x_0 + x_1 a_6 + a_7 x_2 - x_2 a_5 a_6$$

Determinação do ponto marcado pelo feixe de retas.

$> pt := sol(liste(fsubs(y, eqx[1..2])/h_2));$

$$pt := [x_1 = -a_5 x_2, x_0 = -2x_2 a_5 a_6 + a_7 x_2 - a_1 x_2]$$

$> sset(subs(y, submatrix(M1, [op(rows-no-pivo-mu)], [1..coldim(M1)])));$

$\{0\}$

O ideal da subvariedade Y de X ;

$> eqsmu := id(y);$

$$eqsmu := [a_8 - a_5 a_7 + a_6 a_5^2, a_2 + a_6^2, a_3 - 2a_6^2 a_5 + 2a_6 a_7 - a_6 a_1, a_4 + a_6^2 a_5^2 - 2a_7 a_6 a_5 + a_5 a_6 a_1 - a_7 a_1 + a_7^2]$$

Determinação das equações locais do primeiro centro de explosão.

$> i := relexcn(eqsmu, y_1, b, 1);$

$$i := [[a_2 = b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7, a_3 = b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2,$$

$$a_4 = a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7, [a_8 - a_5a_7 + a_6a_5^2, a_2a_6^2, a_3 - 2a_6^2a_5 + 2a_6a_7 - a_6a_1, a_4 + a_6^2a_5^2 - 2a_7a_6a_5 + a_5a_6a_1 - a_7a_1 + a_7^2], [a_8, a_2, a_3, a_4]]$$

Relações da primeira explosão $X^1 = Bl_Y X$.

$$> \text{rell} := \text{collect}(i[1], [\text{seq}(b[p], p = 1..nops(\text{eqsmu}))]);$$

$$\text{rell} := [a_2 = b_1\%1 - a_6^2, a_3 = b_2\%1 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1, a_4 = b_3\%1 + a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 - a_7^2]$$

$$\%1 := a_8 - a_5a_7 + a_6a_5^2$$

$$> \text{eqsmu} := i[2];$$

$$\text{eqsmu} := [a_8 - a_5a_7 + a_6a_5^2, a_2 + a_6^2, a_3 - 2a_6^2a_5 + 2a_6a_7 - a_6a_1, a_4 + a_6^2a_5^2 - 2a_7a_6a_5 + a_5a_6a_1 - a_7a_1 + a_7^2]$$

$$> \text{eqsmu}_1 := i[3];$$

$$\text{eqsmu}_1 := [a_8, a_2, a_3, a_4]$$

$$> \text{vars1} := [\text{op}(\text{omit}(\text{vars0}, [\text{seq}(\text{lhs}(\text{rell}[i]), i = 1..nops(\text{rell}))])), \text{seq}(b[i], i = 1..nops(\text{rell}))];$$

$$\text{vars1} := [a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1, b_2, b_3]$$

Equação local do centro de explosão.

$$> \text{exc1} := \text{eqsmu}_1[1] = \text{solve}(\text{eqsmu}[1], \text{eqsmu}_1[1]);$$

$$\text{exc1} := a_8 = a_5a_7 - a_6a_5^2$$

$$> \text{eqx1} := \text{ssubs}(\text{rell}, \text{eqx}) : \text{see}(\%);$$

$$1, \quad x_0^2 + a[1] * x_0 * x_2 + x_1^2 * b[1] * a[6] * a[5]^2 - a[6]^2 * x_1^2 + x_1^2 * b[1] * a[8] - x_1^2 * b[1] * a[5] * a[7] + x_1 * x_2 * b[2] * a[8] + 2 * x_1 * x_2 * a[6]^2 *$$

$$\begin{aligned}
& a[5] - 2 * x_1 x_2 * a[6] * a[7] + x_1 * x_2 * a[6] * a[1] - x_1 * x_2 * b[2] * a[5] * a[7] \\
& + x_1 * x_2 * b[2] * a[6] * a[5]^2 + x_2^2 * a[7] * a[1] - x_2^2 * a[6]^2 * a[5]^2 + 2 * x_2^2 * a[7] * a[6] * a[5] \\
& - x_2^2 * a[5] * a[6] * a[1] + x_2^2 * b[3] * a[6] * a[5]^2 - x_2^2 * a[7]^2 + x_2^2 * b[3] * a[8] - \\
& x_2^2 * b[3] * a[5] * a[7]
\end{aligned}$$

$$2, \quad x_0 * x_1 + a[5] * x_0 * x_2 + a[6] * x_1^2 + a[7] * x_1 * x_2 + a[8] * x_2^2$$

Coeficientes da cúbica f_3 .

si(evalm(ssubs(rell, row(M1, 3))/id(exc1)));

$$[0, 0, 0, 0, 0, -1, b_1, b_2 + a_5 b_1, b_3 + b_2 a_5 + a_6, -a_1 + a_7 - a_6 a_5 + b_3 a_5]$$

O anexo da cúbica f_3 .

*> eqx1 := [op(eqx1), sum('%[i] * s3f0[i]', 'i' = 1..nops(s3f0))] : see(%);*

$$\begin{aligned}
1, \quad & x_0^2 + a[1] * x_0 * x_2 + x_1^2 * b[1] * a[6] * a[5]^2 - a[6]^2 * x_1^2 + x_1^2 * b[1] * a[8] - x_1^2 * b[1] * a[5] * \\
& a[7] \\
& + x_1 * x_2 * b[2] * a[8] + 2 * x_1 * x_2 * a[6]^2 * a[5] - 2 * x_1 * x_2 * a[6] * a[7] + x_1 * x_2 * a[6] * a[1] - \\
& x_1 * x_2 * b[2] * a[5] * a[7] \\
& + x_1 * x_2 * b[2] * a[6] * a[5]^2 + x_2^2 * a[7] * a[1] - x_2^2 * a[6]^2 * a[5]^2 + 2 * x_2^2 * a[7] * a[6] * a[5] \\
& - x_2^2 * a[5] * a[6] * a[1] + x_2^2 * b[3] * a[6] * a[5]^2 - x_2^2 * a[7]^2 + x_2^2 * b[3] * a[8] - \\
& x_2^2 * b[3] * a[5] * a[7]
\end{aligned}$$

$$2, \quad x_0 * x_1 + a[5] * x_0 * x_2 + a[6] * x_1^2 + a[7] * x_1 * x_2 + a[8] * x_2^2$$

$$\begin{aligned}
3, \quad & -x_0 * x_2^2 + b[1] * x_1^3 + (b[2] + a[5] * b[1]) * x_2 * x_1^2 + (b[3] + b[2] * a[5] + a[6] * x_1 * x_2^2) \\
& + (-a[1] + a[7] - a[6] * a[5] + b[3] * a[5]) * x_2^3
\end{aligned}$$

> vars0;

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]$$

> origin(vars0, eqx1); vars1;

$$[x_0^2, x_0 x_1, -x_0 x_2^2 + b_1 x_1^3 + b_2 x_2 x_1^2 + b_3 x_1 x_2^2]$$

$$[a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1, b_2, b_3]$$

nointent > *origin(vars1, eqx1); vars1;*

$$[x_0^2, x_0x_1, -x_0x_2^2]$$

$$[a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1, b_2, b_3]$$

Imagem do morfismo $X^1 \rightarrow G(2, S_2) \times G(6, S_3)$.

> *eqx1exc1 := fsubs(exc1, eqx1) : see(%);*

$$1, (x_0 + x_1 * a[6] + a[7] * x_2 - x_2 * a[5] * a[6]) * (x_2 * a[5] * a[6] - x_1 * a[6] - a[7] * x_2 + a[1] * x_2 + x_0)$$

$$2, (a[5] * x_2 + x_1) * (x_0 + x_1 * a[6] + a[7] * x_2 - x_2 * a[5] * a[6])$$

$$3, -x_0 * x_2^2 + b[1] * x_1^3 + b[2] * x_2 x_1^2 + x_2 * x_1^2 * a[5] * b[1] + b[3] * x_1 * x_2^2 + x_1 * x_2^2 * b[2] * a[5] + x_1 * x_2^2 * a[6] - x_2^3 * a[1] + x_2^3 * a[7] - x_2^3 * a[6] * a[5] + x_2^3 * b[3] * a[5]$$

Cálculo do polinômio de Hilbert da imagem do morfismo anterior.

> *hilbertpoly([op(eqx1exc1)], tdeg(x_0, x_1, x_2), t);*

4

> *qq1 := eqx1exc1[1];*

$$qq1 := (x_0 + x_1 a_6 + a_7 x_2 - x_2 a_5 a_6)(x_2 a_5 a_6 - x_1 a_6 - a_7 x_2 + a_1 x_2 + x_0)$$

> *qq2 := eqx1exc1[2];*

$$qq2 = (a_5 x_2 + x_1)(x_0 + x_1 a_6 + a_7 x_2 - x_2 a_5 a_6)$$

> *qq3 := eqx1exc1[3];*

$$qq3 := -x_0x_2^2 + b_1x_1^3 + b_2x_2x_1^2 + x_2x_1^2a_5b_1 + b_3x_1x_2^2 + x_1x_2^2b_2a_5 + x_1x_2^2a_6 - x_2^3a_1 + x_2^3a_7 - x_2^3a_6a_5 + x_2^3b_3a_5$$

$$> l := \text{mdc}(qq1, qq2);$$

$$l := x_0 + x_1a_6 + a_7x_2 - x_2a_5a_6$$

$$m1 := \text{factor}(qq1/l);$$

$$m1 := x_2a_5a_6 - x_1a_6 - a_7x_2 + a_1x_2 + x_0$$

$$m2 := \text{factor}(qq2/l);$$

$$m2 := a_5x_2 + x_1$$

$$> pt := \text{solve}(\{m1 = 0, m2 = 0\}, \{x_0, x_1, x_2\});$$

$$pt := \{x_2 = x_2, x_0 = -(2a_6a_5 - a_7 + a_1)x_2, x_1 = -a_5x_2\}$$

> $fsubs(pt, m1); fsubs(pt, m2); fsubs(pt, qq3);$

0

0

0

Obtenção das cúbicas que não são múltiplas do excepcional.

Linhas 1,2,3,4,5,6

> $rM1[1] := si(evalm(ssubs(rell, row(M1, 1))));$

$$rM1[1] := [1, 0, a_1, b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7, b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7, b_1a_6a_5^2, a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7, 0, 0, 0, 0]$$

> $CC[1] := sum('rM1[1][i] * s_3f_0[i]', 'i' = 1..nops(s_3f_0));$

$$CC_1 := x_0^3 + a_1x_2x_0^2 + (b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7)x_0x_1^2 + (b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2)x_2x_0x_1 + (a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7)x_0x_2^2$$

> $rM1[2] := si(evalm(ssubs(rell, row(M1, 2))));$

$$rM1_2 := [0, 1, a_5, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0]$$

> $CC[2] := sum('rM1[2][i] * s_3f_0[i]', 'i' = 1..nops(s_3f_0));$

$$CC_2 := x_1x_0^2 + a_5x_2x_0^2 + a_6x_0x_1^2 + a_7x_2x_0x_1 + a_8x_0x_2^2;$$

> $rM1[3] := si(evalm(ssubs(rell, row(M1, 4))));$

$$rM1[3] := [0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0]$$

> $CC[3] := sum('rM1[3][i] * s_3f_0[i]', 'i' = 1..nops(s_3f_0));$

$$> CC_3 := x_0x_1^2 + a_5x_2x_0x_1 + a_6x_1^3 + a_7x_2x_1^2 + a_8x_1x_2^2;$$

$$> rM1[4] := si(evalm(ssubs(rell, row(M1, 5))));$$

$$rM1[4] = [0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7, b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2, a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_6a_7]$$

$$> CC[4] := sum('rM1[4][i] * s_3f_0[i]', 'i' = 1..nops(s_3f_0));$$

$$> CC_4 := x_2x_0^2 + a_1x_0x_2^2 + (b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7)x_2x_1^2 + (b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2)x_1x_2^2 + (a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7)x_2^3;$$

$$> rM1[5] := si(evalm(ssubs(rell, row(M1, 6))));$$

$$rM1[5] := [0, 0, 0, 0, 1, 0, a_5, 0, a_6, a_7, a_8]$$

$$> CC[5] := sum('rM1[5][i] * s_3f_0[i]', 'i' = 1..nops(s_3f_0));$$

$$> CC_5 := x_2x_0x_1 + a_5x_0x_2^2 + a_6x_2x_1^2 + a_7x_1x_2^2 + a_8x_2^3$$

A cúbica que é divisível pelo excepcional.

$$rM1[6] := si(evalm(ssubs(rell, row(M1, 3))/id(exc1)));$$

$$rM1[6] := [0, 0, 0, 0, 0, -1, b_1, b_2 + a_5b_1, b_3 + b_2a_5 + a_6, -a_1 + a_7 - a_6a_5 + b_3a_5]$$

$$> CC[6] := sum('%[i] * s_3f_0[i]', 'i' = 1..nops(s_3f_0));$$

$$> CC_6 := -x_0x_2^2 + b_1x_1^3 + (b_2 + a_5b_1)x_2x_1^2 + (b_3 + b_2a_5 + a_6)x_1x_2^2 + (-a_1 + a_7 - a_6a_5 + b_3a_5)x_2^3$$

$$> eqxc := [CC[1], CC[2], CC[3], CC[4], CC[5], CC[6]]:$$

$$> eqxc[1];$$

$$x_0^3 + a_1x_2x_0^2 + (b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7)x_0x_1^2 + (b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2)x_2x_0x_1 + (a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7)x_0x_2^2$$

Coleta dos coeficientes das cúbicas do mapa de multiplicação

> [seq([seq(coefmon(eqxc[j], s3f0[i]), i = 1..nops(s3f0)), j = 1..6)];

$$[[[1, 0, a_1, b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7, b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2, a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7, 0, 0, 0, 0], [0, 1, a_5, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0], [a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7, b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2, a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7], [0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8], [0, 0, 0, 0, 0, -1, b_1, b_2 + a_5b_1, b_3 + b_2a_5 + a_6, -a_1 + a_7 - a_6a_5 + b_3a_5]]]$$

> W := matrix(%);

$W :=$

$$[1, 0, a_1, b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7, b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2, a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, a_5, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, b_1 a_6 a_5^2 - a_6^2 + b_1 a_8 - b_1 a_5 a_7, b_2 a_8 + 2a_6^2 a_5 - 2a_6 a_7 + a_6 a_1 - b_2 a_5 a_7 + b_2 a_6 a_5^2, a_7 a_1 - a_6^2 a_5^2 + 2a_7 a_6 a_5 - a_5 a_6 a_1 + b_3 a_6 a_5^2 - a_7^2 + b_3 a_8 - b_3 a_5 a_7]$$

$$[0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, -1, b_1, b_2 + a_5 b_1, b_3 + b_2 a_5 + a_6, -a_1 + a_7 - a_6 a_5 + b_3 a_5]$$

Cálculo da bse para o espaço vetorial das formas homogêneas de grau 4 nas variáveis x_0, x_1, x_2 .

$> s_4 f_0 := \text{mon}(4, xx); \text{nops}(\%);$

$$s_4 f_0 := [x_0^4, x_1 x_0^3, x_2 x_0^3, x_1^2 x_0^2, x_2 x_1 x_0^2, x_2^2 x_0^2, x_0 x_1^3, x_2 x_0 x_1^2, x_2^2 x_0 x_1, x_0 x_2^3, x_1^4, x_2 x_1^3, x_2^2 x_1^2, x_1 x_2^3, x_2^4]$$

O mapa de multiplicação μ_4 .

$> W1 := \text{matrix}([\text{seq}(\text{seq}([\text{seq}(\text{coefmon}(\text{eqxc}[j]*x||k, s_4 f_0[i]), i = 1..\text{nops}(s_4 f_0)]), j = 1..6), k = 0..2)]);$

$$\%1 := -a_1 + a_7 - a_6a_5 + b_3a_5$$

$$\%2 := a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7$$

$$\%3 := b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2$$

$$\%4 := b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7$$

$$\#5 := b_2 + a_5b_1$$

$$\#6 := b_3 + b_2a_5 + a_6$$

$$> W2 := \text{gausselim}(W1);$$

$$W2 :=$$

$$[1, 0, a_1, b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7, b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2, a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, a_5, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, b_1a_6a_5^2 - a_6^2 + b_1a_8 - b_1a_5a_7, b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - b_2a_5a_7 + b_2a_6a_5^2, a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 + b_3a_6a_5^2 - a_7^2 + b_3a_8 - b_3a_5a_7, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, -1, b_1, b_2 + a_5b_1, b_3 + b_2a_5 + a_6, \%2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, 0, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, 0, a_6, a_7, a_8, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, b_1, b_2 + a_5b_1, b_3 + b_2a_5 + a_6, \%2, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, b_1, b_2 + a_5b_1, b_3 + b_2a_5 + a_6, \%2, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b_1, b_2 + 2a_5b_1, 2a_6 + b_3 + 2b_2a_5 + a_5^2b_1, 2a_7 + 2b_3a_5 - a_1 + b_2a_5^2, a_8 - a_5a_1 + a_5a_7 - a_6a_5^2 + b_3a_5^2]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, -a_5a_7 + a_6a_5^2 + \%18a_5 + a_5a_1, \%19b_1 + \%12 + b_1a_8 - \%11, \%19\%3 + \%18a_6 + a_5(\%12 - a_6^2 + b_1a_8 - \%11) - a_6a_7 + b_2a_8 + 2a_6^2a_5 + a_6a_1 - \%10 + \%9, \%19\%2 + \%18a_7 + a_5\%20 + a_6a_8 + a_7a_1 - \%7 + 2a_7a_6a_5 - \%6 + \%5 - a_7^2 + b_3a_8 - \%4, \%19\%1 + \%18a_8 + a_5\%17, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, 0, a_6, a_7, a_8, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b_2a_5 + a_5^2b_1 - a_5\%3, b_3a_5 + \%15a_5 - a_5\%2, -a_5a_1 + a_5a_7 - a_6a_5^2 + b_3a_5^2 - a_5\%1, \%16b_1 + a_5b_1a_6, \%14b_1 + \%16\%3 + \%15a_6 + \%12 - a_6^2 + b_1a_8, \%14\%3 + \%16\%2 + \%15a_7 + b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - \%10 + \%9 + a_5b_1a_8, \%14\%2 + \%16\%1 + \%15a_8 + a_7a_1 - \%7 + 2a_7a_6a_5 - \%6 + \%5 - a_7^2 + b_3a_8 - \%4, \%14\%1]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, 0, a_6, a_7, a_8, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, b_1, \%3, \%2, \%1, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (b_3+a_6)b_1 - b_1a_6, \%8b_1 + (b_3+a_6)\%3 - b_1a_7 - b_2a_6, \%8\%3 + (b_3+a_6)\%2 + \%12 - a_6^2 - \%11 - b_2a_7, \%8\%2 + (b_3+a_6)\%1 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - \%10 + \%9, \%8\%1 + a_7a_1 - \%7 + 2a_7a_6a_5 - \%6 + \%5 - a_7^2 + b_3a_8 - \%4]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b_1, b_2 + 2a_5b_1, a_5\%3 + b_3 + b_2a_5 + 2a_6, a_5\%2 - a_1 + 2a_7 - a_6a_5 + b_3a_5, a_8 + a_5\%1]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, b_1, \%3, \%2, \%1]]$$

$$\%1 := -a_1 + a_7 - a_6a_5 + b_3a_5$$

$$\%2 := b_3 + b_2a_5 + a_6$$

```

%3 := b2 + a5b1
%4 := b3a5a7
%5 := b3a6a5^2
%6 := a5a6a1
%7 := a6^2a5^2
%8 := -a6a5 + b3a5 + a7
%9 := b2a6a5^2
%10 := b2a5a7
%11 := b1a5a7
%12 := b1a6a5^2
%13 := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
%14 := -a8 + a5a1 - a5a7 + a6a5^2 - b3a5^2
%15 := a6 + b2a5
%16 := a1 - a7 - b3a5
%17 := a7a1 - %7 + 2a7a6a5 - %6 + %5 - a7^2 + b3a8 - %4
%18 := -a1 + a7 - a6a5
%19 := -a8 + a5a7 - a6a5^2
%20 := b2a8 + 2a6^2a5 - 2a6a7 + a6a1 - %10 + %9

> rows - n0 - pivo - mu := W3[1];

rows - no - pivo - mu := {7, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17}

> pivos - mu := W3[2];

pivos - mu := {[3, 4], [4, 3], [6, 6], [9, 7], [11, 8], [12, 9], [2, 2], [18, 10], [5, 5], [1, 1]}

print(nops(%));

```

10

```

> W3 := W3[3];

```

118

$W3 :=$

$$[1, 0, a_1, \%12 - a_6^2 + b_1a_8 - \%11, \%20, \%17, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, a_5, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, a_1, 0, \%12 - a_6^2 + b_1a_8 - \%11, \%20, \%17, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, a_6, a_7, a_8, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, -1, b_1, \%3, \%2, \%1, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, -a_5a_7 + a_6a_5^2 + \%18a_5 + a_5a_1, \%19b_1 + \%12 + b_1a_8 - \%11, \%19\%3 + \%18a_6 + a_5(\%12 - a_6^2 + b_1a_8 - \%11) - a_6a_7 + b_2a_8 + 2a_6^2a_5 + a_6a_1 - \%10 + \%9, \%19\%2 + \%18a_7 + a_5\%20 + a_6a_8 + a_7a_1 - \%7 + 2a_7a_6a_5 - \%6 + \%5 - a_7^2 + b_3a_8 - \%4, \%19\%1 + \%18a_8 + a_5\%17, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, 0, a_6, a_7, a_8, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b_2a_5 + a_5^2b_1 - a_5\%3, b_3a_5 + \%15a_5 - a_5\%2, -a_5a_1 + a_5a_7 - a_6a_5^2 + b_3a_5^2 - a_5\%1, \%16b_1 + a_5b_1a_6, \%14b_1 + \%16\%3 + \%15a_6 + \%12 - a_6^2 + b_1a_8, \%14\%3 + \%16\%2 + \%15a_7 + b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - \%10 + \%9 + a_5b_1a_8, \%14\%2 + \%16\%1 + \%15a_8 + a_7a_1 - \%7 + 2a_7a_6a_5 - \%6 + \%5 - a_7^2 + b_3a_8 - \%4, \%14\%1]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, a_5, 0, 0, a_6, a_7, a_8, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, b_1, \%3, \%2, \%1, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (b_3+a_6)b_1-b_1a_6, \%8b_1+(b_3+a_6)\%3-b_1a_7-b_2a_6, \%8\%3+(b_3+a_6)\%2+\%12-a_6^2-\%11-b_2a_7, \%8\%2+(b_3+a_6)\%1+2a_6^2a_5-2a_6a_7+a_6a_1-\%10+\%9, \%8\%1+a_7a_1-\%7+2a_7a_6a_5-\%6+\%5-a_7^2+b_3a_8-\%4]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b_1, b_2+2a_5b_1, a_5\%3+b_3+b_2a_5+2a_6, a_5\%2-a_1+2a_7-a_6a_5+b_3a_5, a_8+a_5\%1]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, b_1, \%3, \%2, \%1]]$$

$$\%1 := -a_1 + a_7 - a_6a_5 + b_3a_5$$

$$\%2 := b_3 + b_2a_5 + a_6$$

$$\%3 := b_2 + a_5b_1$$

$$\%4 := b_3a_5a_7$$

$$\%5 := b_3a_6a_5^2$$

$$\%6 := a_5a_6a_1$$

$$\%7 := a_6^2a_5^2$$

$$\%8 := -a_6a_5 + b_3a_5 + a_7$$

$$\%9 := b_2a_6a_5^2$$

$$\%10 := b_2a_5a_7$$

$$\%11 := b_1a_5a_7$$

$$\%12 := b_1a_6a_5^2$$

$$\%13 := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\%14 := -a_8 + a_5a_1 - a_5a_7 + a_6a_5^2 - b_3a_5^2$$

$$\%15 := a_6 + b_2a_5$$

$$\%16 := a_1 - a_7 - b_3a_5$$

$$\%17 := a_7a_1 - \%7 + 2a_7a_6a_5 - \%6 + \%5 - a_7^2 + b_3a_8 - \%4$$

$$\%18 := -a_1 + a_7 - a_6a_5$$

$$\%19 := -a_8 + a_5a_7 - a_6a_5^2$$

$$\%20 := b_2a_8 + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1 - \%10 + \%9$$

Procedimento que determina as equações locais do segundo centro de explosão Y^1

```
> equal := eqs(W3, rows - no - pivo - mu, vars1);
```

```
equal := [{17}, [[17, 11], [17, 12], [17, 13], [17, 14], [17, 15], [b1, b2 + 2a5b1, 2a6 + b3 + 2b2a5 + a5^2b1, 2a7 + 2b3a5 - a1 + b2a5^2, a8 - a5a1 + a5a7 - a6a5^2 + b3a5^2], [b1, b2, a6, a1, a8]]
```

```
> Y := equal[3];
```

```
> Y := [b1, b2 + 2a5b1, 2a6 + b3 + 2b2a5 + a5^2b1, 2a7 + 2b3a5 - a1 + b2a5^2, a8 - a5a1 + a5a7 - a6a5^2 + b3a5^2];
```

```
> Y1 := equal[4];
```

$$Y_1 := [b_1, b_2, a_6, a_1, a_8]$$

```
> posy := [seq(equal[2][j][2], j = 1..nops(equal[2]))];
```

$$posy := [11, 12, 13, 14, 15]$$

```
> Y2 := sol(Y, Y1);
```

$$Y_2 := [b_1 = 0, b_2 = 0, a_6 = -\frac{1}{2}b_3, a_1 = 2a_7 + 2b_3a_5, a_8 = a_5a_7 + \frac{1}{2}b_3a_5^2]$$

```
> rell;
```

$$[a_2 = b_1(a_8 - a_5a_7 + a_6a_5^2) - a_6^2, a_3 = b_2(a_8 - a_5a_7 + a_6a_5^2) + 2a_6^2a_5 - 2a_6a_7 + a_6a_1, a_4 = b_3(a_8 - a_5a_7 + a_6a_5^2) + a_7a_1 - a_6^2a_5^2 + 2a_7a_6a_5 - a_5a_6a_1 - a_7^2];$$

Substituição das equações de Y^1 nas cônicas q_1 e q_2 .

```
> eqx_x1 := fsubs(rell, eqx[1..2] : see(%));
```

$$1, \quad x_0^2 + a[1] * x_0 * x_2 + x_1^2 * b[1] * a[6] * a[5]^2 - a[6]^2 * x_1^2 + x_1^2 * b[1] * a[8] - x_1^2 * b[1] * a[5] * a[7] + x_1 * x_2 * b[2] * a[8] + 2 * x_1 * x_2 * a[6]^2 * a[5] - 2 * x_1 * x_2 * a[6] * a[7] + x_1 * x_2 * a[6] * a[1] - x_1 * x_2 * b[2] * a[5] * a[7] + x_1 * x_2 * b[2] * a[6] * a[5]^2 + x_2^2 * a[7] * a[1] - x_2^2 * a[6]^2 * a[5]^2 + 2 * x_2^2 * a[7] * a[6] * a[5] - x_2^2 * a[5] * a[6] * a[1] + x_2^2 * b[3] * a[6] * a[5]^2 - x_2^2 * a[7]^2 + x_2^2 * b[3] * a[8] - x_2^2 * b[3] * a[5] * a[7]$$

$$2, \quad x_0 * x_1 + a[5] * x_0 * x_2 + a[6] * x_1^2 + a[7] * x_1 * x_2 + a[8] * x_2^2$$

> eqxcY₂ := fsubs(Y₂, eqxc[1..6] : see(%); #Y₂) são as equações do 2º centro

$$1, \quad \frac{1}{4} * x_0 * (2 * x_0 + x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + 3 * b[3] * a[5] * x_2) * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$2, \quad \frac{1}{2} * (a[5] * x_2 + x_1) * x_0 * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$3, \quad \frac{1}{2} * x_1 * (a[5] * x_2 + x_1) * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$4, \quad \frac{1}{4} * x_2 * (2 * x_0 + x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + 3 * b[3] * a[5] * x_2) * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$5, \quad \frac{1}{2} * x_2 * (a[5] * x_2 + x_1) * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$6, \quad -\frac{1}{2} * x_2^2 * (2 * x_0 + x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + 3 * b[3] * a[5] * x_2)$$

> eqx_x1Y₂ := fsubs(Y₂, eqx_x1[1..2]) : see(%);

$$1, \quad \frac{1}{4} * (2 * x_0 + x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + 3 * b[3] * a[5] * x_2) * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$2, \quad \frac{1}{2} * (a[5] * x_2 + x_1) * x_0 * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

> factor(eqxcY₂[1]/eqx_x1Y₂[1]);

x_0

> *factor*(*eqxcY*₂[2]/*eqx_x1Y*₂[2]);

x_0

> *factor*(*eqxcY*₂[3]/*eqx_x1Y*₂[2]);

x_1

> *factor*(*eqxcY*₂[4]/*eqx_x1Y*₂[1]);

x_2

> *factor*(*eqxcY*₂[5]/*eqx_x1Y*₂[2]);

x_2

> *factor*(*eqxcY*₂[6]/*eqx_x1Y*₂[1]);

$$-\frac{2x_2^2}{2x_0 + x_1b_3 + 2a_7x_2 + 3b_3a_5x_2}$$

> $h_3 := \text{mdc}(\text{eqx_x1Y}_2);$

$$h_3 := x_0 - \frac{1}{2}x_1b_3 + a_7x_2 + \frac{1}{2}b_3a_5x_2$$

> $m_1 := \text{factor}(\text{eqx_x1Y}_2[1]/h_3);$ $m_2 := \text{factor}(\text{eqx_x1Y}_2[2]/h_3);$

$$m_1 := x_0 + \frac{1}{2}x_1b_3 + a_7x_2 + \frac{3}{2}b_3a_5x_2$$

$$m_2 := a_5x_2 + x_1$$

> $pt := \text{sol}(\{m_1 = 0, m_2 = 0\}, \{x_0, x_1, x_2\});$

$$pt := [x_0 = -(a_7 + b_3a_5)x_2, \quad x_1 = -a_5x_2]$$

```
> for i to 6 do fsubs({op(pt)}, eqxcY2[i]); od; i = i';
```

0

0

0

0

0

0

$i := i$

```
> sset(subs(Y2, submatrix(W3, [op(rows_no_pivo_mu)], [1..coldim(W3)])));
```

{0}

Ideal da subvariedade Y^1 .

> $eqsmu := id(Y_2)$;

$$eqsmu := [b_1, b_2, a_6 + \frac{1}{2}b_3, -2a_7 - 2b_3a_5 + a_1, a_8 - a_5a_7 - \frac{1}{2}b_3a_5^2]$$

> $Y_1; eqsmu[1]; eqsmu[2]$;

$$[b_1, b_2, a_6, a_1, a_8]$$

$$b_1$$

$$b_2$$

Determinação das equações locais do segundo centro de explosão Y^1 .

> $g := relexcn(eqsmu, Y_1, c, 1); nops(g)$;

$$g := [[b_2 = c_1b_1, a_6 = -\frac{1}{2}b_3 + c_2b_1, a_1 = 2a_7 + 2b_3a_5 + c_3b_1, a_8 = a_5a_7 + \frac{1}{2}b_3a_5^2 + c_4b_1], [b_1, b_2, a_6 + \frac{1}{2}b_3, -2a_7 - 2b_3a_5 + a_1, a_8 - a_5a_7 - \frac{1}{2}b_3a_5^2], [b_1, b_2, a_6, a_1, a_8]]$$

3

Relação da segunda explosão Y^1 .

> $rell := collect(g[1], [seq(c[p], p = 1..nops(eqsmu))])$;

$$rell := [b_2 = c_1b_1, a_6 = -\frac{1}{2}b_3 + c_2b_1, a_1 = 2a_7 + 2b_3a_5 + c_3b_1, a_8 = a_5a_7 + \frac{1}{2}b_3a_5^2 + c_4b_1]$$

> $g[2]$;

$$[b_1, b_2, a_6 + \frac{1}{2}b_3, -2a_7 - 2b_3a_5 + a_1, a_8 - a_5a_7 - \frac{1}{2}b_3a_5^2]$$

> eqsmu := g[2];

$$eqsmu := [b_1, b_2, a_6 + \frac{1}{2}b_3, -2a_7 - 2b_3a_5 + a_1, a_8 - a_5a_7 - \frac{1}{2}b_3a_5^2]$$

> eqsmu1 := g[3];

$$eqsmu1 := [b_1, b_2.a_6, a_1, a_8]$$

> vars2 := [op(omit(vars1, [seq(lhs(rell[i]), i = 1..nops(rell))])), seq(c[i], i = 1..nops(rell))];

$$vars_2 := [a_5, a_7, b_1, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4]$$

Equação local do divisor excepcional.

> exc2 := eqsmu1[1] = solve(eqsmu[1], eqsmu1[1]);

$$exc2 := b_1 = 0$$

> vars1;

$$[a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1, b_2, b_3]$$

Substituição nas equações que definem q_1 e q_2 .

> eqx_x12 := ssubs(rell, eqx_x1) : see(%); nops(%);

$$\begin{aligned} & 1, \quad x_1 * x_2 * c[1] * b[1]^2 * c[4] + 2 * x_1 * x_2 * a[5] * c[2]^2 * b[1]^2 - \frac{1}{4} * b[3]^2 * x_1^2 + \frac{3}{4} * x_2^2 * \\ & b[3]^2 * a[5]^2 + 2 * x_0 * x_2 * a[7] - \frac{1}{2} * x_1 * x_2 * b[3]^2 * a[5] + 2 * x_0 * x_2 * b[3] * a[5] + x_0 * x_2 * \\ & c[3] * b[1] + x_1^2 * b[1]^2 * a[5]^2 * c[2] + x_1^2 * b[3] * c[2] * b[1] + x_2^2 * a[7] * c[3] * b[1] - x_2^2 * a[5]^2 * \\ & c[2]^2 * b[1]^2 + x_2^2 * b[3] * c[4] * b[1] - x_1^2 * c[2]^2 * b[1]^2 + x_1^2 * b[1]^2 * c[4] + \frac{1}{2} * x_2^2 * a[5] * \\ & b[3] * c[3] * b[1] - x_2^2 * a[5] * c[2] * b[1]^2 * c[3] - \frac{1}{2} * x_1 * x_2 * b[3] * c[3] * b[1] + x_1 * x_2 * c[2] * \\ & b[1]^2 * c[3] + x_1 * x_2 * c[1] * b[1]^2 * a[5]^2 * c[2] + x_0^2 + x_2^2 * a[7]^2 + 2 * x_2^2 * b[3] * a[5] * a[7] \end{aligned}$$

$$2, \quad x_0 * x_1 + a[5] * x_0 * x_2 - \frac{1}{2} b[3] * x_1^2 + x_1^2 * c[2] * b[1] + a[7] * x_1 * x_2 + x_2^2 * a[5] * a[7] \\ + \frac{1}{2} * x_2^2 * b[3] * a[5]^2 + x_2^2 * c[4] * b[1]$$

2

> eqx_x12 := fsubs(rell, eqx_x1) : nops(%);

3

Coeficientes da quática h_4 .

> si(evalm(ssubs(rell, row(W3, 17))/id(exc2)));

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, $c_1 + 2a_5$, $2c_1a_5 + a_5^2 + 2c_2$, $c_1a_5^2 - c_3$, $c_4 - a_5c_3 - a_5^2c_2$]

O anexo da quártica h_4 .

> eqx2 := [op(eqx12), sum('%'[i]*s4f0[i]', i = 1..nops(s4f0))] : see(%); nops(%);

$$\begin{aligned}
1, \quad & x_1 * x_2 * c[1] * b[1]^2 * c[4] + 2 * x_1 * x_2 * a[5] * c[2]^2 * b[1]^2 - \frac{1}{4} * b[3]^2 * x_1^2 + \frac{3}{4} * x_2^2 * \\
& b[3]^2 * a[5]^2 + 2 * x_0 * x_2 * a[7] - \frac{1}{2} * x_1 * x_2 * b[3]^2 * a[5] + 2 * x_0 * x_2 * b[3] * a[5] + x_0 * x_2 * \\
& c[3] * b[1] + x_1^2 * b[1]^2 * a[5]^2 * c[2] + x_1^2 * b[3] * c[2] * b[1] + x_2^2 * a[7] * c[3] * b[1] - x_2^2 * a[5]^2 * \\
& c[2]^2 * b[1]^2 + x_2^2 * b[3] * c[4] * b[1] - x_1^2 * c[2]^2 * b[1]^2 + x_1^2 * b[1]^2 * c[4] + \frac{1}{2} * x_2^2 * a[5] * \\
& b[3] * c[3] * b[1] - x_2^2 * a[5] * c[2] * b[1]^2 * c[3] - \frac{1}{2} * x_1 * x_2 * b[3] * c[3] * b[1] + x_1 * x_2 * c[2] * \\
& b[1]^2 * c[3] + x_1 * x_2 * c[1] * b[1]^2 * a[5]^2 * c[2] + x_0^2 + x_2^2 * a[7]^2 + 2 * x_2^2 * b[3] * a[5] * a[7]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2, \quad & x_0 * x_1 + a[5] * x_0 * x_2 - \frac{1}{2} * b[3] * x_1^2 + x_1^2 * c[2] * b[1] + a[7] * x_1 * x_2 + x_2^2 * a[5] * a[7] \\
& + \frac{1}{2} * x_2^2 * b[3] * a[5]^2 + x_2^2 * c[4] * b[1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3, \quad & -x_0 * x_2^2 + b[1] * x_1^3 + x_2 * x_1^2 * c[1] * b[1] + x_2 * x_1^2 * a[5] * b[1] + \frac{1}{2} * b[3] * x_1 * x_2^2 \\
& + x_1 * x_2^2 * c[1] * b[1] * a[5] + x_1 * x_2^2 * c[2] * b[1] - x_2^3 * a[7] - \frac{1}{2} * x_2^3 * b[3] * a[5] - \\
& x_2^3 * c[3] * b[1] - x_2^3 * a[5] * c[2] * b[1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4, \quad & x_1^4 + (c[1] + 2 * a[5]) * x_2 * x_1^3 + (2 * c[1] * a[5] + a[5]^2 + 2 * c[2]) * x_2^2 * x_1^2 \\
& + (c[1] * a[5]^2 - c[3]) * x_1 * x_2^3 + (c[4] - a[5] * c[3] - a[5]^2 * c[2]) * x_2^4
\end{aligned}$$

4

> vars0; vars1; vars2;

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]$$

$$[a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1, b_2, b_3]$$

$$[a_5, a_7, b_1, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4]$$

> origin(vars0, eqx2); vars1; vars2;

$$[x_1x_2c_1b_1^2c_4 - \frac{1}{4}b_3^2x_1^2 + x_0x_2c_3b_1 + x_1^2b_3c_2b_1 + x_2^2b_3c_4b_1 - x_1^2c_2^2b_1^2 + x_1^2b_1^2c_4 - \frac{1}{2}x_1x_2b_3c_3b_1 + x_1x_2c_2b_1^2c_3 + x_0^2, x_0x_1 - \frac{1}{2}b_3x_1^2 + x_1^2c_2b_1 + x_2^2c_4b_1, -x_0x_2^2 + b_1x_1^3 + x_2x_1^2c_1b_1 + \frac{1}{2}b_3x_1x_2^2 + x_1x_2^2c_2b_1 - x_2^3c_3b_1, x_1^4 + c_1x_2x_1^3 + 2c_2x_2^2x_1^2 - c_3x_1x_2^3 + c_4x_2^4]$$

$$[a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1, b_2, b_3]$$

$$[a_5, a_7, b_1, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4]$$

> *origin(vars1, eqx2)*;

$$[x_0^2, x_0x_1, -x_0x_2^2, x_1^4 + c_1x_2x_1^3 + 2c_2x_2^2x_1^2 - c_3x_1x_2^3 + c_4x_2^4]$$

> *origin(vars2, eqx2)*;

$$[x_0^2, x_0x_1, -x_0x_2^2, x_1^4]$$

A imagem do morfismo $X^2 \rightarrow X^1 \times G(11, S_4)$.

> *eqx2exc2 := fsubs(exc2, eqx2) : see(%)*;

$$1, \frac{1}{4} * (2 * x_0 + x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + 3 * b[3] * a[5] * x_2) * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$2, \frac{1}{2} * (a[5] * x_2 + x_1) * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$3, -\frac{1}{2} * x_2^2 * (2 * x_0 - x_1 * b[3] + 2 * a[7] * x_2 + b[3] * a[5] * x_2)$$

$$4, x_1^4 + c[1] * x_2 * x_1^3 + 2 * x_2 * x_1^3 * a[5] + 2 * x_2^2 * x_1^2 * c[1] * a[5] + x_2^2 * x_1^2 * a[5]^2 + 2 * c[2] *$$

$$x_2^2 + x_1 * x_2^3 * c[1] * a[5]^2 - c[3] * x_1 * x_2^3 + c[4] * x_2^4 - x_2^4 * a[5] * c[3] - x_2^4 * a[5]^2 * c[2] x_1^2$$

Cálculo do polinômio de Hilbert da imagem do morfismo anterior.

> *hilbertpoly*([*op*(*eqx2exc2*)], *tdeg*(x_0, x_1, x_2), t);

4

Verificação de que a quártica h_4 não é múltipla da reta l .

> *tt1* := *eqx2exc2*[1];

$$tt1 := \frac{1}{4}(2x_0 + x_1b_3 + 2a_7x_2 + 3b_3a_5x_2)(2x_0 - x_1b_3 + 2a_7x_2 + b_3a_5x_2)$$

> *tt2* := *eqx2exc2*[2];

$$tt2 := \frac{1}{2}(a_5x_2 + x_1)(2x_0 - x_1b_3 + 2a_7x_2 + b_3a_5x_2)$$

> $tt3 := eqx2exc2[3];$

$$tt3 := -\frac{1}{2}x_2^2(2x_0 - x_1b_3 + 2a_7x_2 + b_3a_5x_2)$$

> $tt4 := eqx2exc2[4];$

$$tt4 := x_1^4 + c_1x_2x_1^3 + 2x_2x_1^3a_5 + 2x_2^2x_1^2c_1a_5 + x_2^2x_1^2a_5^2 + 2c_2x_2^2x_1^2 + x_1x_2^3c_1a_5^2 - c_3x_1x_2^3 + c_4x_2^4 - x_2^4a_5c_3 - x_2^4a_5^2c_2$$

> $L := mdc(tt1, tt2, tt3);$

$$L := x_0 - \frac{1}{2}x_1b_3 + a_7x_2 + \frac{1}{2}b_3a_5x_2$$

> $l := mdc(tt1, tt2);$

$$l := x_0 - \frac{1}{2}x_1b_3 + a_7x_2 + \frac{1}{2}b_3a_5x_2$$

> $m1 := factor(tt1/l);$

$$m1 := x_0 + \frac{1}{2}x_1b_3 + a_7x_2 + \frac{3}{2}b_3a_5x_2$$

> $m2 := factor(tt2/l);$

$$m2 := a_5x_2 + x_1$$

> $pt := sol(\{m1 = 0, m2 = 0\}, \{x_0, x_1, x_2\});$

$$pt := [x_0 = -(a_7 + b_3a_5)x_2, \quad x_1 = -a_5x_2]$$

> $m1 := factor(tt1/l);$

$fsubs(pt, 1); fsubs(pt, m1); fsubs(pt, m2);$

0

0

$fsubs(pt, tt3);$

0

$fsubs(pt, tt4);$

$x_2^4(a_5^2c_2 + c_4)$

Bibliografia

- [1] Fulton, W., *Algebraic Curves*, Benjamin, New York (1969).
- [2] J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, Graduate Texts in Math. 133, Dpringer, New York, 1955.
- [3] I.R. Shafarevich., *Basic Algebraic Geometry*, vol 213, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, New York, 1974.
- [4] Atyah, M.F. and I.G. Macdonald., *Introduction to comutative Algebra*, Addison-Weley, Reading , Mass. (1969).
- [5] R. Hartshorne., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer, New York, 1977.
- [6] J.Harris & D. Einsenbud., *The Geometry of Schemes*, Graduate Texts in Math. 197, Springer, New York, 1999.
- [7] D. Einsenbud., *Comutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer, New York, 1995.
- [8] Armand Borel., *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Math. 150, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] L. Júnior., *Teorema da Dimensão das Fibras e Aplicações*, DM-UFPB, 2001.
- [10] J. Forgaty., *Algebraic Families on an Algebraic Surface*, Amer.J.Math, n°90 (1968), 511-521
- [11] D. Avritzer, I. Vainsencher., *Hilb⁴P²*, Springer L_iN_iM, vol 1436, (1987), 30-59.
- [12] Eduardo Sernesi., *Topics on families of Projective Schemes*, Managing Editor n° 79 (1986).
- [13] Isarael Vainsencher., *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada CNPq, 1996, 160pp.

- [14] David Cox, John Little, Donal O'Shea., *Ideals, Varieties and Algorithms An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer Verlag New York 1997.
- [15] Wolmer V. Vasconcelos., *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998.
- [16] A. Grothendieck., *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV; les schemas de Hilbert* *Seminaire Bourbaki*, n° 221, I.H.P., Paris 1961.
- [17] R. Hartshorne., *Connectedness of the Hilbert Scheme*, Publ. I.H.E.S., n°29 1966, 261-304.
- [18] A. Iarrobino., *Reducibility of the Families of 0-Dimensional Schemes on a Variety*, *Inv. Math*, n° 15, 1972, 72-77.
- [19] Jacqueline Rojas e Israel Vainsencher., *Canocical Curves in \mathbb{P}^3* , 2002 London Mathematical Society.