

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estabilidade Exponencial do Semigrupo de um
Modelo Viscoelástico

por

Alúísio Cabral de Lima

Sob orientação do

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos

e

co-orientação do

Prof. Dr. Jorge Ferreira

Junho de 2005

Estabilidade Exponencial do Semigrupo de um Modelo Viscoelástico

por

Alúcio Cabral de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de
Pós-Graduação de Matemática da Universidade Federal da Paraíba
Como parte dos requisitos necessários para obtenção do
Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos (Orientador)

Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro

Prof. Dr. Jorge Ferreira

Prof. Dr. Shirley Maria Santos Sousa (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
CCEN-Departamento de Matemática
Curso de Pós-Graduação de Matemática

Agradecimento

Agradeço a Deus por ter me dado paciência e por ter colocado as pessoas certas nos momentos difíceis dessa trajetória. Em particular, ao Dr. Marivaldo Pereira Matos, pessoa cuja lealdade, simplicidade e honestidade o colocam em um espaço métrico cuja norma é ter princípios éticos e morais. Além disso, tenho de agradecer as suas orientações técnicas e também conselhos sobre a Matemática e a vida.

Falando um pouco sobre a Matemática, meus contatos com as idéias desenvolvidas nesta dissertação se deram de várias formas. As dissertações de mestrado de Haroldo José e Shirley Maria pouparam-me tempo considerável, ensinando-me muitas idéias novas. As várias conversas sobre Análise Funcional com meu orientador, professor Marivaldo Pereira Matos, bem como suas exposições sobre Semigrupo de Operadores Lineares resultaram na conclusão desse trabalho. Sugestões em vários outros pontos dessa dissertação dos professores Dr. Nelson Nery, Dra. Shirley Maria e Dr. Jorge Ferreira ampliaram bastante minha compreensão do assunto, conduzindo-me mais de uma vez a melhoria significativa na exposição. A todos eles meu agradecimento.

À conversa despreocupada e as trocas de idéias com os colegas Anselmo Lopes, Michael Rolim, Alex Marinho e Anderson Fabiano, sobre Matemática e outros assuntos, ajudaram-me bastante a tornar mais prazerosas o convívio e a rotina da pós-graduação.

Aos professores Andrade, Everaldo, João Marcos e Fernando Xavier gostaria de registrar as muitas palavras de incentivo e compreensão em alguns momentos que eu precisei.

Ao secretário da pós-graduação Júnior Dantas, o meu agradecimento não apenas pela execução das tarefas acadêmicas, mas também pelo seu desempenho como "organizador de eventos".

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), agradeço pelo apoio financeiro a mim dispensado que foi imprescindível no andamento do meu trabalho.

Ao CEFET-CE pela minha liberação e, em particular, à pessoa do seu Diretor Geral Mauro Oliveira por acreditar e tornar coisas impossíveis em possíveis. Sem ele, talvez o sonho tivesse se tornado um pesadelo.

Finalmente, meus filhos Alane, Mateus, meus pais João Francisco e Maria Matilde e meus irmãos Miguel Arcanjo e José Henrique que foram ombro amigo nos momentos difíceis e fizeram-me seguir em frente quando eu mesmo estava preste a me desanimar.

Dedicatória

Aos meus pais João e Maria e especialmente aos meus filhos Alane, Mateus e Aline (in memoriam).

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência da solução forte, unicidade e a estabilidade exponencial do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(t) & , \quad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 & , \end{cases}$$

onde $-A$ é o gerador de um semigrupo de classe C_0 , $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ com $u_0 \in D(A)$ e $f : [t_0, T] \rightarrow X$ uma função dada.

Abstract

In this work discusses the strong solution existence, the unit and Chauchy's problem exponential stability :

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(t) & , \quad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 & , \end{cases}$$

$-A$ is the subgroup generator of category C_0 , $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ with $u_0 \in D(A)$ and $f : [t_0, T] \longrightarrow X$ one given function.

Introdução

O objetivo deste trabalho é resumir algumas questões básicas da teoria de Semigrupo de Operadores Lineares em espaços de Banach e com isso fazemos um estudo analítico de existência, unicidade, comportamento assintótico e estabilidade exponencial de um problema viscoelástico. Analisaremos o modelo abstrato:

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(t) & , \quad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 & , \end{cases}$$

onde $-A$ é o gerador de um semigrupo de classe C_0 , $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ com $u_0 \in D(A)$ e $f : [t_0, T] \rightarrow X$ uma função dada. Estudaremos o caso homogêneo, isto é, $f \equiv 0$, como também o caso não homogêneo.

A teoria de semigrupos de operadores lineares foi consideravelmente impulsionada a partir de 1948 com a demonstração do famoso Teorema de Hille-Yosida. A posterior participação de importantes pesquisadores assim como o avanço de outras áreas da Matemática permitiu consolidar a teoria, dando para ela autonomia e inúmeras aplicações em diversas áreas, tanto na matemática aplicada como na pura. Referências clássicas dessa teoria, podem ser encontradas em Goldstein [5], Pazy [14], Alvércio Moreira [4] e a literatura mais recente de Zhuangyi Liu e Songmu Zheng [16].

Uma das aplicações da teoria de semigrupos é o estudo de equações diferenciais em derivadas ordinárias e parciais. No capítulo 1, apresentaremos alguns resultados importantes de análise funcional, pré-requisito indispensável na compreensão desta teoria e também uma introdução aos espaços de Sobolev. No capítulo 2 estudaremos diversas questões básicas de teoria de semigrupos tais como os clássicos teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips, sempre orientadas nas possíveis aplicações as equações diferenciais. No capítulo 3 estudaremos existência e unicidade de solução forte, e a estabilidade exponencial para um problema viscoelástico. Para a estabilidade exponencial, usaremos um resultado recente que foi obtido por Gearhart e Huang, independentemente. Nesta dissertação consideraremos o nosso espaço X , como sendo um espaço de Banach real, e as notações são aquelas usadas em análise funcional.

Sumário

1 Terminologia e Preliminares	5
1.1 Resultados Básicos	5
1.2 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	6
1.3 Espaços de Sobolev	8
1.4 Teoremas Clássicos	11
2 Semigrupos e Geradores	13
2.1 O Conceito de Gerador	14
2.2 Caracterizações do Gerador Infinitesimal	22
3 Aplicações a Problemas de Evolução	31
3.1 Equação do Calor	32
3.2 Equação da Onda	35
3.3 A Equação de Schrödinger	36
3.4 Equações Lineares Não Homogêneas	38
4.1 Estabilidade Exponencial	52
4.1.1 O Problema de Cauchy Abstrato	52
4.1.2 Um Problema Viscoelástico	59

Capítulo 1

Terminologia e Preliminares

O objetivo deste capítulo é listar definições, teoremas e outros resultados básicos de Análise Funcional, necessários para o desenvolvimento do corpo deste trabalho. Dessa forma, não nos preocuparemos em demonstrar tais resultados e sim mencioná-los no decorrer do texto, como referências.

1.1 Resultados Básicos

O espaço dos operadores limitados $A : X \longrightarrow Y$ é representado por $\mathcal{L}(X, Y)$. Quando $X = Y$ escrevemos $\mathcal{L}(X)$ no lugar de $\mathcal{L}(X, X)$ e quando $Y = \mathbb{R}$ o espaço $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ é o dual topológico, X' , de X .

Definição 1.1 *Uma sucessão $(A_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$, com $n = 1, 2, \dots$, diz-se convergente para um elemento $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ se,*

$$\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Escreve-se, neste caso, $A_n \rightarrow A$, e como vale a relação:

$$|\|A_n\| - \|A\|| \leq \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X, Y)},$$

deduz-se que $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \mapsto \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, isto é, a norma no espaço $\mathcal{L}(X,Y)$, é uma função contínua.

Definição 1.2 Se $A, B \in \mathcal{L}(X)$, o produto de A por B é definido por $AB = A \circ B$, onde $A \circ B$, indica a transformação composta de A e B , e vale a seguinte relação:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Teorema 1.1 (Teorema da Limitação Uniforme, cf. [7]) Seja (T_n) uma seqüência de operadores lineares limitados, $T_n : X \rightarrow Y$, onde X é Banach e Y um espaço normado, tal que $(\|T_n x\|)$ é limitado para todo $x \in X$, isto é, $\|T_n x\| \leq C_x$, onde C_x é um número real que depende de x . Então, a seqüência de normas $(\|T_n\|)_n$ é limitada, ou seja, existe um C , tal que $\|T_n\| \leq C, \forall n$.

1.2 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$ e $(0, T) \subset \mathbb{R}$, equipado da medida de Lebesgue. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, definimos a integral de φ , como sendo o vetor de X dado por:

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável ou \mathcal{B} -integrável se existir uma seqüência $(\varphi_v)_{v \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

(i) $\varphi_v \rightarrow \varphi$ em X quase sempre em $(0, T)$;

$$(ii) \quad \lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0.$$

Neste caso, a integral de Bochner de u , é, por definição o vetor de X dado por:

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Dado $T > 0$, um número real, denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Observação 1.1 *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto interno (u, v) e que é completo com a norma $(u, u)^{1/2}$. Denotaremos este espaço sempre por H .*

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é também um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por:

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$, que são fortemente mensuráveis e tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo, separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0, T; X')$, onde p e q

são números conjugados, isto é, $1/p + 1/q = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, estaremos representando o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

1.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção apresentaremos uma classe de espaços fundamentais para o estudo das equações diferenciáveis parciais, que são os espaços de Sobolev.

Definição 1.3 *Por um multi-índice, entendemos uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não-negativos. Denota-se por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice α e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$, definido por:*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, temos, por definição, $D^0\varphi = \varphi$.

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω . Este espaço quando munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é um espaço de Banach, ver [2]. No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cuja norma e produto interno serão definidos e denotados, respectivamente, por:

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

e

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

O resultado enunciado a seguir estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual. Mais precisamente, temos:

Proposição 1.1 (cf. [2]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ com $u_k \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência de (u_k) , ainda denotada por (u_k) , tal que:*

(i) $u_k(x) \rightarrow u(x)$, quase sempre em Ω ;

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, quase sempre em Ω , para todo k , com $h \in L^p(\Omega)$.

Sabemos que se $u \in L^p(\Omega)$, sua derivada, no sentido das distribuições, não pertence necessariamente a $L^p(\Omega)$. Desta forma, Sobolev (em 1936), motivado pela idéia de conhecer o espaço ambiente das derivadas de determinadas funções, introduziu novos espaços, naturalmente denominados Espaços de Sobolev, que passamos a descrevê-los.

Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev, que denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$, é por definição, o espaço vetorial das distribuições de $L^p(\Omega)$, para as quais sua derivada de ordem α , no sentido das distribuições, pertence a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

com as quais torna-se um espaço de Banach.

O espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert que denotaremos por $H^m(\Omega)$. Em símbolos,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

e cuja norma e produto interno são dados, respectivamente por:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

e

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Vejamos alguns casos particulares de espaços de Sobolev. Em dimensão $n = 1$, temos:

$$H^1(a, b) = \{u \in L^2(a, b); u' \in L^2(a, b)\}.$$

Neste caso,

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \int_a^b [u(t)]^2 dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Um fato bastante curioso é que, embora o espaço das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral, ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isso ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é maior que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Esse fato motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$, como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos tal aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular, os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel relevante na Teoria dos Espaços de Sobolev.

1.4 Teoremas Clássicos

Teorema 1.2 (Fórmulas de Green, cf. [6]) *Sejam Ω um aberto de classe C^1 e u, v duas funções de classe $C_0^2(\Omega)$. Então*

$$-\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx = \int \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) v(\sigma) d\sigma.$$

Teorema 1.3 (Desigualdade de Holder, cf. [2]) *Sejam, $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Teorema 1.4 (Desigualdade de Poincaré, cf. [3]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Observação 1.2 *De posse da desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

Teorema 1.5 (Lema de Lax-Milgran, cf. [2]) *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Se $\varphi : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e contínua, então existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:*

$$\varphi(v) = a(u, v), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.6 (Representação de Riesz, cf. [2]) *Seja $1 < p < \infty$ e considere $\varphi \in H'$, onde H é um espaço de Hilbert. Então existe um único $u \in H$, tal que:*

$$\varphi(u) = (u, f)_H, \forall f \in H.$$

Além disso,

$$\|u\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Capítulo 2

Semigrupos e Geradores

Definição 2.1 *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ definido em um subespaço vetorial $D(A) \subset X$ é limitado quando existir uma constante $C > 0$, tal que:*

$$\|Ax\| \leq C \|x\|, \forall x \in D(A).$$

Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ é um operador limitado, define-se a norma de A por::

$$\|A\| = \inf \{C > 0; \|Ax\| \leq C \|x\|, \forall x \in D(A)\}.$$

Definição 2.2 *O operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ é dito fechado quando seu gráfico $G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$ for fechado em $X \times Y$.*

Lema 2.1 *Se A é um operador fechado, então $D(A)$ equipado com a norma:*

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y; x \in D(A)$$

é um espaço de Banach.

Prova. Seja $(x_n) \subset D(A)$ uma seqüência de Cauchy. Temos que:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_X &\leq \|x_n - x_m\|_{D(A)} \rightarrow 0, \text{ quando } n, m \rightarrow \infty; \\ \|Ax_n - Ax_m\|_Y &\leq \|x_n - x_m\|_{D(A)} \rightarrow 0, \text{ quando } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim, (x_n) é uma seqüência de Cauchy em X e (Ax_n) é uma seqüência de Cauchy em Y . Logo, existem $x \in X$ e $y \in Y$, tais que $x_n \rightarrow x$ em X e $Ax_n \rightarrow y$ em Y . Sabemos, por hipótese que A é fechado, e, portanto $x \in D(A)$ e $y = Ax$. Além disso, temos que:

$$\|x_n - x\|_{D(A)} = \|x_n - x\|_X + \|Ax_n - Ax\|_Y \rightarrow 0.$$

Portanto, $D(A)$ é completo. ■

Definição 2.3 *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X . Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

- (i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;
- (ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Se, além disso:

- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \forall x \in X$,

o semigrupo S é denominado de classe C_0 .

Por definição $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, $\forall t \geq 0$, e quando ocorrer $\|S(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é denominado *semigrupo de contração*.

2.1 O Conceito de Gerador

Como motivação, consideremos $u_0 \in D(A)$ e suponhamos que $u(t) = S(t)u_0$ satisfaz o problema:

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0, & \text{em } [0, T] \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Então, $u_t(0) = -Au(0) = -Au_0$ e, por outro lado:

$$u_t(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h) - u(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h}.$$

Logo:

$$-Au_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} u_0.$$

Essa última igualdade estabelece uma condição necessária para que u_0 esteja em $D(A)$. Mais precisamente, temos:

Definição 2.4 *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 . Um gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um operador de X caracterizado por:*

$$(i) \quad D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe em } X \right\},$$

$$(ii) \quad Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in D(A).$$

Proposição 2.1 *$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A um operador linear.*

Teorema 2.1 *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 .*

(i) *Existem $w \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ tais que:*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0.$$

(ii) *Para todo $x \in X$, a função $t \mapsto S(t)x$ é contínua em $[0, \infty)$.*

(iii) *Se A é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e $x \in X$, então:*

(a) $S(t)x \in D(A)$;

(b) $t \mapsto S(t)x$ é diferenciável e vale:

$$\frac{d}{dt} [S(t)x] = AS(t)x = S(t)A(x). \quad (2.2)$$

Prova. De (2.2) segue que $u(t) = S(t)x$ satisfaz:

$$\begin{cases} u_t - Au &= 0 \\ u(0) &= x. \end{cases}$$

A demonstração será feita por etapas:

(i) Seja $\varphi(t) = \ln \|S(t)\|$, $t \geq 0$. Observemos que:

$$\begin{aligned} \varphi(t+s) &= \ln \|S(t+s)\| = \ln \|S(t)S(s)\| \\ &\leq \ln(\|S(t)\| \|S(s)\|) = \ln \|S(t)\| + \ln \|S(s)\| = \varphi(t) + \varphi(s). \end{aligned}$$

Logo, φ é subaditiva. Mostremos que a função $t \mapsto \|S(t)\|$ é uma função limitada no intervalo limitado $[0, T]$. De fato, existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|S(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0, \infty]$, pois caso contrário, existiria uma sucessão (t_n) , com $t_n \rightarrow 0^+$, tal que $\|S(t_n)\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, dessa forma, $(\|S(t_n)x\|)$ não seria limitada para algum $x \in X$, contradizendo (iii), pois S é semigrupo de classe C_0 . Além disso, $M \geq 1$ porque $\|S(0)\| = \|I\| = 1$, por (i) da definição de semigrupos.

Daí, segue-se que $\varphi(t) = \ln \|S(t)\|$ é também limitada em $[0, T]$.

Se $w_o = \inf_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t}$, então $w_o \in (-\infty, \infty)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = w_o$. Para comprovar essa última afirmação, suponhamos inicialmente que $-\infty < w_o < \infty$ e seja $\varepsilon > 0$ dado. Existe $T > 0$, com $\frac{\varphi(T)}{T} < w_o + \varepsilon$.

Se $t = nT + \delta$, $0 \leq \delta < T$, $n = 1, 2, 3, \dots$, então:

$$\begin{aligned} w_o &\leq \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{\varphi(nT + \delta)}{t} \leq \frac{nT\varphi(T)}{tT} + \frac{\varphi(\delta)}{t} \\ &\leq \frac{t - \delta}{t}(w_o + \varepsilon) + \frac{\varphi(\delta)}{t} = (w_o + \varepsilon) + \frac{1}{t}[\varphi(\delta) - (w_o + \varepsilon)\delta] \end{aligned}$$

e isto acarreta:

$$w_o \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} \leq w_o + \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Consideremos $w > w_o$ e fixemos $t_o \geq 0$ tal que

$$\frac{\varphi(t)}{t} < w, \forall t \geq t_o.$$

Se $M_o = \max_{0 \leq t \leq t_o} \|S(t)\|$, então:

1. Se $w > 0$ temos que $\varphi(t) < wt \leq wt + \ln M_o$, $t \geq 0$.
2. Se $w < 0$ temos que $\varphi(t) < wt - wt_o \leq wt + \ln M_o$, $t \geq 0$.

Logo,

$$\ln \|S(t)\| - \ln M_o \leq wt, \quad w \geq 0 \Rightarrow \|S(t)\| \leq M_o e^{wt}$$

e

$$\ln \|S(t)\| - \ln M_o \leq wt - wt_o, \quad w < 0,$$

de onde segue que:

$$\|S(t)\| \leq M_o e^{-wt_o} e^{wt} = M_o e^{w(t-t_o)}.$$

(ii) Seja $h > 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [S(t+h)x - S(t)x] &= \lim_{h \rightarrow 0} [S(t)(S(h)x - x)] \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0} (S(h)x - x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 e, portanto, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é limitado. Façamos agora $S(t-h)$, com $0 < h < t$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [S(t-h)x - S(t)x] &= \lim_{h \rightarrow 0} [S(t-h)x - S(t-h+h)x] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{S(t-h)[x - (S(h)x)]\}. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $S(t-h)$ é limitado. De fato, sabemos que $\|S(t-h)\| \leq Me^{w(t-h)}$ converge para Me^{wt} quando $h \rightarrow 0$, donde segue que $S(t-h)$ é limitado. Portanto, a função $t \mapsto S(t)x$ é contínua em $[0, \infty)$.

(iii) Mostremos primeiramente que $y = S(t)x \in D(A)$. De fato, observe que:

$$\frac{S(h)y - y}{h} = \frac{1}{h}[S(h)S(t)x - S(t)x] = S(t) \left[\frac{S(h)x - x}{h} \right].$$

Passando ao limite com $h \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)y - y}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} S(t) \left[\frac{S(h)x - x}{h} \right] \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{S(h)x - x}{h} \right] \\ &= S(t)Ax. \end{aligned}$$

Logo, $y = S(t)x \in D(A)$, $AS(t)x = S(t)Ax$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = S(t)Ax,$$

completando a prova do item (b).

■

Teorema 2.2 (Teorema do Ponto de Lebesgue) *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e seja A seu gerador infinitesimal. Então:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\xi)x d\xi = S(t)x.$$

Prova. Vejamos que:

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\xi)x d\xi - S(t)x \right\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow \infty.$$

De fato, notemos que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\xi)x d\xi - S(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (S(\xi) - S(t))x d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| (S(\xi)x - S(t)x) \| d\xi. \end{aligned}$$

Escolhendo h suficientemente pequeno, segue que $\|S(\xi)x - S(t)x\| < \varepsilon$ para $-h + \xi < t < h + \xi$ e conseqüentemente $\frac{1}{h} \left\| \int_t^{t+h} S(\xi)x - S(t)x \right\| < \varepsilon$ e assim obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 2.3 *Sejam A um operador linear fechado de X e f uma função contínua em $[a, b]$ com valores em $D(A)$ e tal que Af é contínua em $[a, b]$. Então:*

$$\int_a^b f(t)dt \in D(A)$$

e

$$A \int_a^b f(t)dt = \int_a^b Af(t)dt.$$

Prova. Ver em [4]. ■

Teorema 2.4 *Se dois semigrupos de classe C_0 , $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S_2(t)\}_{t \geq 0}$, têm o mesmo gerador infinitesimal, A , então eles são idênticos.*

Prova. Dado $x \in D(A)$, seja $F(s) = S_1(t-s)S_2(s)x$. Então,

$$\frac{dF(s)}{ds} = -AS_1(t-s)S_2(s)x + S_1(t-s)AS_2(s)x = 0,$$

desde que A commute com $S_1(t-s)$. Assim $F(s)$ é uma constante e daí tem-se que $F(t) = F(0)$, $S_2(t)x = S_1(t)x$ para todo $t \geq 0$. Mas, $D(A)$ é denso em X , logo $S_2(t)x = S_1(t)x, \forall x \in X$ e $\forall t \geq 0$. ■

Corolário 2.1 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal S .*

(i) A função $u : [0, \infty) \rightarrow D(A)$ que a cada $t \in [0, \infty)$ associa $S(t)x \in D(A)$, tem a seguinte regularidade:

$$u \in C^0([0, \infty); D(A) \cap C^1([0, \infty); X)).$$

(ii) Se $x \in D(A)$, então:

$$S(t)x - x = \int_0^t AS(\xi)x d\xi = \int_0^t S(\xi)Ax d\xi.$$

(iii) $\overline{D(A)} = X$ e A é fechado.

Prova. Notemos que, (i) segue do fato que $\frac{du}{dt} = AS(t)x = S(t)Ax \in C^0([0, \infty); X)$.

Como $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e

$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$ e integrando de 0 a t , obtemos:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}S(t)x dt = \int_0^t AS(\xi)x d\xi = \int_0^t S(\xi)Ax d\xi.$$

Ora, do Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}S(t)x dt = S(t)x - S(0)x$$

e daí obtemos:

$$S(t)x - x = \int_0^t AS(\xi)x d\xi = \int_0^t S(\xi)Ax d\xi.$$

Donde segue (ii).

Fixemos $x \in X$ e seja $y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi)x d\xi$. Pelo Teorema do Ponto de Lebesgue, temos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi)x d\xi = S(0)x = x.$$

Afirmamos que $y(t) \in D(A)$, $\forall t > 0$. De fato, sabemos que:

$$D(A) = \left\{ y \in X; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)y - y}{h} \text{ existe em } X. \right\} \text{ e } Ay = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)y - y}{h}, y \in D(A),$$

e observemos que:

$$\frac{1}{h} \left[S(h) \int_0^t S(\xi)x d\xi - \int_0^t S(\xi)x d\xi \right] = \frac{1}{h} \left[\int_0^t S(\xi+h)x d\xi - \int_0^t S(\xi)x d\xi \right]$$

e, usando uma mudança de variável adequada, encontramos:

$$\frac{1}{h} \left[S(h) \int_0^t S(\xi)x d\xi - \int_0^t S(\xi)x d\xi \right] = \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} S(\xi+h)x d\xi - \int_0^h S(\xi)x d\xi \right] \longrightarrow S(t)x - x,$$

quando $h \rightarrow 0$. Logo, $\int_0^t S(\xi)x d\xi \in D(A)$ e $A \int_0^t S(\xi)x d\xi = S(t)x - x$. Além disso, o operador $A : D(A) \rightarrow X$ é fechado. Com efeito, seja $(x_n) \subset D(A)$, com $x_n \rightarrow x$ em X e $Ax_n \rightarrow y$ em X . Daí, tem-se que:

$$\frac{S(t)x_n - x_n}{t} \rightarrow \frac{S(t)x - x}{t}, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $(x_n) \subset D(A)$, de (ii), resulta:

$$\frac{S(t)x_n - x_n}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi)Ax_n d\xi,$$

e tomando o limite na última igualdade, com $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(t)x_n - x_n}{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi)Ax_n d\xi.$$

Do Corolário 2.1, temos que

$$\frac{S(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi)Ax d\xi,$$

e, fazendo $t \rightarrow 0^+$, encontramos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = S(0)Ax = S(0)y = y.$$

Portanto, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Logo, A é fechado. ■

2.2 Caracterizações do Gerador Infinitesimal

Seja A um operador linear de X . Representemos por $\rho(A)$ o conjunto dos números complexos λ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é invertível e o operador inverso $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado e tem domínio denso em X . O conjunto $\rho(A)$ é denominado *conjunto resolvente* de A e o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é *operador resolvente* de A associado a λ , o qual é representado por $R(\lambda, A)$. O conjunto complementar $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, denominado *espectro* de A é decomposto na união de três conjuntos, a saber:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A),$$

onde:

- $\sigma_p(A)$ é o conjunto de autovalores de A , isto é, $\lambda \in \sigma_p(A)$ se, e somente se, existe $x \neq 0$ em $D(A)$ tal que $Ax = \lambda x$. Esse conjunto é o *espectro pontual* de A .
- $\sigma_c(A)$ é o conjunto dos λ , tais que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é densamente definido, mas não é limitado. Esse é o *espectro contínuo* de A .
- $\sigma_r(A)$ é o conjunto dos λ , tais que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é limitado, mas não tem domínio denso. Esse conjunto é denominado *espectro residual* de A .

Quando o operador A for fechado, então seu resolvente $R(\lambda, A)$ também será.

Teorema 2.5 (Teorema de Representação) *Sejam A o gerador de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 e $w_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \ln \|S(t)\|$. Se $\operatorname{Re} \lambda > w_0$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad \forall x \in X. \quad (2.3)$$

Prova. Sejam $w \in \mathbb{R}$, tal que $\operatorname{Re} \lambda > w > w_0$ e M tal que:

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Se $A_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt$, então:

$$(i) \|A_\lambda x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \leq \frac{M \|x\|}{\operatorname{Re} \lambda - w} \text{ e, portanto, } A_\lambda \in \mathcal{L}(X);$$

$$(ii) S(h) \frac{A_\lambda x - A_h x}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t+h)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \right].$$

Efetuada a mudança de coordenadas $\xi = t + h$, obtemos da relação (ii):

$$S(h) \frac{A_\lambda x - A_h x}{h} = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi)x d\xi - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt.$$

Agora, tomando o limite na última igualdade com $h \rightarrow 0^+$, resulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(h) \frac{A_\lambda x - A_h x}{h} = \lambda A_\lambda x - \lambda x,$$

de onde deduzimos que o limite existe e, dessa forma, $A_\lambda x \in D(A)$ e $A(A_\lambda x) = \lambda A_\lambda x - \lambda x$, isto é:

$$(\lambda I - A) A_\lambda x = \lambda x, \quad \forall x \in D(A).$$

Logo:

$$(\lambda I - A) A_\lambda = I \tag{2.4}$$

Por outro lado:

$$A_\lambda(Ax) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax dt = A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt = AA_\lambda x$$

e essa relação sendo válida para qualquer x em $D(A)$, deduzimos que:

$$AA_\lambda = A_\lambda A \tag{2.5}$$

Combinando (2.4) e (2.5), obtemos:

$$A_\lambda(\lambda I - A) = I, \tag{2.6}$$

isto é, $A_\lambda = R(\lambda, A)$, que é a relação (2.3). ■

Para obtermos as fórmulas de derivação para a função $\lambda \mapsto R(\lambda, A)x$, inicialmente apresentamos algumas propriedades do operador resolvente. De fato, da relação

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt, \forall x \in X,$$

encontramos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} R(\lambda, A) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} S(t)x dt = R(\mu, A)x$$

e usando a *fórmula resolvente*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

deduzimos que $R(\lambda, A)$ comuta com $R(\mu, A)$, e daí resulta a fórmula de derivação:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, A)^2.$$

O Método de Indução Finita nos permite generalizar a fórmula de derivação acima. Mais precisamente, temos:

Corolário 2.2 *Sob as mesmas condições do Teorema anterior, temos:*

- (i) $\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}$,
- (ii) $\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (-t)^n S(t)x dt, \forall x \in X.$

Prova. Ver [4]. ■

1. Ainda como conseqüência da fórmula do resolvente deduzimos que se $B_\lambda = \alpha R(\lambda, A) + \beta I$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $B_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ e B_λ comuta com B_μ . Logo, B_λ comuta com e^{tB_λ} , onde

$$e^{tB_\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B_\lambda^n}{n!}.$$

2. Se A é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, semigrupo de classe C_0 , tal que $\|S(t)\| \leq M e^{wt}$, $t \geq 0$, diremos que o operador A é de classe $G(M, w)$ e escrevemos: $A \in G(M, w)$.

Teorema 2.6 (Hille-Yosida) *Para que um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 , é necessário e suficiente que:*

- (i) *A seja fechado com domínio denso em X ;*
(ii) *Existam números reais M e w , tais que $(w, \infty) \subset \rho(A)$ e:*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda > w.$$

Prova. Ver [14]. ■

Corolário 2.3 *Seja $A \in G(1, w)$ e considere $\lambda > w$. Dado $f \in X$, existe um único $u \in D(A)$ tal que:*

$$\lambda u - Au = f \text{ em } X$$

e a aplicação $f \longmapsto u$ é linear e contínua de $X \longrightarrow D(A)$.

Prova. De fato, se $\lambda > w$ então $\lambda \in \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\lambda - w}$. Ocorre que, $\lambda u - Au = f \iff (\lambda I - A)u = f$, ou seja, $u = R(\lambda, A)f$. Temos então:

$$\|u\| = \|R(\lambda, A)f\| \leq \|R(\lambda, A)\| \|f\| \leq \frac{1}{\lambda - w} \|f\|. \quad (2.7)$$

Se $\Phi : X \longrightarrow D(A)$ é definida por $\Phi(f) = u$, é claro que Φ é linear e de (2.7) temos que:

$$\|\Phi(f)\| \leq \frac{1}{\lambda - w} \|f\|,$$

de onde segue a continuidade do operador Φ . ■

Corolário 2.4 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $A \in G(1, 0)$;
(b) $\overline{D(A)} = X$, A é fechado, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1, \forall \lambda > 0$.

Prova. Conseqüência imediata do Teorema de Hille-Yosida, com $M = 1$ e $w = 0$. ■

Corolário 2.5 $A \in G(M, w) \iff A - wI \in G(M, 0)$.

Prova. De fato, se $B = A - wI$, então $D(A) = D(B)$ e B é fechado se, somente se, A o for. Além disso:

$$(\lambda I - B)^{-1} = [(\lambda + w)I - A]^{-1}$$

e, portanto, $\lambda \in \rho(B) \iff \lambda + w \in \rho(A)$, isto é, $(0, \infty) \subset \rho(B) \iff (w, \infty) \in \rho(A)$, e nesse caso:

$$\|R(\lambda, B)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n} \iff \|R(\lambda + w, A)^n\| \leq \frac{M}{[(\lambda + w) - w]^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Corolário 2.6 *Para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , tal que $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, $t \geq 0$, é necessário e suficiente que A seja fechado, seu domínio seja denso e se $\lambda > w$, então $\lambda \in \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$.*

Prova. Conseqüência imediata do Teorema de Hille-Yosida, com $n = 1$ e $M = 1$. ■

Corolário 2.7 *Para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é necessário e suficiente que A seja fechado, seu domínio seja denso, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e:*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1, \forall \lambda > 0.$$

Prova. Caso particular do corolário anterior com $w = 0$. ■

Faremos a seguir uma outra caracterização para o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 , atribuída a Lumer e Phillips.

Seja X um espaço de Banach, X' o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X' .

Definição 2.5 Uma aplicação $J : X \longrightarrow 2^{X'}$ tal que:

$$J(x) = \left\{ y \in X'; \operatorname{Re}(\langle y, x \rangle) = \|x\|^2 \text{ e } \|y\| = \|x\| \right\}$$

é denominada aplicação dualidade de X .

Observação 2.1 Sobre a aplicação J , observamos o seguinte:

- $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$ (conseqüência do Teorema de Hahn-Banach).
- $J(x)$ é convexo, para cada $x \in X$.
- Se a norma $\|\cdot\|_{X'}$ é estritamente convexa, isto é, se $x, y \in X$, com $\|x\| = \|y\| = 1$, implicar $\|x + y\| < 2$, então $J(x)$ é um conjunto unitário..
- Se $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, e $f \in X$, então $J(f) = \left\{ \frac{|f|^{p-2} f}{\|f\|^{p-2}} \right\}$.
- Se X é um espaço de Hilbert, então $J(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$.

Definição 2.6 Um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo quando:

$$\forall x \in D(A), \exists y \in J(x) \text{ tal que } \operatorname{Re}(\langle y, Ax \rangle) \leq 0.$$

Lema 2.2 $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se, somente se, $\forall x \in D(A), \lambda > 0$,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Prova. Suponhamos que A é dissipativo e seja $x \in D(A)$. Se y_0 jaz em $J(x)$ e é tal que $\operatorname{Re}(\langle y_0, Ax \rangle) \leq 0$, então:

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\| &= \sup_{\|y\|=1} \operatorname{Re}(\langle y, \lambda x - Ax \rangle) \\ &\geq \operatorname{Re}\left(\left\langle \frac{y_0}{\|x\|}, \lambda x - Ax \right\rangle\right) \\ &= \frac{\lambda}{\|x\|} \operatorname{Re}(\langle y_0, x \rangle) - \frac{1}{\|x\|} \operatorname{Re}(\langle y_0, Ax \rangle) \\ &\geq \lambda \|x\|, \end{aligned}$$

pois $\operatorname{Re}(\langle y_0, Ax \rangle) \leq 0$. Reciprocamente, suponhamos que $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$, $\forall x \in D(A)$, $\lambda > 0$, e seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos que $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| > \lambda \|x\| - \varepsilon$, e desde que

$$\|(\lambda I - A)x\| = \sup_{y \in X', \|y\|=1} \operatorname{Re}\langle y, \lambda x - Ax \rangle,$$

existe $y_{\varepsilon, \lambda} \in X'$, $\|y_{\varepsilon, \lambda}\| = 1$ tal que:

$$\operatorname{Re}(\langle y_{\varepsilon, \lambda}, \lambda x - Ax \rangle) > \lambda \|x\| - \varepsilon,$$

de onde segue que:

$$0 \geq \operatorname{Re}(\langle y_{\varepsilon, \lambda}, x \rangle) - \|x\| > \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re}(\langle y_{\varepsilon, \lambda}, Ax \rangle) - \varepsilon.$$

Ora, a família de funcionais $\{y_{\varepsilon, \lambda}\}$ sendo limitada, admite uma subfamília, denotada da mesma forma, que converge, na topologia fraca-*, quando $\lambda \rightarrow \infty$, para um limite representado por y . Se na última desigualdade considerarmos $\lambda \rightarrow \infty$, obteremos a relação:

$$0 \geq \operatorname{Re}(\langle y_{\varepsilon, \lambda}, x \rangle) - \|x\| \geq 0,$$

de onde resulta que:

$$\operatorname{Re}(\langle y, x \rangle) = \|x\|.$$

Considerando $y_0 = \|x\|^{-1} y \in J(x)$ e notando que $\operatorname{Re}(\langle y_{\varepsilon, \lambda}, Ax \rangle) - \varepsilon \leq 0$, obtemos ao passar o limite com $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\|x\|} \operatorname{Re}(\langle y_0, Ax \rangle) - \varepsilon \leq 0,$$

e sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos:

$$\operatorname{Re}(\langle y_0, Ax \rangle) \leq 0.$$

Portanto, A é dissipativo. ■

Corolário 2.8 *Se A é dissipativo, então $\lambda I - A$ é injetivo, $\forall \lambda > 0$. Além disso, se $\lambda_0 I - A$ for sobrejetor, $\lambda_0 > 0$, então:*

$$\|R(\lambda_0, A)\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$$

Prova. Do Lema 2.2 segue que, $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$, $\forall x \in D(A)$ e se $(\lambda I - A)x = 0$ então $\|x\| = 0$, donde $x = 0$. Assim, $\lambda I - A$ é injetivo. Se $\lambda_0 I - A$ é sobrejetor então:

$$\|x\| = \|(\lambda_0 I - A) \cdot (\lambda_0 I - A)^{-1} x\| \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 I - A)^{-1} x\|.$$

Assim,

$$\|(\lambda_0 I - A)^{-1} x\| \leq \frac{1}{\lambda_0} \|x\|,$$

e, portanto, $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é limitado e $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$. ■

Teorema 2.7 (Lumer-Phillips) *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X .*

(a) *Se $A \in G(1, 0)$, então A é dissipativo e $\lambda I - A$ é sobrejetor, $\forall \lambda > 0$.*

(b) *Se A é dissipativo e $\lambda_0 I - A$ é sobrejetor, para algum $\lambda_0 > 0$, então $A \in G(1, 0)$.*

Prova. Ver [4], [8] ou [14]. ■

Corolário 2.9 *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em H .*

Prova. Por hipótese $0 \in \rho(A)$, donde A é invertível. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que A^{-1} é um operador linear limitado. Afirmamos que o operador $\lambda I - A$ é invertível para $0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}$.

De fato, devemos mostrar que dado $f \in D(A)$, existe uma única $u \in D(A)$, tal que:

$$\lambda u - Au = f,$$

ou ainda, aplicando A^{-1} :

$$\lambda A^{-1}u - u = A^{-1}f,$$

isto é, dado $f \in D(A)$, deve existir uma única $u \in D(A)$, satisfazendo:

$$u = \lambda A^{-1}u - A^{-1}f.$$

Assim, o nosso problema reduziu-se a um problema de ponto fixo para a seguinte aplicação:

$$Tw = \lambda A^{-1}w - A^{-1}f.$$

Notemos que:

$$\|Tw - Tv\| = \|\lambda A^{-1}w - \lambda A^{-1}v\| = \lambda \|A^{-1}(w - v)\| \leq \lambda \|A^{-1}\| \|w - v\|,$$

para $0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}$. Logo, nossa aplicação T é uma contração, em um espaço de Banach.

Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única $u \in D(A)$, tal que

$$u = \lambda A^{-1}u - A^{-1}f.$$

Usando, o Teorema de Lumer-Phillips, vemos que A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0 sobre H . ■

Lema 2.3 *A é fechado se, e somente se, $A + wI$ é fechado.*

Prova. (\Rightarrow) Suponhamos que A é fechado. Como I é limitado então $A + wI$ é fechado.

(\Leftarrow) Suponhamos que $A + wI$ é fechado e como $A = (A + wI) + (-wI)$, segue que A é fechado. ■

Capítulo 3

Aplicações a Problemas de Evolução

Neste capítulo, abordaremos questões ligadas a modelagem de problemas físicos-matemáticos, usando a teoria de semigrupos. Mais especificamente, estudaremos os seguintes problemas:

1. **Equação do Calor.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira Γ , suficientemente regular e consideremos problema de determinar uma função $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \lambda u = 0, & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, t) = 0, & \text{em } \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde Δ é o operador de Laplace. Neste problema $u(x, t)$ representa a temperatura no ponto x de Ω , no instante t .

2. **Equação da Onda.** Este problema é um modelo simples de equações hiperbólicas de segunda ordem. Se $x \in \mathbb{R}^n$ representa a variável do espaço e t a variável tempo, este problema modela ondas em tubos ou vibrações em cordas, quando $n = 1$; ondas sobre

superfícies aquáticas, quando $n = 2$; e ondas ópticas ou acústicas quando $n = 3$. O problema de valor inicial e de contorno para a equação da onda é escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t - \Delta u + \lambda u = 0, & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, t) = 0, & \text{em } \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega \\ u_t(x, 0) = v_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

3. A Equação de Schrödinger. A equação de Schrödinger modela problemas da Física.

Se $i = \sqrt{-1}$, procuramos uma função $u(x, t) : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, tal que:

$$\begin{cases} \frac{1}{i}u_t - \Delta u + \lambda u = 0, & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, t) = 0, & \text{em } \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1 Equação do Calor

Queremos determinar uma função $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \lambda u = 0, & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, t) = 0, & \text{em } \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde Ω é definido como anteriormente.

Inicialmente, devemos escolher um domínio apropriado para abordarmos este problema.

Consideremos o seguinte espaço de Hilbert $X = L^2(\Omega)$, com produto interno dado por:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$$

e, conseqüentemente, com a norma: $\|u\|_2^2 = \int_{\Omega} u^2 dx$. Consideremos em X o operador A

definido por:

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ A = -\Delta + \lambda I. \end{cases}$$

Assim, o problema (3.1) é equivalente ao modelo abstrato:

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $u \in C^0([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X)$

Se $c(\Omega)$ representa a constante de Poincaré, isto é, $c(\Omega)$ satisfaz:

$$c(\Omega) \|u\|_2 \leq \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

então, temos que:

Se $\lambda + c(\Omega) \geq 0$, então $-A$ é dissipativo. De fato, sabemos que $-A$ é dissipativo se, e somente se, $(Au, u) \geq 0, \forall u \in D(A)$. Ora:

$$(-\Delta u + \lambda u, u) = (-\Delta u, u) + (\lambda u, u)$$

e usando a Identidade de Green e a Desigualdade de Poincaré, escrevemos:

$$(Au, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq (\lambda + c(\Omega)) \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq 0.$$

Sobrejetividade de $\alpha I + A$. Seja α tal que $\alpha + \lambda > 0$ e consideremos a forma bilinear:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + (\lambda + \alpha) \int_{\Omega} uv dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Vejamos que $a(u, v)$ atende as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram. De fato:

Observação 3.1 1. $a(u, v)$ é contínua em $H_0^1(\Omega)$:

$$|a(u, v)| \leq |(\nabla u, \nabla v)| + (\lambda + \alpha)|(u, v)| \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + |\lambda + \alpha| \|u\|_2 \|v\|_2$$

e usando a Desigualdade de Poincaré, concluímos:

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \frac{|\lambda + \alpha|}{\sqrt{c(\Omega)}} \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2,$$

onde $C = 1 + \frac{|\lambda + \alpha|}{c(\Omega)}$. Considerando em $H_0^1(\Omega)$ a norma é dada por: $\|u\| = \|\nabla u\|_2$. Temos:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

provando que $a(u, v)$ é contínua.

Observação 3.2 1. $a(u, v)$ é coerciva: De fato, temos que:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + (\lambda + \alpha) \int_{\Omega} u^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2.$$

Agora, dado $f \in L^2(\Omega)$, seja $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $\varphi(v) = (f, v) = \int_{\Omega} f v dx$.

Claramente φ é linear e, além disso:

$$|\varphi(v)| = |(f, v)| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq C \|f\|_2 \|v\|, \quad \text{de onde segue a continuidade de } \varphi.$$

Assim, pelo Lema de Lax- Milgram, existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\varphi(v) = a(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou equivalentemente,

$$(f, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + (\lambda + \alpha) \int_{\Omega} u v dx,$$

ou ainda,

$$(f, v) = (-\Delta u, v) + (\lambda u + \alpha u, v).$$

Logo, $(-\Delta u + \lambda u + \alpha u, v) = (f, v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, isto é, $((A + \alpha I)u, v) = (f, v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips, $-A \in G(1, 0)$ e $u(t) = S(t)u_0$ é solução do problema (3.1).

3.2 Equação da Onda

Procuramos uma função $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t - \Delta u + \lambda u = 0, & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, t) = 0, & \text{sobre } \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega \\ u_t(x, 0) = v_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.5)$$

Na forma matricial este sistema se escreve como:

$$\begin{cases} U_t + AU = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + \lambda I & \beta I \end{bmatrix} \quad \text{e } U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix},$$

isto é, reduzimos o problema a um modelo abstrato do tipo descrito na seção anterior.

Com o objetivo de colocar o operador A nas condições do Teorema de Lumer-Phillips, escolhamos os espaços funcionais: $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $D(A) = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$.

1. $-A$ é **Dissipativo**. Dado $U = [u, v] \in D(A)$, temos:

$$\begin{aligned} (AU, U)_X &= -((v, u))_{H_0^1(\Omega)} + (-\Delta u + \lambda u + \beta v, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= -((v, u)) + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} + \beta \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

Considerando em $H_0^1(\Omega)$ o seguinte produto interno:

$$((u, v))_{H_0^1(\Omega)} := (\nabla u, \nabla v) + \lambda(u, v), \text{ onde } \lambda + c(\Omega) > 0,$$

obtemos: $(AU, U)_X = \beta |v|^2 \geq 0$, se $\beta > 0$. Logo, $-A$ é dissipativo.

2. **Sobrejetividade de $\alpha I + A$.** Vejamos que dado $F = [f, g] \in X$, existe $U = [u, v] \in D(A)$ tal que $\alpha U + AU = F$. Isto equivale resolver o sistema:

$$\begin{cases} -v + \alpha u & = f \\ -\Delta u + \lambda u + (\beta + \alpha)v & = g. \end{cases} \quad (3.6)$$

Notamos que o sistema de equações (3.6) se reduz à equação:

$$-\Delta u + [\lambda + \alpha^2 + \alpha\beta]u = g + (\beta + \alpha)f, \quad (3.7)$$

cuja solução é determinada pelo Lema de Lax-Milgran. De fato: a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + (\lambda + \alpha^2 + \alpha\beta) \int_{\Omega} uv dx$$

é contínua e coerciva e do Lema de Lax-Milgram segue a existência de uma única $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ solução de (3.7).

Logo, pelo Teorema de Lumer-Phillips temos que $-A \in G(1, 0)$ e $U(t) = S(t)U_0$ é solução do problema

$$\begin{cases} U_t + AU & = 0 \\ U(0) & = U_0. \end{cases}$$

3.3 A Equação de Schrödinger

O problema agora consiste em encontrar uma função $u(x, t) : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo o problema:

$$\begin{cases} \frac{1}{i}u_t - \Delta u + \lambda u & = 0, & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, t) & = 0, & \text{sobre } \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x, 0) & = u_0(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

Consideremos $X = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ com o produto interno $(u, v)_X = \int_{\Omega} u\bar{v}dx$. Além disso, consideremos o produto interno em $H^1_0(\Omega)$ dado por: $((u, v)) = (\nabla u, \nabla v)_X$. A equação do problema acima, pode ser vista da seguinte forma:

$$u_t - i\Delta u + i\lambda u = 0$$

e considerando $A = -i\Delta + i\lambda I$, $D(A) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, o modelo de Schrödinger assume a forma:

$$\begin{cases} u_t + Au & = 0, & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, 0) & = u_0(x), & \text{em } \Omega \\ u & \in D(A). \end{cases}$$

Nesse caso temos:

$$-i(\Delta u, u) + i\lambda(u, u) = -i \int_{\Omega} \Delta u \cdot \bar{u} dx + i\lambda \|u\|_2^2$$

e usando a Identidade de Green, resulta:

$$(Au, u) = -i \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + i\lambda \|u\|_2^2 = -i \|\nabla u\|_2^2 + i\lambda \|u\|_2^2.$$

Então, $\text{Re}(Au, u) = -\text{Im}(\lambda)$. Assim, temos três casos a considerar:

- Se $\text{Im}(\lambda) \geq 0$, então A é dissipativo.
- Se $\text{Im}(\lambda) \leq 0$, então $-A$ é dissipativo.
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então A e $-A$ são dissipativos.

Suponhamos que $\text{Im}(\lambda) \leq 0$. Da Teoria Espectral (ver [13]), sabemos que $\sigma(-\Delta) \subseteq \mathbb{R}$.

Sobrejetividade de $\alpha I + A$. Queremos resolver o seguinte problema de existência: dado $f \in X$, existe $u \in D(A)$, tal que: $\alpha u + Au = f$. Isto é equivalente a resolvermos o problema:

$$(\alpha + i\lambda)u - i\Delta u = f \Leftrightarrow (\lambda - \alpha i)u - \Delta u = -if \Leftrightarrow u = R(\lambda - \alpha i, -\Delta)(-if).$$

Se $\text{Im}(\lambda - \alpha i) \neq 0$, então $\lambda - \alpha i \in \rho(-\Delta)$, já que $\sigma(-\Delta) \subseteq \mathbb{R}$, e, portanto, $u = R(\lambda - \alpha i, \Delta)(-if) \in D(A)$, de onde segue a sobrejetividade.

Assim, pelo Teorema de Lumer-Phillips concluímos que $-A \in G(1, 0)$ e $u(t) = S(t)u_0$ é a solução do problema (3.3).

Agora, seja $v_0 \in D(A)$ e suponhamos que $v(t)$ é uma outra solução de $u_t + Au = 0$, com $v(0) = v_0$, então:

$$\|u(t) - v(t)\| = \|S(t)u_0 - S(t)v_0\| \leq \|S(t)\| \|u_0 - v_0\| \leq \|u_0 - v_0\| \rightarrow 0$$

quando $v_0 \rightarrow u_0$. Então o problema (3.3) tem solução única, para cada dado $u_0 \in D(A)$, e existe dependência contínua com respeito ao dado inicial. Dizemos, nesse caso, que o problema (3.3) é um problema *bem posto*.

3.4 Equações Lineares Não Homogêneas

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, de classe C_0 , $u_0 \in X$ e consideremos $f : [t_0, T] \rightarrow X$, uma função dada. Investigaremos a existência de solução para o problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(t), t > t_0 \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Definição 3.1 Uma função $u : [t_0, T] \rightarrow X$ é dita uma **solução forte** de (3.9) em $[t_0, T]$, se u é uma função contínua em $[t_0, T]$, continuamente diferenciável em (t_0, T) , $u(t) \in D(A)$ e satisfazendo (3.9) em (t_0, T) .

Proposição 3.1 Se $f \in L^1(t_0, T; X)$, então o problema (3.9) tem no máximo uma solução forte e esta é dada por:

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)f(s)ds. \quad (3.10)$$

Prova. Seja $u(t)$ uma solução forte de (3.9) em $[t_0, T]$ e defina $z : [t_0, T] \rightarrow X$, onde $z(s) = S(t-s)u(s)$, $t_0 \leq s \leq T$. Segue então que:

$$\begin{aligned} \frac{z(s+h) - z(s)}{h} &= \frac{1}{h} [S(t-s-h)u(s+h) - S(t-s)u(s)] \\ &= S(t-s-h) \frac{u(s+h) - u(s)}{h} + \frac{S(t-s-h) - S(t-s)}{h} u(s). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\frac{S(t-s-h) - S(t-s)}{h} = \begin{cases} S(t-s) \left[\frac{-S(-h) + I}{-h} \right], & \text{se } h < 0 \\ S(t-s-h) \left[\frac{I - S(h)}{h} \right], & \text{se } h > 0. \end{cases}$$

Assim, tomando o limite em (3.11), com $h \rightarrow 0^+$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} z(s) &= S(t-s)u_t(s) + AS(t-s)u(s) \\ &= S(t-s) [u_t(s) + Au(s)] \\ &= S(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Agora, integrando de t_0 a t , temos:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds.$$

Como $z(t) = u(t)$ e $z(t_0) = S(t-t_0)u(t_0) = S(t-t_0)u_0$, segue que:

$$u(t) = S(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds.$$

Assim esta solução forte, dada pela fórmula acima, é única. ■

Satisfeitas as hipóteses dadas em (3.9), a função $S(t-s)f(s)$ é contínua e, portanto, a fórmula (3.10) tem sentido quer u seja ou não solução forte de (3.9). Dizemos, então, que (3.10) é uma **solução generalizada** de (3.9). Assim uma solução generalizada sempre existe, mas não necessariamente é uma solução forte.

Exemplo 4 Seja $u_0 \in X$ tal que, $S(t)u_0 \notin D(A)$, para todo $t \geq 0$. Consideremos $f(t) = S(t)u_0$. Então f é contínua. Entretanto, a solução generalizada de (3.9), com $u_0 = 0 \in D(A)$, dada por:

$$u(t) = tS(t)u_0,$$

não é diferenciável e portanto não é uma solução forte.

Vejamos agora situações em que soluções generalizadas são soluções fortes.

Teorema 4.1 Seja $f : [t_0, T] \rightarrow X$ contínua e consideremos

$$v(t) = \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds. \quad (4.1)$$

Se (3.9) tem uma única solução forte, para cada $u_0 \in D(A)$, então vale os seguintes resultados :

- (i) $v(t)$ é continuamente diferenciável em (t_0, T) ,
- (ii) $v(t) \in D(A)$ para todo $t \in (t_0, T)$ e $Av(t)$ é contínua em (t_0, T) .

Prova. Suponhamos que u é uma solução forte de (3.9). Pela Proposição 3.1, temos que $u(t) = S(t-t_0)u_0 + v(t)$, daí $v(t) = u(t) - S(t-t_0)u_0$, que é a diferença de duas funções continuamente diferenciáveis, para todo $t \geq t_0$; logo v é continuamente diferenciável para todo $t \geq t_0$.

Se $u_0 \in D(A)$, então $S(t-t_0)u_0$ também está em $D(A)$ e como $u(t) \in D(A)$, pois é solução forte, segue que $v(t) \in D(A)$. Além disso,

$$Av(t) = Au(t) - AS(t-t_0)u_0 = -u_t + f(t) - \frac{d}{dt}(S(t-t_0)u_0),$$

que é contínua. Donde conclui-se (ii). ■

As condições (i) e (ii), acima, são equivalentes. De fato, se (i) é verdadeiro então para $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} v(t) &= \frac{1}{h} \left[\int_{t_0}^t S(t+h-s)f(s)ds - \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{t_0}^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds \right] \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \\ &= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \longrightarrow v'(t) - f(t) \text{ quando } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde estamos usando a continuidade de f . Assim $v(t) \in D(A)$ e $Av(t) = v'(t) - f(t)$ é contínua, o que implica (ii). Reciprocamente, admitindo (ii) deduzimos de maneira análoga que:

$$D^+v(t) = Av(t) + f(t),$$

donde $D^+v(t)$ é contínua. Portanto, $D^-v(t)$ existe e é igual a $D^+v(t)$. Assim $v(t)$ é continuamente diferenciável, de onde segue (i).

Esta equivalência entre (i) e (ii) é de grande importância para garantirmos que a solução generalizada de (3.9) é uma solução forte.

Teorema 4.2 *Se a condição (i) é verificada então a solução generalizada é solução forte para $u_0 \in D(A)$.*

Prova. Neste caso, como v é continuamente diferenciável, então pela equivalência $v(t) \in D(A)$ e se $u_0 \in D(A)$, segue que $u(t) \in D(A)$. Sabemos também que $v(t)$ e $S(t)u_0$ são diferenciáveis, e então $u(t)$ é diferenciável. Além disso,

$$\begin{aligned} Au(t) &= AS(t-t_0)u_0 + Av(t) \\ &= \frac{d}{dt} (S(t-t_0)u_0 + f(t) - \frac{dv}{dt}(t)) \\ &= f(t) - \frac{d}{dt}u(t). \end{aligned}$$

Então u satisfaz o problema (3.9). ■

Corolário 4.1 *Seja $f \in C^1([t_0, T]; X)$. Então, para cada $u_0 \in D(A,)$ existe uma única solução forte de (3.9)*

Prova. Seja $v(t)$ definida em (4.1), então, $v(t) = \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds = \int_{t_0}^t S(s)f(t-s)ds$.

Logo,

$$\begin{aligned}
v'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{t_0}^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds - \int_{t_0}^t S(s)f(t-s)ds \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{t_0}^t S(s)f(t+h-s)ds + \int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds - \int_{t_0}^t S(s)f(t-s)ds \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^t S(s)[f(t-s+h) - f(t-s)]ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds \\
&= \int_{t_0}^t S(s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(t-s+h) - f(t-s)]}{h} ds + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds \\
&= \int_{t_0}^t S(s)f'(t-s)ds + S(t)f(0) = \int_{t_0}^t S(t-s)f'(s)ds + S(t)f(0),
\end{aligned}$$

donde $v'(t)$ é contínua em (t_0, T) . Então pelo Teorema anterior, o problema (3.9) tem uma única solução forte. ■

Teorema 4.3 (i) *Se $f \in L^1(t_0, T; X)$, então a função $u(t)$ definida em (3.10) é tal que:*

(a) $u(t_0) = u_0;$

(b) $u \in C^0([t_0, T]; X)$

(c) *A aplicação*

$$\begin{aligned}
\Phi : X \times L^1(t_0, T; X) &\longrightarrow C^0([t_0, T]; X) \\
\{u_0, f\} &\longmapsto \Phi(u_0, f) = u
\end{aligned}$$

é lipschitziana, para $1 \leq p \leq \infty$.

(ii) Se $f \in L^1_{loc}(t_0, \infty; X) \cap L^p(t_0, \infty; X)$, $u \in C^0([t_0, \infty); X)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e a aplicação $\beta : t \mapsto \|S(t)\|$ está em $L^\infty(t, \infty) \cap L^1(t_0, \infty)$, então $u \in L^p(t_0, \infty; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, e a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : X \times L^p(t_0, \infty; X) &\longrightarrow L^p(t_0, \infty; X) \\ \{u_0, f\} &\longmapsto \Psi(u_0, f) = u \end{aligned}$$

é lipschitziana.

Prova. Vejamos primeiramente a demonstração de (i). O item (a) é imediato de (3.10).

Agora,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|S(t-t_0)\| \|u_0\| + \int_{t_0}^T \|S(t-s)\| \|f(s)\| ds \\ &\leq Me^{2wt} \|u_0\| + Me^{2wt} \int_{t_0}^T \|f(s)\| ds \\ &= Me^{2wt} \left[\|u_0\| + \int_{t_0}^T \|f(s)\| ds \right] < \infty, \forall t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Logo, $u([t_0, T]) \subset X$. Notemos que:

$$\begin{aligned} u(t+h) &= S(t+h-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \\ &= S(h) \left[S(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds \right] \\ &\quad - S(h) \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds + \int_{t_0}^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \\ &= S(h)u(t) - \int_{t_0}^t S(t+h-s)f(s)ds + \int_{t_0}^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \\ &= S(h)u(t) + \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$u(t+h) - u(t) = S(h)u(t) - u(t) + \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds. \quad (4.2)$$

Por outro lado, quando $h \rightarrow 0^+$, temos que:

$$S(h)u(t) - u(t) \longrightarrow 0 \text{ e } \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \longrightarrow 0.$$

Então, por (4.2), $\lim_{h \rightarrow 0^+} u(t+h) = u(t)$. Além disso,

$$\begin{aligned} u(t) - u(t-h) &= [S(t-t_0) - S(t-h-t_0)]u_0 + \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds - \int_{t_0}^{t-h} S(t-h-s)f(s)ds \\ &= S(t-h-t_0)[S(h)u_0 - u_0] + \int_{t_0}^t S(t-h-s)f(s)ds - \int_{t_0}^t S(t-h-s)f(s)ds \\ &+ \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds - \int_{t_0}^{t-h} S(t-h-s)f(s)ds \\ &= S(t-h-t_0)[S(h)u_0 - u_0] + \int_{t-h}^t S(t-h-s)f(s)ds \\ &+ \int_{t_0}^t S(t-h-s)[S(h)f(s) - f(s)]ds. \end{aligned}$$

Usando a continuidade da aplicação $\xi \mapsto S(\xi)$ e tomando o limite na última igualdade, com $h \rightarrow 0^+$, deduzimos que $\lim_{h \rightarrow 0^-} u(t+h) = u(t)$ e isto prova (b). Por outro lado:

$$\|u(t)\| \leq Me^{2wt} \left[\|u_0\|_X + \|f(s)\|_{L^1(t_0, T; X)} \right], \forall t \in [t_0, T],$$

De onde resulta:

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \|u(t)\| \leq \sup_{t_0 \leq t \leq T} Me^{2wt} \left[\|u_0\|_X + \|f(s)\|_{L^1(t_0, T; X)} \right] = Me^{2wT} \left[\|u_0\|_X + \|f(s)\|_{L^1(t_0, T; X)} \right],$$

isto é,

$$\|u\|_{C^0([t_0, T]; X)} \leq Me^{2wT} \|\{u_0, f\}\|_{X \times L^1(t_0, T; X)}.$$

Assim, a aplicação Φ satisfaz:

$$\|\Phi(u_0, f)\| \leq Me^{2wT} \|\{u_0, f\}\|_{X \times L^1(t_0, T; X)} = C \|\{u_0, f\}\|_{X \times L^1(t_0, T; X)},$$

provando (c).

Passamos agora à demonstração de (ii), a qual será feita em duas etapas, a saber: ■

1ª Etapa: $p = 1$. De (3.10), segue que:

$$\|u(t)\| \leq \|S(t - t_0)\| \|u_0\| + \int_{t_0}^t \|S(t - s)\| \|f(s)\| ds,$$

isto é,

$$\|u(t)\| \leq \beta(t - t_0) \|u_0\| + \int_{t_0}^t \beta(t - s) \|f(s)\| ds. \quad (4.3)$$

Por hipótese, sabemos que $\beta(t) \in L^1(t_0, \infty) \cap L^\infty(t_0, \infty)$ e $f \in L^1_{loc}(t_0, \infty; X) \cap L^1(t_0, \infty; X)$ e afirmamos que as funções $\alpha : t \mapsto S(t - t_0)u_0$ e $\eta : t \mapsto \int_{t_0}^t S(t - s)f(s)ds$ jazem em $L^1(t_0, \infty; X)$. De fato:

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\alpha(t)\| dt \leq \|u_0\| \int_{t_0}^{\infty} \|S(t - t_0)\| dt = \|u_0\| \int_{t_0}^{\infty} \beta(t - t_0) dt < \infty,$$

e

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\eta(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^t \|S(t - s)\| \|f(s)\| ds dt,$$

usando o Teorema de Fubinni, obtemos:

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\eta(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^t \beta(t - s) \|f(s)\| dt ds.$$

Lembrando que se $\beta \in L^\infty(t_0, \infty)$ então $\beta(t) \leq \sup_{t_0 \leq t < \infty} \text{ess } |\beta(t)| = \|\beta\|_{L^\infty(t_0, \infty)}$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \|\eta(t)\| dt &\leq \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^t \beta(t - s) \|f(s)\| dt ds \\ &\leq \|\beta\|_{L^\infty(t_0, \infty)} \int_{t_0}^{\infty} \|f(s)\| ds \\ &\leq \|\beta\|_{L^\infty(t_0, \infty)} \|f\|_{L^1(t_0, \infty; X)} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $u = \alpha + \eta \in L^1(t_0, \infty; X)$ e por (4.3), vemos que:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(t_0, \infty; X)} &\leq \|\beta\|_{L^1(t_0, \infty)} \|u_0\| + \|\beta\|_{L^\infty(t_0, \infty)} \|f\|_{L^1(t_0, \infty; X)} \\ &\leq C \left[\|u_0\| + \|f\|_{L^1(t_0, \infty; X)} \right], \end{aligned}$$

onde $C = \max \left\{ \|\beta\|_{L^1(t_0, \infty)}, \|\beta\|_{L^\infty(t_0, \infty)} \right\}$

2ª Etapa: $p = \infty$. Temos:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \beta(t - t_0) \|u_0\| + \int_{t_0}^{\infty} \beta(t - s) \|f(s)\| ds \\ &\leq \|\beta\|_{L^\infty(t_0, \infty)} \|u_0\| + \|\beta\|_{L^1(t_0, \infty)} \|f\|_{L^\infty(t_0, \infty; X)} \\ &\leq C \left[\|u_0\| + \|f\|_{L^\infty(t_0, \infty; X)} \right], \end{aligned}$$

onde a constante C é definida na 1ª Etapa.

Para os próximos resultados precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.1 *Se uma função $\varphi \in C^0([0, T]; X)$ e $\varphi'_+ \in C^0([0, T]; X)$, então $\varphi \in C^1([0, T]; X)$.*

Lema 4.2 *Se $f \in L^1(t_0, T; X)$ e f é contínua em algum $t \in (t_0, T)$, então as afirmações abaixo são equivalentes:*

(a) $u(t) \in D(A)$,

(b) $\frac{d^+}{dt}u(t) + Au(t) = f(t)$.

Prova. Sabemos que, $u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)f(s)ds$. Dado $h > 0$, de (4.2) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left[S(h)u(t) + \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - u(t) \right] \\ &= \frac{S(h)u(t) - u(t)}{h} + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Tomando limite, quando $h \rightarrow 0$, encontramos:

$$\frac{d^+}{dt}u(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u(t) - u(t)}{h} + S(0)f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u(t) - u(t)}{h} + f(t).$$

Notemos que:

$$u(t) \in D(A) \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u(t) - u(t)}{h} \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \text{ existe.}$$

Neste caso, $\frac{d^+}{dt}u(t) + Au(t) = f(t)$. ■

Teorema 4.4 *Suponhamos que $u_0 \in D(A)$ e seja $u(t)$ dada por:*

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)f(s)ds,$$

onde $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tem gerador $-A$ e $f : [t_0, T] \rightarrow X$ é uma função dada.

(i) *Se $f \in C^0([t_0, T]; D(A))$, então $u \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap C^1([t_0, T]; X)$ e u é solução do problema (3.9) e vale:*

$$u_t(t) = f(t) - S(t - t_0)Au_0 - \int_{t_0}^t S(t - s)Af(s)ds.$$

(ii) *Se $f \in C^1([t_0, T]; X)$, então $u \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap C^1([t_0, T]; X)$ e u é solução do problema (3.9) e vale:*

$$u_t(t) = S(t - t_0)[f(t_0) - Au_0] + \int_{t_0}^t S(t - s)\frac{\partial f(s)}{\partial s}ds.$$

Prova. Observemos que $C^0([t_0, T]; D(A)) \subset C^0([t_0, T]; X) \subset L^p(t_0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $C^1([t_0, T]; X) \subset C^0([t_0, T]; X)$. Logo, $f \in L^1(t_0, T; X)$ e portanto, $u \in C^0([t_0, T]; X)$. Suponhamos demonstrado que $u_t^+ \in C^0([t_0, T]; X)$, então $u \in C^1([t_0, T]; X)$ e dos Lema 3.1 e 3.2, resulta $Au(t) = -u_t(t) + f(t) \in C^0([t_0, T]; X)$. Assim, concluímos que se $u \in C^0([t_0, T]; X)$ e $Au \in C^0([t_0, T]; X)$, então $u \in C^0([t_0, T]; D(A))$.

Consideremos $\beta(t) = S(t - t_0)u_0$ e $\eta(t) = \int_{t_0}^t S(t - s)f(s)ds$. Daí, segue que:

$$u(t) = \beta(t) + \eta(t).$$

Se $u_0 \in D(A)$, então $\beta(t) \in D(A)$ e além disso,

$$\beta'(t) = -S(t - t_0)Au_0 \in X.$$

Logo, $\beta \in C^1([t_0, T]; X)$. Agora, se $f \in C^0([t_0, T]; D(A))$, afirmamos que $\eta'_+ \in C^0([t_0, T]; X)$. De fato, seja $h > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_{t_0}^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds + \int_{t_0}^t S(t-s) \frac{S(h) - I}{h} f(s)ds \\ &\longrightarrow f(t) - \int_{t_0}^t S(t-s)Af(s)ds, \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Logo, $\eta'_+(t) = f(t) - \int_{t_0}^t S(t-s)Af(s)ds \in C^0([t_0, T]; X)$. Assim,

$$u_t^+(t) = \beta'_+(t) + \eta'_+(t) = f(t) - S(t-t_0)Au_0 - \int_{t_0}^t S(t-s)Af(s)ds$$

e pelo Lema 3.1, sabemos que $u_t^+(t) = u_t(t)$. Donde fica provado o item (i). Vejamos agora a prova do item (ii).

Suponhamos que $f \in C^1([t_0, T]; X)$ e vejamos que $\eta'_+(t) \in C^0([t_0, T]; X)$. Com efeito, como acima, dado $h > 0$, temos que:

$$\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_{t_0}^{t_0+h} S(t+h-s)f(s)ds + \int_{t_0+h}^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds \right].$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} S(t+h-s)f(s)ds \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} S(t-t_0)f(t_0)$$

e fazendo a substituição $s - h = \xi$, vemos que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \left[\int_{t_0+h}^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds \right] = \\ &= \frac{1}{h} \int_{t_0}^t S(t-\xi)f(\xi+h)d\xi - \frac{1}{h} \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)ds \\ &\longrightarrow \int_{t_0}^t S(t-s) \frac{\partial f}{\partial s}(s)ds, \text{ quando } h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Assim, $\eta'_+(t) = S(t-t_0)f(t_0) + \int_{t_0}^t S(t-s)\frac{\partial f}{\partial s}(s)ds$, e daí concluí-se o resultado desejado, já que $u_t^+(t) = \beta'_+(t) + \eta'_+(t)$. ■

Corolário 4.2 *Seja $u_0 \in D(A)$,*

- (i) *Se $f \in L^1([t_0, T]; D(A))$, então $u \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap W^{1,1}([t_0, T]; X)$ e $u_t(t) + Au(t) = f(t)$, quase sempre em $[t_0, T]$;*
- (ii) *Se $f \in W^{1,1}([t_0, T]; X)$, então $u \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap C^1([t_0, T]; X)$ e u é solução forte para o problema (3.9).*

Prova. Usaremos os seguintes resultados:

- $C^0([a, b]; X)$ é denso em $L^1([a, b]; X)$
- $C^1([a, b]; X)$ é denso em $W^{1,1}([a, b]; X)$
- Se $f_n \rightarrow f$ em $L^1([a, b]; X)$, então existe um subseqüência de (f_n) que converge quase sempre em (a, b) .

Se $f \in L^1([t_0, T]; D(A))$, então, por densidade, existe uma seqüência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C^0([t_0, T]; D(A))$, tal que $\varphi_n \rightarrow f$ em $L^1([t_0, T]; D(A))$. Dado $u_0 \in D(A)$, consideremos:

$$u_n(t) = S(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t-s)\varphi_n(s)ds.$$

Pelo Teorema 3.4, item (i), temos que

$$\begin{aligned} u_n &\in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap C^1([t_0, T]; X) \\ &\subset C^0([t_0, T]; D(A)) \cap \overline{C^1([t_0, T]; X)} \\ &= C^0([t_0, T]; D(A)) \cap W^{1,1}([t_0, T]; X) \end{aligned}$$

e vale:

$$\frac{du_n}{dt}(t) = \varphi_n(t) - S(t - t_0)Au_0 - \int_{t_0}^t S(t - s)A\varphi_n(s)ds,$$

além disso, u_n é solução forte do problema:

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) & = \varphi_n(t) \\ u_n(t_0) & = u_n^0. \end{cases}$$

Vejamos que $u_n \rightarrow u$ em $W^{1,1}([t_0, T]; X)$, donde concluimos que $u \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap W^{1,1}([t_0, T]; X)$, pois $W^{1,1}([t_0, T]; X)$ é um espaço de Banach.

De fato, sabemos que $S(t)$ é contínuo e $\varphi_n \rightarrow f$ em $L^1([t_0, T]; D(A))$, daí $S(t - t_0)\varphi_n(t) \rightarrow S(t - t_0)f(t)$ em $L^1([t_0, T]; D(A))$. Pelo Teorema IV.9 (Brézis, pg 58), segue que existe uma subsequência φ_{n_k} tal que:

(a) $S(t - t_0)\varphi_{n_k}(t) \rightarrow S(t - t_0)f(t)$ quase sempre em $[t_0, T]$ e

(b) $\|S(t - t_0)\varphi_{n_k}(t)\| \leq h(x)$, $\forall k$, quase sempre em $[t_0, T]$, com $h \in L^1([t_0, T]; D(A))$.

Logo, estamos sob as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (T.C.D.L), e então, passando a subsequência se necessário, temos:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)\varphi_n(s)ds \\ &\rightarrow S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)f(s)ds = u(t) \end{aligned}$$

em $L^1([t_0, T]; D(A))$.

Agora, sabemos que A é linear e fechado, donde pelo Teorema do Gráfico Fechado que A é limitado (ou contínuo). De maneira análoga, temos que:

$$A\varphi_n(t) \rightarrow Af(t) \text{ em } L^1([t_0, T]; D(A))$$

e utilizando novamente o Teorema IV.9 (Brézis) e o T.C.D.L., temos que:

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt}(t) &= \varphi_n(t) - S(t-t_0)Au_0 - \int_{t_0}^t S(t-s)A\varphi_n(s)ds \\ &\rightarrow f(t) - S(t-t_0)Au_0 - \int_{t_0}^t S(t-s)Af(s)ds = \frac{du}{dt}(t) \end{aligned}$$

em $L^1([t_0, T]; D(A))$. Portanto, $u_n \rightarrow u$ em $W^{1,1}([t_0, T]; X)$ e além disso,

$$u_t(t) + Au(t) = f(t) \text{ quase sempre em } [t_0, T].$$

Assim, fica provado o item (i). Vejamos a prova de (ii).

Como $f \in W^{1,1}([t_0, T]; X)$ existe, por densidade, uma seqüência $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C^1([t_0, T]; X)$, tal que $\psi_n \rightarrow f$ em $W^{1,1}([t_0, T]; X)$. Consideremos $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$u_n(t) = S(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t-s)\psi_n(s)ds.$$

Então, pelo Teorema 3.4, item (ii), temos que $u_n \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap C^1([t_0, T]; X)$, u_n é solução do problema:

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) &= \psi_n(t) \\ u_n(t_0) &= u_n^0. \end{cases}$$

e satisfaz:

$$\frac{du_n}{dt}(t) = S(t-t_0)[\psi_n(t_0) - Au_0] + \int_{t_0}^t S(t-s)\frac{\partial \psi_n}{\partial s}(s)ds.$$

Como $\psi_n \rightarrow f$ em $W^{1,1}([t_0, T]; X)$, então

$$\psi_n(t) \rightarrow f(t) \text{ em } L^1([t_0, T]; X) \text{ e } \frac{\partial \psi_n}{\partial t}(t) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t) \text{ em } L^1([t_0, T]; X).$$

Assim, usando o Teoremas IV.9 (Brézis) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ em } L^1([t_0, T]; X) \text{ e } \frac{du_n}{dt}(t) \rightarrow \frac{du}{dt}(t) \text{ em } L^1([t_0, T]; X),$$

por densidade, $u_n \rightarrow u$ uniformemente e $\frac{du_n}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$ uniformemente. Além disso, como $u_n \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap C^1([t_0, T]; X)$ então $u \in C^0([t_0, T]; D(A)) \cap C^1([t_0, T]; X)$ e u é solução forte do problema (3.9). Assim fica provado o item (ii). ■

4.1 Estabilidade Exponencial

4.1.1 O Problema de Cauchy Abstrato

Nesta seção estudaremos a estabilidade exponencial da solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Iniciaremos com o problema homogêneo, isto é, com $f \equiv 0$ e investigaremos as condições necessárias para o decaimento exponencial da solução.

Teorema 4.5 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 . Se para algum $p \in [1, \infty)$, tivermos*

$$\int_0^\infty \|S(t)u_0\|^p dt < \infty \text{ para qualquer } u_0 \in X, \quad (4.5)$$

então existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$, tais que $\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}$.

Prova. *Iniciamos mostrando que (4.5) implica a limitação da função $t \mapsto \|S(t)\|$. Para isso suponhamos $\|S(t)\| \leq M_1 e^{wt}$, onde $M_1 \geq 1$ e $w \geq 0$. Se $w = 0$ não há nada a provar, pois neste caso teremos $\|S(t)\| \leq M_1$. Vamos assumir então que $w > 0$. De (4.5), segue então que $S(t)u_0 \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$, para cada $u_0 \in X$. De fato, se isto fosse falso, poderíamos determinar $u_0 \in X$, $\delta > 0$ e $t_j \rightarrow \infty$ tal que $\|S(t_j)u_0\| \geq \delta$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $t_{j+1} - t_j > w^{-1}$. Seja $\Delta_j = [t_j - w^{-1}, t_j]$, então a medida de Δ_j é dada*

por: $m(\Delta_j) = w^{-1} > 0$ e o intervalo não se sobrepõe. Por outro lado, para $t \in \Delta_j$, temos $\|S(t)u_0\| \geq \delta (M_1 e)^{-1}$ e portanto:

$$\int_0^\infty \|S(t)u_0\|^p dt \geq \sum_{j=1}^\infty \int_{\Delta_j} \|S(t)u_0\|^p dt \geq \left(\frac{\delta}{M_1 e}\right)^p \sum_{j=1}^\infty m(\Delta_j),$$

porém, como $m(\Delta_j) = \frac{1}{w} > 0$, segue que $\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{w} = \infty$, e assim

$$\int_0^\infty \|S(t)u_0\|^p dt \geq \left(\frac{\delta}{M_1 e}\right)^p \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{w} = \infty,$$

o que contradiz (4.5). Portanto, $S(t)u_0 \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$, para cada $u_0 \in X$ e pelo Teorema da Limitação Uniforme, temos que $\|S(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$.

Consideremos o operador $T : X \rightarrow L^p(\mathbb{R}^+; X)$ definido por $Tu_0 = S(t)u_0$. De (4.5), segue que T está definida em todo X .

Afirmção 4.1 T é fechado.

Vamos mostrar que se $u_n \rightarrow u_0$, $u_n \in X$ e $S(t)u_n \rightarrow y$, então $u_0 \in X$ e $y = S(t)u_0$. De fato, como X é Banach temos que $u_0 \in X$. Daí temos que:

$$\begin{aligned} \|S(t)u_n - S(t)u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^+; X)}^p &= \int_{\mathbb{R}^+} \|S(t)u_n - S(t)u_0\|_X^p dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \|S(t)(u_n - u_0)\|_X^p dt < \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+} \|S(t)\|_X^p dt < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $S(t)u_n \rightarrow S(t)u_0$ e $S(t)u_n \rightarrow y$, e usando a unicidade do limite temos $S(t)u_0 = y$.

Assim, pelo Teorema do Gráfico Fechado, T é fechado, donde S é limitada, isto é,

$$\|Tx\|_{L^p(\mathbb{R}^+; X)}^p = \int_0^\infty \|S(t)u_0\|_X^p dt \leq M_2^p \|u_0\|^p.$$

Seja $0 < \rho < M^{-1}$, com $\|S(t)\| \leq M$. Definamos $t_{u_0}(\rho)$ por:

$$t_{u_0}(\rho) = \sup \{t : \|S(s)u_0\| \geq \rho \|u_0\| \text{ para } 0 \leq s \leq t\}.$$

Sabemos que $\|S(t)u_0\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, $t_{u_0}(\rho)$ é finito e positivo para qualquer $u_0 \in X$.

Além disso,

$$\rho^p \|u_0\|^p \leq \|S(s)u_0\|^p, \text{ para } 0 \leq s \leq t_{u_0}(\rho),$$

e daí temos:

$$\int_0^{t_{u_0}(\rho)} \rho^p \|u_0\|^p ds \leq \int_0^{t_{u_0}(\rho)} \|S(s)u_0\|^p ds.$$

Como

$$\int_0^{t_{u_0}(\rho)} \rho^p \|u_0\|^p ds = \rho^p \|u_0\|^p \int_0^{t_{u_0}(\rho)} ds = \rho^p \|u_0\|^p t_{u_0}(\rho),$$

segue então que:

$$\begin{aligned} t_{u_0}(\rho) \rho^p \|u_0\|^p &\leq \int_0^{t_{u_0}(\rho)} \|S(s)u_0\|^p ds \\ &\leq \int_0^{\infty} \|S(s)u_0\|^p ds \leq M_2^p \|u_0\|^p \end{aligned}$$

e portanto, $t_{u_0}(\rho) \leq \left(\frac{M_2}{\rho}\right)^p = t_0$. Para $t > t_0$, temos:

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0\| &\leq \|S(t - t_{u_0}(\rho))u_0\| \|S(t_{u_0}(\rho))u_0\| \\ &\leq M\rho \|u_0\| \\ &\leq \beta \|u_0\|, \end{aligned}$$

onde $0 \leq \beta = M\rho < 1$. Finalmente, seja $t_1 > t_0$ fixado e consideremos $t = nt_1 + s$ com $0 \leq s \leq t_1$. Então:

$$\|S(t)\| = \|S(nt_1 + s)\| = \|S(s)\| \|S(t_1)\|^n \leq M\beta^n \leq M'e^{-\mu t},$$

onde $M' = M\beta^{-1}$ e $\mu = \frac{-1}{t_1} \log \beta > 0$.

Portanto, provamos que se $S(t)u_0 \in L^p(\mathbb{R}^+; X)$ para qualquer $u_0 \in X$ então $\|S(t)\| \leq e^{-\mu t}$ para algum $M \geq 1$ e $\mu > 0$. ■

Em geral, nem sempre existe decaimento exponencial, mesmo quando o espaço X considerado for Banach. Vejamos o seguinte exemplo. Seja f uma função mensurável em $[0, \infty)$ com a norma: $|f|_1 = \int_0^\infty e^s |f(s)| ds$ e seja E o espaço de todas as funções mensuráveis f em $[0, \infty)$, para o qual $|f|_1 < \infty$. Considere $X = E \cap L^p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$. O espaço X dotado com a norma:

$$\|f\|_X = |f|_1 + \|f\|_{L^p}$$

é um espaço de Banach. Definamos em X um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ por:

$$S(t)f(x) = f(x+t) \text{ para } t \geq 0. \quad (4.6)$$

Usando a definição, percebe-se facilmente que $\{S(t)\}$ é um semigrupo de classe C_0 .

Vejamos o seguinte:

(i) $\|S(t)\| \leq 1$

Prova.

$$\begin{aligned} \|S(t)f\| &= \int_0^\infty e^s |S(t)f(s)| ds + \int_0^\infty |S(t)f(s)|^p ds \\ \text{(a)} \quad &= \int_0^\infty e^s |f(t+s)| ds + \int_0^\infty |f(t+s)|^p ds \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \|f\| = \int_0^\infty e^s |f(s)| ds + \int_0^\infty |f(s)|^p ds.$$

Mas,

$$\int_0^\infty |f(t+s)|^p ds = \int_t^\infty |f(\xi)|^p d\xi \leq \int_0^\infty |f(\xi)|^p d\xi$$

e

$$\int_0^\infty e^s |f(t+s)| ds = \int_t^\infty e^{\xi-t} |f(\xi)| d\xi = e^{-t} \int_t^\infty e^\xi |f(\xi)| d\xi \leq \int_0^\infty e^\xi |f(\xi)| d\xi.$$

Assim, temos que $\|S(t)f\| \leq \|f\|$, para toda $f \in X$, e, portanto, tomando supremo com $\|f\| \leq 1$, obtemos que $\|S(t)\| \leq 1$.

■

(ii) $\|S(t)\| \geq 1$.

Prova. Escolhendo $f \in X$, como sendo a função característica do intervalo $[t, t + \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$, temos:

$$\|S(t)f\|_X = |S(t)f|_1 + \|S(t)f\|_{L^p},$$

mas

$$|S(t)f|_1 = \int_0^\infty e^s |f(x+ts)| ds = \int_0^\infty e^s |\chi(t+s)| ds = \int_t^{t+\varepsilon} e^s ds \longrightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ Calculemos agora a norma de f em $L^p(0, \infty)$.

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_0^\infty |f(s)|^p ds = \int_t^{t+\varepsilon} ds = \varepsilon$$

e portanto $\|f\|_{L^p} = \sqrt[p]{\varepsilon}$. Por outro lado:

$$\|S(t)f\|_{L^p}^p = \int_0^\infty |f(x+s)|^p ds = \int_t^{t+\varepsilon} ds = \|f\|_{L^p}^p.$$

Assim, como:

$$\|S(t)f\|_X = |S(t)f|_1 + \|S(t)f\|_{L^p},$$

temos que:

$$\|S(t)f\|_X = \|S(t)f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p},$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Sendo S linear e limitado, sabemos que:

$$\|S(t)\| = \inf \{C; \|S(t)f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}\}.$$

Então, concluímos que $\|S(t)\| \geq 1$. ■

De (i) e (ii) obtemos que $\|S(t)\| = 1$. Mostramos então que este semigrupo não tem decaimento exponencial.

Teorema 4.6 *Sejam $\mu > 0$ e A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $S(t)$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}$. Considere f limitada e mensurável em $[0, \infty$. Se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_0, \quad (4.7)$$

então a solução

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

com $0 \leq t \leq T$, satisfaz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -A^{-1}f_0T.$$

Prova. Como $\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}$ e A é gerador infinitesimal de $S(t)$, segue como consequência do Teorema de Hille-Yosida que $0 \in \rho(A)$ e além disso sabemos que $\|S(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Consideremos então:

$$V(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(t-s)[f(s) - f_0]ds + \int_0^t S(t-s)f_0ds = V_1(t) + V_2(t).$$

Façamos agora o limite de $V_2(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S(t-s)f_0ds = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\int_0^\xi S(\xi)f_0d\xi \right] = \int_0^\infty S(\xi)f_0d\xi,$$

e sabendo-se que $R(\lambda, A)u_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u_0dt$, segue que:

$$\int_0^\infty S(t)f_0dt = R(0, A)f_0 = (0.I - A)^{-1}f_0 = -A^{-1}f_0.$$

Resta-nos mostrar que $V_1(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos t_0 tal que para $t > t_0$

$$\|f(t) - f_0\| < \frac{\varepsilon\mu}{2M},$$

o que é garantido graças à (4.7). Além disso, sabemos que $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$. Notemos que:

$$\|V_1(t)\| \leq \int_0^{t_0} \|T(t-s)\| \|f(s) - f_0\| ds + \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| \|f(s) - f_0\| ds. \quad (4.8)$$

Vejamos uma majoração para a primeira integral do lado direito de (4.8). Temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \|T(t-s)\| \|f(s) - f_0\| ds &\leq \int_0^{t_0} \|T(t-s)\| [\|f(s)\| + \|f_0\|] ds \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int_0^{t_0} \|T(t-s)\| ds \\ &\leq 2M\|f\|_\infty \int_0^{t_0} e^{-\mu(t-s)} ds \\ &= 2M\|f\|_\infty e^{-\mu t} \int_0^{t_0} e^{\mu s} ds \\ &= 2M\|f\|_\infty \mu^{-1} e^{-\mu t} e^{\mu t_0} - 2M\|f\|_\infty \mu^{-1} e^{-\mu t} \\ &\leq 2M\|f\|_\infty \mu^{-1} e^{-\mu(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Agora, para o segundo termo a direita de (4.8), temos que:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| \|f(s) - f_0\| ds &\leq \frac{\varepsilon\mu}{2M} \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon\mu}{2M} M e^{-\mu t} \int_{t_0}^t e^{\mu s} ds \\ &= \frac{\varepsilon\mu}{2} \mu^{-1} e^{-\mu t} e^{\mu t} - \frac{\varepsilon\mu}{2} \mu^{-1} e^{-\mu t} e^{\mu t_0} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\|V_1(t)\| \leq 2M\|f\|_\infty \mu^{-1} e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $t > t_0$ suficientemente grande, de modo que, o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima, seja menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$. E assim, para t suficientemente grande, obtemos que $\|V_1(t)\| \leq \varepsilon$, completando a prova. ■

4.1.2 Um Problema Viscoelástico

Nesta seção, estudaremos a estabilidade exponencial para um sistema viscoelástico linear, ou seja, para a equação em $(x, t) \in (0, l) \times \mathbb{R}^+$,

$$u_{tt} - au_{xx} - \gamma u_{xxt} = 0, \quad (4.9)$$

com a e γ constantes positivas.

Para facilitar nosso trabalho, vamos considerar a seguinte condição de fronteira:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (4.10)$$

e também as condições iniciais,

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad \forall t > 0. \quad (4.11)$$

Com o intuito de converter o problema acima em uma equação de evolução de 1ª ordem, façamos:

$$v = u_t \quad (4.12)$$

e consideremos $\mathcal{H} = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$, onde $H_0^1(0, l)$ é o espaço de Hilbert constituído das funções $u \in H^1(0, l)$ tais que $u(0) = u(l) = 0$, e com da norma

$$\|u\| = \left(\int_0^l a |Du|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Assim, o problema (4.9)-(4.11), reduz-se ao problema de valor inicial para uma equação de evolução de 1ª ordem em \mathcal{H} :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay, \quad \forall t > 0 \\ y|_{t=0} = (u_0, u_1)^T \end{cases} \quad (4.13)$$

com

$$y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ a(\cdot)_{xx} & \gamma(\cdot)_{xx} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

e $D(A) = \{y \in \mathcal{H}; v \in H_0^1(0, l), (aDu + \gamma Dv) \in H^1(0, l)\}$.

De fato, notemos que

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$Ay = \begin{pmatrix} 0 & I \\ a(\cdot)_{xx} & \gamma(\cdot)_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + v \\ au_{xx} + \gamma v_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ au_{xx} + \gamma u_{xxt} \end{pmatrix}.$$

Logo, por (4.9), temos que

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \forall t > 0$$

e, além disso:

$$y|_{t=0} = \begin{pmatrix} u(x, 0) \\ u_t(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ u_1(x) \end{pmatrix} = (u_0(x), u_1(x))^T.$$

Finalmente observamos que:

$$Ay = \begin{pmatrix} v \\ D(aDu + \gamma Dv) \end{pmatrix}$$

e \mathcal{H} é um espaço de Hilbert, com o produto interno dado por:

$$(y, z)_{\mathcal{H}} = \int_0^l (aDu_1 \cdot Du_2 + v_1 \cdot v_2) dx,$$

onde $y = (u_1, v_1)^T$ e $z = (u_2, v_2)^T$, e além disso, $D(A)$ é denso em \mathcal{H} .

Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.7 *O operador A é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contração em \mathcal{H} .*

Prova. Usaremos o Corolário 2.9 do Teorema de Lumer-Phillips, ou seja, vamos provar que:

(i) A é dissipativo e

(ii) $0 \in \rho(A)$.

De fato, dado $y = (u, v)^T \in D(A)$, usamos integração por partes e obtemos:

$$\begin{aligned} \langle Ay, y \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^l (aDu.Dv + D(aDu + \gamma Dv).v) dx = \\ &= \int_0^l aDu.Dv dx + aDu.v|_0^l - \int_0^l aDu.Dv dx + \gamma Dv.v|_0^l - \gamma \int_0^l Dv.Dv dx \\ &= -\gamma \int_0^l |Dv|^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

pois $v \in H_0^1(0, l)$. Então A é dissipativo, provando (i).

Para que $0 \in \rho(A)$, devemos mostrar que A é bijetivo de $D(A)$ em $D(A)$ e A^{-1} é limitado. Com efeito, dado $F = (f, g)^T \in \mathcal{H}$, vejamos que a equação $Ay = F$ tem uma única solução, ou seja o problema

$$v = f \in H_0^1(0, l), \quad (4.16)$$

$$D(aDu + \gamma Dv) = g \in L^2 \quad (4.17)$$

tem uma única solução $y \in D(A)$. Tomando $v = f \in H_0^1(0, l)$ e substituindo em (4.17), obtemos:

$$aD(Du) = g - \gamma D^2 f \in H^{-1}(0, l), \quad (4.18)$$

onde $H^{-1}(0, l)$ é o dual topológico de $H_0^1(0, l)$.

Usando resultados de Existência e Unicidade de Solução para problemas elípticos, podemos concluir que existe uma única solução $u \in H_0^1(0, l)$ de (4.18). Assim, obtemos uma única $y = (u, v)^T \in \mathcal{H}$, tal que $(u, v)^T \in D(A)$ e satisfazendo (4.16) e (4.17). Como A é linear limitado e bijetivo, pelo Corolário do Teorema da Aplicação Aberta, A^{-1} é limitado, ou seja,

$$\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|y\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, $0 \in \rho(A)$. E pelo Corolário 2.9, A é gerador. ■

O resultado de estabilidade exponencial para o problema (4.9)-(4.11), é enunciado a seguir:

Teorema 4.8 *O semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ gerado por A é exponencialmente estável, isto é, existe $M \geq 0$ e $\alpha > 0$, tal que:*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}.$$

Na demonstração deste teorema, utilizaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.9 (Gearhart, cf. [15]) *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de contrações de classe C_0 em um espaço de Hilbert. Então $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável, se e somente, se*

(i) $i\mathbb{R} = \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A),$

(ii) $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty.$

Prova do Teorema 3.8. Para mostrar (i) é suficiente considerar $\beta \neq 0$, pois sendo A é gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, então $0 \in \rho(A)$. Suponhamos que (i) não vale, ou seja, existe $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $i\beta \in \sigma(A)$. Assim, existe $w = (u, v)^T \in \mathcal{H}$, "não nulo", tal que $Aw = i\beta w$, isto é:

$$\begin{pmatrix} v \\ D(aDu + \gamma Dv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\beta u \\ i\beta v \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Substituindo $v = i\beta u$, obtemos que

$$aD^2u + i\beta\gamma Du = i\beta i\beta u = -\beta^2 u.$$

Isto, implica que:

$$aD^2u = -\beta^2 u \quad (4.20)$$

e

$$\beta\gamma Du = 0. \quad (4.21)$$

Donde, $Du = 0$, e então $D^2u = 0$. Logo, por (4.20), temos que $u = 0$. Como $v = i\beta u$, temos que $v = 0$. Assim, $w = (0, 0)^T$, o que é um absurdo, pois $w \neq 0$. Portanto $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.

Para concluirmos a demonstração, suponhamos que (ii) seja falso, isto é

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| = \infty.$$

Afirmamos que, existe $\beta_n \in \mathbb{R}$, $|\beta_n| \rightarrow \infty$ e $y_n \in D(A)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, tal que:

$$\|(i\beta_n I - A)y_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \quad (4.22)$$

De fato, como $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| = \infty$, existe $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $z_n \in \mathcal{H}$, tal que

$$\|(i\beta_n I - A)^{-1} z_n\| \geq n \|z_n\|, \forall n > 0.$$

Do Teorema 4.9 (i), sabemos que $i\beta_n \in \rho(A)$, e então existe um único $y_n \in D(A)$, tal que:

$$i\beta_n y_n - Ay_n = z_n,$$

com $\|y_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Logo, $y_n = (i\beta_n I - A)^{-1} z_n$ e, portanto:

$$1 = \|y_n\|_{\mathcal{H}} \geq n \|i\beta_n y_n - Ay_n\|_{\mathcal{H}},$$

o que implica

$$\|(i\beta_n I - A)y_n\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto a afirmação é verdadeira. De (4.19), vemos que

$$i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l) \quad (4.23)$$

e

$$i\beta_n v_n - D(aDu_n + \gamma Dv_n) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l), \quad (4.24)$$

com $y_n = (u_n, v_n)^T$. Notemos que

$$i\beta_n y_n - Ay_n = \begin{pmatrix} i\beta_n u_n - v_n \\ i\beta_n v_n - D(aDu_n + \gamma Dv_n) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle (i\beta_n I - A)y_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^l (aD(i\beta_n u_n - v_n) \cdot Du_n + (i\beta_n v_n - D(aDu_n + \gamma Dv_n)) \cdot v_n) dx \\ &= \int_0^l ai\beta_n |Du_n|^2 dx - \int_0^l aDv_n \cdot Du_n dx + \int_0^l i\beta_n |v_n|^2 dx \\ &\quad - \int_0^l aD^2 u_n \cdot v_n dx - \int_0^l \gamma D^2 v_n \cdot v_n dx \\ &= i \left(a\beta_n \int_0^l |Du_n|^2 dx + \beta_n \int_0^l |v_n|^2 dx \right) - \int_0^l aDv_n \cdot Du_n dx \\ &\quad - \int_0^l aD^2 u_n \cdot v_n dx - \int_0^l \gamma D^2 v_n \cdot v_n dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Integrando por partes, temos que

$$- \int_0^l aD^2 u_n \cdot v_n dx = -aDu_n \cdot v_n \Big|_0^l + \int_0^l aDu_n \cdot Dv_n dx,$$

e como $v_n \in H_0^1(0, l)$, obtemos:

$$- \int_0^l aD^2 u_n \cdot v_n dx = \int_0^l aDu_n \cdot Dv_n dx. \quad (4.26)$$

Da mesma forma, temos que:

$$- \int_0^l \gamma D^2 v_n \cdot v_n dx = -\gamma Dv_n \cdot v_n \Big|_0^l + \int_0^l \gamma Dv_n \cdot Dv_n dx = \int_0^l \gamma |Dv_n|^2 dx. \quad (4.27)$$

Substituindo, (4.26) e (4.27) em (4.25), obtemos:

$$\langle (i\beta_n I - A)y_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}} = i \left(a\beta_n \int_0^l |Du_n|^2 dx + \beta_n \int_0^l |v_n|^2 dx \right) + \int_0^l \gamma |Dv_n|^2 dx$$

e então:

$$\operatorname{Re} \langle (i\beta_n I - A)y_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}} = \gamma \|Dv_n\|_{L^2(0,l)}^2. \quad (4.28)$$

Por outro lado, usando Cauchy-Schwartz, segue que:

$$|\operatorname{Re} \langle (i\beta_n I - A)y_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|(i\beta_n I - A)y_n\|_{\mathcal{H}} \|y_n\|_{\mathcal{H}} = \|(i\beta_n I - A)y_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$$

por (4.22). Donde por (4.28), $\|Dv_n\|_{L^2} \rightarrow 0$, e usando a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\|v_n\|_{L^2} \leq C \|Dv_n\|_{L^2(0,l)} \rightarrow 0$$

para algum $\dot{C} > 0$.

Dividindo (4.23) por β_n e fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que $u_n \rightarrow 0$ em $H_0^1(0, l)$. Então, $y_n \rightarrow 0$ em \mathcal{H} , o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}} = 1$.

Portanto, $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty$, provando (ii). Assim, pelo Teorema 4.9, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, gerado por A , é exponencialmente estável. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.
- [2] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.
- [3] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.
- [4] Gomes, Alvércio M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Ed. UFRJ, 2000.
- [5] Goldstein, J.; *Semigroups of Linear Operators and Applications - Oxford Mathematical Monographs*, Oxford University Press, New York, 1985.
- [6] Kavian, Otared, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.
- [7] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1989.
- [8] Kesavan, S., *Topics in Functional Analysis and Applications*, New Age International (P) Ltd Publishers, 1989.
- [9] Matos, Marivaldo P., *Integral de Bochner e Espaços $L^p(0, T; X)$* , Notas de Aula do Curso de Verão-UFPB, João Pessoa, 1998.
- [10] Matos, Marivaldo P., Ferreira, J., *Semigrupos de Operadores Lineares*, Notas de Aula do Curso de Verão-UFPB, João Pessoa, 2005.
- [11] Medeiros, Luís A., Andrade, N. G., *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, LTC, 1978.
- [12] Medeiros, Luís A., Melo, E. A., *Integral de Lebesgue*, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, 1989.
- [13] Miranda, Manoel M., *Teoria Espectral em Espaços de Hilbert*, Textos Matemáticos, IM-UFRJ, nº 28.

- [14] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [15] Souza, Shirley Maria Santos e., *Análises Matemática de um Modelo de Vibrações com Dissipação: Existência, Unicidade, Decaimento e Regularidade Escondida*, Dissertação de Mestrado-UFPB, João Pessoa-PB, 1999.
- [16] Zheng, Songmu; Liu, Zhuangyi; *Semigroups Associated with Dissipative Systems*.